

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени П.Н. ЛЕБЕДЕВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Разуева Евгения Вадимовна

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ПАРАКСИАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ

специальность 01.04.05 — оптика

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



МОСКВА — 2015

Работа выполнена в Самарском филиале Физического института им. П.Н. Лебедева Российской Академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Крутов Александр Федорович
(Самарский государственный университет)

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Сазонов Сергей Владимирович
(Научный исследовательский центр
«Курчатовский институт», Москва)

кандидат физико-математических наук,
доцент Плаченков Александр Борисович
(Московский государственный университет
информационных технологий, радиотехники
и электроники, Москва)

Ведущая организация: Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ», Москва

Защита диссертации состоится 7 декабря 2015 года в 12⁰⁰ на заседании диссертационного совета Д 002.023.03 при ФИАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, 53.

Отзывы направлять по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, 53.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в библиотеке ФИАН и на сайте www.lebedev.ru.

Автореферат разослан _____ 2015 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 002.023.03 при
ФИАН,
доктор физико-математических наук _____ М. А. Казарян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена развитию методов формирования и преобразования параксиальных световых полей с заданными характеристиками.

Актуальность темы. Параксиальное уравнение в теории распространения волн и в оптике было впервые получено М.А. Леонтовичем и В.А. Фоком в 1946 г. Оно широко используется в лазерной оптике и теории резонаторов, поскольку является хорошим приближением для описания дифракции волн, в частности, для световых пучков, генерируемых лазерами, а также для собственных мод открытых резонаторов и линзовых волноводов.

Наиболее известными семействами световых полей, эволюция которых описывается параксиальным уравнением, являются пучки Эрмита–Гаусса (HG-пучки) и Лагерра–Гаусса (LG-пучки). Изучению теоретических и экспериментальных свойств этих пучков посвящено большое число публикаций. Особое значение HG- и LG-пучков оптике связано с их структурной устойчивостью (т.е. интенсивность пучков при распространении изменяется только в масштабе). Кроме того, каждое семейство образует ортогональный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, что позволяет осуществлять разложение по ним произвольных пучков с конечной энергией.

Довольно долгое время HG- и LG-пучки оставались по сути единственными широко известными примерами структурно устойчивых световых полей, а возникающие в оптических экспериментах другие пучки гауссова типа, обладающие структурной устойчивостью, рассматривались просто как их линейные комбинации, которые не требуют отдельного изучения и не заслуживают собственного названия. Однако в последнее десятилетие интерес к поиску решений параксиального уравнения заметно возрос. Были найдены теоретически и реализованы экспериментально многие новые структурно или функционально устойчивые световые поля — спиральные пучки, пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса (HLG-пучки), гипергеометрические пучки, пучки Эйри–Гаусса и целый ряд других.

Характерным свойством большинства решений параксиального уравнения, найденных в последнее время, является присутствие в аналитической форме записи решения одного или нескольких вещественных параметров, изменение которых позволяет непрерывно трансформировать вид решения (т.е. фактически получают параметрические семейства решений). Например, HLG-пучки, как результат астигматического преобразования HG-пучков, зависят от вещественного параметра, который равен углу между осями симметрии системы цилиндрических линз и осями симметрии входного HG-пучка.

Среди практических применений полученных пучков следует отметить создание высокоэффективных вихревых дифракционных фазовых элементов для формирования лазерных световых полей априорно заданного типа (спи-

ральные пучки), использование световых полей с ненулевым угловым моментом для задач микробиологии и медицины, связанных с манипулированием и управлением движением микрочастиц (спиральные пучки, пучки Эйри), формирование самоподобных световых полей солитонного типа в нелинейных средах для задач передачи информации (HLG-пучки).

Одной из задач исследования гауссовых световых пучков является описание их преобразования при прохождении различных оптических систем. Для простейшего гауссова пучка и линейных оптических систем решение задачи хорошо известно и формулируется в матричном виде (закон *ABCD*). Для высших гауссовых мод эта задача была решена только в простейшем случае.

Изменение понятия структурной устойчивости путём добавления ещё одной степени свободы — вращения — позволяет значительно расширить класс структурно устойчивых световых полей. Световые поля, сохраняющие при распространении структуру своей интенсивности неизменной с точностью до масштаба и вращения, получили название спиральных пучков. Угол поворота пучка при распространении от плоскости перетяжки до плоскости Фурье всегда является конечной величиной. В том случае, когда этот угол равен $\pm\pi/2$, теория спиральных пучков хорошо разработана, что позволило создать высокоэффективные фазовые элементы для фокусировки лазерного излучения в априорно заданные кривые. Гораздо менее изученным является случай, когда интенсивность пучка поворачивается на больший угол. В последнее время такие пучки (спиральные пучки с более быстрым вращением) стали рассматриваться в области оптических микроманипуляций для трёхмерного перемещения частиц, а также в спектроскопии одиночных молекул для определения пространственного положения излучателей.

Для решения этих задач можно попробовать использовать и пучки, построенные на основе функции Эйри. Интенсивность пучков Эйри слабо меняется при распространении, сохраняя форму пятна максимальной интенсивности, которое смещается по параболе.

Пучки Эйри свободны от недостатков, присущих гауссовым пучкам: они обладают низкой дифракционной расходимостью и высокой стабильностью при распространении в неоднородной среде (свойство самовосстановления), что открывает широкие возможности их применения в таких прикладных областях как оптические средства связи и исследование атмосферы. Поэтому изучение пучков, построенных на основе функции Эйри, является актуальной задачей.

Цель диссертационной работы состоит в развитии теории параксиальных световых полей. В соответствии с целью решались следующие **задачи**:

1. Разработать матричный способ описания преобразования высших гауссовых мод при прохождении через линейные оптические системы.

2. Исследовать возможности построения спиральных пучков, распределение интенсивности которых вращается с большой скоростью.
3. Рассмотреть методы построения двумерных параксиальных световых пучков на основе функции Эйри.

Методы исследования. При исследовании поставленных задач применялись теоретические методы и компьютерное моделирование. В работе использованы известные результаты теории ортогональных полиномов и специальных функций математической физики. Для описания преобразования гауссовых пучков в линейных оптических системах использованы методы теории матриц, квантовой теории углового момента и функционального анализа. При разработке теории быстро вращающихся спиральных пучков используется комплексный анализ. При исследовании негауссовых пучков используются методы интегральных преобразований типа Фурье.

