

Учреждение Российской Академии Наук Физический Институт
им. П. Н. Лебедева РАН

На правах рукописи

Пилявец Олег Вадимович

**Некоторые вопросы применения
вероятностного представления в квантовой
механике и теории бозонных квантовых
каналов с памятью**

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена в *Учреждении Российской Академии Наук Физическом Институте им. П. Н. Лебедева РАН.*

Научный руководитель: *доктор физ.-мат. наук, профессор
Манько Владимир Иванович.*

Официальные оппоненты: *доктор физ.-мат. наук
Амосов Григорий Геннадьевич,
кандидат физ.-мат. наук
Андреев Владимир Андреевич.*

Ведущая организация: *Институт Прикладной Математики
им. М. В. Келдыша Российской Акаде-
мии Наук.*

Защита состоится «_____» _____ 2009 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.023.02 при *Физическом Институте РАН*, расположенном по адресу: *Москва, ул. Ленинский проспект, д. 53.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Учреждения Российской Академии Наук Физическом Институте им. П. Н. Лебедева РАН.*

Автореферат разослан «_____» _____ 2009 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физ.-мат. наук, профессор

Истомин Я. Н.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Стремление познать природу вещей привело человечество к более глубокому пониманию устройства макро- и микромира, а также их взаимосвязи к настоящему времени. В первую очередь, это привело к переосмыслению ранее известных знаний о квантовой и классической механиках, предоставляя возможность понять предельный переход от квантового поведения систем к классическому на качественно другом языке. Ряд проблем, изначально возникших при описании квантовых систем и поэтому связываемых исключительно с квантовой природой рассматриваемых объектов, оказались свойственны и самой обычной классической механике. Успех теоретических методов описания квантовых систем привёл к улучшению и экспериментальных методов измерения состояний частиц, подчиняющихся квантовым закономерностям. Как оказалось, построенный математический аппарат для описания квантовых объектов оказался более простым и интуитивно ясным с фундаментальной точки зрения, чем обычно применяющийся. Наряду с этим, некоторые важные проблемы квантовой механики, представляющие в данный момент большой интерес, удалось переформулировать на более простом для поиска математического решения языке.

На протяжении всего развития квантовой механики вследствие трудности её интуитивного восприятия неоднократно предпринимались попытки построить близкую к классической формулировку квантовой механики, не используя понятия комплексной волновой функции или матрицы плотности. Параллели между квантовой и классической картинами мира проводил ещё Дирак, который рассматривал так называемые s -числа и q -числа, первые из которых описывают классическую механику и являются обычными коммутирующими числами, а вторые не коммутируют и описывают квантовую механику, являясь с точки зрения математики некоммутирующими линейными

операторами [1]. Позже аналогичные попытки предпринял Фейнман, введя в физику понятие интегралов по траекториям [2] и Вигнер [3], который рассмотрел вещественную функцию на фазовой плоскости $W(q, p)$, содержащую в себе всю информацию о квантовой системе и являющуюся настолько максимально близким аналогом классической функции распределения $f(q, p)$, насколько это позволяет соотношение неопределённостей Гайзенберга. Интегрирование по переменной p функции Вигнера даёт функцию распределения (маргинальное распределение) по q , а интегрирование по переменной q даёт функцию распределения по p , но при этом сама функция Вигнера $W(q, p)$ может принимать отрицательные значения. Для описания квантовых систем также рассматривались и другие функции, похожие на вигнеровскую, наподобие Q -функции Хусими-Кано [4], P -функции Глаубера-Сударшана [5, 6] и других. Возможно, именно наличие соотношения неопределённостей являлось тем фактором, из-за которого построение формулировки квантовой механики в терминах обычных функций распределения вероятностей (написанных для измеримых на эксперименте величин) считалось невозможным в течение 70 лет.

В 1987г. Бертранами с целью улучшения методов измерения квантовых состояний была введена *оптическая томограмма* $\omega(X, \theta)$, имеющая смысл функции распределения координаты X квантовой частицы в зависимости от ансамбля квантовых систем, повернутых на угол θ в фазовом пространстве (q, p) (в случае одномерной модели) [7]. По своему физическому смыслу оптическая томограмма, содержащая в себе всю информацию о квантовом состоянии системы, является обратным преобразованием Радона от функции Вигнера. Таким образом, взаимосвязь между функцией Вигнера и оптической томограммой точно такая же, как и между функцией распределения массы на куске плоскости и весом всех прямых, пересекающих рассматриваемую плоскость в задаче Радона [8]. В силу математических трудностей

временная эволюция оптической томограммы — аналог уравнения Шредингера — не получена до сих пор, хотя соотношения для перехода между оптической томограммой и функцией Вигнера известны [9]. Непосредственная связь оптической томограммы с волновой функцией впервые была получена в работе [10].

В 1996–1997 гг. итало–российской группой учёных [11, 12] были опубликованы первые работы, в которых было рассмотрено обобщение понятия оптической томограммы — так называемая *симплектическая томограмма*, которая, как и оптическая томограмма, является обычной положительной функцией распределения вероятности и содержит в себе всю информацию о квантовом состоянии системы. Отличительная черта симплектической томограммы заключается в том, что в функции распределения вероятности для координаты требуется знание зависимости не только от поворота фазовой плоскости системы, но и от изменения взаимного масштаба осей q и p . Эта особенность симплектической томограммы позволила обойти некоторые математические трудности, возникшие при поиске уравнения временной эволюции для оптической томограммы, что и позволило написать данное уравнение для симплектической томограммы [11, 12]. Позже, в работе [13] было найдено обратимое преобразование между спиновой матрицей плотности и так называемой *спиновой томограммой* — положительной функцией распределения вероятности проекции спина на сфере (на n сферах — для случая системы из n частиц со спином), которая содержит в себе такую же информацию о спиновом состоянии квантовой системы, как и спиновая матрица плотности. Таким образом, в «*томографической*» формулировке квантовой механики, которая является замкнутым полноценным языком описания квантовых систем, аналогом волновой функции (или матрицы плотности, зависящей от непрерывных переменных) является симплектическая томограмма, а аналогом спиновой матрицы плотности — спиновая томограмма. Ввиду того, что и симплектическая

и спиновая томограммы являются обычными функциями распределения вероятностей, применение томографических методов к описанию квантовых систем позволяет переформулировать любую задачу квантовой механики на чисто вероятностном языке и использовать для нахождения её решения достижения аппарата теории вероятности. В частности, областями исследований, где наиболее естественно применять описанный вероятностный подход, являются задачи на исследование связи между квантовой и классической механиками, на запутанность квантовых состояний и нарушение неравенств Белла.

Другая, активно разрабатываемая на данный момент область, возникшая на стыке квантовой механики и теории информации — *квантовая теория информации*, также тесно связана с исследованием вероятностных характеристик квантовых состояний и систем, которые используются для передачи информации. С точки зрения практического применения, изучение квантовой теории информации необходимо для развития таких областей, как *квантовая криптография* (более точно — *квантовое распределение ключа*), *теория квантовых вычислений* и задача построения *квантового компьютера*. Последние предполагают использование квантовых систем как переносчиков классической или квантовой информации, при этом сами такие системы описываются математической моделью *квантового канала*.

Ввиду вышесказанного, исследование и развитие вероятностного подхода в его применении к квантовым системам, а также изучение различных вероятностных характеристик квантовых систем (в том числе — *квантовых каналов*) является актуальной задачей, представляющей научный и практический интерес.

