Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт им. П.Н. Лебедева
Российской академии наук

На правах рукописи
УДК 532.517.45

Копьев Алексей Викторович

Исследование статистических свойств тензора градиентов скорости в изотропном несжимаемом турбулентном потоке

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
Зыбин Кирилл Петрович

Москва — 2018

Оглавление

Стр.

Введение 5

Глава 1. Особенности распределения тензора скоростей деформации в статистически изотропных несжимаемых потоках 18

1.1 Инварианты вращения тензора скоростей деформации (введение) 18

1.2 Соотношения между функциями распределения различных инвариантов тензора скоростей деформации 20

1.2.1 Функция распределения первой системы инвариантов . . . 20

1.2.2 Функция распределения второй системы инвариантов . . . 22

1.2.3 Функция распределения третей системы инвариантов . . . 23

1.2.4 Функции распределения нормированных собственных значений тензора 23

1.3 Статистика тензора скоростей деформации в случае обратимой по времени статистики скорости. Аналитический анализ 24

1.3.1 Вырожденность обратимой статистики 24

1.3.2 Случай гауссового распределения 24

1.3.3 Универсальное распределение нормированных собственных значений 26

1.4 Статистика тензора скоростей деформации в изотропной турбулентности. Численный анализ 28

1.4.1 Численные данные 28

1.4.2 Вырождение статистики 29

1.4.3 Оценка параметра вырождения 30

1.4.4 Логнормальность статистики 32

1.4.5 Двухпараметрическая аппроксимация 34

1.4.6 Зависимость параметров аппроксимации от числа Рейнольдса 36

1.4.7 Влияние крупномасштабной накачки на вырождение и логнормальность статистики 37

Стр.

1.5 Выводы 39

Глава 2. Линейная гауссова модель для динамики крупномасштабной завихренности 41

2.1 Пируэт-эффект (введение) 41

2.2 Динамика крупномасштабной завихренности 43

2.3 Затухание корреляторов на больших временах 45

2.4 Гауссова дельта-коррелированная модель статистики крупномасштабного тензора скоростей деформации 46

2.4.1 Крупномасштабный тензор скоростей деформации в базисе своих собственных векторов 46

2.4.2 Крупномасштабный тензор скоростей деформации в базисе своих изначально собственных векторов 49

2.4.3 Затухание усредненного тензора в базисе изначально собственных векторов 50

2.4.4 Изотропизация корреляционного тензора в базисе изначально собственных векторов 52

2.5 Линейная асимптотика корреляторов на малых временах 55

2.5.1 Усреднение по реализациям динамики крупномасштабного тензора скоростей деформации 55

2.5.2 Усреднение по начальным направлениям завихренности . 58

2.5.3 Сравнение с экспериментом 60

2.6 Выводы 61

Глава 3. Двухточечные третьи смешанные корреляции скорости и градиентов скорости 62

3.1 Двухточечный третий коррелятор скорости (введение) 62

3.2 Метод обработки численных данных 65

3.3 Смешанные двухточечные корреляторы и трехточечный коррелятор скорости 66

3.4 Кинематический метод нахождения членов разложения трехточечного тензора 69

3.5 Первый порядок разложения трехточечного тензора 71

3.5.1 Ограничение изотропии и несжимаемости 71

Стр.

3.5.2 О возможном нахождении новой скалярной функции из уравнений движения . . . 74
3.5.3 Следствия для корреляторов первого порядка в локально изотропной турбулентности . . . 75
3.5.4 Следствия для корреляторов второго порядка в локально изотропной турбулентности . . . 78
3.6 Второй порядок разложения трехточечного тензора . . . 81
3.6.1 Ограничение изотропии и несжимаемости . . . 81
3.6.2 Следствия для корреляторов второго порядка в локально изотропной турбулентности . . . 85
3.7 Выводы . . . 89

Заключение . . . 90

Список литературы . . . 92

Список рисунков . . . 102

Список таблиц . . . 104

Приложение А. Статистические погрешности в методах определения смешанных корреляторов . . . 105

Введение

Настоящая диссертация посвящена некоторым актуальным вопросам теории изотропной турбулентности несжимаемой жидкости. Течение несжимаемой ньютоновской жидкости удовлетворяет уравнениям Навье-Стокса:

$$\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i = -\tfrac{1}{\rho}\partial_i p + \nu \partial_j \partial_j v_i, \tag{1}$$

$$\partial_i v_i = 0, \tag{2}$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial r_i$, v_i — i-ая компонента вектора скорости $\mathbf{v}$, p — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование. В дальнейшем принимаем $\rho = 1$ без нарушения общности, поскольку жидкость несжимаема, а поток считается изотермическим.

В 1883 году О. Рейнольдс в экспериментах по течению несжимаемой жидкости в трубах обнаружил резкое изменение режима течения при небольшом изменении скорости потока вблизи некоторого критического значения скорости [1]. При переходе через это критическое значение поток приобретал случайную хаотическую структуру. Проведя большое количество экспериментов, Рейнольдс обнаружил, что переход для разных параметров системы наблюдается при достижении критического значения безразмерного параметра, названного впоследствии числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{VL}{\nu}. \tag{3}$$

Здесь V — характерная скорость потока, а L —- характерный масштаб в течении (поперечный размер трубы, например). Хаотический режим, возникающий при числах Рейнольдса больших критического, Рейнольдс назвал турбулентным, а устойчивый режим, наблюдаемый при меньших, —- ламинарным.

В 1895 году Рейнольдс опубликовал работу, в которой попытался дать теоретический анализ работы 1883 года на основании уравнений динамики. Основным результатом новой работы [2] были уравнения осредненного турбулентного движения, называемые теперь уравнениями Рейнольдса (RANS). Принцип их

получения состоял в следующем: подставив в уравнение Навье-Стокса скорость, разложенную с помощью некоторой процедуры на осредненную по времени и пульсационную составляющие, и усреднив само уравнение по времени, получается уравнение для динамики осредненной составляющей. Причем уравнения для нее содержат парный корреляционный тензор пульсационной составляющей скорости, называемый тензором напряжений Рейнольдса. Таким образом, неизвестная пульсационная компонента определяет осредненную компоненту посредством тензора напряжений Рейнольдса, поэтому полученная система уравнений оказывается незамкнутой. Если аналогичным образом попробовать написать уравнение динамики тензора напряжений Рейнольдса, то вследствие нелинейности уравнений динамики появятся статистические моменты еще более высокого порядка, к которым добавляются также смешанные корреляции давления и скорости. В 1924 году Л.В. Келлер и А.А. Фридман предложили общий метод построения уравнений для моментов любого порядка и показали, что любая конечная подсистема бесконечной системы таких уравнений незамкнута [3]. Анализ и решение полной системы Фридмана-Келлера и есть нерешенная до сих пор проблема турбулентности.

В 1935 году Дж. Тейлор показал, что наипростейший случай системы Фридмана-Келлера достигается в так называемой однородной и изотропной турбулентности, то есть в таком гипотетическом потоке, для которого все статистические моменты инвариантны относительно ортогональных преобразований [4]. Однородная и изотропная турбулентность оказалась значительно доступнее для математического анализа, хотя и сохранила в себе принципиальные проблемы невозможности локального замыкания. Более того, условия изотропной турбулентности достигаются только в очень малом числе потоков, фактически не представляющих практического интереса.

В 1941 году А.Н. Колмогоров развил далее идеи Тейлора, введя понятие локально изотропной турбулентности, то есть однородной по времени турбулентности, в которой однородны и изотропны распределения приращений скорости и давления. В основе колмогоровской теории турбулентности лежит предположение о существовании плотности потока энергии ε в турбулентном потоке от пульсаций больших масштабов, где она «накачивается», к пульсациям меньших масштабов без потерь («инерционно») до самого маленького в течении «вязкого» масштаба η, где энергия рассеивается в тепло. Колмогоров заметил, что ввиду хаотичности процесса передачи энергии влияние статистиче-

ской анизотропии среднего течения должно ослабляться на малых масштабах. На основании этого он выдвинул следующую гипотезу: «в произвольном турбулентном потоке с достаточно большим числом Рейнольдса в достаточно малых областях четырехмерного пространства[1], не лежащих вблизи границ потока, или других его особенностей осуществляется с хорошим приближением гипотеза локальной изотропности» [5]. Справедливость этой гипотезы проверена в большом количестве экспериментальных работ (см., например, ссылки в [6, §16.6]). На ее основании успешно проводятся современные компьютерные расчеты турбулентных течений методом крупных вихрей (LES) [7; 8]. Таким образом, исследование особенностей локально изотропной турбулентности принципиально важно для решения конкретных астрофизических и прикладных задач.

В той же работе [5] Колмогоров сформулировал дополнительные гипотезы подобия, которые позволили из теории размерности вывести в инерционном интервале следующий закон «двух третей»:

$$\langle \delta v_L^2 \rangle \propto (\varepsilon b)^{2/3} . \tag{4}$$

Здесь δv_L – продольное приращение скорости между двумя точками на расстоянии b, а $\langle \dots \rangle$ — усреднение по ансамблю. Эквивалентную спектральную формулировку этого закона независимо предложил в том же году А.М. Обухов [9]. Естественным обобщением этого закона является утверждение о так называемом колмогоровском скейлинге (см., например, [10, §33] или [11, раздел 6.3.1]):

$$\langle \delta v_L^n \rangle \propto (\varepsilon b)^{\zeta_n} , \tag{5}$$

где $\zeta_n = n/3$. Для $n = 3$ это утверждение было доказано Колмогоровым точно в [12], где он вычислил из уравнений динамики третий продольный коррелятор (закон «четырех пятых»):

$$\langle \delta v_L^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon b. \tag{6}$$

Ф. Ансельме с соавторами экспериментально обнаружили в 1984 году, что для $n \neq 3$ колмогоровский скейлинг не выполняется: для $n < 3$ показатель степени ζ_n несколько выше, а для $n > 3$ — ниже колмогоровского $n/3$ [13]. Таким образом можно сказать, что ζ_n есть выпуклая кверху функция n. Это

[1]Имеется в виду четырехмерное пространство-время (прим. автора диссертации)

свойство напрямую связано с явлением внутренней перемежаемости, то есть с тенденцией турбулентности концентрироваться в отдельных «сгустках», окруженных значительно менее интенсивными крупномасштабными пульсациями (см. [6, §25.3], [11, глава 8] или [14, §1.1]). Действительно, при равномерном самоподобном распределении поля скорости должно быть $\langle \delta v_L^{2n} \rangle \simeq \langle \delta v_L^n \rangle^2$ (как в гауссовом распределении), а описанное поведение скейлинговых показателей дает $\langle \delta v_L^{2n} \rangle \gg \langle \delta v_L^n \rangle^2$, то есть наличие редких, но крайне интенсивных структур, вклад которых с ростом степени увеличивается.

Необходимо отметить, что хотя в работе Ансельме была впервые экспериментально получена перемежаемость поля скорости, о перемежаемости поля градиентов скорости было известно задолго до этого. Она заключается в наличии редких очень интенсивных вихревых структур-филаментов. Тензор градиентов скорости $A_{ij}(\mathbf{r},t) = \partial_j v_i$ можно разделить на две составляющие: симметричный тензор скоростей деформации $S_{ij}(\mathbf{r},t)$ и ротор вектора скорости — завихренность $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)$:

$$S_{ij}(\mathbf{r},t) = \tfrac{1}{2}\left(\partial_i v_j(\mathbf{r},t) + \partial_j v_i(\mathbf{r},t)\right), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t) = \mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r},t). \tag{8}$$

Физически $S_{ij}(\mathbf{r},t)$ отвечает за скорость деформации, а $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)$ — за скорость вращения небольшого объема жидкости в точке $\mathbf{r}$ [15, §11]. На возможное наличие интенсивных структур завихренности в изотропной турбулентности и их роль в процессе диссипации указывал еще в 1937 году Дж. Тейлор [16], косвенно оно было показано в экспериментальной работе Дж. Бэтчелора и А. Таунсенда 1949 года [17], затем в 1981 году Э. Сиджа в численном расчете изотропной турбулентности непосредственно обнаружил, что завихренность концентрируется в узких трубках [18], однако тенденция к сонаправленности завихренности внутри трубки с ее осью была численно продемонстрирована только в 1990 году в работе Ше, Джексона и Орсага [19]. Вскоре после этого были произведены более детальные расчеты вихревых структур [20; 21], которые в том числе позволили выявить свойства структур, необходимые для их визуализации в эксперименте [22; 23]. Современные исследования предлагают альтернативные определения для завихренности, такие чтобы направление альтернативной завихренности еще сильнее коррелировало с направлением

оси вихревых трубок [24; 25]. Существуют несколько точных решений уравнений Навье-Стокса с нулевой вязкостью (уравнений Эйлера), имеющих форму интенсифицирующихся вихревых образований [26; 27]. В более сложных турбулентных потоках, таких как свободные сдвиговые течения, пограничные слои и течения в трубе, также численно показано наличие вихревых структур [28], однако механизмы их образования для разных типов течений могут быть различными [28; 29]. Совершенствование расчетов изотропной турбулентности до более высоких чисел Рейнольдса продолжается до сих пор, причем величина числа Рейнольдса в них доведена до уровня лабораторных экспериментов (см., например, [30—33]). Некоторые из этих расчетов представлены в открытый доступ в интернете в форме баз данных [30—32].

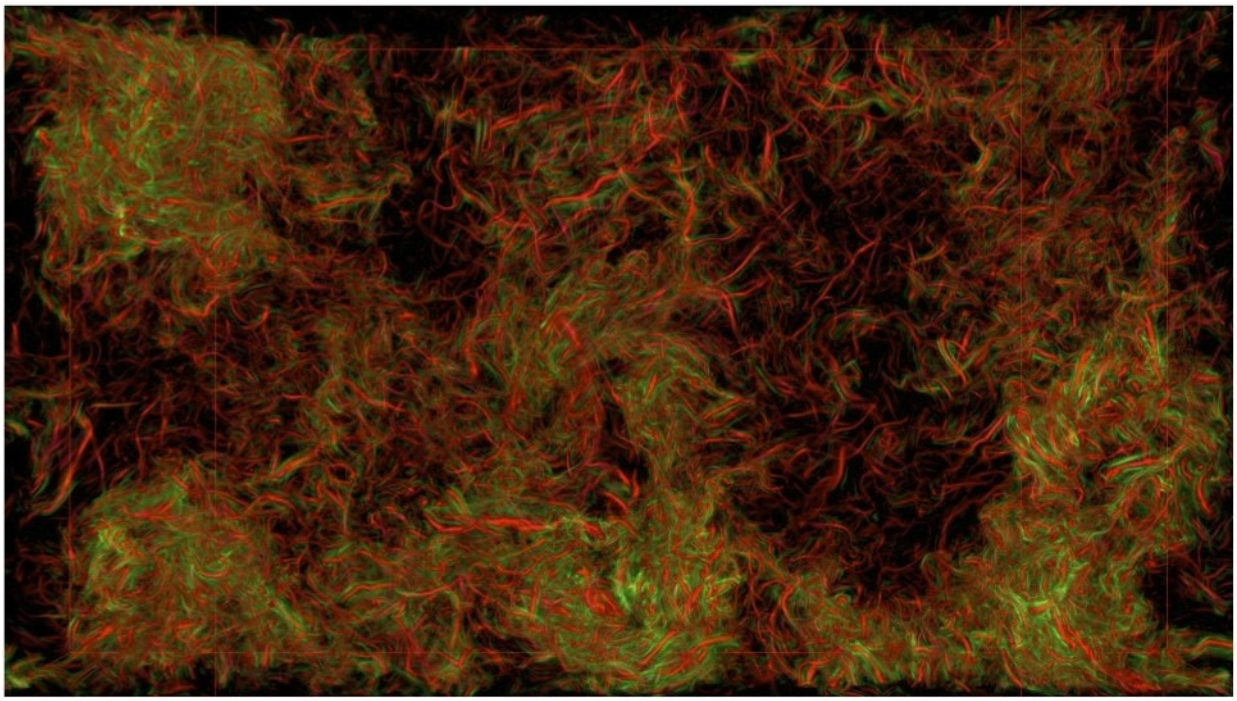


Рисунок 0.1 — Численный расчет структуры поля завихренности в изотропном турбулентном потоке при $Re_\lambda \simeq 430$ ($Re \simeq 11500$), представленный на сайте базы данных Джона Хопкинса. Красным отмечены наиболее интенсивные участки завихренности. Re_λ — число Рейнольдса на масштабе Тейлора, чаще используемое для характеристики численных данных.

Как отмечалось выше, именно градиенты скорости ответственны за диссипацию энергии в потоке. Действительно, из уравнений Навье-Стокса плотность диссипации энергии в точке $\varepsilon(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{2}\partial_t v^2$ определяется градиентами скорости в этой точке:

$$\varepsilon(\mathbf{r},t) = \frac{\nu}{2}\left(\partial_i v_j(\mathbf{r},t) + \partial_j v_i(\mathbf{r},t)\right)^2. \tag{9}$$

Усредненная по потоку, эта величина есть плотность потока энергии ε, входящая в колмогоровские законы. Таким образом, наличие редких интенсивных вихревых структур означает крайнюю неравномерность диссипации энергии в потоке.

Количественными характеристиками перемежаемости могут служить коэффициенты асимметрии и эксцесса, характеризующие отклонение от гауссового распределения в котором они равны соответственно нулю и трем. Для распределения градиентов скорости Р. Бетчовым в 1956 году были введены соответственно [34]:

$$S_\nabla = \frac{\langle (\partial v_1/\partial x)^3 \rangle}{\langle (\partial v_1/\partial x)^2 \rangle^{3/2}},\ F_\nabla = \frac{\langle (\partial v_1/\partial x)^4 \rangle}{\langle (\partial v_1/\partial x)^2 \rangle^{2}}. \tag{10}$$

Колмогоровская феноменология предсказывает отсутствие зависимости этих параметров от числа Рейнольдса. В экспериментальной работе 1981 года Р. Антониа с соавторами был обнаружен степенной рост коэффициентов асимметрии и эксцесса с числом Рейнольдса [35], что соответствовало предсказаниям имеющихся на тот момент моделей перемежаемости (бета-модели и модели Новикова-Стюарта упоминаемых ниже). Современная мультифрактальная модель (обсуждаемая ниже) также дает степенной рост коэффициентов с числом Рейнольдса [11, разд. 8.5.6]. Современные численные и экспериментальные работы подтверждают это положение, а также логнормальный характер функции распределения градиентов скорости [33; 36; 37]. Таким образом, при увеличении числа Рейнольдса, перемежаемость потока, по-видимому, неограниченно возрастает. Поэтому представляет интерес рассмотреть статистику градиентов скорости и ее зависимость от числа Рейнольдса, а также исследовать некоторые другие особенности этой статистики, которые рассмотрены в первой главе настоящей диссертации.

Исследование влияния перемежаемости градиентов скорости на статистику поля скорости было инициировано работами Колмогорова и Обухова 1962 года, в которых они сформулировали так называемую логнормальную модель [38; 39]. Эта модель исходит в том числе из логнормальности распределения диссипации. Она дает квадратичную немонотонную зависимость скейлинговых показателей от n. В более поздних моделях, таких как модель случайного каскада Новикова-Стюарта [40] и более общая модель дробления турбулентных образований Яглома [41], авторы пытались предложить

перемежаемую модель турбулентного каскада и на ее основании вывести логнормальность или другие статистические свойства турбулентности. Некоторые внутренние несогласованности этих моделей были исправлены в β-модели Фриша-Сулема-Нелкина [42]. Однако все эти модели изначально имели упрощенный характер и показывали лишь качественную возможность отклонения от колмогоровского скейлинга (5) вследствие перемежаемости. Неудивительно, что при сравнении Ансельме с соавторами предсказаний этих моделей с результатами их эксперимента [13], ими были выявлены значительные разногласия. Для объяснения результатов этой экспериментальной работы в том же 1984 году рядом авторов была предложена так называемая мультифрактальная модель [43; 44], замечательно согласующаяся со всеми существующими экспериментальными и численными данными. Тем не менее, и мультифрактальная модель, и все упомянутые выше модели являются, как и теория Колмогорова 1941-го года, феноменологическими, то есть основываются не на решении уравнений динамики, а на гипотезах, сформулированных из экспериментальных данных, а также на размерных и симметрийных соображениях.

К.П. Зыбиным, В.А. Сиротой, А.С. Ильиным и А.В. Гуревичем в цикле работ 2007 — 2015 годов была предложена и разработана модель, названная ими моделью вытягивающихся вихрей, в основе которой лежат уравнения динамики жидкости [26; 45—48]. Эта модель придает конкретный физический смысл мультифрактальной теории. Суть модели заключается в выделении в потоке вытягивающихся интенсивных филаментов, свойства которых, с одной стороны, могут быть выведены из уравнений динамики, а с другой стороны, как подробно обсуждалось выше, определяют статистические характеристики турбулентного потока. Аналитическое рассмотрение таких структур становится возможным ввиду предложенного и обоснованного в представленных работах линейного механизма экспоненциального вытягивания этих структур. Во второй главе настоящей диссертации идея этого механизма развивается для построения лагранжевой стохастической модели возникновения вихревых структур.

Еще одно направление исследований, также инициированное Колмогоровым, состоит в нахождении точных законов турбулентности помимо закона четырех пятых [12]. Точных в том смысле, что для их вывода требуется только выполнение уравнений Навье-Стокса и самых общих гипотез (например, существования конечного ненулевого значения ε). В изотропной турбулентности на этом пути удается сделать не так много: можно привести в пример аналог

закона четырех пятых для пассивного скаляра, выведенный А.М. Ягломом в 1949 году [49], а также результат Е.А. Новикова 1965 года, где найдена крупномасштабная поправка к закону в стационарном случае с накачкой энергии гауссовой случайной силой [50]. Существует множество обобщений закона четырех пятых на случай более сложных течений. Например, в работах [51—53] приводятся различные обобщения закона для случая однородных, но необязательно изотропных течений, в работах [54—56] выводится аналог закона для магнитогидродинамической турбулентности, в работах [57; 58] — для изотропной, но не зеркально-симметричной турбулентности, а в работах [59—63] — для турбулентности сжимаемого газа. Таким образом, все точные законы существенным образом опираются на закон четырех пятых. Принципиальным моментом в выводе этого закона является «выпадение» давления, нелокально зависящего от скорости, из уравнения на динамику парного коррелятора. Оно было показано Карманом и Ховартом в 1938 году [64]. В остальные уравнения цепочки Фридмана-Келлера нелокальный смешанный коррелятор скоростей и давления входит даже в самом простом случае изотропной турбулентности, что, по-видимому, является главной трудностью теории. Различные универсальные способы получения уравнений высоких порядков были предложены в 2001 году Р. Хиллом [65] и В. Яхотом [66], однако существенных успехов на пути их разрешения до сих пор не достигнуто.

Знание точных законов, определяющих статистику поля скорости очень важно для аналитического рассмотрения задач турбулентного транспорта. Такими задачами являются задачи о транспорте пассивного скаляра (например, примеси или температуры) и пассивного вектора (например, магнитного поля) турбулентным полем скорости. Однако существенной проблемой на сегодняшний день является не только отсутствие аналитических результатов о высших корреляторах поля скорости, но и отсутствие универсальной техники, позволяющей работать с негауссовой статистикой. Таким образом, в значительной части работ, посвященных данной проблеме, вычисления выполняются в гауссовом случае, причем считается, что качественно результаты от статистики не зависят (см. обзор [67]). В цикле работ А.С. Ильина, В.А. Сироты и К.П. Зыбина 2016 — 2018 годов развивается техника, позволяющая находить мелкомасштабные корреляции пассивного скаляра или вектора для произвольной статистики поля скорости [68—70]. В этих работах выявлена существенная роль асимметрии статистики скорости в вопросах генерации (динамо) пассив-

ного вектора. Таким образом, поскольку асимметрия гауссового поля равна нулю, негауссовость реального поля скорости может оказаться существенной в этих вопросах. Например, в гауссовой модели кинематического динамо Казанцева-Крайчнана [71; 72] крупномасштабное динамо отсутствует [71; 73], что может быть проявлением отсутствия асимметрии у гауссового поля скорости. В третьей главе настоящей диссертации показано, что удается вычислить соответствующий коррелятор, необходимый в том числе для учета асимметрии распределения скорости в задачах турбулентного транспорта.