Научная новизна. Разработан матричный способ описания преобразования HLG-пучков при прохождении через линейные оптические системы.

Найдено интегральное представление спиральных пучков, интенсивность которых в зоне Френеля поворачивается на угол $\pm n\pi/2$, где n — целое число, $n > 1$.

Показано, что существует двумерное световое поле, зависящее от двух непрерывных параметров и названное три-Эйри пучком, Фурье-образ которого обладает кубической фазой и радиальной интенсивностью с убыванием на бесконечности как $\exp(-r^3)$.

Теоретическая и практическая значимость. Матричный подход, использованный в главе 1 при описании преобразования HLG-пучков в линейных оптических системах, позволяет обобщить известный закон $ABCD$ для высших гауссовых мод. Поскольку семейство HLG-пучков с фиксированным параметром обладает свойством полноты и ортогональности в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, этот результат может быть использован для нахождения преобразования произвольного светового поля с конечной энергией при прохождении через линейные оптические системы. Данное обстоятельство имеет практическое значение: вычисление интегральных преобразований высших гауссовых мод требует существенно больше компьютерных ресурсов, чем алгебраические операции с матрицами.

Полученные в главе 2 формулы позволяют строить спиральные пучки с произвольными целочисленными значениями параметра вращения. Предложенное интегральное преобразование более предпочтительно при построении спиральных пучков с заданным распределением интенсивности, чем известное ранее представление в виде бесконечного ряда LG-мод. В настоящее время изучается возможность использования таких пучков для определения трёхмерного положения микрочастиц и пространственных манипуляций ими.

Три-Эйри пучки, полученные и исследованные в главе 3, уже сейчас находят применение при проектировании и создании трёхмерных оптических ловушек и в задачах зондирования.

Достоверность теоретических результатов полученных в диссертационной работе, подтверждается тем, что, с одной стороны, теоретические построения основаны на современных представлениях по дифракции и распространению волновых полей и, с другой стороны, хорошим согласием результатов расчетов с экспериментами.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международной конференции по оптоэлектронике и лазерам CAOL'2005 (Ялта, 2005); на 8-й конференции по лазерам и оптоволоконным сетям LFNМ'2006 (Харьков, 2006); на научной сессии МИФИ «Фотоника и информационная оптика» (Москва, 2010); на конференции APCOM-2011 Workshop (Москва–Самара, 2011); на международных конференциях «Diffraction Days» (Санкт-Петербург) в 2011, 2012 и 2014 гг.

Личный вклад и публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ и получено 3 свидетельства о регистрации программ. В диссертации представлены только те результаты, в получение которых автор внёс определяющий вклад.

На защиту выносятся следующие **основные положения**:

1. Преобразование пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса в линейных оптических системах может быть сформулировано в терминах операторов поворота в трёхмерном пространстве и позволяет провести обобщение закона *ABCD*.
2. Понятие «плоскость перетяжки» можно определить для астигматического гауссова пучка. В плоскости перетяжки астигматического гауссова пучка площадь светового пятна принимает минимальное значение, а дефокусировка пучка равна нулю.
3. Спиральные пучки, распределение интенсивности которых при распространении поворачивается на угол $\pm n\pi/2$ (n — целое число, $n > 1$), могут быть представлены в виде двумерного преобразования Фурье от произведения гауссовой функции на целую аналитическую функцию со специально подобранным аргументом.
4. Существует двумерное световое поле в виде произведения трёх пучков Эйри, Фурье-образ которого обладает кубической фазой и радиально симметричной интенсивностью с супергауссовым убыванием.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Общий объём 104 страницы, в том числе 20 рисунков. Библиография содержит 84 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В работе рассматриваются параксиальные световые поля, которые являются решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial \ell} = 0.$$

Здесь k — волновое число, ℓ — переменная распространения и x, y — поперечные координаты.

Если в плоскости $\ell = 0$ задано распределение комплексной амплитуды $F_0(\mathbf{r})$, обладающее конечной энергией, то дальнейшая эволюция поля F выражается через начальное распределение F_0 с помощью преобразования Френеля:

$$F(\mathbf{r}, \ell) = \mathbf{F}\mathbf{R}_\ell[F_0(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi i \ell} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2\ell} |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^2\right) F_0(\boldsymbol{\rho}) d^2 \boldsymbol{\rho},$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$ и $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta)$ — двумерные векторы.

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цель и задачи исследования, указана научная новизна, приведены основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** исследовано преобразование HLG-пучков в оптических системах с астигматизмом общего вида.

В § 1 приведён краткий обзор известных результатов по матричному описанию преобразования гауссовых пучков в линейных оптических системах на основе интеграла Коллинза:

$$F(\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi i \sqrt{\det \mathbf{B}}} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{ik}{2} \left[\langle \boldsymbol{\rho}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\rho} \rangle + \langle \mathbf{r}, \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{r} \rangle - 2 \langle \mathbf{r}, \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\rho} \rangle \right]\right) F_0(\boldsymbol{\rho}) d^2 \boldsymbol{\rho}, \quad (1)$$

где $\langle \bullet, \bullet \rangle$ — скалярное произведение векторов.

Матрица $\mathbf{M}$ оптической системы состоит из четырёх блоков — (2×2) -матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{B}^\top &= \mathbf{B}\mathbf{A}^\top, & \mathbf{C}\mathbf{D}^\top &= \mathbf{D}\mathbf{C}^\top, & \mathbf{A}\mathbf{D}^\top - \mathbf{B}\mathbf{C}^\top &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{A}^\top \mathbf{C} &= \mathbf{C}^\top \mathbf{A}, & \mathbf{B}^\top \mathbf{D} &= \mathbf{D}^\top \mathbf{B}, & \mathbf{A}^\top \mathbf{D} - \mathbf{C}^\top \mathbf{B} &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Здесь индекс $\top$ означает транспонирование матрицы, $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Если определить матрицу комплексного параметра $\mathbf{Q}$, которая объединяет две вещественные матрицы — матрицу кривизны волнового фронта $\mathbf{R}$ и матрицу ширины пучка $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{Q}^{-1} = 2\mathbf{R}^{-1} + \frac{i}{k} \mathbf{w}^{-2}, \quad (2)$$