Целью диссертационной работы является исследование явления запутанности квантовых систем с использованием томографического подхода, а также нахождение ёмкости и соотношений для достижимой скорости передачи классической информации (с помощью гомодинного и гетеродинного

измерения) по бозонному каналу с потерями и памятью. В отношении указанного канала требуется исследовать зависимость его ёмкости от параметров, в том числе запутанности между последовательными использованиями канала. Кроме задач, связанных с запутанностью, целью работы является нахождение ядра звёздочного произведения для томографических символов и матриц операторов (в координатном представлении) в классической механике, а также явное вычисление самих символов.

Научная новизна результатов, представленных в настоящем исследовании:

1. Найдены томографические символы для координаты и импульса, а также для произведения их произвольных степеней. Показано, что средние значения физических величин как в квантовых, так и в классических системах, могут быть вычислены одним и тем же способом, а именно — с помощью коммутативного ядра звёздочного произведения классических символов. Также, найдены в явной проинтегрированной форме классические ядра звёздочного произведения для томографических символов и матриц операторов в координатном представлении.
2. Показано, что эволюция когерентного состояния в системе с гамильтонианом, соответствующим двумерному квантовому осциллятору с переменной частотой и трением, не запутывает изначально сепарабельное состояние и не делает сепарабельным изначально запутанное. В качестве сепарабельного состояния рассмотрен пример когерентного состояния, а в качестве запутанного — состояние с волновой функцией

$$\Psi(q_1, q_2) = N e^{-Aq_1^2 - Bq_2^2 + Cq_1q_2}.$$

Получено, что наличие дополнительного перекрёстного члена в гамильтониане, содержащего произведение операторов координат, в вышеука-

занных случаях может приводить к переходу сепарабельного состояния в запутанное, а запутанного — в сепарабельное.

3. Получены общие формулы для томографической вероятности произвольных квантовых состояний со спином 1 и $3/2$, а также состояний системы двух спинов $1/2$. Также построены и описаны графики томографических характеристик некоторых квантовых состояний указанных систем. На примере состояния Вернера системы двух спинов $1/2$ продемонстрировано отсутствие качественных изменений поведения томографических характеристик состояния при переходах между сепарабельными и запутанными состояниями.
4. Найдены соотношения, позволяющие вычислять достижимую скорость передачи данных по бозонному каналу с потерями и памятью, если используется гомодинный или гетеродинный способ измерения состояний на выходе канала.
5. Построен общий алгоритм нахождения ёмкостей и достижимых скоростей передачи для гауссовских каналов при наличии памяти. Данный алгоритм применён к вычислению классической ёмкости бозонного канала с потерями и памятью, что позволило написать итоговые аналитические соотношения, выражающие его ёмкость, а также нулевое и первое приближение к ёмкости. В частности, детально исследована конкретная модель памяти указанного канала, а также канал без памяти. Показано, что классическая ёмкость допускает два типа спонтанного нарушения симметрии: квадратурный и модовый. Продемонстрировано, что наличие сжатия в среде канала позволяет увеличить его ёмкость. Поскольку в общем случае запутанность между использованиями канала подразумевает сжатие, его наличие может трактоваться как спо-

собствующее пропускной способности канала. Однако, наличие прямой связи (не через сжатие) между запутанностью и увеличением классической ёмкости не обнаружено.

Практическая значимость полученных результатов: построенные томограммы спиновых состояний помогают измерять квантовые состояния в физических экспериментах. Описание эволюции системы, моделируемой квантовым осциллятором с переменной частотой, может быть использовано для объяснения нестационарного эффекта Казимира или в экспериментах по квантовой оптомеханике, разрабатываемой для сверхточных измерений. Найденный алгоритм вычисления передаточных характеристик гауссовских каналов позволяет моделировать передачу информации через экспериментально осуществляемые квантовые каналы (например, передача фотонов через оптоволокно), которые могут в приближении описываться как бозонные каналы с потерями и памятью. Последние, в частности, могут быть использованы для осуществления защищённого канала передачи информации (для квантовой криптографии), или как составляющие элементы вычислительных квантовых систем.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Соотношения для томографических символов квадратур и произведения их произвольных степеней, а также ядро звёздочного произведения томографических символов в классической механике.
2. Двумерный квантовый осциллятор с переменной частотой и трением оставляет изначально сепарабельное состояние (даваемое когерентным состоянием) сепарабельным, а запутанное — запутанным. Наличие перекрёстного члена с произведениями операторов координат может нарушать данное поведение.

3. Соотношения для спиновых томограмм частиц со спином 1, $3/2$ и двух частиц со спином $1/2$, на примере которых показывается отсутствие простой качественной связи между томографическими характеристиками спиновых систем и наличием в них запутанности состояния.
4. Алгоритм вычисления ёмкости (в том числе, в нулевом и первом приближении) для бозонного квантового канала с потерями и памятью, который показывает наличие следующих свойств ёмкости: возможность спонтанного нарушения симметрии (квадратурной и модовой) в бозонном канале с потерями и памятью, а также способность сжатия в среде канала способствовать увеличению его пропускной способности.
5. Соотношение, выражающее (через матрицы ковариации) достижимую скорость передачи классической информации через бозонный канал с потерями и памятью, если используется гомодинное или гетеродинное измерение на выходе канала.

Апробация работы. Полученные результаты были доложены на «8ой Азиатской Конференции по Квантовой Информации 2008» (25–31 августа, Сеул, Корея) и опубликованы в трудах этой конференции, а также был представлен постер на «Итальянской Конференции по Квантовой Информации 2008» (24–29 октября, Камерино, Италия). Также, результаты обсуждались на внутриинститутском семинаре в Университете Камерино (Италия).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах [A1, A2, A3, A4, A5], одна статья в сборнике трудов конференций [A6] и две работы, одна из которых — по библиографии, опубликованы в архиве Лос–Аламоса [A7, A8].

Личный вклад автора состоял в нахождении представленных аналитических результатов, построении графиков, а также в изобретении и практиче-

ской реализации в виде программного кода алгоритма, использованного для нахождения и исследования ёмкости бозонного канала с потерями и памятью.

Структура и объем диссертации. Представленная диссертация состоит из введения, обзора литературы, 5ти глав, заключения, и списка цитируемой литературы. Работа включает в себя 149 страниц, 55 иллюстраций и 95 цитирований литературы. Во введении излагаются предпосылки, послужившие выбору темы диссертации, цель проведённого исследования, оговариваются научная новизна и практическая значимость представленной работы, положения выносимые на защиту, список публикаций и личный вклад автора. В обзоре литературы излагаются основные результаты по исследуемой теме. В 1ой главе приводятся основные факты, известные на момент начала работы над диссертацией и использованные в настоящей работе. Во 2ой главе решается задача о нахождении томографических символов и ядра звёздочного произведения в классической механике, исследуется связь данного ядра с его квантовым аналогом. В 3ей главе решается задача об эволюции двумерного гауссовского состояния осциллятора с переменной частотой и трением, а также исследуется влияние эволюции на запутанность состояния. В 4ой главе исследуются томографические характеристики спиновых систем. В 5ой главе решается задача о нахождении ёмкости бозонного канала с потерями и памятью, а также задача о вычислении достижимой скорости передачи при гомодинном и гетеродинном измерении состояния на выходе канала.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, а также представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе обсуждаются основные соотношения, уже известные на момент написания диссертации и использованные в ней. В частности, вводятся понятия квантайзера и деквантайзера, звёздочного произведения классических и квантовых символов (вейлевских, томографических и операторных в координатном представлении), а также ядро звёздочного произведения для квантовых символов (вейлевское и томографическое) и томографический символ единицы. Затем вводится понятие спиновой (в том числе, унитарной спиновой) томограммы, томографической энтропии и информации, приводятся соотношения для томограммы частицы со спином $1/2$. Также определяется понятие запутанности квантовых систем и приводится критерий сепарабельности двумодового гауссовского состояния. Далее определяются основные соотношения, задающие бозонный гауссовский канал с потерями и памятью, и приводится постановка задачи о вычислении его ёмкости.