В предложенном кратком обзоре показано, что теория изотропной турбулентности действительно представляет значительный интерес и с точки зрения фундаментальной теории (исследование цепочки Фридмана-Келлера, обоснование феноменологии из уравнений движения), и с точки зрения многочисленных приложений (моделирование подсеточной турбулентности в LES, решение астрофизических задач и др.). Получение результатов на каждом из этих направлений представляет значительный интерес. Исследованию части из перечисленных вопросов посвящена настоящая работа.

Таким образом, **целями** данной работы является

1. Исследование особенностей статистики тензора скоростей деформации в изотропной турбулентности.
2. Развитие идеи линейного механизма вытягивания в теории турбулентности в рамках построения линейной стохастической модели для жидких частиц из инерционного интервала.
3. Вычисление смешанных корреляторов поля скорости и его градиентов необходимых для учета статистической асимметрии в задачах турбулентного транспорта.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Аналитически исследована статистика тензора скоростей деформации в изотропном потоке с гауссовой статистикой скорости.
2. Исследована статистика тензора скоростей деформации в изотропном турбулентном потоке путем статистического анализа данных численных расчетов изотропной турбулентности.
3. Детально разработана модель, пригодная для описания раскручивания жидких частиц из инерционного интервала.
4. Произведено сравнение результатов существующих экспериментов и расчетов с предсказаниями разработанной модели.

5. Разработан метод вычисления членов разложения трехточечного коррелятора скорости в изотропной турбулентности.
6. Точно вычислены нетривиальные смешанные корреляторы в локально изотропной турбулентности.
7. Дополнены результаты аналитических расчетов смешанных корреляторов с помощью численных симуляций изотропной турбулентности.

Научная новизна:

1. Впервые обнаружено вырождение функции распределения тензора скоростей деформации и предложена ее двухпараметрическая аппроксимация.
2. Дано теоретическое объяснение эффекта раскручивания жидких частиц из инерционного интервала.
3. Впервые получены аналитические выражения для смешанных корреляторов скорости и градиента скорости.

Практическая значимость. Поскольку в произвольном развитом турбулентном потоке вдали от стенок мелкомасштабные возмущения имеют универсальную локально изотропную структуру, результаты диссертации могут быть использованы для формулировки моделей подсеточной турбулентности в вычислительной гидродинамике и для решения астрофизических задач с турбулентной средой, в том числе для исследования генерации (динамо) магнитного поля.

Методология и методы исследования. Применялись аналитические и символьные расчеты, опирающиеся на уравнения динамики сплошной среды (Навье-Стокса). Исследовались методы работы с базами данных, позволивших проводить статистическую обработку данных симуляций изотропной турбулентности.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Обнаружено вырождение статистики тензора скоростей деформации в изотропном турбулентном потоке. Аналитически показано, что наличие вырождения означает универсальность функции распределения отношения собственных значений тензора скоростей деформации.
2. Найдена логнормальная двухпараметрическая аппроксимация статистики тензора скоростей деформации. Численно определены параметры аппроксимации и найдена их зависимость от числа Рейнольдса.

3. Разработана и аналитически проанализирована стохастическая модель возникновения вихревых структур в изотропном турбулентном потоке. В рамках разработанной модели показано, что линейные эффекты играют главную роль на начальной стадии образования интенсивных вихревых структур в мелкомасштабной турбулентности.
4. Предложен пертурбативный метод «кинематического» продолжения закона четырех пятых Колмогорова на трехточечную статистику. Посредством этого метода удалось ограничить количество неизвестных скалярных функций, от которых могут зависеть члены разложения трехточечного тензора скорости по расстоянию между двумя точками — до одной функции в первом члене и до четырех во втором члене. Неизвестные скалярные функции найдены численно.
5. Обнаружено, что для изотропного турбулентного потока, одна из введенных скалярных функций хорошо аппроксимируется константой, универсально зависящей только от плотности потока энергии ε.

Достоверность полученных теоретических результатов обеспечивается их сравнением с экспериментальными и численными данными. Результаты получены путем решения основополагающих уравнений Навье-Стокса, часть из которых находится в соответствии с результатами, полученными другими авторами. Численные результаты получались с использованием современных симуляций и согласуются с полученными ранее результатами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на астрофизических семинарах ОТФ ФИАН, на семинаре по механике многофазных сред НИИ механики МГУ, на различных сессиях и конференциях:

1. XXVI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике (Москва, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 18-19 декабря 2017 г.)
2. XXIII Международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Звенигород, 25 февраля – 4 марта 2018 г.)
3. Всероссийская конференция молодых учёных-механиков (Сочи, 4-14 сентября 2018 г.)
4. Пятая открытая всероссийская конференция по аэроакустике (Звенигород, 25-29 сентября 2017 г.)
5. 60-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 20-25 ноября 2017 г.)

6. 59-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 21-26 ноября 2016 г.)
7. 55-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 19-25 ноября 2012 г.)

Личный вклад. Автор принимал активное участие в решении поставленных ему задач. Проводил аналитические выкладки, формулировал промежуточные модели и выполнял статистическую обработку данных численных симуляций.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях [74—80], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [74—76], 4 — в тезисах докладов [77—80].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 106 страниц, включая 21 рисунок. и 1 таблицу. Список литературы содержит 110 наименований.

В первой главе рассматривается статистика тензора скоростей деформации в изотропной турбулентности. Оказывается, что можно так выбрать инварианты вращения у тензора, чтобы статистика выбранных инвариантов вырождалась. Это позволяет получить несколько интересных аналитических результатов. Так, функцию распределения компонент тензора удается свести к функции одной переменной. Также оказывается, что для нормированных собственных значений тензора вероятностное распределение при наличии вырождения универсально и не зависит от конкретной формы распределения. Кроме того, аналитически показано, что для всех обратимых во времени статистических изотропных течений вырождение также имеет место, а распределение нормированных собственных значений тензора также универсально. Произведен аналитический расчет статистики тензора и его инвариантов вращения в случае гауссовой статистики поля скорости. Найдена двухпараметрическая логнормальная аппроксимация статистики тензора в случае турбулентной статистики. Определена зависимость параметров аппроксимации от числа Рейнольдса.

Во второй главе сформулирована и проанализирована теоретическая модель, в которой задача о динамике жидкой частицы в инерционном интервале масштабов сведена к линейной стохастической задаче. Получено основное уравнение линейной стохастической модели, играющее роль уравнения Ланжевена в поставленной задаче. В рамках гауссовой модели аналитически исследует-

ся поведение корреляторов, измеренных и численно рассчитанных в [81; 82]. Показывается, что в построенной теоретической модели нарастание одного из корреляторов на малых временах определяется только средним значением квадрата завихренности в потоке. Соответствующие оценки показывают удовлетворительное согласие теории и эксперимента.

В третьей главе найдены ограничения на первый и второй члены разложения трехточечного третьего тензора скорости по малому вектору, соединяющему две из трех точек. Произвол в выборе поправок сведен к одной скалярной функции в первом члене и к четырем во втором. Неизвестные функции определяются численно. Показано, что скалярная функция для первого члена хорошо аппроксимируется константой, зависящей только от ε. Найдены двухточечные смешанные корреляторы скорости и градиента скорости.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы работы.

Глава 1. Особенности распределения тензора скоростей деформации в статистически изотропных несжимаемых потоках

1.1 Инварианты вращения тензора скоростей деформации (введение)

В несжимаемом потоке тензор скоростей деформации является не только симметричным, но и бесследовым, поэтому он имеет 5 независимых элементов из 9 ($9-3-1$ ввиду симметричности и бесследовости). Для него имеется всего два независимых инварианта вращения, поскольку выбором трех элементов фиксируется система координат. В изотропном случае статистика тензора полностью определяется статистикой системы независимых инвариантов вращения. В главе рассматриваются три системы инвариантов: максимальное и минимальное собственные значения тензора λ_1 и λ_3 (они действительные, поскольку тензор скоростей деформации симметричен), след квадрата и след куба тензора, нормированные числовыми коэффициентами:

$$Q_S = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\mathbf{S}^2, \tag{1.1}$$

$$R_S = -\tfrac{1}{3}\mathrm{Tr}\mathbf{S}^3, \tag{1.2}$$

а также их алгебраические комбинации ξ_+ и ξ_-:

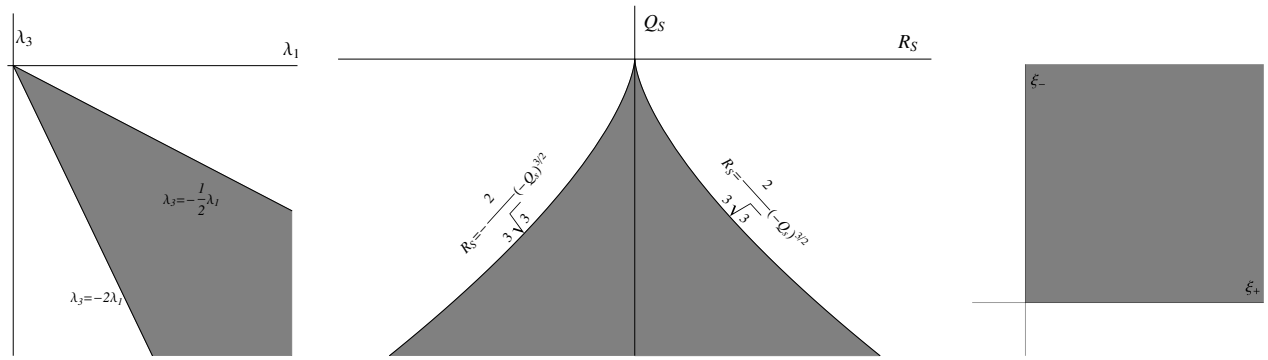
$$\xi_+ = (-Q_S)^{3/2} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}R_S, \tag{1.3}$$

$$\xi_- = (-Q_S)^{3/2} - \tfrac{3\sqrt{3}}{2}R_S. \tag{1.4}$$

Области определения инвариантов в бесследовом случае изображены на рисунке 1.1. Поясним принцип их нахождения.

1. Для максимального и минимального собственного значения область определения можно найти из соотношения упорядоченности собственных значений:

$$\lambda_1 \geqslant \overbrace{-\lambda_1 - \lambda_3}^{\lambda_2} \geqslant \lambda_3.$$



а) λ_1 и λ_3 б) Q_S и R_S в) ξ_+ и ξ_-

Рисунок 1.1 — Области определения различных инвариантов тензора скоростей деформации (серая область).

2. Для Q_S и R_S удобно воспользоваться характеристическим уравнением на собственные значения, которое в бесследовом случае имеет канонический вид:
$$\lambda^3 + Q_S\lambda + R_S = 0.$$
Чтобы у последнего уравнения существовало три действительных решения необходимо выполнение условия:
$$4R_S^2 + 27Q_S^3 \leqslant 0.$$

3. Выражение $4R_S^2 + 27Q_S^3 \leqslant 0$ может быть переписано через инварианты ξ_+ и ξ_-:
$$\xi_+\xi_- \geqslant 0.$$

Кроме того, могут введены нормированные собственные значения β и s:
$$s = \frac{-3\sqrt{6}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}R_S}{2\left(-Q_S\right)^{3/2}}, \tag{1.5}$$
$$\beta = \frac{\sqrt{6}\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}. \tag{1.6}$$

Область определения обоих инвариантов — отрезок $[-1;1]$ [83; 84]. Несложно показать, что эти инварианты выражаются друг через друга [83]:
$$\begin{cases} \beta = 2\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin s\right) \\ s = \beta\left(3-\beta^2\right)/2. \end{cases} \tag{1.7}$$

Их статистика численно и экспериментально исследована в большом количестве работ [82—89]. В работе Ланда и Роджерса [85] статистика этих

инвариантов численно исследована для случая гауссового распределения скоростей.

В данной главе обнаружены и проанализированы некоторые особенности распределения тензора скоростей деформации и его инвариантов для различных статистически изотропных несжимаемых течений. В разделе 1.2 выведены аналитические соотношения, связывающие различные функции распределения; они составляют математическую основу главы. В разделе 1.3 производится аналитическое исследование статистики тензора скоростей деформации в случае обратимой статистики поля скорости: показана вырожденность обратимой статистики в инвариантах ξ_+ и ξ_-, доказана универсальность распределения нормированных собственных значений β и s, найдены распределения инвариантов в случае гауссового поля скорости. В разделе 1.4 произведен численный анализ турбулентной статистики тензора скоростей деформации: обнаружена вырожденность турбулентной статистики в инвариантах ξ_+ и ξ_-, из которой также как и в гауссовом случае следует универсальность распределения нормированных собственных значений β и s, найдена двухпараметрическая логнормальная аппроксимация распределения тензора скоростей деформация и исследована зависимость параметров аппроксимации от числа Рейнольдса. В разделе 1.5 сформулированы основные результаты и выводы главы.

1.2 Соотношения между функциями распределения различных инвариантов тензора скоростей деформации

1.2.1 Функция распределения первой системы инвариантов

Введем обозначение для функции распределения элементов тензора скоростей деформации:

$$f_{\mathbf{S}}\left(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{23}\right) = f_{\mathbf{S}}\{\sigma\}. \tag{1.8}$$

Здесь для удобства введен мульти-аргумент $\{\sigma\} = (\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{23})$. Обозначение для аргумента (σ) отличается от нижнего индекса в наименовании

функции распределения ($\mathbf{S}$), обозначающего физическую величину, распределение которой задает функция. Это соответствует математически строгой системе обозначений для функций распределения [90], которая выбрана в диссертации.

Функция распределения тензора скоростей деформации, ввиду изотропии потока, может зависеть от своих аргументов только в комбинации инвариантов вращения. Например, такими комбинациями могут быть выбраны $Q_S\left(S_{11},S_{22},S_{12},S_{13},S_{23}\right) = Q_S\{S\} = -\frac{1}{2}S_{ij}S_{ji}$ и $R_S\{S\} = -\frac{1}{3}S_{ij}S_{jk}S_{ki}$ или собственные значения $\lambda_1\{S\}$ и $\lambda_3\{S\}$:

$$f_S\{\sigma\} = f_S^{Q_S R_S}\left(-\tfrac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji}, -\tfrac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}\right) = \tag{1.9}$$

$$= f_S^{\lambda_1\lambda_3}\left(\lambda_1\{\sigma\},\lambda_3\{\sigma\}\right), \tag{1.10}$$

где верхние индексы означают, в каких комбинациях входят элементы тензора в этих обозначениях. Для того, чтобы выразить функцию распределения собственных значений тензора через функцию распределения тензора, необходимо преобразовать переменные, по которым считается мера [90]:

$$f_S\{\sigma\}\underbrace{\mathrm{d}\sigma_{11}\mathrm{d}\sigma_{22}\mathrm{d}\sigma_{12}\mathrm{d}\sigma_{13}\mathrm{d}\sigma_{23}}_{\mathrm{d}^5\{\sigma\}} = f_S^{\lambda_1\lambda_3}\left(\lambda_1\{\sigma\},\lambda_3\{\sigma\}\right)\mathrm{d}^5\{\sigma\} =$$

$$= f_S^{\lambda_1\lambda_3}\left(x,y\right)\underbrace{\left|\left|\frac{\partial\left(S_{11},S_{22},S_{12},S_{13},S_{23}\right)}{\partial(\lambda_1,\lambda_3,P_1,P_2,P_3)}\right|\right|_{\substack{\lambda_1=x,\lambda_3=y\\ P_1=p_1,P_2=p_2\\ P_3=p_3}}}_{J(x,y,p_1,p_2,p_3)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}p_3 =$$

$$= f_S^{\lambda_1\lambda_3}\left(x,y\right)\left|J(x,y,p_1,p_2,p_3)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}p_3, \tag{1.11}$$

где $P_1 = P_1\{S\}$, $P_2 = P_2\{S\}$ и $P_3 = P_3\{S\}$ — это произвольные комбинации элементов тензора, не выражающиеся через λ_1, λ_3 и друг друга, а $J(x,y,p_1,p_2,p_3)$ — якобиан преобразования от элементов тензора к новым переменным. Таким образом, функция распределения собственных значений выражается через функцию распределения тензора следующим образом:

$$f_{\lambda_1\lambda_3}(x,y) = f_S^{\lambda_1\lambda_3}(x,y) \times \iiint \left|J(x,y,p_1,p_2,p_3)\right|\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}p_3. \tag{1.12}$$

Тройной интеграл в последнем соотношении может быть вычислен (см. [91] и ссылки в ней):

$$\iiint |J(x,y,p_1,p_2,p_3)|\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}p_3 = A|(x-y)(2x+y)(x+2y)|, \tag{1.13}$$

где A — константа, которая, как будет показано в разделе 1.3.2, равна $2\pi^2$. Таким образом, подстановка (1.13) в (1.12) дает выражение функции распределения собственных значений тензора скоростей деформации $f_{\lambda_1\lambda_3}(x,y)$ через функцию распределения самого тензора (в области определения первой $\{x \geqslant -x-y; y \leqslant -x-y\}$, изображенной на рисунке 1.1а):

$$f_{\lambda_1\lambda_3}(x,y) = 2\pi^2\big|(x-y)\,(2x+y)\,(x+2y)\big| f_S^{\lambda_1\lambda_3}(x,y). \tag{1.14}$$

1.2.2 Функция распределения второй системы инвариантов

Область определения инвариантов Q_S и R_S, изображенная на рисунке 1.1б, ограничена кривыми $R_S = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(-Q_S\right)^{3/2}$ в нижней полуплоскости. Пусть $f_{Q_SR_S}(q,r)$ — функция распределения Q_S и R_S. Для нахождения соотношения между $f_{\lambda_1\lambda_3}(x,y)$ и $f_{Q_SR_S}(q,r)$ необходимо вычислить якобиан преобразования от переменных $(Q_S; R_S)$ к переменным $(\lambda_1; \lambda_3)$. Простым вычислением можно показать, что этот якобиан равен $\big|(x-y)\,(2x+y)\,(x+2y)\big|$. Таким образом,

$$\begin{aligned} f_{\lambda_1\lambda_3}(x,y) = &\big|(x-y)\,(2x+y)\,(x+2y)\big|\times \\ &\times f_{Q_SR_S}\left(-\left(x^2+xy+y^2\right), xy\,(x+y)\right). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Сравнивая выражения (1.14) и (1.15), а также (1.9) и (1.10), получается простое соотношение между $f_{Q_SR_S}(q,r)$ и $f_S^{Q_SR_S}(q,r)$:

$$f_{Q_SR_S}(q,r) = 2\pi^2\, f_S^{Q_SR_S}(q,r). \tag{1.16}$$

Из (1.16) очевидным образом следует очень важное обратное выражение функции распределения тензора скоростей деформации (пяти аргументов) через функцию распределения инвариантов Q_S и R_S (двух аргументов):

$$f_S\{\sigma\} = \tfrac{1}{2\pi^2}\, f_{Q_SR_S}\left(-\tfrac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji}, -\tfrac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}\right). \tag{1.17}$$

Множитель (проинтегрированный по трем переменным якобиан) в выражениях (1.16) и (1.17) является числом, что заранее неочевидно.

1.2.3 Функция распределения третей системы инвариантов

Функция распределения $f_{\xi_+\xi_-}(x_+,x_-)$ инвариантов ξ_+ и ξ_- (область определения изображена на рисунке 1.1в) также может быть выражена через другие функции распределения путем вычисления соответствующих якобианов преобразования. Например, для $f_{Q_SR_S}(q,r)$:

$$f_{Q_SR_S}(q,r) = \frac{9\sqrt{3}}{2}(-q)^{1/2} f_{\xi_+\xi_-}\left((-q)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}r, (-q)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}r\right), \tag{1.18}$$

$$f_{\xi_+\xi_-}(x_+,x_-) = \frac{2^{4/3}}{9\sqrt{3}(x_++x_-)^{1/3}} f_{Q_SR_S}\left(-\frac{1}{2^{2/3}}(x_+ + x_-)^{2/3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}(x_+ - x_-)\right). \tag{1.19}$$

1.2.4 Функции распределения нормированных собственных значений тензора

Функцию распределения нормированного собственного значения s можно найти с помощью следующего интегрального преобразования:

$$f_s(z) = \int_{-\infty}^{0} dq \int_{-\frac{2}{3\sqrt{3}}(-q)^{3/2}}^{\frac{2}{3\sqrt{3}}(-q)^{3/2}} f_{Q_SR_S}(q,r)\,\delta\left(z - \frac{3\sqrt{3}r}{2(-q)^{3/2}}\right)\mathrm{d}r. \tag{1.20}$$

Здесь $\delta(z - g(q,r))$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная на поверхности $g(q,r)$ [92], свернутая с $f_{Q_SR_S}$ в ее области определения, изображенной на рисунке 1.1б. Преобразование (1.20) можно упростить к виду:

$$f_s(z) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} f_{Q_SR_S}\left(-t^2, t^3\frac{2z}{3\sqrt{3}}\right) t^4 \mathrm{d}t, \tag{1.21}$$

где $z \in [-1;1]$. Используя связь между нормированными собственными значениями (1.7) и преобразование (1.21), можно также вычислить преобразование для функции распределения β:

$$f_\beta(z) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - z^2\right) \int_0^{+\infty} f_{Q_SR_S}\left(-t^2, t^3\frac{z\left(3-z^2\right)}{3\sqrt{3}}\right) t^4 \mathrm{d}t, \tag{1.22}$$

где $z \in [-1;1]$.