то результат преобразования астигматического гауссова пучка оптической системой с матрицей $\mathbf{M}$ можно записать в виде:

$$F_0(\mathbf{r}) = \exp\left(\frac{ik}{2} \langle \mathbf{r}, \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{r} \rangle\right), \quad F(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{A} + \mathbf{BQ}_0^{-1})}} \exp\left(\frac{ik}{2} \langle \mathbf{r}, \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r} \rangle\right),$$

где матрица комплексного параметра $\mathbf{Q}_0$ преобразуется согласно тензорному закону $ABCD$:

$$\mathbf{Q}_0 \rightarrow \mathbf{Q} = (\mathbf{AQ}_0 + \mathbf{B})(\mathbf{CQ}_0 + \mathbf{D})^{-1}. \quad (3)$$

Известно, что интеграл Коллинза можно свести к интегралу Фурье с астигматическим экспоненциальным множителем

$$\mathcal{F}[\exp(ia\rho^2 + ib\psi(\boldsymbol{\rho}, \beta))f(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}),$$

где

$$\mathcal{F}[f(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\langle \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r} \rangle) f(\boldsymbol{\rho}) d^2\boldsymbol{\rho}$$

— оператор преобразования Фурье и $\psi(\boldsymbol{\rho}, \beta) = (\xi^2 - \eta^2) \cos 2\beta + 2\xi\eta \sin 2\beta$ — функция астигматического воздействия.

В § 2 приведён краткий обзор известных результатов, относящихся к HLG-пучкам, которые возникают в результате преобразования HG-пучков в астигматических оптических системах:

$$\mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha) = \sum_{k=0}^{n+m} i^k c_k^{(n,m)}(\alpha) \mathcal{H}_{n+m-k,k}(\mathbf{r}),$$

где $c_k^{(n,m)}(\alpha)$ — некоторые полиномы от $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ степени $n + m$. В частности, результат преобразования HLG-пучков в произвольной астигматической системе имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\exp\left(\frac{ia|\boldsymbol{\rho}|^2}{2} + \frac{ib\psi(\boldsymbol{\rho}, \beta)}{2}\right) \mathcal{G}_{n,m}(\boldsymbol{\rho} | \alpha)\right](\mathbf{r}) &= \frac{(-i)^{n+m}}{\sqrt[4]{\Delta_+ \Delta_-}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{ia(1+a^2-b^2)|\mathbf{r}|^2}{2\Delta_+ \Delta_-} - \frac{ib(1+b^2-a^2)\psi(\mathbf{r}, \beta)}{2\Delta_+ \Delta_-} + i(n-m)\gamma + \right. \\ &\left. + \frac{i(n+m+1)}{2} \arg(1+b^2-a^2+2ia)\right) \mathcal{G}_{n,m}(\mathcal{R}(-\varphi)\mathcal{S}(a,b)\mathcal{R}(-\beta)\mathbf{r} | \alpha'). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\Delta_{\pm} = 1 + (a \pm b)^2$, $\mathcal{R}(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ — матрица поворота на плоскости и $\mathcal{S}(a,b) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\Delta_+} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\Delta_-} \end{pmatrix}$ — матрица масштабирования.

Параметры пучка на выходе $(\alpha', \varphi, \gamma)$ связаны с параметром пучка на входе α и параметрами оптической системы (a, b, β) соотношениями:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\alpha \frac{\sin 2\omega}{\cos 2\beta} - \operatorname{tg} 2\beta \cos 2\omega, \\ \sin 2\alpha' = \sin 2\alpha \cos 2\omega + \cos 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\omega, \\ \operatorname{ctg} 2\gamma = \operatorname{ctg} 2\omega \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta} - \operatorname{tg} 2\beta \sin 2\alpha, \end{cases}$$

где $\omega = \frac{1}{2} \arg(1 + a^2 - b^2 + 2ib)$ — вспомогательный параметр.

Как следует из (4), при фиксированных индексах (n, m) HLG-пучки образуют семейство функций, инвариантное относительно общего астигматического преобразования.

В § 3 решается задача матричного описания преобразования (4). Используя явный вид матричных элементов оператора поворота $\mathcal{D}$ и d -функций Вигнера, показано, что HLG-пучки могут быть получены как результат действия оператора $\mathcal{D}$ на HG-пучки:

$$\mathcal{G}_{l+m, l-m}(\mathbf{r} | \alpha) = \sum_{n=-l}^l d_{n,m}^l(-2\alpha) \mathcal{G}_{l+n, l-n}(\mathbf{r} | 0) = \mathcal{D}(0, -2\alpha, 0) \mathcal{G}_{l+m, l-m}(\mathbf{r} | 0),$$

а результат астигматического преобразования пучка можно интерпретировать как действие оператора $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}\left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{G}_{n,m}(\mathcal{R}(-\varphi)\mathbf{r} | \alpha') = \mathcal{D}(0, 2\omega, 2\beta) \mathcal{D}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha).$$

Явный вид оператора поворота $\mathcal{D}$ и d -функций Вигнера определяется по его действию на сферические функции.

Обобщение закона $ABCD$ для HLG-пучков предложено в § 4. Показано, что в данном случае для исходного поля $F_0(\mathbf{r}) = \mathcal{G}_{n,m}(\mathbf{r} | \alpha)$ результирующее поле имеет вид

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{A} + \mathbf{BQ}_0^{-1})}} \exp\left(-\frac{i}{2} \langle \mathbf{r}, \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} \rangle - i(n-m)\gamma\right) \mathcal{G}_{n,m}(\mathcal{R}(-\varphi)\mathbf{w}^{-1}\mathbf{r} | \alpha'),$$

Матрица комплексного параметра преобразуется по закону $ABCD$ — формула (3), а матрицы кривизны волнового фронта и ширины пучка могут быть найдены с помощью соотношения (2). Преобразование остальных параметров HLG-пучка определяется ещё одним соотношением, теперь уже между матрицами поворота в трёхмерном пространстве:

$$U\left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma, \frac{\pi}{2} - 2\alpha', 2\varphi\right) = U\left(0, 2\omega, \frac{\pi}{2} + 2\beta\right) U\left(0, \frac{\pi}{2} - 2\alpha, 0\right). \quad (5)$$

Здесь, по определению,

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}.$$

Интересно отметить, что каждая матрица в (5) содержит только параметры, относящиеся к одной группе. В правой части одна матрица содержит параметры оптической системы, другая — параметры входного пучка. Матрица в левой части зависит только от параметров пучка на выходе оптической системы: параметр γ определяет фазовый набег пучка, параметр α' отвечает за структуру интенсивности пучка и параметр ϕ определяет поворот пучка в плоскости наблюдения.