Во второй главе решается задача о нахождении томографических символов координаты w_q , импульса w_p , а также произвольного их произведения. В частности, показано, что

$$w_q(X, \mu, \nu) = \frac{\pi}{2} X |X| \delta'(\mu) \delta(\nu),$$

$$w_p(X, \mu, \nu) = \frac{\pi}{2} X |X| \delta(\mu) \delta'(\nu),$$

$$w_{qp}(X, \mu, \nu) = -\frac{\pi}{6} X^2 |X| \delta'(\mu) \delta'(\nu),$$

$$w_{q^n p^m}(X, \mu, \nu) = \pi \frac{(-X)^{n+m+1}}{(n+m+1)!} \text{sign}(X) \delta^{(n)}(\mu) \delta^{(m)}(\nu), \text{ если } n, m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$w_{q^{-n} p^{-m}}(X, \mu, \nu) = -\frac{\pi}{2} \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\nu^{m-1}}{(m-1)!} \text{sign}(\mu) \text{sign}(\nu) \delta^{(n+m-2)}(X),$$

если $n, m = 1, 2, \dots$,

$$w_{q^{-n}p^m}(X, \mu, \nu) = -\pi \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} \text{sign}(\mu) \delta^{(m)}(\nu) \delta^{(n-m-2)}(X),$$

если $n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots, n - m \geq 2$,

$$w_{q^{-n}p^m}(X, \mu, \nu) = \frac{\pi}{2} (-1)^{n+m+1} \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} \frac{X^{m-n+1}}{(m-n+1)!} \text{sign}(\mu) \text{sign}(X) \delta^{(m)}(\nu),$$

если $n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots, n - m < 2$,

$$w_{q^n p^{-m}}(X, \mu, \nu) = -\pi \frac{\nu^{m-1}}{(m-1)!} \text{sign}(\nu) \delta^{(n)}(\mu) \delta^{(m-n-2)}(X),$$

если $m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, m - n \geq 2$,

$$w_{q^n p^{-m}}(X, \mu, \nu) = \frac{\pi}{2} (-1)^{n+m+1} \frac{\nu^{m-1}}{(m-1)!} \frac{X^{n-m+1}}{(n-m+1)!} \text{sign}(\nu) \text{sign}(X) \delta^{(n)}(\mu),$$

если $m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, m - n < 2$.

Далее доказывается, что ядро произведения томографических символов в классической механике (в многомерном случае) имеет вид:

$$\begin{aligned} & K \left(X_1, \dots, X_N, \mu_1, \dots, \mu_N, \nu_1, \dots, \nu_N, X_{11}, \dots, X_{1N}, \mu_{11}, \dots, \mu_{1N}, \nu_{11}, \dots, \nu_{1N}, \right. \\ & \left. X_{21}, \dots, X_{2N}, \mu_{21}, \dots, \mu_{2N}, \nu_{21}, \dots, \nu_{2N} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \prod_{k=1}^N \exp \left\{ i \left(X_{1k} + X_{2k} - X_k \frac{\nu_{1k} + \nu_{2k}}{\nu_k} \right) \right\} \\ & \times \delta(\nu_k(\mu_{1k} + \mu_{2k}) - \mu_k(\nu_{1k} + \nu_{2k})), \end{aligned} \quad (1)$$

где ν_k, ν_{1k} и ν_{2k} — компоненты соответствующих векторов в N -мерном пространстве. Связь найденного ядра с его квантовым аналогом показывает, что отличие между ядрами заключается лишь в дополнительном сомножителе с экспонентой, содержащей член наподобие коммутатора:

$$\begin{aligned} & K_{\text{quant}}(X, \mu, \nu, X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) = \\ & K_{\text{classic}}(X, \mu, \nu, X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) e^{[i(\mu_2 \nu_1 - \mu_1 \nu_2)/2]}. \end{aligned}$$

Результаты второй главы опубликованы в работе [А3].

В третьей главе была найдена эволюция запутанности изначально сепарабельного и изначально запутанного состояния в системе, эволюционирующей как двумерный квантовый осциллятор с трением и переменной частотой, то есть определяемой гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2}e^{-\gamma t} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2}e^{\gamma t}\omega^2(t) (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2), \quad (2)$$

Указанная задача представляет интерес в квантовой оптике в связи с таким физическим явлением, как нестационарный эффект Казимира (см. работы [14–17]), связанный с генерацией сжатого света полостью резонатора с движущимися границами [15]. Впервые уравнение Шредингера для рассматриваемой системы — осциллятора с переменной частотой — было решено Хусими [18]. Трение в квантовой механике может быть учтено с помощью специфических гамильтонианов, зависящих от времени (см. [19, 20]), что и используется в данной работе для описания трения в квантовой системе.

В качестве сепарабельного состояния было рассмотрено когерентное состояние осциллятора, а в качестве запутанного — гауссовское состояние, содержащее перекрёстный член с произведением координат в экспоненте волновой функции:

$$\Psi(q_1, q_2) = Ne^{-Aq_1^2 - Bq_2^2 + Cq_1q_2}, \quad (3)$$

где A, B и C — некоторые постоянные, а N — коэффициент нормировки. Показано, что в процессе эволюции изначально сепарабельное состояние остаётся сепарабельным, а изначально запутанное — остаётся запутанным.

Также был рассмотрен пример квантовой системы с квадратичным гамильтонианом, содержащим член с перекрёстным произведением операторов координат:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}e^{-\gamma t} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2}e^{\gamma t}\omega^2(t) (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2) + \beta e^{\gamma t}\hat{q}_1\hat{q}_2, \quad (4)$$

который, как было показано в работе, может приводить к переходу сепарабельного состояния в запутанное, а запутанного — в сепарабельное. Результаты третьей главы опубликованы в работе [A1].