1.3 Статистика тензора скоростей деформации в случае обратимой по времени статистики скорости. Аналитический анализ

1.3.1 Вырожденность обратимой статистики

Статистическая необратимость является следствием превалирования прямых процессов над обратными, то есть асимметрии функций распределения. Напротив, обратимая статистика должна в среднем содержать равное количество прямых и обратных процессов, что выражается в том факте, что распределение тензора скоростей деформации S_{ij} зависит только от квадратичного инварианта $Q_S\{\sigma\}$ [93]. Поэтому из (1.16) следует, что функция распределения инвариантов Q_S и R_S также зависит только от q в этом случае:

$$f_{Q_S R_S}(q,r) = f_{rev}(q)\,, \tag{1.23}$$

где f_{rev} — некоторая одномерная функция. Таким образом статистика в этом случае вырождается, становится квазиодномерной. Вырождение статистики в этом случае может быть также выражено через инварианты ξ_+ и ξ_-. Действительно, подставляя (1.23) в (1.19), имеем:

$$f_{\xi_+\xi_-}(x_+,x_-) = \frac{2^{4/3} f_{rev}\left(-\frac{1}{2^{2/3}}(x_+ + x_-)^{2/3}\right)}{9\sqrt{3}(x_+ + x_-)^{1/3}} = g_{rev}(x_+ + x_-)\,, \tag{1.24}$$

где g_{rev} — одномерная функция. Обратим внимание, что одновременная квазиодномерность обеих статистик связана с тем, что якобиан преобразования от $f_{Q_S R_S}$ к $f_{\xi_+\xi_-}$ есть функция $(x_+ + x_-)$. Функция $f_{\lambda_1\lambda_3}$, например, из-за якобиана не является квазиодномерной:

$$f_{\lambda_1\lambda_3}(x,y) = \left|(x-y)(2x+y)(x+2y)\right| f_{rev}\left(-x^2 - xy - y^2\right). \tag{1.25}$$

1.3.2 Случай гауссового распределения

Важнейшим частным случаем обратимой статистики является гауссова статистика. Соотношения, выведенные в разделе 1.2 позволяют вычислить

функции распределения всех рассматриваемых систем инвариантов в гауссовом случае. В статье [94] показано, что в случае изотропного несжимаемого гауссового поля скорости компоненты тензора скоростей деформации распределены следующим образом:

$$f_S\{\sigma\} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{5}{2\pi\langle -Q_S\rangle}\right)^{5/2}\exp\left[-\frac{5}{2\langle -Q_S\rangle}\left(\sigma_{11}^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2\right)\right], \quad (1.26)$$

где $\langle -Q_S\rangle$ — среднее значение инварианта $-Q_S$. Подставляя последнее выражение в (1.14) получаем выражение для функции распределения собственных значений тензора (см. рисунок 1.2а):

$$f_{\lambda_1\lambda_3}(x,y) = \frac{\sqrt{3}A}{2}\left(\frac{5}{2\pi\langle -Q_S\rangle}\right)^{5/2}\left|(x-y)(2x+y)(x+2y)\right|\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{5}{2\langle -Q_S\rangle}\left(x^2+xy+y^2\right)\right]. \quad (1.27)$$

Используя нормировку функции распределения $f_{\lambda_1\lambda_3}$ можно вычислить константу A без прямого вычисления тройного интеграла в (1.13):

$$A = 2\pi^2. \quad (1.28)$$

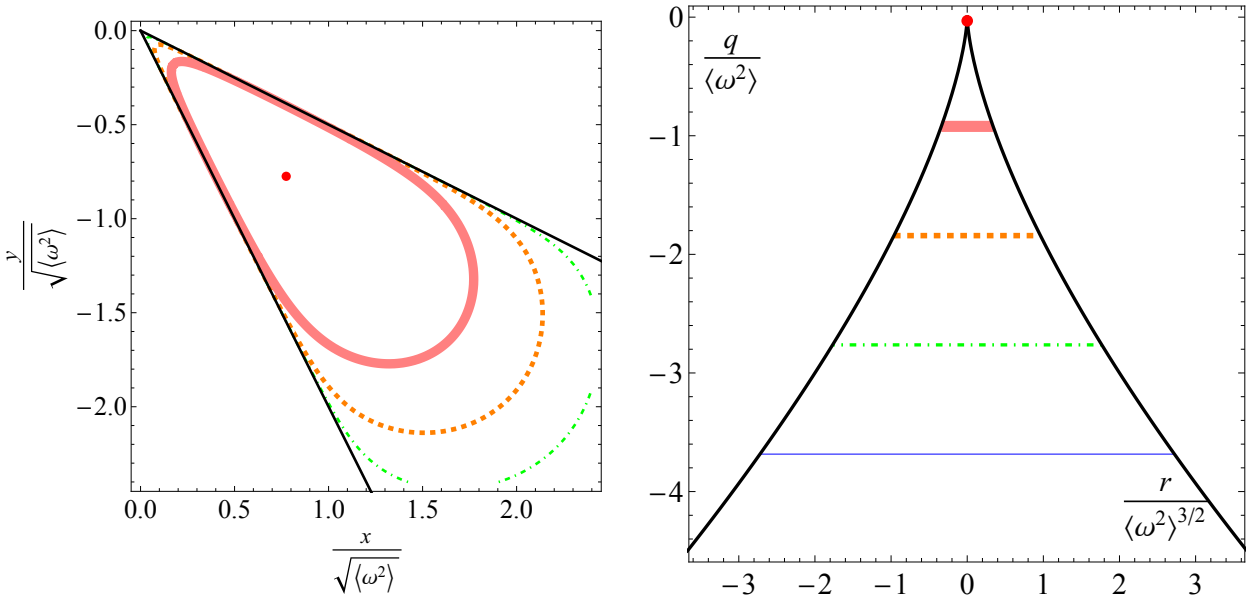
Далее, из (1.16) можно найти функцию распределения Q_S и R_S (см. рисунок 1.2б):

$$f_{Q_SR_S}(q,r) = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(\frac{5}{2\langle -Q_S\rangle}\right)^{5/2}\exp\left[\frac{5}{2\langle -Q_S\rangle}q\right]. \quad (1.29)$$

Наконец, из (1.19) может быть вычислена функция распределения ξ_+ и ξ_-:

$$f_{\xi_+\xi_-}(x_+,x_-) = \frac{8}{9\sqrt{\pi}(x_++x_-)^{1/3}}\left(\frac{5}{2^{5/3}\langle -Q_S\rangle}\right)^{5/2}$$
$$\times\exp\left[-\frac{5}{2^{5/3}\langle -Q_S\rangle}\left(x_++x_-\right)^{2/3}\right]. \quad (1.30)$$

Для этой функции имеется особенность в нуле. Ее график изображен на рисунке 1.3 (из-за отсутствия конечного максимума выбрано конкретное значение $\langle -Q_S\rangle = 125$, равное значению в исследуемом ниже численном расчете изотропной турбулентности.).



а) λ_1 и λ_3 б) Q_S и R_S

Рисунок 1.2 — Функции распределения инвариантов $(Q_S; R_S)$ и $(\lambda_1; \lambda_3)$ в гауссовом случае. Максимальное значение функций (красная точка) для $\langle -Q_S \rangle = 125$ примерно 1.6×10^{-2} и 5.5×10^{-5}, соответственно. Оси обезразмерены делением на $\langle -Q_S \rangle$ в соответствующих степенях: в таком масштабе линии уровня функций универсальны. Различие между изолиниями составляет один порядок: 0 для красной точки (максимум функции), -1 для розового жирного контура, -2 для оранжевого пунктирного, -3 для зеленого штрихпунктирного и -4 для синего тонкого.

1.3.3 Универсальное распределение нормированных собственных значений

Подставим выражение (1.23) для произвольной обратимой статистики в (1.21):

$$f_s(z) = \tfrac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} f_{rev}\left(-t^2\right) t^4 \mathrm{d}t. \tag{1.31}$$

Поскольку выражение в правой части не зависит от z, функция распределения s является константой. Из условия нормировки функции распределения следует, что такой константой может быть только $1/2$:

$$f_s(z) = \tfrac{1}{2}. \tag{1.32}$$

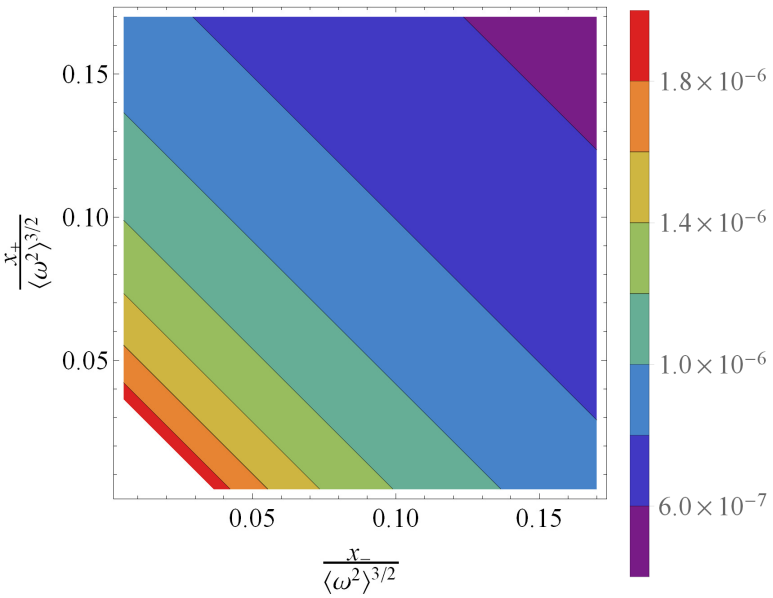


Рисунок 1.3 — Функция распределения инвариантов ξ_+ и ξ_- в гауссовом случае при $\langle -Q_S\rangle = 125$. Оси обезразмерены делением на $\langle -Q_S\rangle^{3/2}$. Белая область вблизи начала координат соответствует особенности функции. Форма изолиний функции отражает ее квазиодномерность с аргументом $(x_+ + x_-)$.

Аналогично, можно показать, что для функции распределения β:

$$f_\beta(z) = \tfrac{3}{4}\left(1 - z^2\right). \tag{1.33}$$

Таким образом, функции распределения s и β универсальны для статистически обратимых распределений. Они изображены на рисунке 1.4. Вычисленные аналитически $f_s(z)$ и $f_\beta(z)$ находятся в полном соответствии с предыдущими численными расчетами для гауссового поля скорости [85] (красная штрих-пунктирная и синяя пунктирная кривые на рисунке 1.4 совпадают с кривыми на рисунках 1(a) и (b) в [85] соответственно). Таким образом, результаты настоящего раздела обобщают численные результаты [85] на случай произвольной обратимой статистики поля скорости.

Обратим внимание на сложившуюся в литературе неточность в интерпретации функций распределения β и s [85; 95]. Считается, что постоянство функции распределения f_s в гауссовом случае отвечает равнораспределенности отношений собственных значений. Иными словами, функция распределения собственных значений считается в гауссовом случае радиально симметричной в своей области определения. Аналитическое выражение (1.27), найденное путем вычисления якобиана, и рисунок 1.2a доказывают, что разные отношения

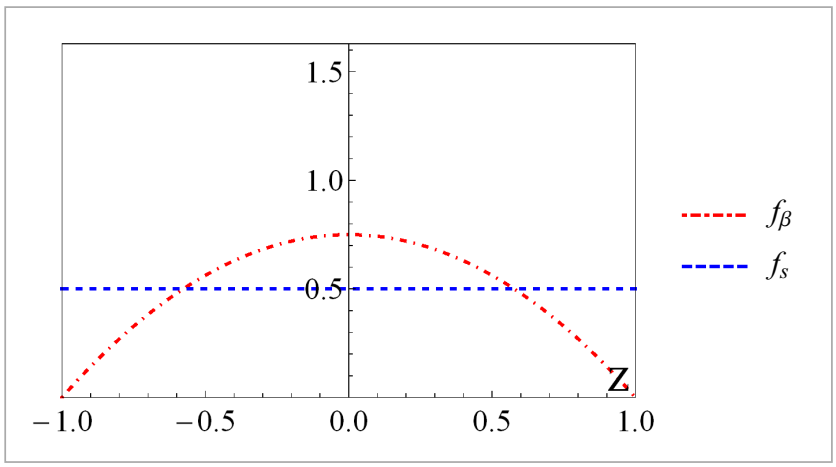


Рисунок 1.4 — Функции распределения (1.32) и (1.33) нормированных собственных значений s и β в статистически обратимом случае.

собственных значений имеют разную вероятность, а крайние значения, соответствующие границе области определения $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 1 : 1 : -2$ и $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 2 : -1 : -1$ имеют нулевую плотность вероятности.

1.4 Статистика тензора скоростей деформации в изотропной турбулентности. Численный анализ

1.4.1 Численные данные

Исследование случая изотропной турбулентности произведено численно по результатам симуляций изотропного турбулентного потока университета Джона Хопкинса [30—32]. В диссертации используются два расчета[1], которые мы сокращенно назовем JHTDB_1 и JHTDB_2. В JHTDB_1 помещен прямой численный расчет турбулентности на 1024^3 узлах. Число Рейнольдса на тейлоровском масштабе достигает $Re_\lambda \simeq 430$, а отношение колмогоровского масштаба к масштабу накачки $\eta/L \simeq 2 \times 10^{-3}$. Продолжительность рассчитанной динамики по времени превышает 5 характерных времен оборота крупного вихря L/V. В JHTDB_2 помещен прямой численный расчет на 4096^3 узлах потока с числом Рейнольдса $Re_\lambda \simeq 610$ и отношением колмогоровского масштаба

[1] JHTDB_1 — https://doi.org/10.7281/T1KK98XB,
JHTDB_2 — https://doi.org/10.7281/T1DN4363.

к масштабу накачки $\eta/L \simeq 10^{-3}$. При этом есть возможность обращаться к данным единственного момента времени в расчете.

Основной анализ в этом разделе будет применен к одномоментной статистике из JHTDB_1, которую сокращенно назовем «JHTDB-распределением». Поскольку расчеты производятся в пространстве волновых векторов, условие несжимаемости при обратном преобразовании Фурье немного нарушается. Поэтому при расчете значений инвариантов S_{33} берется равным $-S_{11} - S_{22}$.

1.4.2 Вырождение статистики

На рисунке 1.5 построена гистограмма совместных значений ξ_+ и ξ_- в «JHTDB-распределении». Видно, что распределение инвариантов является квазиодномерным, то есть зависит от их линейной комбинации:

$$\xi_a = \tfrac{1+a}{2}\xi_+ + \tfrac{1-a}{2}\xi_-, \tag{1.34}$$

где $a \sim -0.6 \div -0.5$ — фиксированный параметр симметрии. Таким образом функция распределения ξ_+ и ξ_- оказывается вырожденной в «JHTDB-распределении». Вырождение обратимой статистики, рассмотренное в разделе 1.3.1, можно считать частным случаем вырождения (1.34) с $a = 0$. Важно заметить, что при $a \neq 0$ функция распределения инвариантов Q_S и R_S уже не является квазиодномерной из-за якобиана в (1.18). Таким образом, вырождение статистики в однородной турбулентности явно видно именно в инвариантах ξ_+ и ξ_-, а не Q_S и R_S, численному и экспериментальному исследованию которых посвящен ряд работ [88; 96—99]. Инвариант вращения ξ_a, введенный в (1.34) будет полезен в дальнейшем рассмотрении. Он может быть выражен также через инварианты Q_S и R_S:

$$\xi_a = (-Q_S)^{3/2} + \tfrac{3\sqrt{3}a}{2}R_S. \tag{1.35}$$

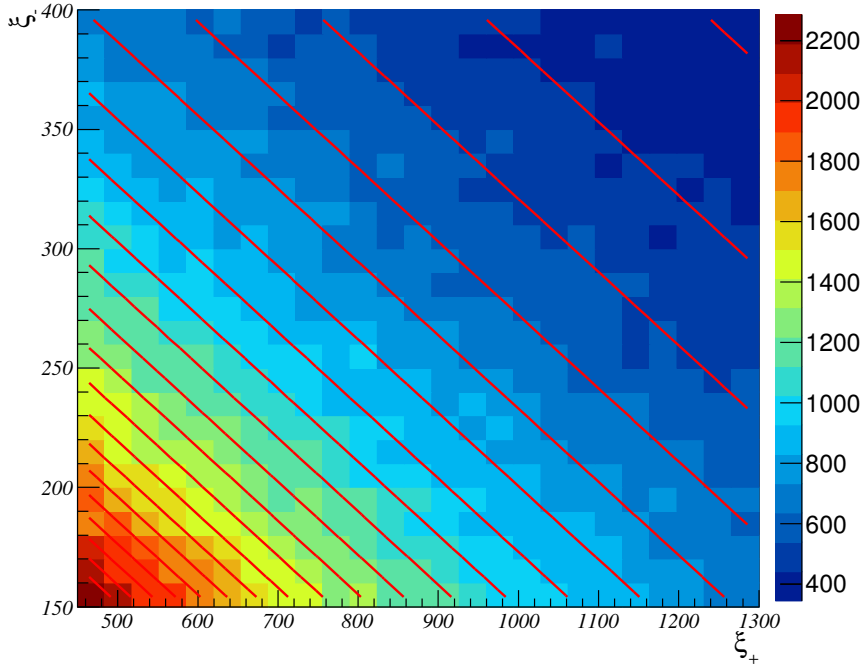


Рисунок 1.5 — Гистограмма инвариантов ξ_+ и ξ_- в «JHTDB-распределении». Красные линии отражают симметрию. Масштабы горизонтальной и вертикальной осей различные, то есть линии симметрии скошены к горизонтали.

1.4.3 Оценка параметра вырождения

Наличие вырождения (1.34) однозначно определяет функции распределения s и β, аналогично случаю обратимой статистики, рассмотренному в разделе 1.3.3. Действительно, представим симметрию в виде:

$$f_{\xi_+\xi_-}\left(x_+,x_-\right) = f\left(\tfrac{1+a}{2}x_+ + \tfrac{1-a}{2}x_-\right), \tag{1.36}$$

где f некоторая одномерная функция. Используя (1.18), имеем:

$$f_{Q_S R_S}\left(q,r\right) = \tfrac{9\sqrt{3}}{2}\left(-q\right)^{1/2} f\left(\left(-q\right)^{3/2} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}ar\right). \tag{1.37}$$

Подстановка (1.37) в (1.21) приводит к следующему выражению для функции распределения s:

$$f_s\left(z\right) = 6\int_0^{+\infty} f\left(t^3\left(1+az\right)\right)t^5\mathrm{d}t. \tag{1.38}$$

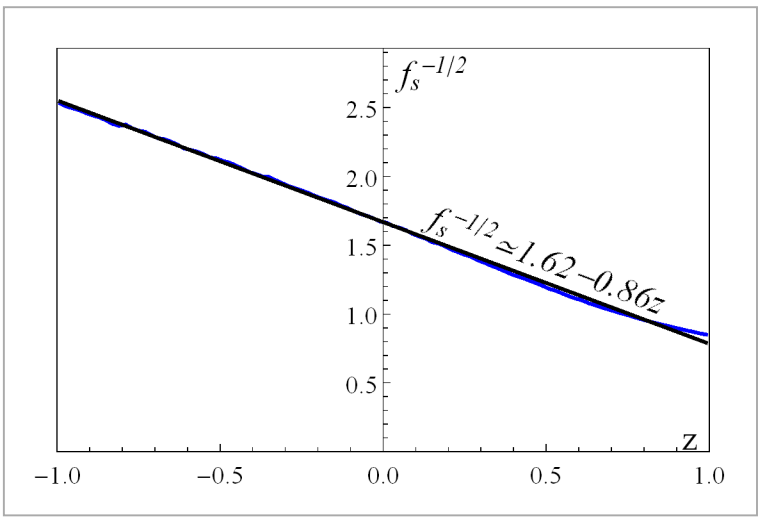


Рисунок 1.6 — Зависимость $f_s^{-1/2}$ от z для «JHTDB-распределения» и линейная аппроксимация (1.42) вместе с аналитическим выражением для нее.

Домножение переменной интегрирования t на $\sqrt[3]{1+az}$ с последующей заменой приводит к универсальности функции распределения s:

$$f_s\left(z\right) \propto \frac{1}{\left(1+az\right)^2}. \tag{1.39}$$

Нормировка f_s окончательно приводит к:

$$f_s\left(z\right) = \frac{\left(1-a^2\right)}{2\left(1+az\right)^2}. \tag{1.40}$$

Аналогично получаем универсальность функции распределения β:

$$f_\beta\left(z\right) = \frac{3}{4}(1-z^2)\frac{\left(1-a^2\right)}{\left(1+\frac{a}{2}z(3-z^2)\right)^2}. \tag{1.41}$$

Для нахождения параметра симметрии a, соотношение (1.40) можно переписать в виде линейной зависимости от z:

$$\sqrt{\frac{1}{f_s(z)}} = \sqrt{\frac{2}{1-a^2}}\left(1+az\right). \tag{1.42}$$

Для «JHTDB-распределения» эта зависимость подтверждается рисунком 1.6. Применяя метод наименьших квадратов, определяем a для «JHTDB-распределения»:

$$a \simeq -0.53. \tag{1.43}$$

Найденная линейная аппроксимация также изображена на рисунке 1.6. Обратим внимание, что в пределе $a \to 0$ выражения (1.40) и (1.41) переходят в (1.32) и (1.33), соответственно.

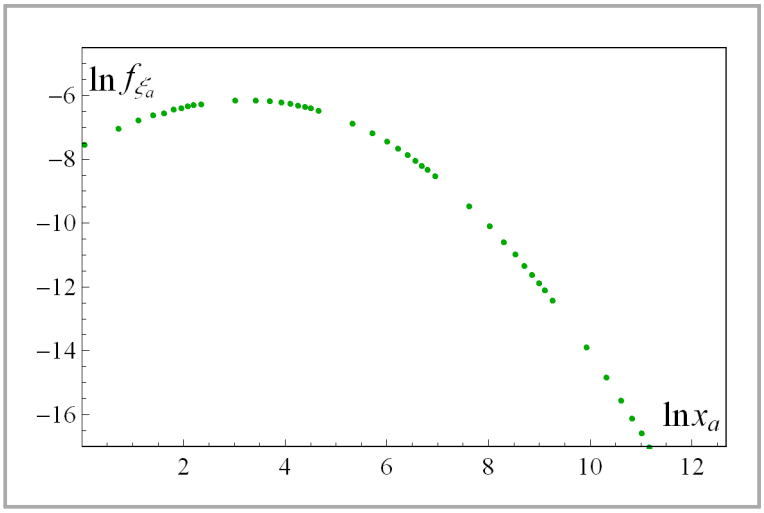


Рисунок 1.7 — «JHTDB-распределение» инварианта ξ_a в логарифмическом масштабе.

1.4.4 Логнормальность статистики

Поскольку распределение $f_{\xi_+\xi_-}$ квазиодномерно, можно получить взаимно-однозначное соотношение между этой двумерной функцией распределения и одномерной функцией распределения инварианта ξ_a:

$$f_{\xi_+\xi_-}\left(x_+,x_-\right) = \frac{1-a^2}{4\left(\frac{1+a}{2}x_+ + \frac{1-a}{2}x_-\right)} f_{\xi_a}\left(\frac{1+a}{2}x_+ + \frac{1-a}{2}x_-\right). \tag{1.44}$$

Функция распределения f_{ξ_a}, построенная на рисунке 1.7 в логарифмическом масштабе, отражает наличие логнормальности. Таким образом, рассмотрим логнормальную аппроксимацию общего вида:

$$f_{\xi_a}\left(x_a\right) = \frac{\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{\pi}\langle -Q_S\rangle^{1+\alpha}} \mathrm{e}^{-\frac{(1+\alpha)^2}{4\Gamma}} x_a^{\alpha} \exp\left[-\Gamma\left(\ln\left(\frac{x_a}{\langle -Q_S\rangle}\right)\right)^2\right], \tag{1.45}$$

где α и $\Gamma > 0$ — подгоночные параметры, а $\langle -Q_S\rangle \simeq 125$ введен в аппроксимации для того, чтобы обезразмерить основание логарифма.

Подстановка (1.45) в (1.44) и (1.18) и расчет $\langle -Q_S\rangle$ дают новое ограничение на распределение (1.45). Результат удобно представить через распределение нормированного инварианта η_a:

$$\eta_a = \frac{\xi_a}{\left(\gamma\langle -Q_S\rangle\right)^{3/2}}, \tag{1.46}$$

где γ зависит только от a:

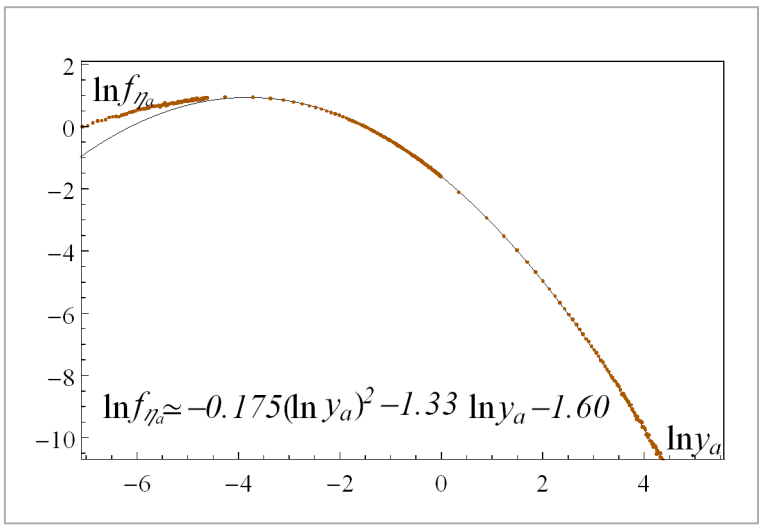


Рисунок 1.8 — «JHTDB-распределение» инварианта η_a (коричневые точки) и его аппроксимация (1.50) (черная линия поверх точек) в логарифмическом масштабе.

$$\gamma = \frac{10}{3}\frac{a\left(1-a^2\right)^{2/3}}{(1+a)^{5/3}-(1-a)^{5/3}} \simeq 0.81. \tag{1.47}$$

Функции распределения ξ_a и η_a очевидно связаны следующими соотношениями:

$$f_{\xi_a}(x_a) = \frac{1}{(\gamma\langle -Q_S\rangle)^{3/2}} f_{\eta_a}\left(\frac{x_a}{(\gamma\langle -Q_S\rangle)^{3/2}}\right), \tag{1.48}$$

$$f_{\eta_a}(y_a) = (\gamma\langle -Q_S\rangle)^{3/2} f_{\xi_a}\left((\gamma\langle -Q_S\rangle)^{3/2} y_a\right). \tag{1.49}$$

Легко показать из (1.45), что

$$f_{\eta_a}(y_a) = \left(\sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{36\Gamma}}\right) y_a^{-4/3} \exp\left[-\Gamma\left(\ln y_a\right)^2\right]. \tag{1.50}$$

Таким образом Γ может быть определена численно. Результаты анализа представлены на рисунке 1.8:

$$\Gamma \simeq 0.175. \tag{1.51}$$

Из рисунка 1.8 также видно, что логнормальность нарушается для малых значений инвариантов ($\eta_a \lesssim 5 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \xi_a \lesssim 5$). В разделе 1.4.7 будет предложен естественный механизм такого отклонения.