В § 5 предложена интерпретация преобразования HLG-пучков с помощью сферы Пуанкаре. Показано, что функциональное разнообразие HLG-пучков можно представить с помощью движения по единичной сфере в трёхмерном пространстве, называемой *сферой Пуанкаре* орбитального углового момента. Каждому HLG-пучку можно поставить в соответствие точку на сфере:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi \cos 2\alpha \\ \sin 2\phi \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \phi &\in [0, \pi), \\ \alpha &\in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Здесь α — параметр HLG-пучка, изменение которого от $\alpha = -\pi/4$ (южный полюс, LG-пучок) через $\alpha = 0$ (экватор, HG-пучок для разных углов поворота) до $\alpha = \pi/4$ (северный полюс, LG-пучок, комплексно сопряжённый LG-пучку южного полюса) при фиксированном ϕ соответствует движению по меридиану от одного полюса к другому. Изменение параметра ϕ при фиксированном α , т.е. вращение распределения пучка в поперечной плоскости, соответствует движению по параллели.

Ряд частных случаев преобразования HLG-пучков в линейных оптических системах рассмотрен в § 6. Найдены трансформации LG-пучка с дополнительным астигматизмом при распространении в свободном пространстве и показано, что возможен переход LG-пучка в HG-пучок в одной или двух плоскостях в зависимости от величины исходного астигматизма (см. рис. 2). Аналитически найдено преобразование Френеля эллиптических HLG-пучков и дробное преобразование Фурье HLG-пучков. Исследована взаимосвязь между

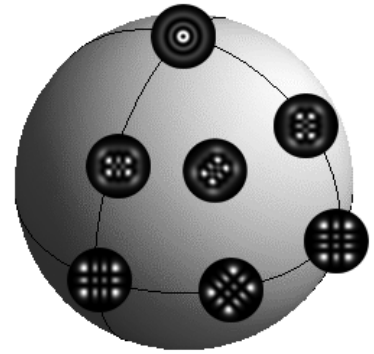


Рис. 1. Сфера Пуанкаре для пучка $\mathcal{G}_{3,2}(\mathcal{R}(2\phi)\mathbf{r}|\alpha)$. Полюсы соответствуют LG-пучкам, точки на экваторе — HG-пучку для разных углов поворота. Остальные точки на сфере соответствуют HLG-пучкам, удвоенный параметр которых равен долготе, а удвоенный угол поворота — широте точки.

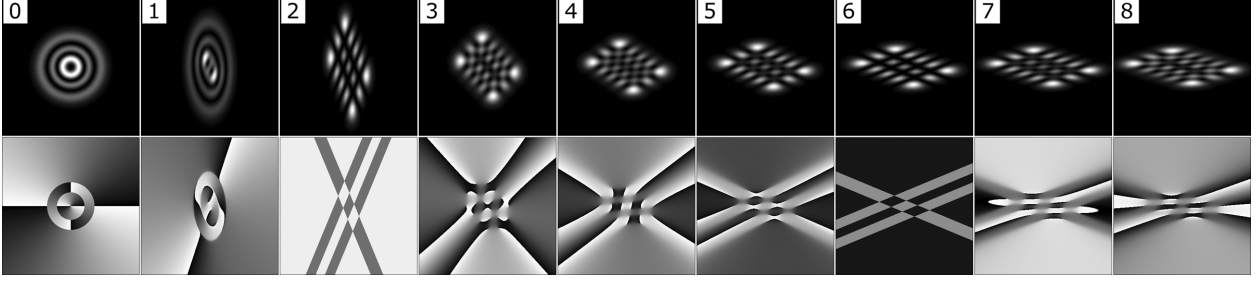


Рис. 2. Распределение интенсивности астигматического LG-пучка $\exp(-2\sqrt{2}ix^2)\mathcal{L}_{4,2}(\mathbf{r})$ при различных ℓ . Номер кадра N связан с плоскостью регистрации ℓ соотношением $\ell = \text{tg}(\pi N/16)$, т.е. значения $N = 0, 4, 8$ соответствуют исходному пучку и его преобразованиям в плоскостях Рэлея и Фурье соответственно. HG-пучок получается при $N = 2$ и $N = 6$.

преобразованием Френеля и дробным преобразованием Фурье для произвольных световых полей с конечной энергией. На основе полученных соотношений предложена процедура вычисления дробного преобразования Фурье произвольных решений параксиального уравнения.

В § 7 предложено определение понятия «плоскость 2D-перетяжки» как плоскости, в которой двумерный гауссов пучок с произвольным астигматизмом имеет минимальную площадь пятна интенсивности. Например, для пучка $\exp(-[ax^2 + 2bxy + cy^2])$, где $a > 0$, $c > 0$ и $ac > b^2$, соответствующий эллипс и ограниченная им площадь имеют вид

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1, \quad S = \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}}.$$

Показано, что при распространении в свободном пространстве кругового гауссова пучка с произвольной астигматической фазой:

$$F_0(\mathbf{r}) = \exp(-r^2 + iar^2 + ib\psi(\mathbf{r}, \beta)), \quad (6)$$

плоскость 2D-перетяжки совпадает с плоскостью, в которой зануляется дефокусировочный параметр пучка (т.е. коэффициент при r^2). Этот результат