В четвёртой главе были вычислены спиновые томограммы произвольных состояний частиц со спином 1, $3/2$ и двух частиц со спином $1/2$. В частности, было показано, что компоненты томограммы частицы со спином 1 даются соотношениями (в данной формуле и далее нумерация компонент матрицы плотности в направлении сверху вниз и слева направо идёт от максимальной проекции к минимальной):

$$\begin{aligned}\omega^{(1)}(1, \alpha, \beta) &= \rho_{1,1}^{(1)} \cos^4 \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \rho_{0,0}^{(1)} \sin^2 \beta + \rho_{-1,-1}^{(1)} \sin^4 \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \beta \operatorname{Re} \left(\rho_{1,-1}^{(1)} e^{2i\alpha} \right) + \\ &\quad + \sqrt{2} \sin \beta \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{1,0}^{(1)} e^{i\alpha} \right) + \sin^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{0,-1}^{(1)} e^{i\alpha} \right) \right), \\ \omega^{(1)}(0, \alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \rho_{1,1}^{(1)} \sin^2 \beta + \rho_{0,0}^{(1)} \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \rho_{-1,-1}^{(1)} \sin^2 \beta - \sin^2 \beta \operatorname{Re} \left(\rho_{1,-1}^{(1)} e^{2i\alpha} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\beta) \left(\operatorname{Re} \left(\rho_{1,0}^{(1)} e^{i\alpha} \right) - \operatorname{Re} \left(\rho_{0,-1}^{(1)} e^{i\alpha} \right) \right), \\ \omega^{(1)}(-1, \alpha, \beta) &= \rho_{1,1}^{(1)} \sin^4 \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \rho_{0,0}^{(1)} \sin^2 \beta + \rho_{-1,-1}^{(1)} \cos^4 \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \beta \operatorname{Re} \left(\rho_{1,-1}^{(1)} e^{2i\alpha} \right) - \\ &\quad - \sqrt{2} \sin \beta \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{1,0}^{(1)} e^{i\alpha} \right) + \cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{0,-1}^{(1)} e^{i\alpha} \right) \right),\end{aligned}$$

где эйлеровы углы α, β, γ — те, что входят в D -функцию Вигнера, которая может быть представлена как [21]

$$D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im'\gamma} d_{m'm}^{(j)}(\beta) e^{im\alpha}.$$

Спиновая томограмма для частицы со спином $3/2$ даётся соотношениями:

$$\begin{aligned}\omega^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta) &= \rho_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \cos^6 \frac{\beta}{2} + 3\rho_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^4 \frac{\beta}{2} + 3\rho_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^4 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \rho_{-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^6 \frac{\beta}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \sin^3 \beta \left(3 \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{3i\alpha} \right) \right) + \\ &\quad + \sqrt{3} \sin \beta \left(\cos^4 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \sin^4 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \beta \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) + \sin^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta) &= 3\rho_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^4 \frac{\beta}{2} + \rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \cos^2 \frac{\beta}{2} (1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2})^2 + \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} (1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2})^2 + \\
&+ 3\rho_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^4 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + 2 \sin \beta (1 - \frac{9}{8} \sin^2 \beta) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) - \frac{3}{4} \sin^3 \beta \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{3i\alpha} \right) - \\
&- \sqrt{3} \sin \beta \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} (1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2}) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \sin^2 \frac{\beta}{2} (1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2}) \operatorname{Re} \left(\rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) \right) + \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \beta \left((1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2}) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) + (1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2}) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) \right), \\
\omega^{(\frac{3}{2})}(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta) &= 3\rho_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^4 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} (1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2})^2 + \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \cos^2 \frac{\beta}{2} (1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2})^2 + \\
&+ 3\rho_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^4 \frac{\beta}{2} - 2 \sin \beta (1 - \frac{9}{8} \sin^2 \beta) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \frac{3}{4} \sin^3 \beta \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{3i\alpha} \right) + \\
&+ \sqrt{3} \sin \beta \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} (1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2}) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \cos^2 \frac{\beta}{2} (1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2}) \operatorname{Re} \left(\rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) \right) + \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \beta \left((1 - 3 \sin^2 \frac{\beta}{2}) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) + (1 - 3 \cos^2 \frac{\beta}{2}) \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) \right), \\
\omega^{(\frac{3}{2})}(-\frac{3}{2}, \alpha, \beta) &= \rho_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^6 \frac{\beta}{2} + 3\rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^4 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + 3\rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^4 \frac{\beta}{2} + \rho_{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} \cos^6 \frac{\beta}{2} - \\
&- \frac{1}{4} \sin^3 \beta \left(3 \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{3i\alpha} \right) \right) - \\
&- \sqrt{3} \sin \beta \left(\sin^4 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) + \cos^4 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{i\alpha} \right) \right) + \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \beta \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) + \cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\rho_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(\frac{3}{2})} e^{2i\alpha} \right) \right).
\end{aligned}$$

В свою очередь, томограмма системы двух спинов $1/2$, как показано в работе, имеет вид:

$$\begin{aligned}
\omega(+, +, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &= \rho_{11} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{22} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{33} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \\
&+ \rho_{44} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \sin \beta_2 \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re} (\rho_{12} e^{i\alpha_2}) + \sin \beta_1 \cos^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re} (\rho_{13} e^{i\alpha_1}) + \\
&+ \frac{1}{2} \sin \beta_1 \sin \beta_2 (\operatorname{Re} (\rho_{14} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}) + \operatorname{Re} (\rho_{23} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)})) + \\
&+ \sin \beta_1 \sin^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re} (\rho_{24} e^{i\alpha_1}) + \sin \beta_2 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re} (\rho_{34} e^{i\alpha_2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(+, -, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &= \rho_{11} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{22} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{33} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \\
&+ \rho_{44} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} - \sin \beta_2 \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re} (\rho_{12} e^{i\alpha_2}) + \sin \beta_1 \sin^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re} (\rho_{13} e^{i\alpha_1}) - \\
&- \frac{1}{2} \sin \beta_1 \sin \beta_2 (\operatorname{Re} (\rho_{14} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}) + \operatorname{Re} (\rho_{23} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)})) + \\
&+ \sin \beta_1 \cos^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re} (\rho_{24} e^{i\alpha_1}) - \sin \beta_2 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re} (\rho_{34} e^{i\alpha_2}),
\end{aligned}$$

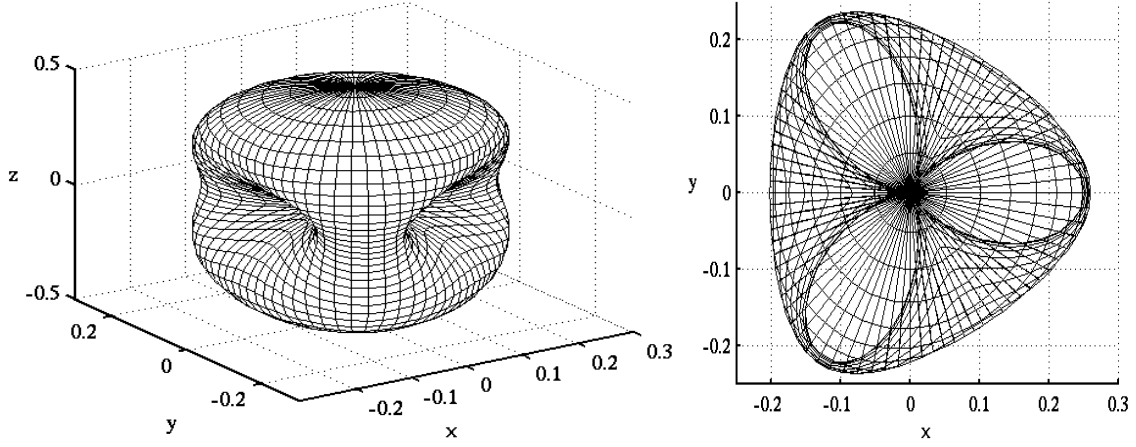


Рис. 1. Томографическая компонента $\omega_{\rho_{W(1)}}^{(\frac{3}{2})}(\frac{3}{2}, \alpha, \beta)$ для вернеровского состояния частицы со спином $3/2$ как функция на сфере и её вид в плоскости (x, y) .