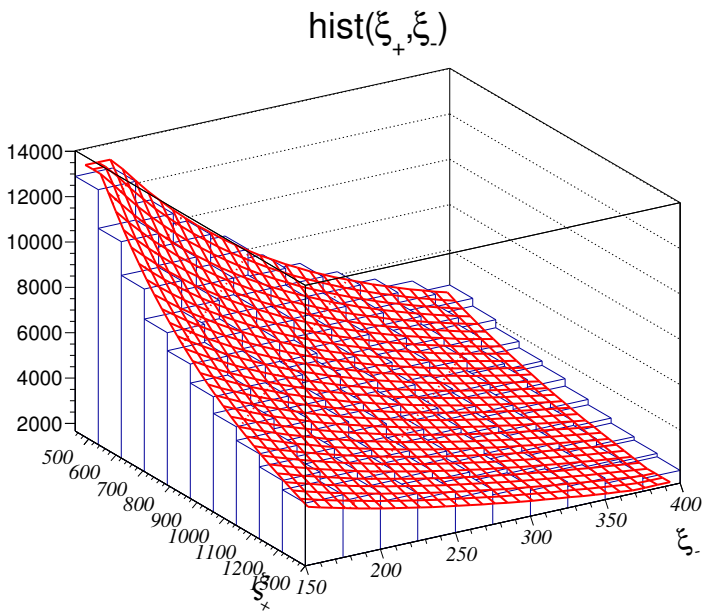


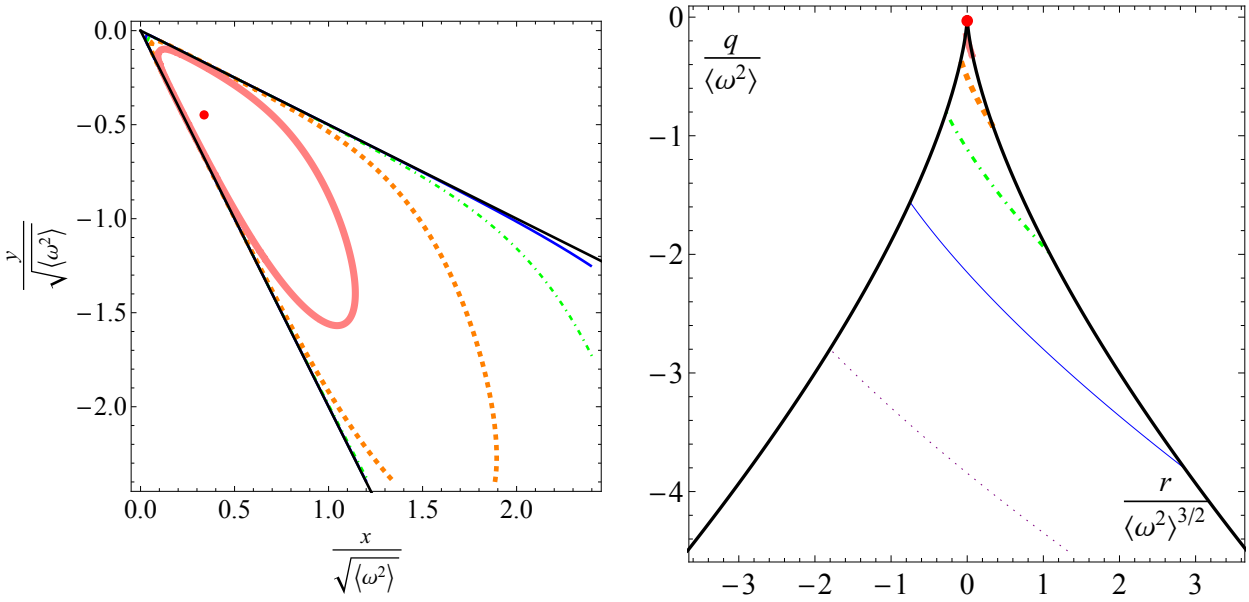
Рисунок 1.9 — Сравнение гистограммы ξ_+ и ξ_- «JHTDB-распределения» (синие колонки) и аппроксимации (красная поверхность).

1.4.5 Двухпараметрическая аппроксимация

Используя соотношения раздела 1.2, из аппроксимации (1.50) можно получить двухпараметрическую аппроксимацию всех инвариантов вращения тензора скоростей деформации в случае «JHTDB-распределения»: ξ_+ и ξ_- из (1.44), Q_S и R_S из (1.19), λ_1 и λ_3 из (1.15). Далее, можно получить аппроксимацию распределения элементов тензора из (1.17). Поскольку сами выражения получатся весьма громоздкими, мы проанализируем полученную аппроксимацию в основном с использованием графиков.

На рисунке 1.9 сравниваются аппроксимация распределения ξ_+ и ξ_- с гистограммой «JHTDB-распределения». Рисунок наглядно показывает согласие найденной аппроксимации и «JHTDB-распределения».

Аппроксимации «JHTDB-распределений» $f_{\lambda_1\lambda_3}$ и $f_{Q_SR_S}$ изображены на рисунке 1.10. Представляется интересным сравнить полученную аппроксимацию с гауссовым случаем, изображенном на рисунке 1.2. Во-первых, существенным отличием полученных графиков является асимметричность графиков «JHTDB-распределения», соответствующая необратимости турбулентной статистики. Во-вторых, отличен характер затухания: максимумы функций более локализованы и выражены в «JHTDB-распределении». Наиболее ярко это видно на примере $f_{Q_SR_S}$, максимум которой в «JHTDB-распределении» (1.05×10^{-3}) при-



а) λ_1 и λ_3 б) Q_S и R_S

Рисунок 1.10 — Аппроксимации «JHTDB-распределений» инвариантов $(Q_S; R_S)$ и $(\lambda_1; \lambda_3)$. $\langle -Q_S\rangle = 125$, $a = -0.53$, $\Gamma = 0.175$. Максимальное значение функций (красная точка) примерно 3.1×10^{-2} и 1.05×10^{-3}, соответственно. Оси обезразмерены делением на $\langle -Q_S\rangle$ в соответствующих степенях: в таком масштабе линии уровня функций универсальны. Различие между изолиниями составляет один порядок: 0 для красной точки (максимум функции), -1 для розового жирного контура, -2 для оранжевого пунктирного, -3 для зеленого штрихпунктирного, -4 для синего тонкого и -5 для фиолетового точечного.

мерно в 20 раз выше максимума в гауссовом распределении с тем же значением $\langle -Q_S\rangle$ (5.5×10^{-5}). На бесконечности гауссовы функции затухают значительно быстрее, что отражает внутреннюю перемежаемость турбулентной статистики [11, глава 8].

Поскольку функция распределения тензора скоростей деформации просто выражается через функцию распределения Q_S и R_S из (1.17), представим выражение для аппроксимации последней в общем виде:

$$f_{Q_S R_S}(q,r) = \left\{ \sqrt{\frac{3\Gamma}{\pi}} \frac{9\left(1-a^2\right)}{8} \mathrm{e}^{-\frac{1}{36\Gamma}} \sqrt{\gamma\langle -Q_S\rangle} \right\} (-q)^{1/2} \times \tag{1.52}$$

$$\times \left((-q)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} ar \right)^{-7/3} \exp\left[-\Gamma \left(\ln \frac{(-q)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} ar}{(\gamma\langle -Q_S\rangle)^{3/2}} \right)^2 \right]. \tag{1.53}$$

1.4.6 Зависимость параметров аппроксимации от числа Рейнольдса

Аналогичный анализ может быть произведен для JHTDB_2 с более высоким числом Рейнольдса, чем в JHTDB_1 (см. описание параметров расчетов на странице 28). Для этих данных имеет место вырождение с тем же $a = -0.53$. Параметр Γ оказывается несколько ниже: $\Gamma = 0.155$. Таким образом, возникает предположение об универсальности a и зависимости Γ от числа Рейнольдса. Такой вывод подкрепляет и ряд других наблюдений и расчетов изотропной турбулентности. Действительно, в разделе 1.4.3 было показано, что при наличии вырождения, функции распределения нормированных собственных значений f_β и f_s зависят только от параметра вырождения a. Между тем f_β и f_s количественно повторяют друг друга в различных численных и экспериментальных работах, посвященных изотропной турбулентности [82—87; 89; 95]. Таким образом, a либо очень слабо, либо вообще не зависит от числа Рейнольдса. Что касается параметра Γ, то в таком случае он остается единственным, отвечающим за зависимость дисперсии и степени перемежаемости от числа Рейнольдса (как обсуждалось во введении, они увеличиваются с ростом числа Рейнольдса [33; 35—37]).

Количественные характеристики перемежаемости асимметрия S_∇ и эксцесс F_∇, определенные во введении в (10), могут быть выражены через a и Γ из аппроксимации (1.52) и формул, выведенных в [34]:

$$S_\nabla = \frac{\frac{24}{105}\langle R_S\rangle}{\left(\frac{4}{15}\langle -Q_S\rangle\right)^{3/2}} = -\frac{100\sqrt{2}a^{5/2}}{21\sqrt{3}\left((1+a)^{5/3}-(1-a)^{5/3}\right)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{1/12\Gamma} \simeq 0.34\mathrm{e}^{1/12\Gamma}, \tag{1.54}$$

$$F_\nabla = \frac{\frac{16}{105}\langle Q_S^2\rangle}{\left(\frac{4}{15}\langle -Q_S\rangle\right)^{2}} = \frac{250a\left((1+a)^{7/3}-(1-a)^{7/3}\right)}{49\left((1+a)^{5/3}-(1-a)^{5/3}\right)^{2}}\,\mathrm{e}^{2/9\Gamma} \simeq 2.24\mathrm{e}^{2/9\Gamma}. \tag{1.55}$$

В финальные выражения подставлено значение $a = -0.53$, которое принято универсальным Обратим внимание, что рост эксцесса универсальным степенным образом связан с ростом асимметрии с показателем $3/8 = 0.375$ в полном согласии с результатами эксперимента [35], где построена соответствующая зависимость. Прологарифмируем выражения (1.54) и (1.55):

Таблица 1 — Результаты расчетов S_∇ и F_∇ при различных Re_λ [33]

Re_λ	167	257	471	732	1131	94.3	173	268	429	675	94.6
$-10S_\nabla$	5.05	5.19	5.58	5.79	6	5.25	5.44	5.69	6.15	6.42	5.17
F_∇	5.89	6.66	8.2	9.44	10.7	5.55	6.37	7.3	9.37	10.5	5.42

$$\ln S_\nabla \simeq -1.07 + 1/12\Gamma, \tag{1.56}$$

$$\ln F_\nabla \simeq 0.81 + 2/9\Gamma. \tag{1.57}$$

В соответствии с мультифрактальной теорией асимметрия и эксцесс увеличиваются степенным образом с числом Рейнольдса [11, разд. 8.5.6], поэтому Γ гиперболически зависит от $\ln Re_\lambda$. По результатам расчетов [33], представленных в таблице 1, произведенных в диапазоне Re_λ от 100 до 1000, получаем с хорошей точностью обратно пропорциональную зависимость:

$$\Gamma \simeq (1 \pm 0.05)\left(\ln Re_\lambda\right)^{-1}. \tag{1.58}$$

Для JHTDB_1 ($Re_\lambda \simeq 433$, $\Gamma = 0.175 \pm 0.003$) и JHTDB_2 ($Re_\lambda \simeq 611$, $\Gamma = 0.155 \pm 0.003$) формула (1.58) выполняется в пределах погрешностей. Подстановка в (1.52) численно найденных значений и зависимостей $a = -0.53$, $\gamma = 0.81$ и $\Gamma = \left(\ln Re_\lambda\right)^{-1}$ и известной аналитической связи $\langle -Q_S \rangle = \varepsilon/4\nu$ дает общую формулу для аппроксимации инвариантов Q_S и R_S:

$$f_{Q_S R_S}(q,r) \simeq \frac{0.71\sqrt{\langle -Q_S \rangle}}{Re_\lambda^{1/12}\sqrt{\ln Re_\lambda}}(-q)^{1/2}\left((-q)^{3/2} - 1.43r\right)^{-7/3} \times \exp\left[-\frac{1}{\ln Re_\lambda}\left(\ln\frac{(-q)^{3/2}-1.43r}{0.2\varepsilon/\nu}\right)^2\right]. \tag{1.59}$$

1.4.7 Влияние крупномасштабной накачки на вырождение и логнормальность статистики

Для малоинтенсивных пульсаций ($\eta_a \lesssim 5 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \xi_a \lesssim 5$) логнормальная аппроксимация сильно отклоняется от реального распределения (см. рисунок 1.8). На рисунке 1.11 изображена гистограмма инвариантов ξ_+ и ξ_- в окрестности нуля. Видно, что кроме нарушения логнормальности, параметр вырождения a, характеризующий угол наклона изолиний распределения,

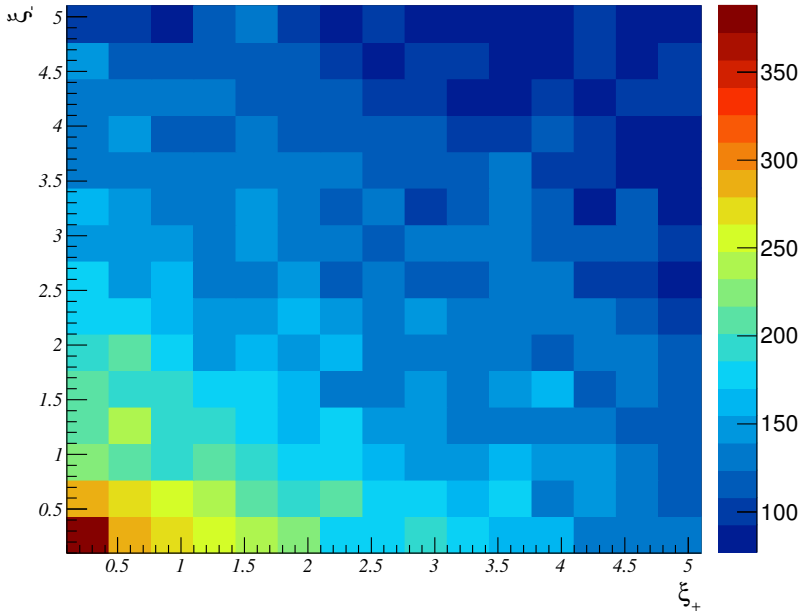


Рисунок 1.11 — Гистограмма инвариантов ξ_+ и ξ_- в «JHTDB-распределении» в окрестности нуля (в изображенной области находится менее 1% от общего распределения).

меняется при приближении к малоинтенсивным пульсациям и становится равным нулю. Это означает обратимость статистики вблизи начала координат. Естественным механизмом такой обратимости может быть наличие сторонних гауссовых шумов, связанных с крупномасштабной накачкой энергии. Например, в «JHTDB-распределении» энергия накачивается поддержанием постоянной полной энергии в низковолновых модах. Физически это эквивалентно добавлению некоторой крупномасштабной силы с обратимой статистикой.

Покажем, что обнаруженное стороннее обратимое распределение имеет гауссов характер. В гауссовом случае инвариант ξ_0, соответствующий вырождению с $a = 0$, имеет следующую функцию распределения:

$$f_{\xi_0}(x_0) = \frac{25\sqrt{10}x_0^{2/3}}{9\sqrt{\pi}\langle\Omega^2\rangle^{5/2}}\exp\left(-\frac{5x_0^{2/3}}{2\langle\Omega^2\rangle}\right), \tag{1.60}$$

где $\langle\Omega^2\rangle$ - некий размерный множитель, имеющий физический смысл крупномасштабной завихренности. Таким образом, в логарифмических координатах:

$$\ln f_{\xi_0} = \ln\frac{25\sqrt{10}}{9\sqrt{\pi}\langle\Omega^2\rangle^{5/2}} + \frac{2}{3}\ln x_0 - \frac{5}{2}\frac{x_0^{2/3}}{\langle\Omega^2\rangle}. \tag{1.61}$$

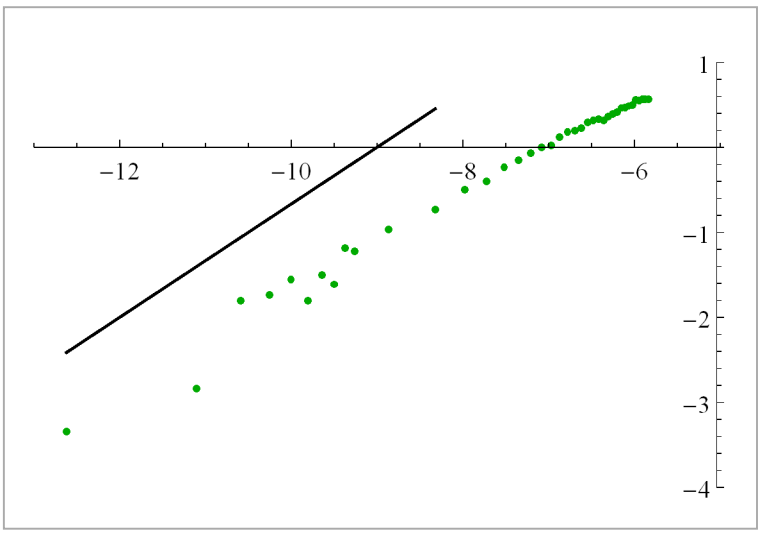


Рисунок 1.12 — Гауссов «хвост» «JHTDB-распределения» инварианта ξ_0, переходящий в логнормальное распределение (зеленые точки). Черный отрезок, иллюстрирует универсальный наклон 2/3.

Для малых x_0, которые нами и рассматриваются, абсолютное значение третьего слагаемого в (1.61) много меньше абсолютного значения второго, поэтому в логарифмических координатах имеем линейную зависимость. Более того, наклон соответствующей прямой оказывается универсальным, то есть не зависит от $\langle\Omega^2\rangle$, и одинаков для любого гауссового распределения. Рисунок 1.12 количественно подтверждает гипотезу о гауссовости малоинтенсивных пульсаций.

1.5 Выводы

В этой главе была рассмотрена статистика тензора скоростей деформации в некоторых несжимаемых изотропных стохастических потоках. Были выведены общие аналитические соотношения между функциями распределения различных инвариантов вращения тензора справедливые для любых несжимаемых изотропных стохастических потоков. С их помощью рассматриваются два более конкретных случая — случай гауссовой статистики поля скорости и случай турбулентной статистики поля скорости. Причем если первый случай исследуется полностью аналитически, то второй — путем статистического анализа симуляции изотропной турбулентности («JHTDB-распределения»).

Оказывается, что обе статистики вырождаются (являются квазиодномерными) в переменных ξ_+ и ξ_- (см. рисунки 1.3 и 1.5). Функция распределения в этих переменных зависит от линейной комбинации переменных ξ_a (1.34), зависящей от параметра вырождения a: для гауссового случая имеем аналитический результат $a = 0$, для турбулентного — численный $a = -0.53$ (в широком диапазоне масштабов пульсаций).

Наличие вырождения приводит к универсальным формулам для функций распределения нормированных собственных значений s и β, зависящим только от параметра вырождения a. Поскольку эти функции количественно повторяют свои свойства в различных изотропных турбулентных течениях [82—87; 89; 95], параметр a, возможно, является универсальным в турбулентности и не зависит от свойств течения.

Для случая турбулентной статистики распределение инварианта ξ_a хорошо описывается логнормальным законом с одним подгоночным параметром Γ, зависимость которого от числа Рейнольдса определена из расчета [33] в соответствии с мультифрактальной моделью. Таким образом, предложена аппроксимация (1.59) несжимаемой изотропной турбулентной статистики тензора скоростей деформации, зависящая только от Re_λ, ε и ν. Показано, что для малоинтенсивных турбулентных пульсаций (менее 1% от общего распределения) присутствует сторонняя обратимая статистика, нарушающая аппроксимацию (1.59). Природа этой статистики может быть связана с гауссовостью крупномасштабных пульсаций скорости.

Глава 2. Линейная гауссова модель для динамики крупномасштабной завихренности

2.1 Пируэт-эффект (введение)

В настоящей главе линейный механизм модели вытягивающихся вихрей [48] используется для формулировки стохастической модели раскручивания жидких частиц (макроскопических объемов жидкости) из инерционного интервала. Экспериментально и численно явление раскручивания было исследовано в работах [81; 82]. Рассмотрим содержание эффекта, названного авторами «пируэт-эффектом», более подробно.

В эксперименте и численном расчете [81; 82], исследовалась жидкая частица, ограниченная тетраэдром, в вершинах которого находились 4 пробные частицы. Измеряя скорости частиц в вершинах тетраэдра, можно аппроксимировать завихренность для жидкой частицы, ограниченной тетраэдром, согласно, так называемой, минимальной модели [100]. Для жидких частиц из вязкого интервала эта модель дает обычное значение завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)$ (8) в точке $\mathbf{r}$, где находится эта жидкая частица. Для жидких частиц из инерционного интервала, завихренность значительно меняется в жидкой частице от точки к точке, и модель дает аппроксимацию эффективной, «крупномасштабной», завихренности $\boldsymbol{\Omega}(t)$:

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)\mathrm{d}^3\mathbf{r}, \tag{2.1}$$

где интегрирование ведется по объему, ограниченному тетраэдром (то есть по жидкой частице). Направление крупномасштабной завихренности $\boldsymbol{\Omega}(t)$ в [81; 82] отсчитывалось по отношению к собственным векторам крупномасштабного тензора скоростей деформации $\Sigma(t)$:

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \int \mathbf{S}(\mathbf{r},t)\mathrm{d}^3\mathbf{r}, \tag{2.2}$$

где интегрирование ведется по объему, ограниченному тетраэдром. В [81; 82] интегралы в (2.2) и в (2.1) аппроксимируются с помощью минимальной модели. Движение жидкой частицы колмогоровского масштаба можно разложить

на вращение вокруг вектора завихренности и деформацию вдоль собственных векторов тензора скоростей деформации [15, §11]. Движение частицы из инерционного интервала найденные из минимальной модели крупномасштабные завихренность и тензор скоростей деформации лишь качественно могут отвечать такому разложению. В силу несжимаемости среди трех собственных векторов $\Sigma(t)$ обязательно найдется тот, вдоль направления которого частица испытывает растяжение (с максимальным собственным числом), тот, вдоль которого она испытывает сжатие (с минимальным собственным числом) и промежуточный, вдоль которого может быть, как сжатие, так и растяжение. Следуя обозначениям статей [81; 82], в момент начала измерения (когда частицы отпускают из вершин правильного тетраэдра) обозначим вектор доминирующего растяжения $\mathbf{e}_1(0)$, промежуточный вектор —- $\mathbf{e}_2(0)$, а вектор доминирующего сжатия —- $\mathbf{e}_3(0)$.