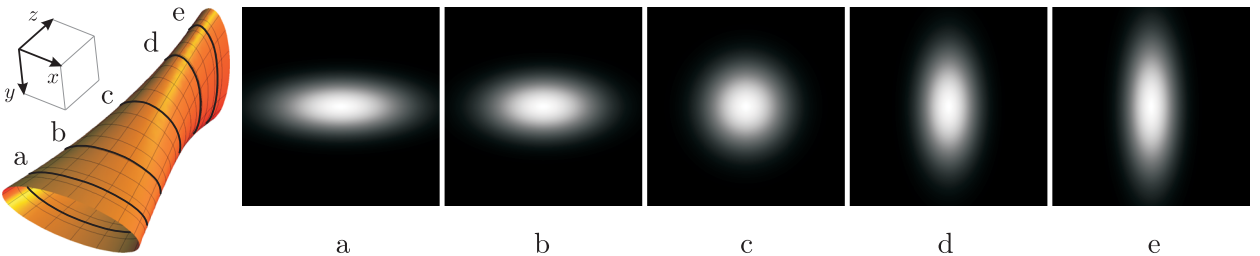


Рис. 3. (Слева) Трёхмерный профиль интенсивности астигматического гауссова пучка $F(\mathbf{r}, z)$ с начальным распределением (6) при $a = 0$, $b = 1.25$, $\beta = 0$. (Справа) Распределение интенсивности пучка на различных расстояниях z от исходной плоскости: плоскость y -перетяжки (а), плоскости локального минимума площади пучка z_- (b) и z_+ (d), плоскость $z_{\max}$ (c) и плоскость x -перетяжки (e).

остаётся справедливым и для эллиптического гауссова пучка, т.е. когда в (6) сделана замена $-r^2 \rightarrow -[ax^2 + 2bxy + cy^2]$.

Плоскость 2D-перетяжки совпадает с обычной плоскостью перетяжки, если последняя существует (например, для круговых гауссовых пучков). В общем случае, плоскость 2D-перетяжки расположена между плоскостями перетяжки по направлениям x и y и поиск её местоположения сводится к решению кубического уравнения. Рассмотрено несколько примеров, когда решение кубического уравнения имеет сравнительно простой вид (см. рис. 3).

Во **второй главе** исследуются световые поля, сохраняющие при распространении в свободном пространстве поперечную структуру своей интенсивности с точностью до масштаба и вращения. В литературе такие поля называются *спиральными пучками*. Более точно, в данной главе рассматриваются методы построения спиральных пучков, которые при распространении от исходной плоскости до плоскости Фурье поворачиваются на угол, превышающий $\pi/2$. В отличие от первой главы, где использовались безразмерные координаты, а в качестве фундаментального гауссова пучка был выбран пучок $\exp(-r^2/2)$, инвариантный к двумерному преобразованию Фурье, в данной главе удобнее использовать размерные координаты, поэтому гауссова компонента исследуемых световых полей выбрана в виде $\exp(-r^2/w_0^2)$.

Обзор известных результатов по спиральным пучкам сделан в § 1. Вращение поперечного распределения интенсивности при распространении поля задаётся функцией вращения $\theta(\ell) = \theta_0 \arctg(2\ell/kw_0^2)$ и зависит от параметра θ_0 , который задает скорость вращения пучка и может быть любым вещественным числом.

Из теории спиральных пучков следует, что световое поле является спиральным пучком с параметром вращения θ_0 , если его комплексная амплитуда в начальной плоскости может быть разложена по модам Лагерра-Гаусса в ряд следующего вида:

$$F_0(\mathbf{r}) = \sum_{n,m} c_{n,m} \mathcal{L}_{n,m} \left(\frac{\mathbf{r}}{w_0} \right). \quad (7)$$

Здесь $c_{n,m}$ — произвольные комплексные коэффициенты, n, m — пара целочисленных индексов, удовлетворяющая условиям:

$$n \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad 2n + |m| + \theta_0 m = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 \quad (8)$$

при произвольном выборе начальной пары (n_0, m_0) . Тогда

$$F(\mathbf{r}, \ell) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left(\frac{2i\ell r^2}{kw_0^4 |\sigma|^2} - i\gamma_0 \arg \sigma \right) F_0(X, Y), \quad X + iY = \frac{x + iy}{w_0 |\sigma|} \exp(i\theta_0 \arg \sigma). \quad (9)$$

Здесь $\sigma = 1 + 2i\ell/kw_0^2$, а параметр $\gamma_0 = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 + 1$ определяет величину фазового набегания при распространении пучка.

Приводится полная классификация спиральных пучков в зависимости от параметра вращения θ_0 , которая состоит из пяти случаев.

При $\theta_0 = -1$ и выборе начальной пары $(n_0, m_0) = (0, 0)$ поле (9) можно представить в виде

$$F(\mathbf{r}, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{w_0^2\sigma}\right) f\left(\frac{z}{w_0\sigma}\right), \quad (10)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ и $f(z)$ — произвольная целая аналитическая функция порядка роста $\rho_f < 2$. Представление (10) сочетает в себе простоту аналитического выражения и разнообразие возможностей построения спиральных пучков из-за произвольности функции $f(z)$. В частности, функцию $f(z)$ можно выбрать так, что интенсивность спирального пучка (10) имела форму некоторой априорно заданной плоской кривой.

Подробное исследование спиральных пучков для случая $\theta_0 = -1$ оказалось возможным потому, что именно при $\theta_0 = -1$ представление в виде двойного бесконечного функционального ряда (7) эквивалентно простому представлению (10). Более того, при таком переходе произошло упрощение условия существования решения в виде спирального пучка: если для формулы (7) абсолютную произвольность коэффициентов $c_{n,m}$ ограничивало необходимое требование сходимости функционального ряда при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, то для формулы (10) его эквивалентом является ограничение на порядок роста функции $f(z)$.

Результаты обзорного § 1 естественно поднимают следующий вопрос: возможен ли переход от бесконечной последовательности коэффициентов к одной функции, $\{c_{n,m}\} \rightarrow f(z)$, для $\theta_0 \neq -1$ и насколько получившееся представление будет проще, нежели исходный двойной ряд?

В § 2 решён частный случай поставленной задачи, когда параметр вращения является ненулевым целым числом: $\theta_0 = \pm N$, где $N \in \mathbb{N}$. (Случай $\theta_0 = 0$, т.е. распространение поля без вращения, был рассмотрен в § 1. Случаи $\theta_0 = \pm 1$, также рассмотренные в § 1, получаются в данном параграфе как следствия.) Случаи чётных и нечётных N рассмотрены по отдельности.