$$\begin{aligned} \omega(-, +, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = & \rho_{11} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{22} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{33} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \\ & + \rho_{44} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \sin \beta_2 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{12} e^{i\alpha_2}) - \sin \beta_1 \cos^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{13} e^{i\alpha_1}) - \\ & - \frac{1}{2} \sin \beta_1 \sin \beta_2 (\operatorname{Re}(\rho_{14} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}) + \operatorname{Re}(\rho_{23} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)})) - \\ & - \sin \beta_1 \sin^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{24} e^{i\alpha_1}) + \sin \beta_2 \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{34} e^{i\alpha_2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(-, -, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = & \rho_{11} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{22} \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} + \rho_{33} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2} + \\ & + \rho_{44} \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} - \sin \beta_2 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{12} e^{i\alpha_2}) - \sin \beta_1 \sin^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{13} e^{i\alpha_1}) + \\ & + \frac{1}{2} \sin \beta_1 \sin \beta_2 (\operatorname{Re}(\rho_{14} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}) + \operatorname{Re}(\rho_{23} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)})) - \\ & - \sin \beta_1 \cos^2 \frac{\beta_2}{2} \operatorname{Re}(\rho_{24} e^{i\alpha_1}) - \sin \beta_2 \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \operatorname{Re}(\rho_{34} e^{i\alpha_2}). \end{aligned}$$

Также, в работе представлены графики томограмм для ряда спиновых состояний $|jm\rangle$ (для случая вернеровского состояния частицы со спином $3/2$ томограммы показаны на Рис. 1 и 2, томографической энтропии такого состояния — на Рис. 3, на Рис. 4 показана томографическая энтропия для вернеровского состояния двух частиц со спином $1/2$ как функция на двух сферах). На примере состояния Вернера системы двух спинов $1/2$ было продемонстрировано отсутствие качественных изменений поведения томографических характеристик состояния при переходах между сепарабельными и запутанными состояниями. Результаты четвёртой главы опубликованы в работе [A2].

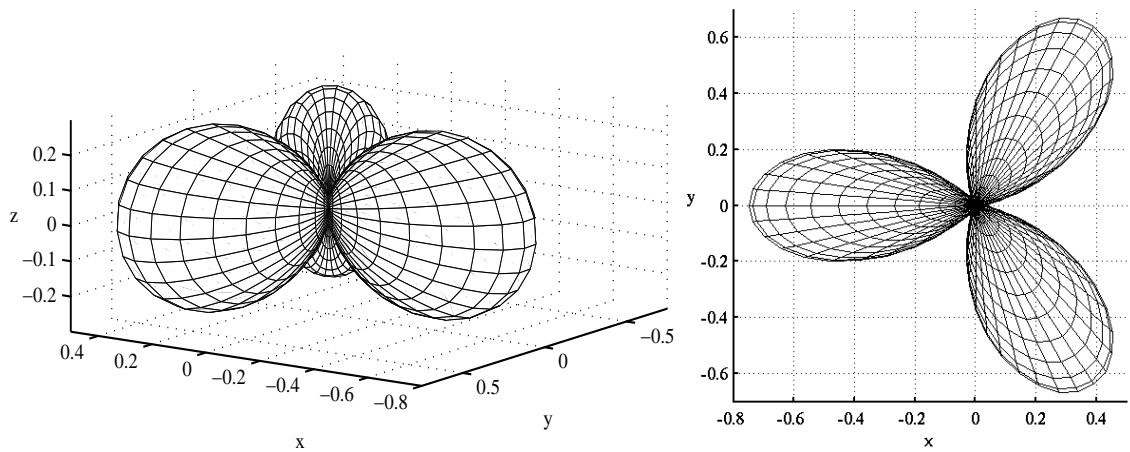


Рис. 2. Томографическая компонента $\omega_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2}, \alpha, \beta)$ для вернеровского состояния частицы со спином $3/2$ как функция на сфере и её вид в плоскости (x, y) .

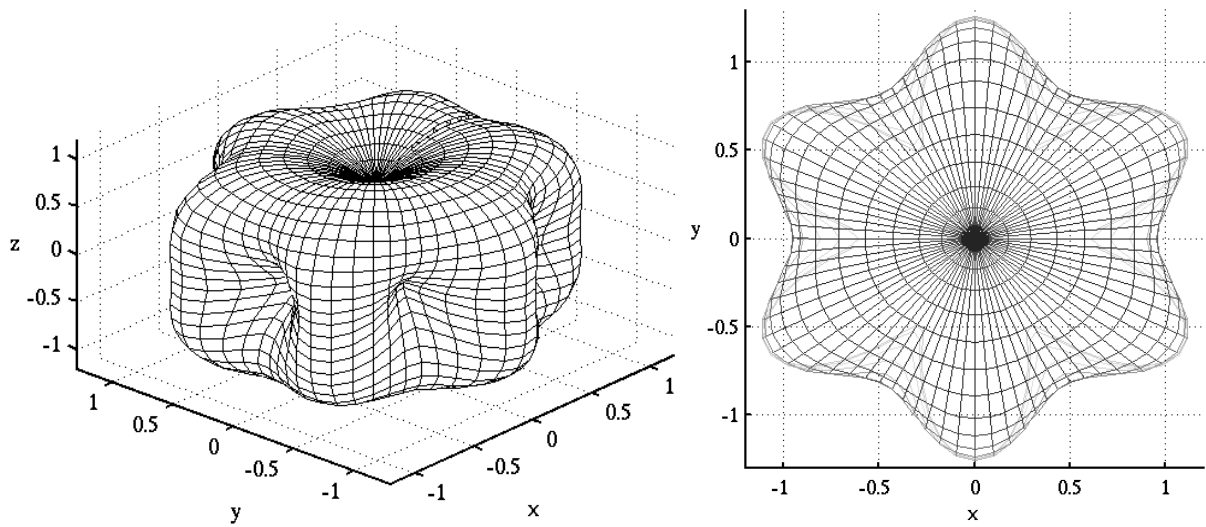


Рис. 3. Томографическая энтропия $S_{\rho_W(1)}^{(\frac{3}{2})}(\alpha, \beta)$ для частицы со спином $3/2$, находящейся в вернеровском состоянии, представленная как функция на сфере и её вид в плоскости (x, y) .