Эксперимент и численный расчет [81] показали, что на малых временах в типичной реализации эксперимента наблюдается уменьшение угла между векторами $\mathbf{\Omega}(t)$ и $\mathbf{e}_1(0)$. Это означает рост со временем величины α_t^2 – усредненного по ансамблю реализаций в эксперименте квадрата косинуса угла между векторами $\mathbf{\Omega}(t)$ и $\mathbf{e}_1(0)$:

$$\alpha_t^2 = \langle \left(\tfrac{\mathbf{\Omega}(t)}{|\mathbf{\Omega}(t)|}, \mathbf{e}_1(0) \right)^2 \rangle. \tag{2.3}$$

Здесь угловыми скобками обозначено усреднение по ансамблю реализаций событий в эксперименте, а круглыми – скалярное произведение векторов. В данном случае имеется в виду произведение единичных векторов, направленных вдоль завихренности $\mathbf{\Omega}(t)$ и вектора доминирующего растяжения $\mathbf{e}_1(0)$. Явление увеличения α_t^2 на малых временах (по аналогии с эффектом увеличения угловой скорости у фигуриста, делающего пируэт вдоль оси, момент инерции относительно которой он уменьшает) и было названо пируэт-эффектом. Следует отметить, что качественно этот эффект является следствием теоремы Гельмгольца (см. [10, §8] или [15, §14]), однако для количественных оценок α_t^2, полученных в диссертации, требуется более детальное рассмотрение динамики системы. В работе [82] были определены зависимости от времени квадрата косинуса углов между $\mathbf{\Omega}(t)$ и $\mathbf{e}_2(0)$ и между $\mathbf{\Omega}(t)$ и $\mathbf{e}_3(0)$:

$$\beta_t^2 = \langle \left(\tfrac{\mathbf{\Omega}(t)}{|\mathbf{\Omega}(t)|}, \mathbf{e}_2(0) \right)^2 \rangle, \tag{2.4}$$

$$\gamma_t^2 = \langle \left(\tfrac{\mathbf{\Omega}(t)}{|\mathbf{\Omega}(t)|}, \mathbf{e}_3(0) \right)^2 \rangle. \tag{2.5}$$

В работах [81; 82] приведены различные качественные соображения, объясняющие пируэт-эффект, а в [101] эффект объясняется путем моделирования динамики тензора градиентов скорости. В этих работах главное внимание уделяется нелинейности в динамике жидкости. Результаты, изложенные в данной главе показывают, что этот эффект может быть объяснен в рамках построенной в работе линейной модели.

План главы следующий. В разделе 2.2 получено основное уравнение линейной стохастической модели, играющее роль уравнения Ланжевена в поставленной задаче. В разделе 2.3 исследуется поведение корреляторов α_t^2, β_t^2 и γ_t^2 в изотропной дельта-коррелированной гауссовой модели на больших временах и получено их экспоненциальное затухание в согласии с [81; 82]. В разделе 2.4 разрабатывается естественная гауссова дельта-коррелированная стохастическая модель тензора скоростей деформации для рассмотрения эффекта не только в пределе больших времен (в котором модель совпадает с изотропной моделью, рассмотренной в разделе 2.3). В разделе 2.5 приведен анализ поведения корреляторов α_t^2, β_t^2 и γ_t^2 в построенной стохастической модели тензора скоростей деформации на малых временах и получены выражения для линейной асимптотики поведения корреляторов от времени, которые сравниваются с данными из [81; 82]. Показывается, что в построенной теоретической модели нарастание коррелятора (пируэт-эффект) в целом определяется только средним значением квадрата завихренности в потоке. Соответствующие оценки показывают удовлетворительное согласие теории и эксперимента. Наконец, в разделе 2.6 сформулированы основные результаты и выводы главы.

2.2 Динамика крупномасштабной завихренности

В развитом турбулентном потоке (при рассмотрении структур масштабов много больших колмогоровского) можно пренебречь вязкостью. Тогда динамика завихренности определяется следующим уравнением:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\nabla)\mathbf{v}. \tag{2.6}$$

Поведение завихренности в системе отсчета жидкой частицы можно преобразовать к виду:

$$\frac{d\omega(\rho,t)}{dt} = \mathbf{S}(\rho,t)\omega(\rho,t). \tag{2.7}$$

Здесь ρ — координата в системе отсчета, связанной с некоторой точкой в жидкой частице, а $\omega(\rho,t)$ и $\mathbf{S}(\rho,t)$ — завихренность и тензор скоростей деформации в этой системе отсчета. Рассмотрим интенсивную локально-неизотропную структуру (вихревую нить) внутри жидкой частицы. Как показано в [102], тензор скоростей деформации в центре жидкой частицы можно разделить на мелкомасштабную и крупномасштабную составляющие, определяющиеся, соответственно, полем скорости внутри и вне жидкой частицы. Поскольку внутри вихревой нити и вблизи нее тензор скоростей деформации ортогонален завихренности [45, Приложение 1], при рассмотрении ее динамики в уравнении (2.7) можно заменить тензор $\mathbf{S}(\rho,t)$ на крупномасштабный $\mathbf{\Sigma}(t)$:

$$\frac{d\omega(\rho,t)}{dt} = \mathbf{\Sigma}(t)\omega(\rho,t). \tag{2.8}$$

Как следует из описанной во введении фрактальной структуры течения, изображенной на рисунке 0.1, для относительно малых жидких частиц (линейный размер которых где-то на порядок или менее превышает колмогоровский масштаб) крупномасштабная завихренность $\mathbf{\Omega}(t)$ определяется наиболее интенсивной структурой внутри жидкой частицы. Именно такие частицы рассматривались в [81; 82]. Таким образом, последнее уравнение также можно рассматривать как уравнение динамики завихренности небольшой жидкой частицы из инерционного интервала, заменив $\omega(\rho,t)$ на крупномасштабную завихренность $\mathbf{\Omega}(t)$ всей частицы:

$$\frac{d\mathbf{\Omega}(t)}{dt} = \mathbf{\Sigma}(t)\mathbf{\Omega}(t). \tag{2.9}$$

Энергия трехмерного турбулентного потока передается из больших масштабов в меньшие, поэтому динамика больших масштабов определяет динамику меньших и, напротив, динамика малых масштабов незначительно сказывается на динамике больших. Таким образом, можно предположить, что в уравнение (2.9) тензор $\mathbf{\Sigma}(t)$ входит как внешний случайный источник, не зависящий от $\mathbf{\Omega}(t)$. Применимость такого подхода численно продемонстрирована в работе [103]. Источник будем для простоты считать гауссовым. Приведенные после уравнения (2.9) соображения вместе с самим уравнением (2.9) составляют основу теоретического рассмотрения задачи. Это уравнение можно рассматривать как линейную модель эффекта.

2.3 Затухание корреляторов на больших временах

На основе уравнения (2.9) рассмотрим затухание начальных возмущений в невыделенном базисе (которым становится базис ($\mathbf{e}_1(0)$,$\mathbf{e}_2(0)$,$\mathbf{e}_3(0)$) на больших временах), которое можно сопоставить с затуханием, обнаруженным в [81; 82]. Все пять независимых компонент $\Sigma_{ij}(t)$ в рассматриваемой задаче можно считать случайными процессами, определяющими динамику $\mathbf{\Omega}(t)$. Если предположить, что эти случайные процессы гауссовы, то для описания их статистических свойств, как известно [90], достаточно знать парные корреляции процессов. Для простоты положим $\Sigma_{ij}(t)$ дельта-коррелированным [104]:

$$\langle \Sigma_{ij}(t)\Sigma_{kl}(t')\rangle_{\mathbf{\Sigma}(\tau)} = D_{ijkl}\delta(t-t'). \tag{2.10}$$

Здесь $t \geqslant 0$ и $t' \geqslant 0$ – некоторые моменты времени, $\delta(t-t')$ – дельта-функция [92; 105], D_{ijkl} – корреляционный тензор, а индекс у скобок усреднения $\mathbf{\Sigma}(\tau)$ означает, что усреднение проводится по ансамблю реализаций всей пятерки независимых компонент-процессов, которые определены при $\tau \in [0, +\infty)$. При сделанных предположениях с помощью уравнения (2.9) и формулы Фурутцу – Новикова [104] можно получить следующее уравнение на функцию распределения завихренности $f(t,\mathbf{\Omega})$:

$$f(t,\mathbf{\Omega}) = \langle \delta\left(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\left(t\right)\right)\rangle_{\mathbf{\Omega}(\tau)}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D_{ijkl}\frac{\partial}{\partial \Omega_i}\left\{\Omega_j \frac{\partial}{\partial \Omega_k}\left(\Omega_l f\right)\right\}. \tag{2.12}$$

Усреднение в определении (2.11) производится по реализациям $\mathbf{\Omega}(\tau)$, однако поскольку в модели этот процесс определяется независимым процессом $\mathbf{\Sigma}(\tau)$ и начальными условиями $\mathbf{\Omega}(0)$, можно заменить усреднение по $\mathbf{\Omega}(\tau)$, на усреднение по $\mathbf{\Sigma}(\tau)$ и $\mathbf{\Omega}(0)$. В силу статистической однородности и изотропности, а также несжимаемости потока, корреляционный тензор D_{ijkl} зависит только от одной константы D:

$$D_{ijkl} = D\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \tfrac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right). \tag{2.13}$$

Этот факт сильно упрощает уравнение (2.12), в котором в этом случае будет удобно перейти к сферическим координатам:

$$\begin{cases} \Omega_1 = & \Omega\cos\theta = \Omega\mu \\ \Omega_2 = & \Omega\sin\theta\cos\varphi = \Omega\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2} \\ \Omega_3 = & \Omega\sin\theta\sin\varphi = \Omega\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2}. \end{cases}$$

Итак, подставив выражение (2.10) в уравнение (2.12) и произведя в нем замену, после преобразований можно получить:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{2}\left(\frac{4}{3\Omega^2}\frac{\partial}{\partial\Omega}\left(\Omega^4\frac{\partial f}{\partial\Omega}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial f}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right). \tag{2.14}$$

Таким образом, умножив это уравнение на μ^2 и проинтегрировав по пространству $\mathbf{\Omega}$, можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение на искомую величину (в роли которой может выступать и α_t^2, и β_t^2, и γ_t^2):

$$\frac{d}{dt}\langle\mu^2(t)\rangle_{\mathbf{\Omega}(\tau)} = 2D\left(1 - 3\langle\mu^2(t)\rangle_{\mathbf{\Omega}(\tau)}\right). \tag{2.15}$$

Пусть $\langle\mu^2(0)\rangle_{\mathbf{\Omega}(\tau)}$ – начальное возмущение. Тогда решение:

$$\langle\mu^2(t)\rangle_{\mathbf{\Omega}(\tau)} = \frac{1}{3} + \left(\langle\mu^2(0)\rangle_{\mathbf{\Omega}(\tau)} - \frac{1}{3}\right)\exp\left(-2Dt\right). \tag{2.16}$$

Важным свойством этого решения является наличие стационарной точки $\langle\mu^2(t)\rangle_{\mathbf{\Omega}(\tau)} = 1/3$. Наличие такого решения можно было бы предположить заранее, поскольку невыделенный базис должен сохранять изотропию направлений. Выражение (2.16) представляет асимптотику α_t^2, β_t^2 и γ_t^2 на больших временах. Экспоненциальное затухание на больших временах действительно наблюдается в [81; 82].

2.4 Гауссова дельта-коррелированная модель статистики крупномасштабного тензора скоростей деформации

2.4.1 Крупномасштабный тензор скоростей деформации в базисе своих собственных векторов

Рассмотрим крупномасштабный тензор скоростей деформации $\Sigma_{ij}(t)$ в базисе его собственных векторов $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$ и $\mathbf{e}_3(t)$, где он имеет наиболее простой вид:

$$\mathbf{\Sigma}^{eig}(t) = \Sigma_{ij}^{eig}(t) = \begin{pmatrix} L_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & L_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & L_3(t) \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Здесь $L_1(t)$, $L_2(t)$ и $L_3(t)$ — собственные значения крупномасштабного тензора скоростей деформации суть случайные процессы. При этом из условия несжимаемости потока:

$$L_1(t) + L_2(t) + L_3(t) = 0. \tag{2.18}$$

Упорядочим теперь собственные векторы $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$ и $\mathbf{e}_3(t)$ таким образом, чтобы вектору $\mathbf{e}_1(t)$ всегда соответствовало наибольшее собственное число $L_1(t)$, вектору $\mathbf{e}_2(t)$ промежуточное $L_2(t)$ и вектору $\mathbf{e}_3(t)$ наименьшее $L_3(t)$:

$$L_1(t) \geqslant L_2(t) \geqslant L_3(t). \tag{2.19}$$

В случае гауссово распределенного поля скорости из (1.27) можно найти математические ожидания собственных значений:[1]

$$\langle L_1(t)\rangle_{\mathbf{L}(\tau)} = \lambda, \;\; \langle L_2(t)\rangle_{\mathbf{L}(\tau)} = 0, \;\; \langle L_3(t)\rangle_{\mathbf{L}(\tau)} = -\lambda, \;\; \lambda = 3\sqrt{\tfrac{3\langle\Omega^2\rangle}{10\pi}}. \tag{2.20}$$

Здесь $\langle\Omega^2\rangle$ – среднее значение квадрата завихренности жидкой частицы. Последние усреднения производятся по ансамблю реализаций случайного процесса $\mathbf{L}(\tau) = (L_1(\tau), L_2(\tau), L_3(\tau))$. Проанализируем зависимость $\langle\Omega^2\rangle$ от размера жидкой частицы r_0. Очевидно, что при увеличении жидкой частицы, $\langle\Omega^2\rangle$ стремится к нулю. С другой стороны, при масштабах частицы порядка колмогоровского, $\langle\Omega^2\rangle$ не зависит от ее размера и определяется по известной формуле $\langle\Omega^2\rangle = \varepsilon/\nu = \left(\varepsilon/\eta^2\right)^{2/3}$ [10, §34]. В инерционном интервале влияние вязкости несущественно, поэтому из теории размерности $\langle\Omega^2\rangle \propto \left(\varepsilon/r_0^2\right)^{2/3}$. Сшивая эти две зависимости, имеем:

$$\langle\Omega^2\rangle = \begin{cases} \varepsilon/\nu, \; r_0 \leqslant \eta \\ \left(\varepsilon/r_0^2\right)^{2/3}, r_0 > \eta. \end{cases} \tag{2.21}$$

[1]Важной «негауссовой» особенностью турбулентного поля скорости является положительность (в среднем) промежуточного собственного числа $\langle L_2(t)\rangle_{\mathbf{L}(\tau)} > 0$ (см. первую главу диссертации для обычного тензора и [82] для крупномасштабного тензора), что характеризует необратимость каскадного процесса переноса энергии с больших масштабов на малые. Для простоты используется гауссово приближение и этот эффект не учитывается.

Процесс $\Sigma_{ij}^{eig}(t)$ можно разбить на постоянную по времени случайную часть $\Sigma_{ij}^{eig}(0)$ (начальные условия), и процесс $\sigma_{ij}^{eig}(t)$ с нулевым математическим ожиданием, которые будем для простоты считать независимыми:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}^{eig}(t) =& \mathbf{\Sigma}^{eig}(0) + \sigma^{eig}(t) = \\ =& \begin{pmatrix} L_1(0) + l_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & L_2(0) + l_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & L_3(0) + l_3(t) \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\langle \Sigma^{eig}(0) \rangle_{\mathbf{L}(\tau)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \langle \sigma^{eig}(t) \rangle_{\mathbf{L}(\tau)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Обратим внимание, что процессы $l_1(t)$, $l_2(t)$ и $l_3(t)$ (процесс $\mathbf{l}(t)$) не являются гауссовыми шумами на фоне средних значений, поскольку даже при гауссово распределенной матрице ее собственные значения будут распределены существенно негауссово (1.27). Однако для оценки можно положить и этот процесс гауссовым. Более того, мы увидим, что коррелятор α_t^2 фактически не зависит от статистических свойств $\mathbf{l}(t)$, а определяется начальными средними. Для простоты анализа можно предположить, что $l_1(t)$, $l_2(t)$ и $l_3(t)$ являются независимыми, дельта-коррелированными и обладают одинаковыми статистическими характеристиками. Тогда их парные корреляции можно определить как:

$$\langle l_1(t) l_1(t') \rangle_{\mathbf{L}(\tau)} = \langle l_2(t) l_2(t') \rangle_{\mathbf{L}(\tau)} = \langle l_3(t) l_3(t') \rangle_{\mathbf{L}(\tau)} = \Lambda \delta(t - t'). \tag{2.24}$$

Из несжимаемости можно получить и перекрестные корреляции в виде:

$$\langle l_i(t) l_j(t') \rangle_{\mathbf{L}(\tau)} = \overbrace{\begin{pmatrix} \Lambda & -\Lambda/2 & -\Lambda/2 \\ -\Lambda/2 & \Lambda & -\Lambda/2 \\ -\Lambda/2 & -\Lambda/2 & \Lambda \end{pmatrix}}^{\Lambda_{ij}} \delta(t - t'), \tag{2.25}$$

где Λ_{ij} — корреляционная матрица. Легко показать, что определенные таким образом собственные значения являются линейно зависимыми случайными величинами в согласии с условием несжимаемости потока.

2.4.2 Крупномасштабный тензор скоростей деформации в базисе своих изначально собственных векторов

Уравнение (2.9) является верным в системе отсчета, поступательно движущейся с жидкой частицей (ПСО), каковой не является система отсчета, жестко связанная с собственным базисом тензора скоростей деформации (ССО). Выберем в качестве ПСО систему отсчета, оси которой $\mathbf{e}_1(0)$, $\mathbf{e}_2(0)$ и $\mathbf{e}_3(0)$ изначально совпадают с осями ССО $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$ и $\mathbf{e}_3(t)$. ССО удобно при рассмотрении считать неподвижной. В результате вращения ПСО относительно ССО, тензор скоростей деформации преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{\Sigma}(t) = \mathbf{R}^T(t)\mathbf{\Sigma}^{eig}(t)\mathbf{R}(t). \tag{2.26}$$

Здесь $\mathbf{R}(t)$ – зависящая от времени матрица поворота ПСО относительно ССО, а $\mathbf{\Sigma}(t)$ и есть тот тензор, который входит в уравнение (1.2). В общем случае матрицу $\mathbf{R}(t)$, как известно, можно определить с помощью следующего матричного дифференциального уравнения [106, стр. 453]:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{R}(t)\mathbf{O}(t). \tag{2.27}$$

Здесь $\mathbf{O}(t)$ – антисимметричная матрица угловых скоростей вращения ПСО относительно ССО:

$$\mathbf{O}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -o_3(t) & o_2(t) \\ o_3(t) & 0 & -o_1(t) \\ -o_2(t) & o_1(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Поскольку в нулевой момент времени ССО и ПСО совпадают, матрица перехода $\mathbf{R}(0)$ является единичной матрицей:

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}. \tag{2.29}$$

Предположим компоненты $\mathbf{O}(t)$ дельта-коррелированными, гауссовыми и независимыми:

$$\langle o_i(t)o_j(t')\rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \Theta\delta_{ij}\delta(t-t'). \tag{2.30}$$

Усреднение в (2.30) ведется по реализациям трехмерного вектора случайных процессов $\mathbf{o}(\tau) = (o_1(\tau),o_2(\tau),o_3(\tau))$. Подставляя теперь (2.23) в (2.26),

можно получить следующее разложение тензора скоростей деформации на два слагаемых:

$$\Sigma_{ij}(t) = \Sigma^0_{ij}(t) + \sigma_{ij}(t). \tag{2.31}$$

Здесь введены обозначения:

$$\Sigma^0_{ij}(t) = L_{(n)}(0) r_{in}(t) r_{jn}(t), \tag{2.32}$$

$$\sigma_{ij}(t) = l_{(n)}(t) r_{in}(t) r_{jn}(t). \tag{2.33}$$

Тензорный индекс, стоящий в скобке, означает, что суммирование ведется по нему вместе с индексами, не стоящими в скобках, например:

$$\Sigma^0_{ij}(t) = L_{(n)}(0) r_{in}(t) r_{jn}(t) = \\ = L_1(0) r_{i1}(t) r_{j1}(t) + L_2(0) r_{i2}(t) r_{j2}(t) + L_3(0) r_{i3}(t) r_{j3}(t). \tag{2.34}$$

Усреднение необходимо провести как по начальным условиям $\mathbf{L}(0)$, так и по случайным процессам $\mathbf{l}(t)$ и $\mathbf{o}(t)$, которые суть один процесс. Это означает, что к условиям (2.25) и (2.30) следует добавить перекрестные парные корреляции. Можно для простоты предположить, $\mathbf{l}(t)$ и $\mathbf{o}(t)$ независимыми

$$\langle l_i(t) o_j(t') \rangle_{\mathbf{l}(\tau),\mathbf{o}(\tau)} = 0. \tag{2.35}$$

Совокупность условий (2.25), (2.30) и (2.35) далее будет называться гауссовой дельта-коррелированной моделью тензора скоростей деформации.

2.4.3 Затухание усредненного тензора в базисе изначально собственных векторов

В разделах 2.4.1 и 2.4.2 была сформулирована гауссова дельта-коррелированной модель тензора скоростей деформации. Для того, чтобы применить ее к стохастическому уравнению (2.9) необходимо найти математическое ожидание и парную корреляцию тензора скоростей деформации. В этом разделе мы

найдем математическое ожидание $\langle\Sigma_{ij}(t)\rangle_{\mathbf{l}(\tau),\mathbf{o}(\tau)} = \langle\Sigma_{ij}(t)\rangle_{proc}$ (для краткости усреднение по процессу обозначено индексом $proc$).

Поскольку

$$\langle\sigma_{ij}(t)\rangle_{proc} = \langle l_{(n)}(t)r_{in}(t)r_{jn}(t)\rangle_{proc} = \langle l_{(n)}(t)\rangle_{\mathbf{l}(\tau)}\langle r_{in}(t)r_{jn}(t)\rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = 0, \qquad (2.36)$$

искомые корреляторы можно упростить:

$$\langle\Sigma_{ij}(t)\rangle_{proc} = L_{(n)}(0)\langle r_{in}(t)r_{jn}(t)\rangle_{\mathbf{o}(\tau)}. \qquad (2.37)$$

Для их нахождения можно ввести функцию распределения матрицы вращения:

$$f(\mathbf{R},t) = \langle\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}(t))\rangle_{\mathbf{o}(\tau)}. \qquad (2.38)$$

Используя уравнения (2.27) с начальными условиями (2.29), получается следующее уравнение с начальными условиями для функции $f(\mathbf{R},t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Theta\left(r_{pm}\frac{\partial}{\partial r_{pl}}\left(r_{km}\frac{\partial}{\partial r_{kl}}f\right) - r_{pl}\frac{\partial}{\partial r_{pm}}\left(r_{km}\frac{\partial}{\partial r_{kl}}f\right)\right), \qquad (2.39)$$

$$f(\mathbf{R},0) = \delta(\mathbf{R}-\mathbf{E}). \qquad (2.40)$$

Зная функцию распределения, можно вычислить необходимый коррелятор, как интеграл по девятимерному пространству:

$$L_{(n)}(0)\langle r_{in}(t)r_{jn}(t)\rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = L_{(n)}(0)\int r_{in}r_{jn}f(\mathbf{R},t)d\mathbf{R}. \qquad (2.41)$$

Здесь $d\mathbf{R}$ – девятимерный дифференциал. Умножим на величину $L_{(n)}(0)r_{in}r_{jn}$ правую и левую части (2.39) и начальное условие (2.40). Полученные выражения проинтегрируем по $d\mathbf{R}$. В результате этого интегрирования получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$L_{(n)}(0)\frac{d}{dt}\langle r_{in}(t)r_{jn}(t)\rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = 2\Theta\left(L_{(l)}(0)-L_{(n)}(0)\right)\delta_{ll}\langle r_{in}(t)r_{jn}(t)\rangle_{\mathbf{o}(\tau)}, \qquad (2.42)$$

$$L_{(n)}(0)\langle r_{in}(0)r_{jn}(0)\rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = L_{(n)}(0)\delta_{in}\delta_{jn}. \qquad (2.43)$$

Условие несжимаемости потока позволяет преобразовать это уравнение к виду:

$$\frac{d}{dt}\langle\Sigma^0_{ij}(t)\rangle_{proc} = -6\Theta\langle\Sigma^0_{ij}(t)\rangle_{proc}, \tag{2.44}$$

$$\langle\Sigma^0_{ij}(0)\rangle_{proc} = \begin{pmatrix} L_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & L_2(0) & 0 \\ 0 & 0 & L_3(0) \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

Это линейное уравнение, решение которого задается формулой:

$$\langle\Sigma^0_{ij}(t)\rangle_{proc} = \begin{pmatrix} L_1(0)\mathrm{e}^{-6\Theta t} & 0 & 0 \\ 0 & L_2(0)\mathrm{e}^{-6\Theta t} & 0 \\ 0 & 0 & L_3(0)\mathrm{e}^{-6\Theta t} \end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

Таким образом, в гауссовой дельта-коррелированной модели диагональные элементы, связанные с выделенностью изначально выбранного базиса, со временем затухают. Обратим внимание, во-первых, что не смотря на дельта-коррелированность управляющих процессов, наблюдается инерционный экспоненциальный спад диагональных элементов тензора. Во-вторых, очень существенна роль несжимаемости в универсальности этого процесса. Действительно, например, у единичного тензора (очевидно, с ненулевым следом), одинакового во всех системах отсчета, не может наблюдаться никакого затухания диагональных элементов при вращении системы координат.