С помощью интегрального представления HLG-мод показано, что для полного описания спиральных пучков достаточно рассмотреть только те варианты начальных пар (n_0, m_0) , для которых $f(z)$ является целой аналитической функцией. Общий ответ на поставленную задачу следующий: спиральные пучки для пары $(n_0, m_0) = (0, 0)$ можно представить в виде

$$F_{\text{init}}(\mathbf{r}) = \exp(z\bar{z}) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-w\bar{w} + i\sqrt{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)) f(W) d \operatorname{Re} w d \operatorname{Im} w,$$

где $z = x + iy$, $w = \xi + i\eta$ и аргумент функции f определяется величиной

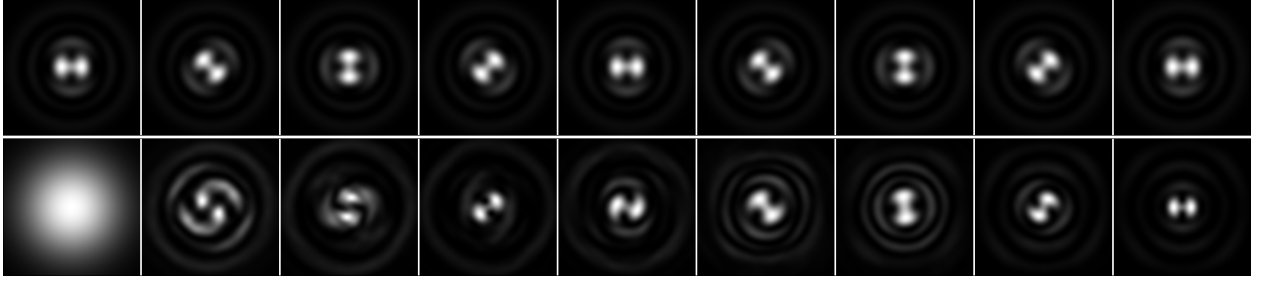


Рис. 4. Интенсивности спирального пучка (верхний ряд) $F(\mathbf{r}) = \exp(-z\bar{z})(z^5\bar{z}^3 + c)$ ($\theta_0 = -4$) и пучка, сформированного с помощью фазового элемента (нижний ряд), при распространении в зоне Френеля.

параметра вращения:

$$W = \begin{cases} w^{2N+1}\bar{w}^{2N-1}, & \theta_0 = -2N, \\ w^{2N-1}\bar{w}^{2N+1}, & \theta_0 = 2N, \\ w^{N+1}\bar{w}^N, & \theta_0 = -(2N+1), \\ w^N\bar{w}^{N+1}, & \theta_0 = 2N+1. \end{cases}$$

Спиральные пучки для пары $(n_0, m_0) \neq (0, 0)$ выражаются через $F_{\text{init}}(\mathbf{r})$ и в начальной плоскости имеют вид

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{r}) &= \exp(z\bar{z}) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n_0} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{n_0+m_0} \left[\exp(-z\bar{z}) F_{\text{init}}(\mathbf{r}) \right], & \text{если } m_0 \geq 0, \\ F_0(\mathbf{r}) &= \exp(z\bar{z}) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n_0-m_0} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{n_0} \left[\exp(-z\bar{z}) F_{\text{init}}(\mathbf{r}) \right], & \text{если } m_0 \leq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

а при распространении в свободном пространстве изменяются по формулам (9).

Показано, что при $\theta = -1$ полученные формулы совпадают с известными результатами теории спиральных пучков. Рассмотрено несколько частных случаев.

Как видно, спиральные пучки в каждом случае имеют примерно одинаковый вид, различаясь показателями степени множителей w и $\bar{w}$ в аргументе функции f . Функция $f(z)$ является целой аналитической функцией, которая может быть выбрана произвольным образом, но с условием сходимости интеграла при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. В качестве $f(z)$ достаточно выбрать целую аналитическую функцию порядка роста $\rho_f < \frac{1}{2N}$ для случая $\theta_0 = \pm 2N$ и $\rho_f < \frac{2}{2N+1}$ для случая $\theta_0 = \pm(2N+1)$.

Степени множителей w и $\bar{w}$ — это главное отличие спиральных пучков при $\theta_0 = \pm 1$ от спиральных пучков при $\theta_0 \neq \pm 1$: в первом случае получались обычные целые аналитические функции, во втором — функции, которые хоть и выражаются через целые аналитические функции, но аргумент у них — уже смесь степеней переменных w и $\bar{w}$.

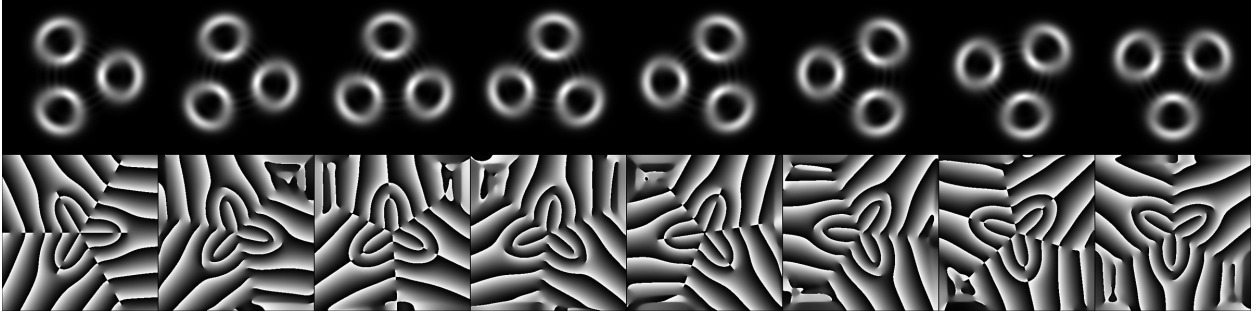


Рис. 5. Спиральный пучок $F_{2,0}^{3,0}(\mathbf{r} | 4)$ при распространении в зоне Френеля.

Рассмотрен вопрос построения аналитических функций $f(z)$, не нарушающих квадратичной интегрируемости функции $F_0(\mathbf{r})$. Если

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

— целая аналитическая функция порядка роста ρ_f , то

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(\zeta^n \sqrt[N]{z}) = N \sum_{k=0}^{\infty} c_{Nk} z^k$$

будет целой аналитической функцией порядка роста ρ_f/N . Здесь $\zeta = e^{2\pi i/N}$ — корень N -й степени из единицы.