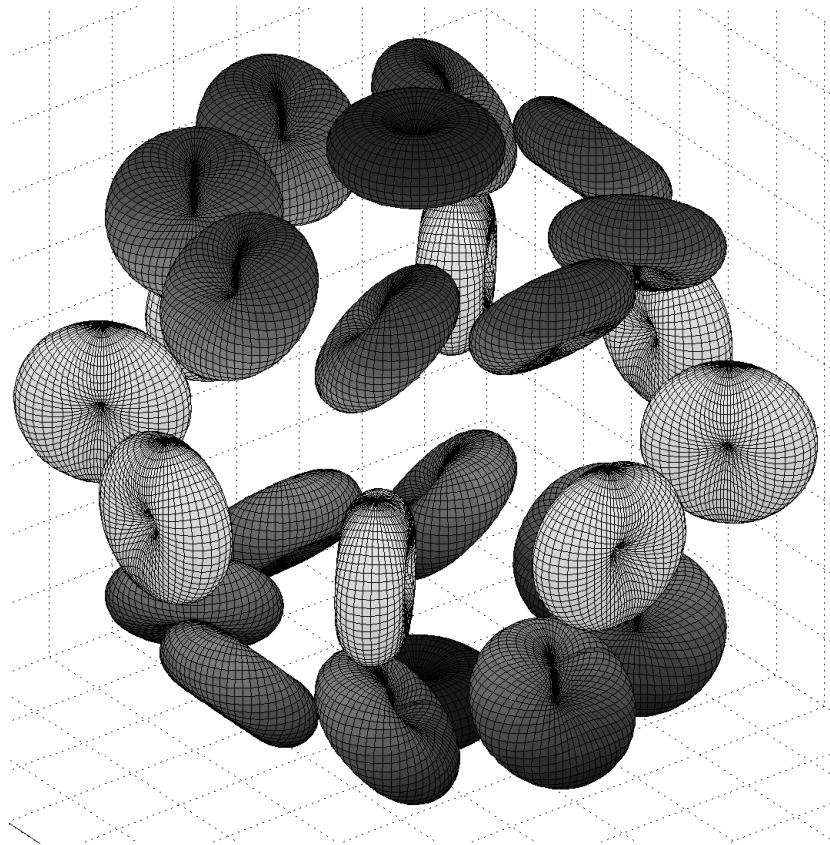


Рис. 4. Томографическая энтропия состояния Вернера для системы двух спинов $1/2$ как функция на двух сферах. Ось x направлена из рисунка направо, ось y - налево, ось z - снизу вверх.

В пятой главе был представлен алгоритм вычисления ёмкости бозонного квантового канала с потерями и памятью. Если обозначать матрицу ковариации для функции Вигнера входного состояния канала, в которое кодируется информация, через V_{in} , состояние среды — через V_{env} , выходное состояние — через V_{out} , матрицу ковариации для распределения кодируемой переменной (посредством когерентного сдвига состояния V_{in}) — через $V_{\text{cl}}/2$, а выходное состояние канала, усреднённое по кодируемой информации, — как \bar{V}_{out} , то действие канала сводится к следующим преобразованиям (см. подробности в работе [A4]):

$$V_{\text{out}} = \eta V_{\text{in}} + (1 - \eta) V_{\text{env}}, \quad (5)$$

$$\bar{V}_{\text{out}} = \eta (V_{\text{in}} + V_{\text{cl}}) + (1 - \eta) V_{\text{env}}, \quad (6)$$

где η — проницаемость делителя луча. Чтобы канал имел конечную классическую ёмкость, требуется ограничить максимальную его энергию на входе:

$$\frac{1}{2n} \text{Tr}(V_{\text{in}} + V_{\text{cl}}) = N + \frac{1}{2}, \quad (7)$$

где N — среднее число фотонов на моду (на одно использование канала).

Классическая ёмкость определяется через указанные матрицы ковариации как

$$C := \lim_{n \rightarrow \infty} C_n; \quad C_n := \frac{1}{n} \max \chi_n, \quad (8)$$

где максимум берётся по всевозможным гауссовским состояниям, а χ_n — величина χ , введённая Холево для n -модового выходного состояния:

$$\chi_n = \sum_{k=1}^n \left[g \left(\bar{\nu}_k - \frac{1}{2} \right) - g \left(\nu_k - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (9)$$

Здесь $\bar{\nu}_k$ и ν_k — симплектические собственные значения матриц \bar{V}_{out} и V_{out} , соответственно, а g -функция определяется как

$$g(v) = (v + 1) \log_2(v + 1) - v \log_2(v).$$

Таким образом, основной задачей нахождения ёмкости является максимизация (9) по всевозможным матрицам ковариации V_{in} и V_{cl} при сохранении ограничения (7), и матрицей V_{env} , фиксированной моделью. Поскольку $n \in \mathbb{N}$ — число бозонных мод (число использований канала), размерность всех представленных матриц — $2n \times 2n$, и $k = 1, \dots, n$.

Задача нахождения ёмкости была решена с помощью уравнений Каруша–Куна–Таккера, с применением разработанных методов устранения отрицательных собственных значений матриц в решении. Используя разложение g -функции в функциональный ряд, было найдено нулевое и первое приближение к ёмкости. В частности, получено, что в случае больших значений N ёмкость выражается явно:

$$C_n = g[\eta N + (1 - \eta)M_{\text{env}}] - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g[(1 - \eta)(\sqrt{e_{qk}e_{pk}} - 1/2)], \quad (10)$$

где посредством

$$M_{\text{env}} := \frac{\text{Tr } V_{\text{env}}}{2n} - \frac{1}{2} \quad (11)$$

обозначено среднее число фотонов на моду в среде канала. Данный результат обобщает ранее полученный в работе [22] для случая теплового состояния среды без сжатия. Также, в работе был полностью рассмотрен случай одного использования канала.

Найденный общий алгоритм нахождения ёмкости был применён к анализу канала с памятью, среда которого описывается матрицей вида

$$V_{\text{env}} = \left(N_{\text{env}} + \frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} e^{s\Omega} & 0 \\ 0 & e^{-s\Omega} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где Ω — симметричная матрица $n \times n$:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots\dots\dots & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Было показано, что в случае, когда

$$w := \frac{1}{2|s|} \ln \frac{\eta(2N+1) + (1-\eta)(2N_{\text{env}}+1)I_0(2s)}{\eta + (1-\eta)(2N_{\text{env}}+1)} \geq 1, \quad (13)$$

ёмкость выражается явно, согласно соотношению (10), и равна

$$C = g[\eta N + (1-\eta)M_{\text{env}}] - g[(1-\eta)N_{\text{env}}], \quad (14)$$

где (см. определение (11))

$$M_{\text{env}} = \left(N_{\text{env}} + \frac{1}{2}\right) I_0(2s) - \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Через I_0 здесь обозначена модифицированная функция Бесселя нулевого порядка первого рода.

В случае, когда неравенство (13) нарушается, ёмкость (для бесконечного числа использований канала) даётся соотношением (здесь используется приближение для одного из трансцендентных уравнений)

$$C = \left(1 - \frac{2}{\pi}\tau_3\right) \left[g\left(x - \frac{1}{2}\right) - g((1-\eta)N_{\text{env}})\right] + \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau} \left[g\left(\sqrt{x\mathcal{O}_{q\xi}} - \frac{1}{2}\right) - g\left(\sqrt{\mathcal{O}_{q\xi}\mathcal{O}_{p\xi}} - \frac{1}{2}\right)\right] d\xi,$$

где $\xi \in [0, \pi/2]$,

$$\mathcal{O}_{q\xi} = \eta\mathcal{I}_{q\xi} + (1-\eta)\mathcal{E}_{q\xi}, \quad \mathcal{E}_{q\xi} = \left(N_{\text{env}} + \frac{1}{2}\right) e^{2s \cos \xi}, \quad (16)$$

$$\mathcal{O}_{p\xi} = \frac{\eta}{4}\mathcal{I}_{q\xi}^{-1} + (1-\eta)\mathcal{E}_{p\xi}, \quad \mathcal{E}_{p\xi} = \left(N_{\text{env}} + \frac{1}{2}\right) e^{-2s \cos \xi}, \quad (17)$$

Функция $\mathcal{I}_{q\xi}$ (спектральная плотность матрицы V_{in}) находится через решение функционального уравнения

$$\left(\frac{1}{\mathcal{O}_{q\xi}} - \frac{1}{x}\right) \bar{\nu}_\xi \frac{\partial g(\bar{\nu}_\xi - 1/2)}{\partial \bar{\nu}_\xi} = \left(\frac{1}{\mathcal{O}_{q\xi}} - \frac{\mathcal{I}_{p\xi}}{\mathcal{I}_{q\xi} \mathcal{O}_{p\xi}}\right) \nu_\xi \frac{\partial g(\nu_\xi - 1/2)}{\partial \nu_\xi}, \quad (18)$$

где $\bar{\nu}_\xi = \sqrt{x \mathcal{O}_{q\xi}}$, $\nu_\xi = \sqrt{\mathcal{O}_{q\xi} \mathcal{O}_{p\xi}}$, $\mathcal{C}_{p\xi} = (x - (1 - \eta) \mathcal{E}_{p\xi}) / \eta - \mathcal{I}_{p\xi}$ и $\mathcal{I}_{p\xi} = 1 / (4 \mathcal{I}_{q\xi})$.