2.4.4 Изотропизация корреляционного тензора в базисе изначально собственных векторов

Рассмотрим парный коррелятор тензора скоростей деформации:

$$\langle(\Sigma_{ij}(t) - \langle\Sigma_{ij}(t)\rangle_{proc})\,(\Sigma_{kl}(t') - \langle\Sigma_{kl}(t')\rangle_{proc})\rangle_{proc} = \langle\sigma_{ij}(t)\sigma_{kl}(t')\rangle_{proc}. \tag{2.47}$$

Для его нахождения требуется функция распределения, зависящая от двух моментов времени:

$$f(\mathbf{R},\mathbf{R}',t,t') = \langle\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}(t))\delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}(t'))\rangle_{\mathbf{o}(\tau)}. \tag{2.48}$$

Однако в гауссовой дельта-коррелированной модели для его нахождения также достаточно функции распределения $f(\mathbf{R},t)$. Покажем это. Опуская некоторые простые преобразования, имеем

$$\langle \sigma_{ij}(t)\sigma_{kl}(t')\rangle_{proc} = \langle l_{(n)}(t)l_{(m)}(t')\rangle_{\mathbf{l}(\tau)}\langle r_{in}(t)r_{jn}(t)r_{km}(t')r_{lm}(t')\rangle_{\mathbf{o}(\tau)}. \tag{2.49}$$

Тогда для преобразованного парного коррелятора имеем:

$$\begin{aligned}
&\langle l_{(n)}(t)l_{(m)}(t')\rangle_{\mathbf{l}(\tau)}\langle r_{in}(t)r_{jn}(t)r_{km}(t')r_{lm}(t')\rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \\
&\quad =\delta(t-t')\Lambda_{(m)(n)}\langle r_{in}(t)r_{jn}(t)r_{km}(t')r_{lm}(t')\rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \\
&\quad =\delta(t-t')\Lambda_{(m)(n)}\langle r_{in}(t)r_{jn}(t)r_{km}(t)r_{lm}(t)\rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \\
&\quad =\delta(t-t')\Lambda_{(m)(n)}\int r_{in}r_{jn}r_{km}r_{lm}f(\mathbf{R},t)d\mathbf{R}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

То есть, парный коррелятор зависит только от одномоментной функции распределения $f(\mathbf{R},t)$. Последнее выражение можно преобразовать, используя конкретный вид корреляционного тензора Λ_{mn} из (2.25):

$$\delta(t-t')\Lambda_{(m)(n)}\int r_{in}r_{jn}r_{km}r_{lm}f(\mathbf{R},t)d\mathbf{R} = \tag{2.51}$$

$$= \Lambda\delta(t-t')\left(\tfrac{3}{2}\langle nn(n)(n)\rangle(t) - \tfrac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl}\right). \tag{2.52}$$

Здесь для удобства введено следующее обозначение:

$$\langle r_{ip}(t)r_{jq}(t)r_{kr}(t)r_{ls}(t)\rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \langle pqrs\rangle(t). \tag{2.53}$$

Таким образом, теперь надо найти коррелятор $\langle nn(n)(n)\rangle$. Умножая правую и левую части (2.39), а также (2.40) на $r_{in}(t)r_{jn}(t)r_{k(n)}(t)r_{l(n)}(t)$ и интегрируя по $d\mathbf{R}$, получается следующее линейное уравнение и начальное условие:

$$\tfrac{d}{dt}\langle nn(n)(n)\rangle(t) = -20\langle nn(n)(n)\rangle(t) + 4\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{kl}\right), \tag{2.54}$$

$$\langle nn(n)(n)\rangle(0) = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{(i)(k)}. \tag{2.55}$$

Решение этого уравнения задается следующей формулой:

$$\langle nn(n)(n)\rangle(t) = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{(i)(k)}\mathrm{e}^{-20\Theta t} + \tfrac{1}{5}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{kl}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-20\Theta t}\right). \tag{2.56}$$

Подставляя получившееся выражение в (2.51) можно получить выражение для парной корреляции:

$$\langle\sigma_{ij}(t)\sigma_{kl}(t')\rangle_{proc} = \left(\tfrac{3}{2}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{(i)(k)}\mathrm{e}^{-20\Theta t}+\right.$$
$$\left.+\tfrac{3}{10}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-20\Theta t}\right)-\tfrac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\Lambda\delta(t-t'). \quad (2.57)$$

По истечении большого количества времени это выражение переходит в выражение (2.10) для изотропного тензора:

$$\langle\sigma_{ij}(t)\sigma_{kl}(t')\rangle_{proc} \xrightarrow{t\to\infty} \langle\Sigma_{ij}(t)\Sigma_{kl}(t')\rangle_{\Sigma_{\alpha\beta}(\tau)} \xrightarrow{t\to\infty}$$
$$\xrightarrow{t\to\infty} \tfrac{3}{10}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}-\tfrac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\Lambda\delta(t-t'). \quad (2.58)$$

Таким образом для константы D из (2.10) имеем:

$$D = \tfrac{3}{10}\Lambda. \quad (2.59)$$

Полученный результат вместе с выражением для затухания математических ожиданий (2.46) означает согласованность построенной в разделах 2.4.1 и 2.4.2 гауссовой модели тензора скоростей деформации и изотропной гауссовой модели из раздела 2.3 пригодной для рассмотрения эффекта только на больших временах.

Для малых времен инерционный экспоненциальный спад парной корреляции при дельта-коррелированности управляющих процессов означает, что силы инерции, связанные с вращением системы отсчета собственных значений тензора не вносят поправок в первый порядок разложения корреляторов α_t^2, β_t^2 и γ_t^2 по времени, что будет использовано в следующем разделе при получении выражения для пируэт-эффекта в построенной модели.

2.5 Линейная асимптотика корреляторов на малых временах

2.5.1 Усреднение по реализациям динамики крупномасштабного тензора скоростей деформации

Теперь, имея выражения (2.46) и (2.57), можно проанализировать пируэт-эффект, наблюдаемый на малых временах. В пределе $t \to 0$ выражения (2.46) и (2.57) дают математическое ожидание и парные корреляции тензора скоростей деформации в базисе его собственных векторов:

$$\langle \Sigma^0_{ij}(t) \rangle_{proc} = \begin{pmatrix} L_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & L_2(0) & 0 \\ 0 & 0 & L_3(0) \end{pmatrix} = L_{(i)}\delta_{ij}, \tag{2.60}$$

$$\langle \sigma_{ij}(t)\sigma_{kl}(t') \rangle_{proc} = \left(\tfrac{3}{2}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{(i)(k)} - \tfrac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\Lambda\delta(t-t') = D_{ijkl}\delta(t-t'). \tag{2.61}$$

В дальнейшем для удобства опускаем аргумент $t = 0$ у $\mathbf{L}(0)$. Применяя формулу Фурутцу – Новикова для уравнения (2.9), можно получить следующее уравнение второго порядка на функцию распределения завихренности $f(t,\mathbf{\Omega})$:

$$\tfrac{\partial}{\partial t} f = -L_{(i)}\tfrac{\partial}{\partial \Omega_i}\left(\Omega_i f\right) + D_{ijkl}\tfrac{\partial}{\partial \Omega_i}\left(\Omega_j \tfrac{\partial}{\partial \Omega_k}\left(\Omega_l f\right)\right). \tag{2.62}$$

Найдем функцию Грина для уравнения (2.62):

$$\tfrac{\partial}{\partial t} G = -L_{(i)}\tfrac{\partial}{\partial \Omega_i}\left(\Omega_i G\right) + D_{ijkl}\tfrac{\partial}{\partial \Omega_i}\left(\Omega_j \tfrac{\partial}{\partial \Omega_k}\left(\Omega_l G\right)\right), \tag{2.63}$$

$$G\left(0,\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}^0\right) = \delta\left(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}^0\right). \tag{2.64}$$

Зная функцию Грина $G\left(t,\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}^0\right)$ и начальные распределения собственных значений и завихренности, можно будет найти искомые корреляторы α^2_t, β^2_t и γ^2_t. Например, для коррелятора α^2_t:

$$\alpha^2_t = \int \tfrac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2+\Omega_2^2+\Omega_3^2} G\left(t,\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}^0\right) f_0\left(\mathbf{\Omega}^0\right) f_{L_1L_2}(x_1,x_2) d\mathbf{\Omega} d\mathbf{\Omega}^0 dx_1 dx_2, \tag{2.65}$$

где $f_0(\mathbf{\Omega}^0)$ – начальная функция распределения завихренности, выражение для которой будет предложено в разделе 2.5.2, $f_{L_1L_2}(x_1,x_2)$ - начальная функция

распределения собственных значений, необходимые свойства которой обсуждались в разделе 2.4.1 (2.20), $G\left(t,\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}^0\right)$ – функция Грина. Последняя зависит от L_1 и L_2 параметрически. В уравнении (2.63) можно произвести замену, делающую его линейным и приводящую его к так называемому каноническому виду [105]:

$$\begin{cases} \eta_1 = & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{e}^{\Omega_1}+\mathrm{e}^{\Omega_2}+\mathrm{e}^{\Omega_3}\right) \\ \eta_2 = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{\Omega_1}-\mathrm{e}^{\Omega_3}\right) \\ \eta_3 = & \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\mathrm{e}^{\Omega_1}+2\mathrm{e}^{\Omega_2}-\mathrm{e}^{\Omega_3}\right). \end{cases}$$

В результате этой замены[2] получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}G = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(L_3-L_1\right)\frac{\partial}{\partial\eta_2}G - \frac{3}{\sqrt{6}}L_2\frac{\partial}{\partial\eta_3}G + \frac{3}{2}\Lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2}G+\frac{\partial^2}{\partial\eta_3^2}G\right). \tag{2.66}$$

Отметим, что в уравнение (2.66) не входит η_1. Начальное условие (2.64) после замены, вследствие свойств дельта-функции [92], перепишется следующим образом:

$$G(0,\eta-\eta^0) = \exp\left(-3\eta_1^0\right)\delta\left(\eta-\eta^0\right). \tag{2.67}$$

Здесь η^0 – начальные значения η. Уравнение (2.66) с начальным условием (2.67) решается с помощью преобразования Фурье:

$$G(t,\eta-\eta^0) = \frac{\exp(-\sqrt{3}\eta_1^0)}{6\pi\Lambda t}\delta\left(\eta_1-\eta_1^0\right)\times \\ \exp\left(-\frac{\left(2\left(\eta_2-\eta_2^0\right)-\sqrt{2}(L_1-L_3)t\right)^2}{24\Lambda t}\right)\exp\left(-\frac{\left(\sqrt{6}\left(\eta_3-\eta_3^0\right)-3L_2t\right)^2}{36\Lambda t}\right). \tag{2.68}$$

Делая замену $\mathbf{\Omega}$ на η в интеграле (2.65), и подставляя в него полученное выражение для функции Грина, после несложных преобразований имеем:

$$\alpha_t^2 = \int \frac{\left(\Omega_1^0\right)^2\exp\left(\sqrt{2}\eta_2\right)}{\left(\Omega_1^0\right)^2\exp\left(\sqrt{2}\eta_2\right)+\left(\Omega_2^0\right)^2\exp\left(\sqrt{6}\eta_3\right)+\left(\Omega_3^0\right)^2\exp-\left(\sqrt{2}\eta_2\right)} f_0(\mathbf{\Omega}^0)f_{L_1L_2}(x_1,x_2)\times \\ \exp\left(-\frac{\left(2\eta_2-\sqrt{2}(2L_1+L_2)t\right)^2}{24\Lambda t}\right)\exp\left(-\frac{\left(2\eta_3-\sqrt{6}L_2t\right)^2}{24\Lambda t}\right)d\eta_2 d\eta_3 d\mathbf{\Omega}^0 dx_1 dx_2. \tag{2.69}$$

[2]Вообще говоря, эта замена справедлива только для сектора пространства: $\{\Omega_1 \geqslant 0;\ \Omega_2 \geqslant 0;\ \Omega_3 \geqslant 0\}$. Однако, ввиду четности (инвариантности относительно замены Ω_i на $-\Omega_i$) и самоподобия (инвариантности относительно замены Ω_i на $a\Omega_i$) выражения (2.65) для коррелятора α_t^2 и подобных ему выражений для корреляторов β_t^2 и γ_t^2, интегрирование можно проводить исключительно по этому сектору.

Для того, чтобы получить асимптотику последнего интеграла вблизи $t = 0$, проведем в нем еще одну замену:

$$\zeta_2 = \frac{2\eta_2 - \sqrt{2}(L_1 - L_3)t}{2\sqrt{\Lambda t}} \ \zeta_3 = \frac{2\eta_3 - \sqrt{6}L_2 t}{2\sqrt{\Lambda t}}. \tag{2.70}$$

В результате получим:

$$\alpha_t^2 = \int \Xi_1 \Xi_2^{-1} f_0(\mathbf{\Omega}^0) f_{L_1 L_2}(x_1, x_2) \exp\left(-\frac{\zeta_2^2 + \zeta_3^2}{6}\right) d\eta_2 d\eta_3 d\mathbf{\Omega}^0 dx_1 dx_2, \tag{2.71}$$

$$\Xi_1 = \left(\Omega_1^0\right)^2 \mathrm{e}^{\sqrt{2\Lambda t}\zeta_2 + 2L_1 t}, \tag{2.72}$$

$$\Xi_2 = \left(\Omega_1^0\right)^2 \mathrm{e}^{\sqrt{2\Lambda t}\zeta_2 + 2L_1 t} + \left(\Omega_2^0\right)^2 \mathrm{e}^{\sqrt{6\Lambda t}\zeta_3 + 2L_2 t} + \left(\Omega_3^0\right)^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{2\Lambda t}\zeta_2 + 2L_3 t}. \tag{2.73}$$

Дробь Ξ_1/Ξ_2 в этом выражении можно разложить в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$. Отметим, что смысл имеет раскладывать подынтегральное выражения только до первого порядка, поскольку для учета квадратичных поправок необходимо решать уравнение с полным корреляционным тензором из (2.57). Не конкретизируя, в виду громоздкости, это разложение, напишем его в виде:

$$\Xi_1/\Xi_2 = A_0\left(\frac{\Omega^0}{|\Omega^0|}\right) + a_1\left(\frac{\Omega^0}{|\Omega^0|}, \mathbf{L}, \Lambda, \zeta\right)\sqrt{t} + A_1\left(\frac{\Omega^0}{|\Omega^0|}, \mathbf{L}, \Lambda, \zeta\right) t + O(t^{3/2}). \tag{2.74}$$

При этом введенные функции $A_0\left(\Omega^0/|\Omega^0|\right)$, $a_1\left(\Omega^0/|\Omega^0|, \mathbf{L}, \Lambda, \zeta\right)$ и $A_1\left(\Omega^0/|\Omega^0|, \mathbf{L}, \Lambda, \zeta\right)$ представляют собой полиномы относительно всех своих аргументов. Несложно показать, что в полиноме a_1 или степень ζ_1, или степень ζ_2, входящих в него, нечетна. То есть, после интегрирования по переменной ζ, в разложении останутся только целые степени t. Введем для удобства следующее обозначение для усреднения по начальным направлениям $\mathbf{\Omega}(t)$:

$$\langle H(\mathbf{\Omega})\rangle_0 = \int H(\mathbf{\Omega^0}) f_0(\mathbf{\Omega^0}) d\mathbf{\Omega^0}. \tag{2.75}$$

Произведя окончательное усреднение по начальным условиям $\mathbf{L}$ с помощью (2.20), можно получить:

$$\begin{aligned}\alpha_t^2 = \langle\tfrac{\Omega_1^2}{\Omega^2}\rangle_0 + 2\lambda t\left(\langle\tfrac{\Omega_1^2\Omega_2^2}{\Omega^4}\rangle_0 + 2\langle\tfrac{\Omega_1^2\Omega_3^2}{\Omega^4}\rangle_0\right) + \\ + 12\Lambda t\left(\langle\tfrac{\Omega_1^2\Omega_2^4}{\Omega^6}\rangle_0 - \langle\tfrac{\Omega_1^4\Omega_2^2}{\Omega^6}\rangle_0 - \langle\tfrac{\Omega_1^4\Omega_3^2}{\Omega^6}\rangle_0 + \langle\tfrac{\Omega_1^2\Omega_3^4}{\Omega^6}\rangle_0\right) + O\left(t^2\right).\end{aligned} \tag{2.76}$$

Для корреляторов β_t^2 и γ_t^2 аналогичным образом получаются похожие выражения:

$$\beta_t^2 = \langle\tfrac{\Omega_2^2}{\Omega^2}\rangle_0 + 2\lambda t\left(\langle\tfrac{\Omega_2^2\Omega_3^2}{\Omega^4}\rangle_0 - \langle\tfrac{\Omega_1^2\Omega_2^2}{\Omega^4}\rangle_0\right) + \\ + 12\Lambda t\left(\langle\tfrac{\Omega_1^4\Omega_2^2}{\Omega^6}\rangle_0 - \langle\tfrac{\Omega_1^2\Omega_2^4}{\Omega^6}\rangle_0 - \langle\tfrac{\Omega_2^4\Omega_3^2}{\Omega^6}\rangle_0 + \langle\tfrac{\Omega_2^2\Omega_3^4}{\Omega^6}\rangle_0\right) + O\left(t^2\right), \tag{2.77}$$

$$\gamma_t^2 = \langle\tfrac{\Omega_3^2}{\Omega^2}\rangle_0 - 2\lambda t\left(2\langle\tfrac{\Omega_1^2\Omega_3^2}{\Omega^4}\rangle_0 + \langle\tfrac{\Omega_2^2\Omega_3^2}{\Omega^4}\rangle_0\right) + \\ + 12\Lambda t\left(\langle\tfrac{\Omega_1^4\Omega_3^2}{\Omega^6}\rangle_0 - \langle\tfrac{\Omega_1^2\Omega_3^4}{\Omega^6}\rangle_0 - \langle\tfrac{\Omega_2^2\Omega_3^4}{\Omega^6}\rangle_0 + \langle\tfrac{\Omega_2^4\Omega_3^2}{\Omega^6}\rangle_0\right) + O\left(t^2\right). \tag{2.78}$$

Наглядный смысл коэффициентов при λt и Λt удобно проиллюстрировать, считая функцию распределения начальной завихренности изотропной. В этом случае все коэффициенты при величине Λt равны нулю. Для выражений α_t^2, β_t^2 и γ_t^2 коэффициенты при комплексе λt равны $8/15$, 0 и $-8/15$ соответственно. Таким образом видно, что слагаемое с Λt стремится вернуть систему к изотропному режиму (потому бездействует при изотропном распределении), а слагаемое с λt отражает свойство (2.19) специального выбора собственных значений.

2.5.2 Усреднение по начальным направлениям завихренности

Для того, чтобы закончить усреднение (2.76) надо знать функцию распределения начальной завихренности $f_0(\Omega) = f(0,\Omega)$. Не вдаваясь в нелинейные причины анизотропии распределения направления завихренности в базисе собственных векторов [107], предположим его некоторым произвольным эллипсоидальным:

$$f_0(\Omega) = f_{\Omega_0}\left(\tfrac{\Omega_1^2}{\mathcal{A}^2} + \tfrac{\Omega_2^2}{\mathcal{B}^2} + \tfrac{\Omega_3^2}{\mathcal{C}^2}\right), \tag{2.79}$$

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = 1. \tag{2.80}$$

Начальные значения корреляторов α_0^2, β_0^2 и γ_0^2 определенные из эксперимента и численного расчета, позволяют определить параметры распределения $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{B}^2$ и $\mathcal{C}^2$, не конкретизируя функцию f_{Ω_0}. Действительно, запишем систему

уравнений, связывающую начальные значения корреляторов с неизвестными параметрами:

$$\begin{cases} \alpha_0^2 = \ \langle \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} \rangle = \int \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} f_{\Omega_0} \left(\frac{\Omega_1^2}{\mathcal{A}^2} + \frac{\Omega_2^2}{\mathcal{B}^2} + \frac{\Omega_3^2}{\mathcal{C}^2} \right) \\ \beta_0^2 = \ \langle \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2} \rangle = \int \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2} f_{\Omega_0} \left(\frac{\Omega_1^2}{\mathcal{A}^2} + \frac{\Omega_2^2}{\mathcal{B}^2} + \frac{\Omega_3^2}{\mathcal{C}^2} \right) \\ \gamma_0^2 = \ \langle \frac{\Omega_3^2}{\Omega^2} \rangle = \int \frac{\Omega_3^2}{\Omega^2} f_{\Omega_0} \left(\frac{\Omega_1^2}{\mathcal{A}^2} + \frac{\Omega_2^2}{\mathcal{B}^2} + \frac{\Omega_3^2}{\mathcal{C}^2} \right). \end{cases}$$

Для взятия этих интегралов можно произвести замену, преобразующую эллипсоидальное распределение в изотропное и перейти к сферической системе координат:

$$\Omega_1 = \mathcal{A}x, \ \Omega_2 = \mathcal{B}y, \ \Omega_3 = \mathcal{C}z,$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2} \\ y = r\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2} \\ z = r\mu. \end{cases}$$

Тогда условие нормировки распределения запишется так:

$$4\pi\mathcal{ABC}\int_0^{+\infty} f_{\Omega_0}(r)\, r^2 dr = 1. \tag{2.81}$$

Поэтому независимость усредняемой величины от переменной r позволяет выразить α_0^2, β_0^2 и γ_0^2 для любого вида распределения f_{Ω_0} через эллиптические функции:

$$F = F\left(\arccos\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}}, \sqrt{\frac{\mathcal{B}^2\left(\mathcal{A}^2-\mathcal{C}^2\right)}{\mathcal{A}^2(\mathcal{B}^2-\mathcal{C}^2)}}\right), \quad E = E\left(\arccos\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}}, \sqrt{\frac{\mathcal{B}^2\left(\mathcal{A}^2-\mathcal{C}^2\right)}{\mathcal{A}^2(\mathcal{B}^2-\mathcal{C}^2)}}\right),$$

$$\begin{cases} \alpha_0^2 = \frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{A}^2-\mathcal{B}^2}\left(1 + \frac{\mathcal{C}^2\left(\mathcal{B}^2-\mathcal{A}^2\right)F - \mathcal{A}^2\left(\mathcal{B}^2-\mathcal{C}^2\right)E}{\mathcal{A}\sqrt{\mathcal{B}^2-\mathcal{C}^2}(\mathcal{A}^2-\mathcal{C}^2)}\right) \\ \beta_0^2 = \frac{\mathcal{B}^2}{\mathcal{B}^2-\mathcal{C}^2}\left(\frac{\mathcal{B}^2-\mathcal{C}^2}{\mathcal{B}^2-\mathcal{A}^2} - \frac{\mathcal{A}\sqrt{\mathcal{B}^2-\mathcal{C}^2}}{\mathcal{B}^2-\mathcal{A}^2}E\right) \\ \gamma_0^2 = \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{C}^2-\mathcal{A}^2}\frac{\mathcal{A}}{\sqrt{\mathcal{B}^2-\mathcal{C}^2}}\left(E-F\right). \end{cases}$$

Решение этой системы не может быть записано в элементарных функциях, однако легко решается приближенно для любых конкретных значений начальных условий. Например, примем для начальных условий из [81; 82]:

$$\alpha_0^2 = 0.350, \ \ \beta_0^2 = 0.385, \ \ \gamma_0^2 = 0.265. \tag{2.82}$$

Тогда имеем следующие значения для параметров распределения:

$$\mathcal{A}^2 = 0.355, \;\; \mathcal{B}^2 = 0.42, \;\; \mathcal{C}^2 = 0.225. \tag{2.83}$$

Таким образом, находя в каждом конкретном случае значения параметров распределения (2.79), можно получить численные значения коэффициентов в разложениях (2.76), (2.77) и (2.78) при λt и Λt.