Несмотря на то, что спиральные пучки уже были получены ранее другими авторами в виде разложения по LG-модам, найденное интегральное представление является более предпочтительным при рассмотрении задачи о построении пучков с заданным распределением интенсивности.

В § 3 рассмотрены смещённые LG-моды

$$\mathcal{L}_{n,m}^{-}(\mathbf{r} | c) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{n,k+m}(\mathbf{r}) \frac{c^k}{k!} = \exp\left(\mp \frac{c}{2}(x + iy)\right) \mathcal{L}_{n,m}\left(x - \frac{c}{4}, y - \frac{ic}{4}\right)$$

и их линейные комбинации

$$F_{n,m}^{N,M}(\mathbf{r} | R) = \sum_{j=0}^{N-1} \zeta^{Mj} \mathcal{L}_{n,m}^{-}(\mathbf{r} | R\zeta^j) \quad \left(\begin{array}{l} N = 1, 2, \dots, \\ M = 0, 1, \dots, N-1 \end{array} \right) \quad (12)$$

где N — некоторое натуральное число, а параметры LG-мод соответствуют вершинам правильного N -угольника, вписанного в окружность радиуса R (см. рис. 5).

Такие световые поля широко используются для создания оптических ловушек и перемещения микрочастиц в трёхмерном пространстве благодаря наличию ненулевого углового момента.

В **третьей главе** рассматриваются световые поля негауссова типа, построенные на основе функции Эйри. Обзор работ по одномерным пучкам Эйри приводится в § 1. Обсуждаются их взаимосвязи с дробными пучками Бесселя–Гаусса и переход к двумерным пучкам.

В § 2 показано, что негауссов пучок с конечной энергией может быть получен в виде произведения трёх пучков Эйри, аргументы которых повернуты нужным образом. А именно, поле

$$F_0(\mathbf{r}) = \prod_{1 \leq n \leq 3} \exp(\gamma s_n) \text{Ai}(s_n + c_n),$$

где $\gamma > 0$, $s_n = a_n x + b_n y$ и коэффициенты a_n , b_n , c_n — вещественные числа, может быть сведено к полю

$$F_0(\mathbf{r}) = \prod_{1 \leq n \leq 3} \text{Ai}(s_n + c_n),$$

также обладающему конечной энергией, если коэффициенты подобраны таким образом, что

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Выбор линейных комбинаций $s_n = b[\text{Re}(x + iy)\omega^n]$, где $b \neq 0$, $\omega = \exp(2\pi i/3)$ — кубический корень из единицы, и одинаковых смещений $c_n = c$ приводит к полю, которое было названо *три-Эйри пучком*:

$$\text{tAi}(\mathbf{r}; b, c) = \text{Ai}\left(b\frac{x - y\sqrt{3}}{2} + c\right) \text{Ai}\left(b\frac{-x - y\sqrt{3}}{2} + c\right) \text{Ai}(by + c). \quad (14)$$

Это поле не изменяется при повороте на угол $2\pi/3$ и зависит от вещественных параметров масштабирования b и смещения c .

Распространение три-Эйри пучка в зоне Френеля — сложная теоретическая проблема, однако его Фурье-образ удалось найти в аналитическом виде:

$$\mathcal{F}[\text{tAi}(\mathbf{r}; b, c)](\mathbf{r}) = \frac{1}{3^{5/6}\pi b^2} \exp\left(-\frac{2ir^3 \sin 3\varphi}{27b^3}\right) \text{Ai}\left(3^{2/3}c + \frac{2r^2}{3^{4/3}b^2}\right). \quad (15)$$

Как видно из (15), результирующий пучок имеет кубическую фазу и супергауссово убывание амплитуды на бесконечности, поскольку известна асимптотика функции Эйри:

$$\text{Ai}(r^2) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} \exp\left(-\frac{2r^3}{3}\right) \quad (r \rightarrow \infty).$$

Поведение поля (15) при $x = y = 0$ определяется величиной параметра смещения c : поле обращается в нуль при выборе $3^{2/3}c = a_n$ и имеет локальный

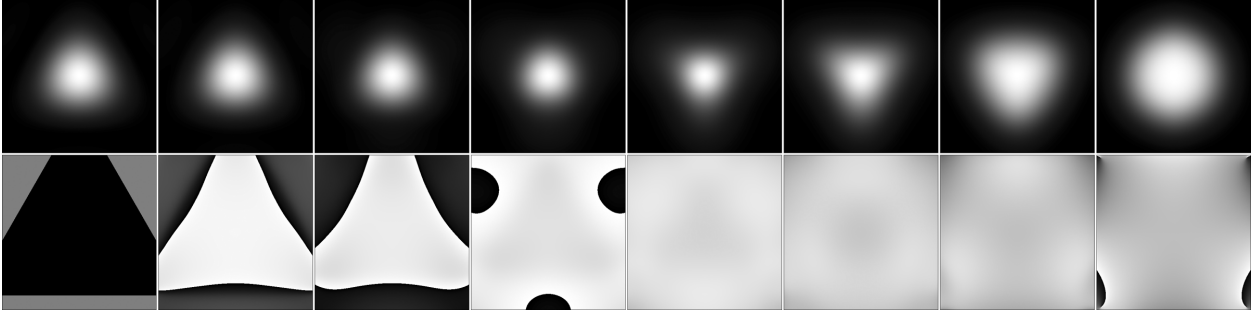


Рис. 6. Интенсивность (верхний ряд) и фаза (нижний ряд) пучка $\mathbf{FR}_l[\text{tAi}(\boldsymbol{\rho}; 1, c)](\mathbf{r})$, где $3^{2/3}c = a'_1$, при распространении в зоне Френеля, $l \in [0, +\infty]$. Размеры левого фрейма $[-B, B] \times [-B, B]$, где $B = 1.2$. Масштабное увеличение и дефокусировочная фаза на последующих фреймах скомпенсированы.