Решение функционального уравнения (18) в нулевом приближении даёт

$$\mathcal{I}_{q\xi}^{(0)} = \frac{\sqrt{\eta^2 + 16x(1 - \eta) \mathcal{E}_{p\xi}} - \eta}{8(1 - \eta) \mathcal{E}_{p\xi}},$$

а в первом приближении — $\mathcal{I}_{q\xi}^{(1)} = \mathcal{I}_{q\xi}^{(0)} + \varepsilon_{q\xi}$, где

$$\varepsilon_{q\xi} = \frac{(x - \mathcal{O}_{q\xi})(x - \mathcal{O}_{p\xi}) \mathcal{O}_{q\xi} \mathcal{I}_{q\xi}^{(0)}}{[2(\mathcal{O}_{q\xi}^2 + x^2 - (\mathcal{O}_{q\xi} + \mathcal{O}_{p\xi})x) + (12\mathcal{O}_{q\xi}^2 + 1)\nu_\xi^2] \mathcal{I}_{q\xi}^{(0)} \eta - 2(1 + 12\nu_\xi^2) \mathcal{O}_{q\xi}^2 x}, \quad (19)$$

что получается при решении уравнения (18) в линейном приближении по возмущению $\varepsilon_{q\xi}$ в окрестности решения нулевого приближения, причём в разложении g -функции учитываются члены не выше квадратичного $1/\bar{\nu}^2, 1/\nu^2$. Все спектральные плотности в уравнении (19) вычисляются через нулевое приближение. Неизвестное τ (а, следовательно, и x) находится из решения трансцендентного уравнения

$$\eta \left[N + \frac{\tau_1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^\tau \mathcal{I}_{q\xi} d\xi \right] + \frac{1 - \eta}{\pi} \int_0^{\tau_2} \mathcal{E}_{p\xi} d\xi = \frac{\tau_2}{\pi} x, \quad (20)$$

где $x = \eta e^{2s \cos \tau} / 2 + (1 - \eta) \mathcal{E}_{q\tau}$ в случае (2,3,2), и $x = \eta / 2 + (1 - \eta) \mathcal{E}_{p\tau}$ в случае (2,1,2). Значения $\tau_j, j = 1, 2, 3$ приведены в сводной таблице:

	τ_1	τ_2	τ_3
(2,1,2)	τ	τ	$\pi/2$
(2,3,2)	$\pi/2$	$\pi - \tau$	τ

Последний вопрос — как выбирать правильный тип решения в вышеуказанных соотношениях: (2,3,2) или (2,1,2). Для этого нужно выразить $N = N_2$ в

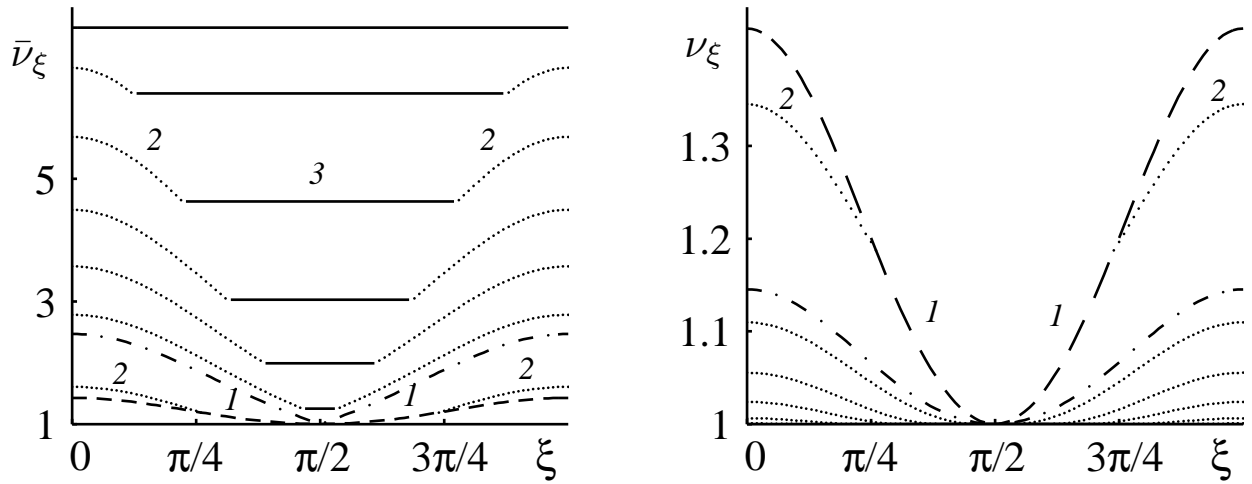


Рис. 5. Спектральные плотности $\bar{\nu}_\xi$ (слева) и ν_ξ (справа) для случая $\Omega_{ij} = \delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}$ изображены для набора параметров $N = 0; 0,05; 0,67; 1; 2; 3,5; 6; 9; 11$ (в порядке следования от нижней кривой к верхней для $\bar{\nu}_\xi$, и наоборот — для ν_ξ). Сплошные, пунктирные и штрихованные части кривых соответствуют *третьей* ($C_{q\xi}, C_{p\xi} > 0$), *второй* ($C_{q\xi} > 0, C_{p\xi} = 0$ или наоборот) и *первой* ($C_{q\xi}, C_{p\xi} = 0$) стадиям, соответственно. Штрих-пунктирная кривая соответствует тому значению параметра N , при котором все моды принадлежат второй стадии. Значения других параметров: $N_{\text{env}} = s = 1, \eta = 0,5$. Данные графики могут интерпретироваться как визуализация «квантового заполнения водой» для $\bar{\nu}_\xi$ и ν_ξ .

уравнении (20), подставив $\tau = \pi/2$. Если найденное N_2 больше или меньше N , заданного по условию задачи, имеем, соответственно, тип решения (2,3,2) или (2,1,2). Зависимость спектральных плотностей от N может интерпретироваться как «квантовое заполнение водой» [23], графики данного заполнения для $\bar{\nu}_\xi$ и ν_ξ в рассмотренной модели памяти приведены на Рис. 5.