2.5.3 Сравнение с экспериментом

Итак, произведя все необходимые усреднения, будем иметь вместо (2.76), (2.77) и (2.78) следующие выражения:

$$\alpha_t^2 \simeq 0.350 + 0.385\lambda t - 0.025\Lambda t, \tag{2.84}$$

$$\beta_t^2 \simeq 0.385 - 0.030\lambda t - 0.085\Lambda t, \tag{2.85}$$

$$\gamma_t^2 \simeq 0.265 - 0.355\lambda t + 0.110\Lambda t. \tag{2.86}$$

Здесь $\lambda = 3\sqrt{3/10\pi}\left(\varepsilon/r_0^2\right)^{1/3}$ (см. (2.20) и (2.21)), а Λ – подгоночный параметр того же порядка. Видно, что найденные значения параметров дают и рост α_t^2 (пируэт-эффект [81]), и перманентный медленный спад коррелятора β_t^2 (также наблюдаемый в эксперименте и численном расчете [82]), и линейное убывание γ_t^2 (см. [82]). Коэффициент корреляции Λ почти не влияет на рост α_t^2. Таким образом, формула (2.84) для величины α_t^2 может быть количественно проверена из экспериментальных данных. Используя временной масштаб $t_0 = \left(r_0^2/\varepsilon\right)^{1/3}$, получаем универсальный рост коррелятора α_t^2, наблюдаемый в [81]:

$$\alpha_t^2 \simeq 0.350 + 0.36t/t_0. \tag{2.87}$$

В рамках построенной модели можно также объяснить еще одно численно обнаруженное в [82] явление. Оказывается, что если тетраэдр сопутствует жидкой частице, сохраняя свою форму, то никакого характерного поведения завихренности для него не наблюдается. Действительно, в этом случае из тетраэдра постепенно «вытекает» жидкая частица, а ее место замещает другая жидкость. Растягивающаяся интенсифицирующая вихревая нить также частично выходит из жидкой частицы, поэтому длина нити l в тетраэдре остается

постоянной. Таким образом, по теореме Гельмгольца:

$$\omega S_\omega l = const, \tag{2.88}$$

где ω – завихренность внутри вихревой нити, а S_ω – площадь ее поперечного сечения. Как указывалось в разделе 2.2, именно эта величина сопоставляется в построенной модели крупномасштабной завихренности тетраэдра.

2.6 Выводы

В настоящей главе сформулирована и проанализирована теоретическая модель, в которой задача о динамике жидкой частицы в инерционном интервале масштабов сведена к линейной стохастической задаче. Как показано в разделе 2.2, крупномасштабный тензор скоростей деформации жидкой частицы $\Sigma(t)$ (2.2) можно считать внешним источником для динамики крупномасштабной завихренности $\Omega(t)$ (2.1). С применением такой модели в дельта-коррелированном гауссовом приближении аналитически исследовано поведение направления завихренности в лагранжевой системе отсчета. Результаты приведенного анализа количественно согласуются с результатами экспериментов и численных расчетов: на больших временах получена экспоненциально быстрая изотропизация (2.16) направления завихренности по отношению к изначально выделенному направлению, а на малых временах – характерное выравнивание (2.87) завихренности с вектором доминирующего растяжения (пируэт-эффект). Изначальная анизотропия направления завихренности по отношению к собственным векторам тензора скоростей деформации учтена как начальные условия к линейной задаче (2.79).

Важность представленных результатов заключается в самом факте применимости линейной стохастической модели в принципиально нелинейном процессе турбулентности. Показано, что линейные эффекты, возможно, играют главную роль на начальной стадии образования интенсивных вихревых структур в мелкомасштабной турбулентности.

Глава 3. Двухточечные третьи смешанные корреляции скорости и градиентов скорости

3.1 Двухточечный третий коррелятор скорости (введение)

Вкратце изложим классические результаты о двухточечном третьем корреляторе скорости в стационарном несжимаемом однородном и изотропном турбулентном потоке, которые понадобятся нам в этой главе [6; 10; 12]. Рассмотрим двухточечный третий коррелятор (в дальнейшем мы будем рассматривать только одномоментную статистику, поэтому будем опускать обозначение зависимости от времени усредняемых величин):

$$\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r})\rangle = F_{ijk}(\mathbf{b}). \tag{3.1}$$

В силу однородности поля скорости, F_{ijk} не зависит от вектора $\mathbf{r}$. Усреднение предполагается либо по времени в конкретной точке $\mathbf{r}$, которое из эргодической гипотезы равно усреднению по ансамблю, либо по набору точек с разными $\mathbf{r}$ (то есть по пространству), что в силу однородности равно усреднению по ансамблю. Коррелятор F_{ijk} обладает следующей тривиальной перестановочной симметрией:

$$\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r})\rangle = \langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_k(\mathbf{r})v_j(\mathbf{r})\rangle \Rightarrow F_{ijk}(\mathbf{b}) = F_{ikj}(\mathbf{b}). \tag{3.2}$$

Взяв частную производную от $\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r})\rangle$ по b_i, получим вследствие уравнения непрерывности (2):

$$\tfrac{\partial}{\partial b_i}F_{ijk}(\mathbf{b}) = 0. \tag{3.3}$$

Далее, из однородности и изотропии поля скорости следует, что трехиндексный тензор F_{ijk}, зависящий от одного направления, можно записать в явном виде как сумму четырех тензорных слагаемых [108]:

$$F_{ijk}(\mathbf{b}) = C(b)\delta_{jk}n_i + C_1(b)\delta_{ik}n_j + C_2(b)\delta_{ij}n_k + F(b)n_in_jn_k, \tag{3.4}$$

где $C(b)$, $C_1(b)$, $C_2(b)$ и $F(b)$ — скалярные функции, которые зависят только от модуля $\mathbf{b}$, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{b}/b. \tag{3.5}$$

Применив (3.2) к выражению (3.4), получим

$$C_1(b) = C_2(b) = D(b). \tag{3.6}$$

Для случая несжимаемой жидкости из (3.3), можно также получить связи между оставшимися скалярными функциями:

$$D(b) = -\frac{1}{2}bC'(b) - C(b), \tag{3.7}$$

$$F(b) = bC'(b) - C(b). \tag{3.8}$$

Таким образом,

$$F_{ijk}(\mathbf{b}) = C(b)\delta_{jk}n_i - \\ - \left(\tfrac{1}{2}b\,C'(b) + C(b)\right)(\delta_{ik}n_j + \delta_{ij}n_k) + (b\,C'(b) - C(b))\,n_in_jn_k. \tag{3.9}$$

Пусть $\langle\delta v_L^2\rangle$ – второй коррелятор продольного приращения скорости

$$\langle\delta v_L^2\rangle = \langle\big(v_L(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - v_L(\mathbf{r})\big)^2\rangle, \tag{3.10}$$

где $v_L = (\mathbf{v}\,\mathbf{n})\mathbf{n}$ – проекция скорости на продольное направление $\mathbf{b}$. Из уравнений Навье-Стокса (1) можно найти выражения для скалярной функций $C(b)$:

$$C(b) = \tfrac{1}{15}\varepsilon b - \tfrac{1}{2}\nu\langle\delta v_L^2\rangle'. \tag{3.11}$$

Подставив его в выражение для двухточечного тензора (3.9), получаем окончательное выражение для двухточечного тензора в изотропном несжимаемом турбулентном потоке:

$$F_{ijk}(\mathbf{b}) = -\tfrac{1}{10}\varepsilon\,\delta_{ij}b_k - \tfrac{1}{10}\varepsilon\,\delta_{ik}b_j + \tfrac{1}{15}\,\varepsilon\delta_{jk}b_i + \\ + \tfrac{\nu}{4}\Bigg(\left(2\langle\delta v_L^2\rangle' + b\,\langle\delta v_L^2\rangle''\right)(\delta_{ij}n_k + \delta_{ik}r_j) - \\ - 2\langle\delta v_L^2\rangle'\,\delta_{jk}r_i + \left(2\langle\delta v_L^2\rangle' - 2b\,\langle\delta v_L^2\rangle''\right)n_in_jn_k\Bigg), \tag{3.12}$$

которое в пределе $\nu \to 0$ дает:

$$F_{ijk}(\mathbf{b}) \xrightarrow{\nu\to 0} \tfrac{1}{15}\varepsilon\delta_{jk}b_i - \tfrac{1}{10}\varepsilon(\delta_{ik}b_j + \delta_{ij}b_k). \tag{3.13}$$

Введем обозначение аналогичное (3.10) для третьего коррелятора приращений скорости:

$$\begin{aligned}\langle \delta v_i \delta v_j \delta v_k \rangle &= \\ &= \langle (v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - v_i(\mathbf{r}))\,(v_j(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - v_j(\mathbf{r}))\,(v_k(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - v_k(\mathbf{r}))\rangle. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Поскольку изотропный турбулентный поток, очевидно, является и локально изотропным, то для вычисления (3.14) можно воспользоваться (3.12). Ненулевыми оказываются два третьих коррелятора приращения скорости $\langle\, \delta v_L^3 \rangle$ и $\langle\, \delta v_L \delta v_T^2 \,\rangle$, где L и T – это соответственно продольное и поперечное направления к вектору $\mathbf{b}$:

$$\langle \delta v_L^3 \rangle = -\tfrac{4}{5}\varepsilon b + 6\nu \langle \delta v_L^2 \rangle' \xrightarrow{\nu\to 0} -\tfrac{4}{5}\varepsilon b, \tag{3.15}$$

$$\langle \delta v_L \delta v_T^2 \rangle = -\tfrac{4}{15}\varepsilon b + \nu\left(\langle \delta v_L^2 \rangle' + b\,\langle \delta v_L^2 \rangle''\right) \xrightarrow{\nu\to 0} -\tfrac{4}{15}\varepsilon b. \tag{3.16}$$

Выражение (3.15) обсуждалось во введении. Оно называется колмогоровским законом «четырех пятых». В этой главе будут рассмотрены некоторые аналитические следствия закона четырех пятых, которые проверяются в численных расчетах методом, изложенным в разделе 3.2. В разделе 3.3 введен трехточечный коррелятор скорости и выведена связь членов его разложения по малому вектору, соединяющему две из трех точек, со смешанными двухточечными третьими корреляторами скорости и градиентов скорости. В разделе 3.4 сформулирован метод «кинематического» продолжения закона четырех пятых на члены разложения трехточечного тензора. Метод является кинематическим в том смысле, что в нем не используются какие-либо другие следствия уравнений движения, кроме самого закона четырех пятых. В разделах 3.5 и 3.6 выведены результаты для первого и второго членов разложения трехточечного тензора, соответственно, а также приведены следствия для соответствующих смешанных двухточечных корреляторов и их проверка в расчетах локально изотропной турбулентности. Основные результаты и выводы главы сформулированы в разделе 3.7.

3.2 Метод обработки численных данных

Для проверки соотношений, выведенных ниже из (3.12), используются численные расчеты университета Джона Хопкинса [30—32], которые уже использовались в главе 1 (JHTDB_1 и JHTDB_2). Описание параметров симуляций приведено на странице 28.

Численная и экспериментальная проверка (3.12) является нетривиальной задачей. Фактически, она возможна только в локально изотропном варианте (3.15)-(3.16), поскольку уже для этих законов процедура усреднения сходится крайне медленно: необходимы длительное усреднение по нескольким характерным временам оборота крупных вихрей и большая пространственная выборка (см., например, [109]). В работе [110] численно показано, что в изотропной турбулентности процедура усреднения по времени может быть заменена усреднением по направлениям. Таким образом, несмотря на то, что в базе данных JHTDB_2 представлен только один момент времени, ее также можно использовать для проверки результатов. Более того, усреднение по направлениям можно использовать вместе с усреднением по времени в JHTDB_1 для получения более точных результатов. В [110] усреднение производится по 73 фиксированным изотропно расположенным направлениям. В диссертации вместо этого используется более простой способ усреднения по двум тысячам случайных направлений в JHTDB_1 и по пятистам случайным направлениям в JHTDB_2. В таком способе не возникает необходимости заботиться об изотропии выбранных направлений, поскольку количество случайных направлений достаточно велико для достижения изотропии. Для иллюстрации на рисунке 3.1 представлено выполнение законов (3.15) и (3.16) в JHTDB_1 и в JHTDB_2, посчитанное указанным методом. Объем выборки составляет 8×10^6 для JHTDB_1 (в пять различных моментов времени) и 4×10^6 для JHTDB_2 (в единственный момент времени).

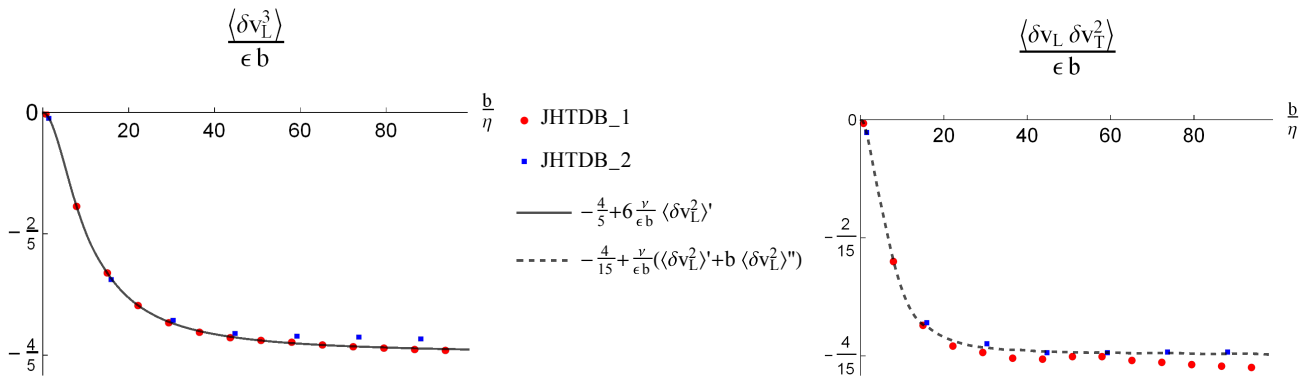


Рисунок 3.1 — На левой картинке показано выполнение закона четырех пятых (3.15), а на правой — четырех пятнадцатых (3.16) в JHTDB_1 и JHTDB_2. Горизонтальная ось обезразмерена делением на η, что позволяет отображать результаты обоих расчетов на одном графике.

3.3 Смешанные двухточечные корреляторы и трехточечный коррелятор скорости

Назовем порядком смешанного коррелятора скорости и градиентов скорости степень входящего туда тензора градиентов скорости. Поскольку в дальнейшем рассматриваются в основном различные третьи корреляторы, для удобства формулировок будем считать корреляторы по умолчанию (если не оговорено другое) третьими. Зная выражение для двухточечного коррелятора скорости, можно найти один смешанный двухточечный коррелятор первого порядка $\langle A_{il}(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r})\rangle$. Действительно,

$$\langle \frac{\partial}{\partial r_l} v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r})\rangle = \langle \frac{\partial}{\partial b_l} v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r})\rangle = \\ = \frac{\partial}{\partial b_l}\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r})\rangle = \frac{\partial}{\partial b_l} F_{ijk}(\mathbf{b}). \quad (3.17)$$

Теперь подставив (3.12) в (3.17), получаем:

$$\langle A_{il}(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r})\rangle = -\tfrac{1}{10}\varepsilon\left(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}\right)+\tfrac{1}{15}\varepsilon\delta_{il}\delta_{jk}+ \tag{3.18}$$
$$+\tfrac{\nu}{4b}\Bigg(\left(2\langle\delta v_L^2\rangle'+b\left\langle\delta v_L^2\right\rangle''\right)\left(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}\right)-2\langle\delta v_L^2\rangle'\delta_{il}\delta_{jk}+$$
$$+\left(-2\langle\delta v_L^2\rangle'+2b\left\langle\delta v_L^2\right\rangle''+b^2\left\langle\delta v_L^2\right\rangle'''\right)\left(\delta_{ij}n_kn_l+\delta_{ik}n_jn_l\right)+$$
$$+\left(2\langle\delta v_L^2\rangle'-2b\left\langle\delta v_L^2\right\rangle''\right)\left(\delta_{il}n_jn_k+\delta_{jk}n_in_l+\delta_{jl}n_in_k+\delta_{kl}n_in_j\right)+$$
$$+\left(-6\langle\delta v_L^2\rangle'+6b\left\langle\delta v_L^2\right\rangle''-2b^2\left\langle\delta v_L^2\right\rangle'''\right)n_in_jn_kn_l\Bigg).$$

Легко видеть, что для нахождения других смешанных двухточечных корреляторов недостаточно выражения для двухточечного тензора скорости: необходимо немного „разъединить“ две совпадающие точки, чтобы найти производную. Введем поэтому трехточечный коррелятор скорости:

$$\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})v_k(\mathbf{r})\rangle = X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b}). \tag{3.19}$$

В силу однородности поля скорости, тензор X_{ijk} (как и F_{ijk}) не зависит от вектора $\mathbf{r}$:

$$\tfrac{\partial}{\partial r_l}X_{ijk}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)=0. \tag{3.20}$$

Используем определение (3.19) и внесем производную под знак среднего:

$$\langle\tfrac{\partial}{\partial r_l}v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})v_k(\mathbf{r})\rangle+\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})\tfrac{\partial}{\partial r_l}v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})v_k(\mathbf{r})\rangle+$$
$$+\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})\tfrac{\partial}{\partial r_l}v_k(\mathbf{r})\rangle=0. \tag{3.21}$$

Далее, заменим производные по r_l на производные по b_l и a_l, где это возможно:

$$\langle\tfrac{\partial}{\partial b_l}v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})v_k(\mathbf{r})\rangle-\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})\tfrac{\partial}{\partial a_l}v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})v_k(\mathbf{r})\rangle+$$
$$+\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})\tfrac{\partial}{\partial r_l}v_k(\mathbf{r})\rangle=0. \tag{3.22}$$

Наконец, вынося за знак усреднения операторы производных по b_l и a_l (остальные скорости от них не зависят), получаем окончательно:

$$\tfrac{\partial}{\partial b_l}X_{ijk}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)-\tfrac{\partial}{\partial a_l}X_{ijk}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)+\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})A_{kl}(\mathbf{r})\rangle=0. \tag{3.23}$$

Отсюда находим выражение для смешанного трехточечного коррелятора первого порядка $Y_{ijkl}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ через $X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b})$:

$$Y_{ijkl}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})A_{kl}(\mathbf{r})\rangle = \frac{\partial}{\partial a_l}X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b}) - \frac{\partial}{\partial b_l}X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b}). \quad (3.24)$$

Заметим, что $Y_{ijkl}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ может быть найден также из формулы $Y_{ijkl}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\frac{\partial}{\partial a_l}X_{ikj}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, которая доказывается непосредственной проверкой. Тензор $Y_{ijkl}(\mathbf{0},\mathbf{b})$ дает выражение для другого смешанного двухточечного коррелятора первого порядка:

$$\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r})\rangle = Y_{ijkl}(\mathbf{0},\mathbf{b}). \quad (3.25)$$

Обратим внимание, что для нахождения $\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r})\rangle$ из (3.24) необходимо знать не весь трехточечный тензор $X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, а только его значение и значение его первой производной при $\mathbf{a} = 0$. Другими словами, надо знать нулевой и первый члены разложения тензора $X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ по малому вектору $\mathbf{a}$. Разумно предположить, что такое разложение существует, поскольку на малых масштабах скорости меняются гладко. Тензор $Y_{ijkl}(\mathbf{0},\mathbf{b})$ позволяет также найти один двухточечный смешанный коррелятор второго порядка:

$$\langle A_{ip}(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r})\rangle = \frac{\partial}{\partial b_p}Y_{ijkl}(\mathbf{0},\mathbf{b}). \quad (3.26)$$

Для вычисления другого двухточечного смешанного коррелятора второго порядка введем сначала соответствующий трехточечный смешанный коррелятор второго порядка:

$$Z_{ijpkl}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})A_{jp}(\mathbf{r}-\mathbf{a})A_{kl}(\mathbf{r})\rangle. \quad (3.27)$$

Сделав замену дифференцирования по r_p на a_p и вынося его за знак усреднения, получим:

$$Z_{ijpkl}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial a_p}Y_{ijkl}(\mathbf{a},\mathbf{b}). \quad (3.28)$$

Таким образом, для нахождения

$$\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})A_{jp}(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r})\rangle = Z_{ijpkl}(\mathbf{0},\mathbf{b}), \quad (3.29)$$

необходимо знать нулевой, первый и второй члены разложения тензора $X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ по вектору $\mathbf{a}$. Наконец, зная выражение для тензора $Z_{ijpkl}(\mathbf{0},\mathbf{b})$,

можно найти третий двухточечный коррелятор градиентов скорости (коррелятор третьего порядка):

$$\langle A_{iq}(\mathbf{r}+\mathbf{b})A_{jp}(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r})\rangle = \tfrac{\partial}{\partial b_q} Z_{ijpkl}\left(\mathbf{0},\mathbf{b}\right). \tag{3.30}$$

Таким образом знание разложения тензора $X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ до второго порядка по малому вектору $\mathbf{a}$ позволяет непосредственно находить все двухточечные смешанные корреляторы скоростей и их градиентов, а также и третий двухточечный коррелятор пространственных производных поля скорости.