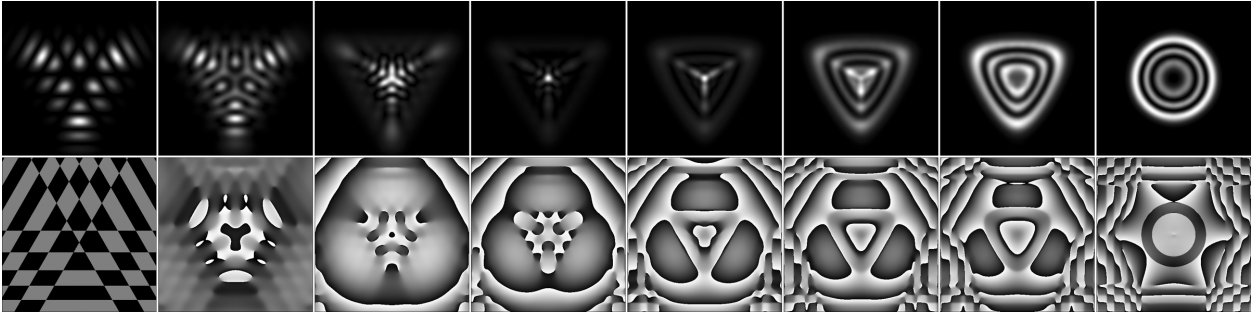


Рис. 7. Распространение пучка $\mathbf{FR}_l[\text{tAi}(\boldsymbol{\rho}; 1, c)](\mathbf{r})$ для случая $3^{2/3}c = a_3$, $B = 5.0$.

максимум, если $3^{2/3}c = a'_n$. Здесь a_n и a'_n — n -е нули функций $\text{Ai}(x)$ и $\text{Ai}'(x)$ соответственно (см. рис. 6 и 7).

Для численной реализации преобразования Френеля была рассмотрена аппроксимация Фурье-образа три-Эйри пучка гауссовым пучком ширины w_0 по методу наименьших квадратов.

В § 3 исследован более общий случай светового пучка в виде произведения трёх функций Эйри

$$F_0(\mathbf{r}) = \prod_{n=1}^3 \text{Ai}(a_n \xi + b_n \eta + c_n),$$

который зависит от девяти вещественных параметров a_n, b_n, c_n , $n = 1, 2, 3$, и найден его Фурье-образ. Рассмотрены случаи, в которых интенсивность светового пучка в Фурье-плоскости имеет круговую кольцеобразную форму с конечным или бесконечным числом колец.

В § 4 найдена функция Вигнера три-Эйри пучка и рассмотрены некоторые её свойства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

1. Показано, что описание преобразования HLG-пучков в оптических системах с астигматизмом общего вида допускают интерпретацию в терминах операторов поворота в трёхмерном пространстве.
2. Предложено обобщение понятия плоскости перетяжки для астигматического гауссова пучка как плоскости, в которой площадь светового пятна принимает минимальное значение. Показано, что в этой плоскости дефокусировка пучка равна нулю.
3. Показано, что для HLG-пучков можно сформулировать обобщённый закон $ABCD$.
4. Найдено интегральное представление произвольного спирального пучка с целочисленным параметром вращения.
5. Найдено двумерное поле в виде произведения трёх пучков Эйри, Фурье-образ которого обладает кубической фазой и радиально симметричной интенсивностью с супергауссовым убыванием.

Содержание диссертации отражено в следующих публикациях:

1. Е.Г. Абрамочкин, Е.В. Разуева и В.Г. Волостников. *Обобщённые гауссовы пучки и их преобразование в оптических системах с астигматизмом* // Вестник Самарского гос. университета, 2006, т. 2, с. 103–121.
2. E.G. Abramochkin, E.V. Razueva, and V.G. Volostnikov. *Hermite-Laguerre-Gaussian beams in astigmatic optical systems* // Proc. SPIE/Ukraine, 2006, v. 6, N 1–6, pp. 174–185.
3. E.G. Abramochkin, E.V. Razueva, and V.G. Volostnikov. *Application of spiral laser beams for beam shaping problem* // Proc. LFNМ'2006 (Kharkov, 29.06–1.07.2006). pp. 275–278.
4. E. Abramochkin, E. Razueva, and V. Volostnikov. *General astigmatic transform of Hermite-Laguerre-Gaussian beams* // J. Opt. Soc. Am. A, 2010, v. 27, N 11, pp. 2506–2513.
5. T. Alieva, E. Abramochkin, A. Asenjo-Garcia, and E. Razueva. *Rotating beams in isotropic optical system* // Opt. Express, 2010, v. 18, N 4, pp. 3568–3573.
6. E. Abramochkin and E. Razueva. *Product of three Airy beams* // Opt. Lett., 2011, v. 36, N 19, pp. 3732–3734.

7. E. Abramochkin and E. Razueva. *The Wigner distribution function of three-Airy beams* // Proc. Int.Conf. “Days on Diffraction, 2014” (Saint-Petersburg, 26–30.05.2014), pp.74–75.
8. E. Razueva, A. Krutov, and E. Abramochkin. *Definition of the waist plane for general astigmatic Gaussian beams*// Opt. Lett., 2015, v. 40, N 9, pp. 1936–1939.

В работах [1,2] автору принадлежит матричная интерпретация общего астигматического преобразования мод Эрмита–Лагерра–Гаусса, в работе [3] — разработка алгоритма расчета дифракционных фазовых элементов, в [4] — формулы преобразования астигматического пучка Лагерра–Гаусса при распространении в свободном пространстве, в [5] — выбор примеров спиральных пучков для компьютерной и экспериментальной реализации, в [6–8] — постановка задачи и получение основных результатов. Некоторые результаты диссертационной работы — построение функционального представления спиральных пучков, распределение интенсивности которых в зоне Френеля поворачивается на угол $> \pi/2$, и вычисление функции Вигнера три-Эйри пучка — опубликованы в тезисах международной конференции “Days on Diffraction” в 2011, 2012 и 2014 гг. Автором также выполнены все компьютерные эксперименты.

Свидетельства о гос. регистрации программ, разработанных автором:

1. «Вычисление преобразования светового поля в оптических системах первого порядка» №2011611861, 28.02.2011.
2. «Программа расчета двумерного преобразования Френеля когерентных световых полей» №2012616616, 24.07.2012.
3. «Программа визуализации и преобразования двумерных световых полей с фазовыми сингулярностями» №2012616490, 18.07.2012.