Также, в последнем параграфе пятой главы были получены соотношения для достижимой скорости передачи информации при гетеродинном

$$F_n^{(\text{het})} = \frac{1}{2n} \max_{V_{\text{in}}, V_{\text{cl}}} \log_2 \det \left[\left(\bar{V}_{\text{out}} + \frac{1}{2} \right) \left(V_{\text{out}} + \frac{1}{2} \right)^{-1} \right]$$

И ГОМОДИННОМ

$$F_n^{(\text{hom})} = \frac{1}{2n} \max_{V_{\text{in}}, V_{\text{cl}}} \log_2 \det \left[\left(\bar{V}_{\text{out}}^{(11)} \right) \left(V_{\text{out}}^{(11)} \right)^{-1} \right].$$

измерениях на выходе канала, где максимум берётся по всевозможным матрицам $V_{\text{in}}, V_{\text{cl}}$, удовлетворяющим ограничению по энергии (7). Результаты пятой главы опубликованы в работах [A4], [A8] и [A6].

В заключении приведены основные результаты диссертации и выводы.

Заключение

Данная работа посвящена исследованию вероятностного подхода в квантовой механике, а также исследованию вероятностных характеристик квантовых каналов. В рамках данного подхода были решены задачи, которые могут быть применены к решению проблемы запутанности квантовых состояний, и к оценке передаточных характеристик гауссовских квантовых каналов.

Основными новыми результатами по гауссовским каналам являются: алгоритм вычисления классической ёмкости при наличии памяти, демонстрация наличия квадратурного и фазового спонтанного нарушения симметрии в ёмкости, аналитические соотношения для конкретной модели памяти в канале, полученные из общего алгоритма, а также соотношение, позволяющее находить гомодинную и гетеродинную достижимую скорость передачи данных по каналу.

Список публикаций

- [A1] *V. I. Man'ko, O. V. Pilyavets*. Entangled Gaussian States Of A Two-Dimensional Nonstationary Damped Oscillator // *J. Russ. Laser Res.* — 2005. — Vol. 26. — Pp. 259–272.

- [A2] *V. N. Chernega, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko et al.* Tomographic Characteristics Of Spin States // *J. Russ. Laser Res.* — 2006. — Vol. 27. — Pp. 132–166.
- [A3] *O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, O. V. Pilyavets.* Probability Representation Of Classical States // *J. Russ. Laser Res.* — 2005. — Vol. 26. — Pp. 429–444.
- [A4] *O. V. Pilyavets, V. G. Zborovskii, S. Mancini.* Lossy bosonic quantum channel with non-Markovian memory // *Phys. Rev. A.* — 2008. — Vol. 77. — P. 052324.
- [A5] *C. Lupo, O. V. Pilyavets, S. Mancini.* Capacities of Lossy Bosonic Channel with Correlated Noise // *New J. Phys.* — 2009. — Vol. 11. — P. 063023.
- [A6] *O. V. Pilyavets, V. G. Zborovskii, S. Mancini.* A Lossy Bosonic Quantum Channel with Non-Markovian memory // 8th Asian Conference on Quantum Information Science / Ed. by H. Imai. — Seoul: Korea Institute for Advanced Study, 2008. — Pp. 93–94.
- [A7] *V. I. Man'ko, O. V. Pilyavets, V. G. Zborovskii.* Probability Representation of Quantum Mechanics: Comments and Bibliography // *Los Alamos ArXiv quant-ph/0608251.* — 2006.
- [A8] *O. V. Pilyavets, C. Lupo, S. Mancini.* Methods for Estimating Capacities of Gaussian Quantum Channels // *Los Alamos ArXiv quant-ph/0907.1532.* — 2009.

Цитированная литература

- [1] *П. А. М. Дирак.* Собрание научных трудов. — Москва: Физматлит, 2002. — Т. 1: Квантовая теория (монографии, лекции).

- [2] *P. Фейнман, А. Хубс.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. — Москва: Мир, 1968.
- [3] *E. Wigner.* On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium // *Phys. Rev.* — 1932. — Vol. 40. — Pp. 749–759.
- [4] *K. Husimi.* Some formal properties of the density matrix // *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.* — 1940. — Vol. 23. — Pp. 264–314.
- [5] *R. J. Glauber.* Photon Correlations // *Phys. Rev. Lett.* — 1963. — Vol. 10. — Pp. 84–86.
- [6] *E. C. G. Sudarshan.* Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams // *Phys. Rev. Lett.* — 1963. — Vol. 10. — Pp. 277–279.
- [7] *J. Bertrand, P. Bertrand.* A tomographic approach to Wigner’s function // *Found. Phys.* — 1987. — Vol. 17. — Pp. 397–405.
- [8] *J. Radon.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // *Berichte Sachsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Mathematische-Physikalische Klasse.* — 1917. — Vol. 69. — P. 262.
- [9] *K. Vogel, H. Risken.* Determination Of Quasiprobability Distributions In Terms Of Probability Distributions For The Rotated Quadrature Phase // *Phys. Rev. A.* — 1989. — Vol. 40. — Pp. 2847–2849.
- [10] *V. I. Man’ko, R. V. Mendes.* Non-commutative Time-frequency Tomography // *Phys. Lett. A.* — 1999. — Vol. 263. — Pp. 53–61.
- [11] *S. Mancini, V. I. Man’ko, P. Tombesi.* Symplectic Tomography As Classical

- Approach To Quantum Systems // *Phys. Lett. A.* — 1996. — Vol. 213. — Pp. 1–6.
- [12] *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi.* Classical-Like Description Of Quantum Dynamics By Means Of Symplectic Tomography // *Found. Phys.* — 1997. — Vol. 27. — Pp. 801–824.
- [13] *В. И. Манько, О. В. Манько.* Томография спиновых состояний // *ЖЭТФ.* — 1997. — Т. 112. — С. 796–804.
- [14] *V. V. Dodonov.* Resonance excitation and cooling of electromagnetic modes in a cavity with an oscillating wall // *Phys. Lett. A.* — 1996. — Vol. 213. — Pp. 219–225.
- [15] *V. V. Dodonov, A. B. Klimov, V. I. Man'ko.* Generation of squeezed states in a resonator with a moving wall // *Phys. Lett. A.* — 1990. — Vol. 149. — Pp. 225–228.
- [16] *A. B. Klimov V. V. Dodonov, D. E. Nikonov.* Quantum phenomena in resonators with moving walls // *J. Math. Phys.* — 1993. — Vol. 34. — Pp. 2742–2756.
- [17] *V. V. Dodonov, A. B. Klimov.* Long-time asymptotics of a quantized electromagnetic field in a resonator with oscillating boundary // *Phys. Lett. A.* — 1992. — Vol. 167. — Pp. 309–313.
- [18] *K. Husimi.* Miscellanea in Elementary Quantum Mechanics, II // *Prog. Theor. Phys.* — 1953. — Vol. 9. — Pp. 381–402.
- [19] *P. Caldirola.* Forze non conservative nella meccanica quantistica // *Nuovo Cimento.* — 1941. — Vol. 18. — Pp. 393–400.

- [20] *E. Kanai*. On the Quantization of the Dissipative Systems // *Progr. Theor. Phys.* — 1948. — Vol. 3. — Pp. 440–442.
- [21] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Теоретическая физика. — Москва: Наука, 1989. — Т. 3: Квантовая механика.
- [22] *V. Giovannetti, S. Guha, S. Lloyd et al.* Classical Capacity of the Lossy Bosonic Channel: The Exact Solution // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 027902.
- [23] *A. S. Holevo, M. Sohma, O. Hirota*. Capacity of quantum Gaussian channels // *Phys. Rev. A.* — 1999. — Vol. 59. — Pp. 1820–1828.