3.4 Кинематический метод нахождения членов разложения трехточечного тензора

В этом разделе будут найдены условия, которые сильно ограничивают класс возможных поправок первого и второго порядка малости по $\mathbf{a}$ в разложении тензора $X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Представим разложение трехточечного тензора в виде:

$$X_{ijk}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right) = F_{ijk}(\mathbf{b}) + X^{(1)}_{ijkl}(\mathbf{b})a_l + X^{(2)}_{ijklp}(\mathbf{b})a_l a_p + o\big(|\mathbf{a}|^2\big). \tag{3.31}$$

Двухточечные тензоры $X^{(1)}_{ijkl}(\mathbf{b})$ и $X^{(2)}_{ijklp}(\mathbf{b})$ в разложении выражаются ввиду изотропии через 10 и 17 скалярных функций соответственно [6; 108]:

$$\begin{aligned} X^{(1)}_{ijkl}(\mathbf{b}) =& d_1(b)\delta_{ij}\delta_{kl} + d_2(b)\delta_{ik}\delta_{jl} + d_3(b)\delta_{jk}\delta_{il} + \\ &+ e_1(b)\delta_{ij}n_k n_l + e_2(b)\delta_{ik}n_j n_l + e_3(b)\delta_{jk}n_i n_l + \\ &+ e_4(b)n_i n_j\delta_{kl} + e_5(b)n_i n_k\delta_{jl} + e_6(b)n_j n_k\delta_{il} + \\ &+ f(b)n_i n_j n_k n_l. \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$
\begin{aligned}
X^{(2)}_{ijklp}(\mathbf{b}) =& g_1(b)\delta_{ij}\delta_{kl}n_p + g_2(b)\delta_{ik}\delta_{jl}n_p + g_3(b)\delta_{jk}\delta_{il}n_p + \\
&+ g_4(b)\delta_{ij}\delta_{lp}n_k + g_5(b)\delta_{ik}\delta_{lp}n_j + g_6(b)\delta_{jk}\delta_{lp}n_i + \\
&+ G_4(b)\delta_{ij}n_k n_l n_p + G_5(b)\delta_{ik}n_j n_l n_p + G_6(b)\delta_{jk}n_i n_l n_p + \\
&+ h_2(b)\delta_{pl}n_i n_j n_k + H_2(b)n_i n_j n_k n_l n_p + \\
&+ \tfrac{1}{2}l_1(b)\left(\delta_{ip}\delta_{jl}n_k + \delta_{il}\delta_{jp}n_k\right) + \tfrac{1}{2}l_2(b)\left(\delta_{ip}\delta_{lk}n_j + \delta_{il}\delta_{pk}n_j\right) + \\
&+ \tfrac{1}{2}l_3(b)\left(\delta_{jp}\delta_{lk}n_i + \delta_{jl}\delta_{kp}n_i\right) + \tfrac{1}{2}l_4(b)\left(\delta_{kl}n_i n_j n_p + \delta_{kp}n_i n_j n_l\right) + \\
&+ \tfrac{1}{2}l_5(b)\left(\delta_{jl}n_i n_k n_p + \delta_{jp}n_i n_k n_l\right) + \tfrac{1}{2}l_6(b)\left(\delta_{il}n_j n_k n_p + \delta_{ip}n_j n_k n_l\right). \quad (3.33)
\end{aligned}
$$

Аналогично условию (3.2) для двухточечного тензора F_{ijk}, для трехточечного тензора X_{ijk} можно также указать перестановочную симметрию. При этом несмотря на то, что для трехточечного тензора X_{ijk} имеется шесть перестановочных симметрий, требование малости $\mathbf{a}$ при произвольном $\mathbf{b}$ позволяет использовать только одну из них:

$$
\begin{aligned}
\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})v_k(\mathbf{r})\rangle = \langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_k(\mathbf{r})v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})\rangle \Rightarrow \\
\Rightarrow X_{ijk}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right) = X_{ikj}\left(-\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{b}\right). \quad (3.34)
\end{aligned}
$$

Это соотношение должно выполняться и в каждом порядке разложения по $\mathbf{a}$, что накладывает дополнительные ограничения на тензоры $X^{(1)}_{ijkl}(\mathbf{b})$ и $X^{(2)}_{ijklp}(\mathbf{b})$.

Наконец, условие несжимаемости потока также сильно ограничивает класс возможных поправок $X^{(1)}_{ijk}(\mathbf{b})$ и $X^{(2)}_{ijk}(\mathbf{b})$. Оно дает еще три условия на каждую из поправок. Действительно,

$$\langle \tfrac{\partial}{\partial r_i} v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})v_k(\mathbf{r})\rangle = 0 \Rightarrow \tfrac{\partial}{\partial b_i} X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0, \quad (3.35)$$

$$\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})\tfrac{\partial}{\partial r_j} v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})v_k(\mathbf{r})\rangle = 0 \Rightarrow \tfrac{\partial}{\partial a_j} X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0, \quad (3.36)$$

$$\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r}-\mathbf{a})\tfrac{\partial}{\partial r_k} v_k(\mathbf{r})\rangle = 0 \Rightarrow \tfrac{\partial}{\partial b_k} X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b}) - \tfrac{\partial}{\partial a_k} X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0. \quad (3.37)$$

Подставляя в эти условия разложение (3.31), и приравнивая соответствующие порядки малости, получим дополнительные условия на тензоры.

3.5 Первый порядок разложения трехточечного тензора

3.5.1 Ограничение изотропии и несжимаемости

Введем обозначение μ для косинуса угла между векторами $\mathbf{a} = a\,\mathbf{m}$ и $\mathbf{b} = b\,\mathbf{n}$:

$$\mu = (\mathbf{n}\,\mathbf{m}). \tag{3.38}$$

Подставляя (3.32) в (3.31), запишем общий вид изотропного тензора $X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, разложенного до первого порядка по $\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned} X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = C(b)\,\delta_{jk}n_i + D(b)\,\delta_{ij}n_k + D(b)\,\delta_{ik}n_j + F(b)\,n_in_jn_k + \\ +a\Big(d_1(b)\delta_{ij}m_k + d_2(b)\delta_{ik}m_j + d_3(b)\delta_{jk}m_i + \\ +\mu\,d_4(b)\delta_{ij}n_k + \mu\,d_5(b)\delta_{ik}n_j + \mu\,d_6(b)\delta_{jk}n_i + \\ +\mu\,f_2(b)n_in_jn_k + \\ +e_4(b)n_in_jm_k + e_5(b)n_im_jn_k + e_6(b)m_in_jn_k\Big) + o(a). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Применим перестановочную симметрию (3.34) к этому тензору. Записывая выражение для тензора в другой подстановке $X_{ikj}(-\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{b})$, можно вычислить первый порядок разложения. При этом потребуются разложения расстояния $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ до первого порядка по a и косинуса угла между векторами $-\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ до нулевого порядка по a:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = b + a\mu + o(a), \tag{3.40}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{-\mathbf{a}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{a\,|\mathbf{a}+\mathbf{b}|} = -\mu + o(1). \tag{3.41}$$

Приравнивая подобные тензорные слагаемые в первом порядке разложения, получаем новые условия на скалярные функции:

$$(3.34) \Rightarrow \begin{cases} d_1(b) &= \frac{D(b)}{b} - d_2(b) \\ d_3(b) &= \frac{C(b)}{2b} \\ d_4(b) &= D'(b) - \frac{D(b)}{b} - d_5(b) \\ d_6(b) &= \frac{1}{2}C'(b) - \frac{C(b)}{2b} \\ f_2(b) &= \frac{1}{2}F'(b) - \frac{3F(b)}{2b} \\ e_4(b) &= \frac{F(b)}{b} - e_5(b) \\ e_6(b) &= \frac{F(b)}{2b}. \end{cases}$$

Из этой системы видно, что в сжимаемом случае к трем произвольным скалярным функциям нулевого порядка ($C(b)$, $D(b)$ и $F(b)$) добавляются три произвольные скалярные функции первого порядка ($d_2(b)$, $d_5(b)$ и $e_5(b)$). Учтем теперь несжимаемость потока. Для нулевого порядка несжимаемость дает известные выражения (3.7), (3.8):

$$\begin{cases} D(b) &= -\frac{b}{2}C'(b) - C(b) \\ F(b) &= bC'(b) - C(b). \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в выражение для тензора и применяя к нему следствия из уравнений непрерывности (3.35-3.37), мы получаем дополнительную тройку уравнений:

$$(3.35) \Rightarrow 2b^2\, d_2'(b) - 2b\, d_5(b) + 2b^2\, e_5'(b) + 4b\, e_5(b) = b^2\, C''(b) + b\, C'(b) - C(b).$$

$$(3.36) \text{ или } (3.37) \Rightarrow \begin{cases} 4b\, d_2(b) + 2b\, d_5(b) &= b\, C'(b) + C(b) \\ 2b\, d_5(b) - 4b\, e_5(b) &= -b\, C'(b) + C(b). \end{cases}$$

Они ограничивают произвол в скалярных функциях первого порядка разложения до единственной функции, которую мы обозначим $d(b)$:

$$\begin{cases} e_5(b) &= d(b) \\ d_2(b) &= -d(b) + \frac{1}{2}C'(b) \\ d_5(b) &= 2d(b) + \frac{1}{2b}C(b) - \frac{1}{2}C'(b). \end{cases}$$

Теперь выражение для тензора, зависящее всего от двух скалярных функций $C(b)$ и $d(b)$, может быть записано в следующей, довольно громоздкой, форме:

$$
\begin{aligned}
X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = {} & C(b)\delta_{jk}n_i - \left(\tfrac{b}{2}C'(b) + C(b)\right)(\delta_{ij}n_k + \delta_{ik}n_j) + \\
& + (b\,C'(b) - C(b))\,n_i n_j n_k + \\
& + \tfrac{a}{b}\Bigg(- (b\,C'(b) + C(b))\,\delta_{ij}m_k + \tfrac{b}{2}C'(b)\delta_{ik}m_j + \tfrac{1}{2}C(b)\delta_{jk}m_i + \\
& + \tfrac{\mu}{2}\left(C(b) - b\,C'(b) - b^2\,C''(b)\right)\delta_{ij}n_k + \\
& + \tfrac{1}{2}(C(b) - b\,C'(b))\,(\mu\delta_{ik}n_j - \mu\delta_{jk}n_i - 2n_i n_j m_k - m_i n_j n_k) \\
& + \tfrac{\mu}{2}\left(4C(b) - 4b\,C'(b) + b^2\,C''(b)\right)n_i n_j n_k\Bigg) + \\
& + a\,d(b)\left(\delta_{ij}m_k - \delta_{ik}m_j + 2\mu\delta_{ik}n_j - \right. \\
& \left. - 2\mu\delta_{ij}n_k + n_i m_j n_k - n_i n_j m_k\right) + o(a).
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Это наиболее простой вид разложения тензора $X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ с учетом несжимаемости статистически изотропного потока. Подставив теперь на место $C(b)$ следствие уравнений Навье-Стокса (3.11), мы получим выражение тензора через поток энергии ε, произвольную функцию $d(b)$ и вторую продольную функцию (зависимость от последней стремится к нулю в пределе $\nu \to 0$):

$$
\begin{aligned}
X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = {} & -\tfrac{1}{10}\varepsilon\,\delta_{ij}b_k - \tfrac{1}{10}\varepsilon\,\delta_{ik}b_j + \tfrac{1}{15}\,\varepsilon\delta_{jk}b_i + \\
& + \tfrac{\nu}{4}\Bigg(\left(2\langle\delta v_L^2\rangle' + b\,\langle\delta v_L^2\rangle''\right)(\delta_{ij}n_k + \delta_{ik}n_j) - \langle\delta v_L^2\rangle'\,\delta_{jk}n_i + \\
& + \left(2\langle\delta v_L^2\rangle' - 2b\,\langle\delta v_L^2\rangle''\right)n_i n_j n_k\Bigg) - \\
& - \tfrac{2}{15}\varepsilon\,\delta_{ij}a_k + \tfrac{1}{30}\varepsilon\,\delta_{ik}a_j + \tfrac{1}{30}\varepsilon\,\delta_{jk}a_i + \\
& + d(b)\,a\,(\delta_{ij}m_k - \delta_{ik}m_j + 2\mu\delta_{ik}n_j - 2\mu\delta_{ij}n_k + n_i m_j n_k - n_i n_j m_k) + \\
& + \tfrac{\nu}{4}\tfrac{a}{b}\Bigg(\left(2\langle\delta v_L^2\rangle' + 2b\,\langle\delta v_L^2\rangle''\right)\delta_{ij}m_k - \langle\delta v_L^2\rangle''\delta_{ik}m_j - \langle\delta v_L^2\rangle'\delta_{jk}m_i + \\
& + \left(\langle\delta v_L^2\rangle' - b\,\langle\delta v_L^2\rangle''\right)m_i n_j n_k + \left(2\langle\delta v_L^2\rangle' - 2b\,\langle\delta v_L^2\rangle''\right)n_i n_j m_k + \\
& + \left(-\langle\delta v_L^2\rangle' + b\,\langle\delta v_L^2\rangle'' + b^2\,\langle\delta v_L^2\rangle'''\right)\mu\delta_{ij}n_k + \\
& + \left(-\langle\delta v_L^2\rangle' + b\,\langle\delta v_L^2\rangle''\right)(\mu\delta_{ik}n_j - \mu\delta_{jk}n_i) + \\
& + \left(-3\langle\delta v_L^2\rangle' + 3b\,\langle\delta v_L^2\rangle'' - b^2\,\langle\delta v_L^2\rangle'''\right)\mu n_i n_j n_k\Bigg) + o(a).
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

В пределе $\nu \to 0$ выражение (3.43) сильно упрощается:

$$\begin{aligned} X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \xrightarrow{\nu\to 0} & \tfrac{1}{15}\varepsilon\,\delta_{jk}b_i - \tfrac{1}{10}\varepsilon\,(\delta_{ik}b_j + \delta_{ij}b_k) - \\ & - \tfrac{1}{30}\varepsilon\,(\delta_{jk}a_i + \delta_{ik}a_j) + \tfrac{2}{15}\varepsilon\,\delta_{ij}a_k + \\ & + d(b)\,a\,(\delta_{ij}m_k - \delta_{ik}m_j + 2\mu\delta_{ik}n_j - \\ & - 2\mu\delta_{ij}n_k + n_i m_j n_k - n_i n_j m_k) + o(a). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Подставив выражение (3.43) в (3.24), можно найти еще один смешанный коррелятор первого порядка в случае изотропного турбулентного потока:

$$\begin{aligned} \langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_j(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r})\rangle = Y_{ijkl}(\mathbf{0},\mathbf{b}) = & \tfrac{2}{15}\varepsilon\delta_{ik}\delta_{jl} - \tfrac{1}{30}\varepsilon\delta_{ij}\delta_{kl} - \tfrac{1}{30}\varepsilon\delta_{il}\delta_{jk} + \\ & + d(b)\,(-\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{ik}n_j n_l - 2\delta_{ij}n_k n_l - \delta_{kl}n_i n_j + \delta_{jl}n_i n_k) + \\ & + \tfrac{\nu}{4b}\Big(-2\left(\langle\delta v_L^2\rangle' + b\langle\delta v_L^2\rangle''\right)\delta_{ik}\delta_{jl} + b\langle\delta v_L^2\rangle''\delta_{ij}\delta_{kl} + \langle\delta v_L^2\rangle'\delta_{il}\delta_{jk} + \\ & + \left(\langle\delta v_L^2\rangle' - b\langle\delta v_L^2\rangle'' - b^2\langle\delta v_L^2\rangle'''\right)\delta_{ik}n_j n_l + \\ & + \left(-\langle\delta v_L^2\rangle' + b\langle\delta v_L^2\rangle''\right)(-\delta_{ij}n_k n_l + \delta_{il}n_j n_k + \delta_{jk}n_i n_l + 2\delta_{jl}n_i n_k) + \\ & + \left(3\langle\delta v_L^2\rangle' - 3b\langle\delta v_L^2\rangle'' + b^2\langle\delta v_L^2\rangle'''\right)n_i n_j n_k n_l\Big). \end{aligned} \tag{3.45}$$

3.5.2 О возможном нахождении новой скалярной функции из уравнений движения

Покажем, что для теоретического нахождения функции $d(b)$ недостаточно уравнений на динамику парных корреляторов $\langle v_i(\mathbf{r})\,A_{jl}(\mathbf{r}+\mathbf{b})\rangle$ и $\langle A_{ik}(\mathbf{r})\,A_{jl}(\mathbf{r}+\mathbf{b})\rangle$. Оказывается, что динамика этих корреляторов полностью определяется динамикой $\langle v_i(\mathbf{r})\,v_l(\mathbf{r}+\mathbf{b})\rangle$. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle v_i(\mathbf{r})\,A_{jl}(\mathbf{r}+\mathbf{b})\rangle = \frac{\partial}{\partial b_l}\frac{\partial}{\partial t}\langle v_i(\mathbf{r})\,v_j(\mathbf{r}+\mathbf{b})\rangle, \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle A_{ik}(\mathbf{r})\,A_{jl}(\mathbf{r}+\mathbf{b})\rangle = -\frac{\partial^2}{\partial b_k\partial b_l}\frac{\partial}{\partial t}\langle v_i(\mathbf{r})\,v_j(\mathbf{r}+\mathbf{b})\rangle. \tag{3.47}$$

Таким образом, выполнение этих уравнений вытекает из закона Колмогорова, не давая ничего нового. В диссертации функция $d(b)$ находится численно.

3.5.3 Следствия для корреляторов первого порядка в локально изотропной турбулентности

Для возможности проверки соотношений (3.18) и (3.45) в базе данных, остановимся на том, какие комбинации смешанных корреляторов первого порядка являются однородными и изотропными в локально изотропном турбулентном потоке. Покажем, во-первых, что изотропны приращения $\langle (v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - v_i(\mathbf{r}))\,(v_j(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - v_j(\mathbf{r}))\,(A_{kl}(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - A_{kl}(\mathbf{r}))\rangle$ скоростей и градиентов скоростей. Для этого рассмотрим две точки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ вблизи точки $\mathbf{r}$, такие что $\mathbf{r}$ является серединой отрезка, соединяющего $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а также две точки $\mathbf{r}_3$ и $\mathbf{r}_4$, расположенные аналогично вблизи $\mathbf{r}+\mathbf{b}$. Тогда,

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{r}) & \simeq & (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\,/2 \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) & \propto & \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{b}) & \simeq & (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4)\,/2 \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}+\mathbf{b}) & \propto & \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4, \end{cases}$$

где $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Таким образом, изотропия приращений скорости и градиентов будет следовать из изотропии следующего четырехточечного коррелятора:

$$\begin{aligned} &\langle (v_{3i} + v_{4i} - v_{1i} - v_{2i})\,(v_{3j} + v_{4j} - v_{1j} - v_{2j})\,(v_{3k} - v_{4k} - v_{1k} + v_{2k})\rangle = \\ &= \langle \big((v_{3i} - v_{1i}) + (v_{4i} - v_{2i})\big)\big((v_{3j} - v_{1j}) + (v_{4j} - v_{2j})\big)\big((v_{3k} - v_{1k}) - (v_{4k} - v_{2k})\big)\rangle, \end{aligned}$$

которая и выполняется в локально изотропной турбулентности. Более того из изотропии следующего четырехточечного коррелятора:

$$\begin{aligned} &\langle (v_{3i} + v_{4i} - v_{1i} - v_{2i})\,(v_{3j} + v_{4j} - v_{1j} - v_{2j})\,(v_{3k} - v_{4k} + v_{1k} - v_{2k})\rangle = \\ &= \langle \big((v_{3i} - v_{2i}) + (v_{4i} - v_{1i})\big)\big((v_{3j} - v_{2j}) + (v_{4j} - v_{1j})\big)\big((v_{3k} - v_{2k}) - (v_{4k} - v_{1k})\big)\rangle. \end{aligned}$$

следует, что $\langle (v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - v_i(\mathbf{r}))\,(v_j(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - v_j(\mathbf{r}))\,(A_{kl}(\mathbf{r}+\mathbf{b}) + A_{kl}(\mathbf{r}))\rangle$ также является изотропным коррелятором. Введем обозначение для суммы тензоров в разных точках:

$$\overline{\delta} A_{kl} = A_{kl}(\mathbf{r}+\mathbf{b}) + A_{kl}(\mathbf{r}). \tag{3.48}$$

Из общих симметрийных соотношений легко понять, что коррелятор $\langle \delta v_i \delta v_j \delta A_{kl} \rangle$ тождественный нуль:

$$\langle (v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - v_i(\mathbf{r}))\,(v_j(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - v_j(\mathbf{r}))\,(A_{kl}(\mathbf{r}+\mathbf{b}) - A_{kl}(\mathbf{r}))\rangle \equiv 0. \tag{3.49}$$

Ненулевым является коррелятор $\langle \delta v_i \delta v_j \overline{\delta} A_{kl} \rangle$, для которого из (3.18) и (3.45), получаем:

$$\begin{aligned}
&\langle \delta v_i \delta v_j \overline{\delta} A_{kl} \rangle = \qquad (3.50)\\
&= 2\big(\langle A_{kl}(\mathbf{r}+\mathbf{b}) v_i(\mathbf{r}) v_j(\mathbf{r})\rangle + \langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b}) v_j(\mathbf{r}) A_{kl}(\mathbf{r})\rangle + \langle v_j(\mathbf{r}+\mathbf{b}) v_i(\mathbf{r}) A_{kl}(\mathbf{r})\rangle\big) = \\
&= \tfrac{2}{15}\varepsilon\left(2\delta_{ij}\delta_{kl} - 3\delta_{ik}\delta_{jl} - 3\delta_{il}\delta_{jk}\right) + \\
&+2d(b)\left(-2\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \right.\\
&\left. +2n_i n_j \delta_{kl} - n_i n_k \delta_{jl} - 2n_i n_l \delta_{jk} - n_j n_k \delta_{il} - 2n_j n_l \delta_{ik} + 4n_k n_l \delta_{ij}\right) + \\
&+\tfrac{\nu}{2b}\Bigg(\left(\langle \delta v_L^2\rangle' + b\langle \delta v_L^2\rangle''\right)\left(-2\delta_{ij}\delta_{kl} + 3\delta_{ik}\delta_{jl} + 3\delta_{il}\delta_{jk}\right) + \\
&+\left(\langle\langle \delta v_L^2\rangle' - b\langle \delta v_L^2\rangle''\right)\left(2n_i n_j \delta_{kl} + 5n_i n_k \delta_{jl} + 5n_j n_k \delta_{il}\right) + \\
&+\left(-\langle \delta v_L^2\rangle' + b\langle \delta v_L^2\rangle'' + b^2\langle \delta v_L^2\rangle'''\right)\left(2n_i n_l \delta_{jk} + 2n_j n_l \delta_{ik}\right) + \\
&+\left(-12\langle \delta v_L^2\rangle' + 12b\langle \delta v_L^2\rangle'' - 4b^2\langle \delta v_L^2\rangle'''\right) n_i n_j n_k n_l\Bigg).
\end{aligned}$$

Выпишем восемь ненулевых компонент этого тензора (если в коррелятор входят два поперечных направления, то для второго направления вводится новое обозначение T'):

$$\langle \delta v_L^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle = -\tfrac{8}{15}\varepsilon + 4\nu\langle \delta v_L^2\rangle'', \tag{3.51}$$

$$\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle = \tfrac{4}{15}\varepsilon + 4d(b) - \tfrac{\nu}{b}(\langle \delta v_L^2\rangle' + b\langle \delta v_L^2\rangle''), \tag{3.52}$$

$$\langle \delta v_L \delta v_T \overline{\delta} A_{TL} \rangle = -\tfrac{2}{5}\varepsilon - 2d(b) + \tfrac{\nu}{2b}(\langle \delta v_L^2\rangle' + 5b\langle \delta v_L^2\rangle'' + 2b^2\langle \delta v_L^2\rangle'''), \tag{3.53}$$

$$\langle \delta v_L \delta v_T \overline{\delta} A_{LT} \rangle = -\tfrac{2}{5}\varepsilon + \tfrac{\nu}{b}(4\langle \delta v_L^2\rangle' - b\langle \delta v_L^2\rangle''), \tag{3.54}$$

$$\langle \delta v_L^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle = \tfrac{4}{15}\varepsilon - 2\nu\langle \delta v_L^2\rangle'', \tag{3.55}$$

$$\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle = -\tfrac{8}{15}\varepsilon + \tfrac{2\nu}{b}\left(\langle \delta v_L^2\rangle' + b\langle \delta v_L^2\rangle''\right), \tag{3.56}$$

$$\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{T'T'} \rangle = \tfrac{4}{15}\varepsilon - 4d(b) - \tfrac{\nu}{b}\left(\langle \delta v_L^2\rangle' + b\langle \delta v_L^2\rangle''\right), \tag{3.57}$$

$$\langle \delta v_T \delta v_{T'} \overline{\delta} A_{TT'} \rangle = -\tfrac{2}{5}\varepsilon + 2d(b) + \tfrac{3\nu}{2b}(\langle \delta v_L^2\rangle' + b\langle \delta v_L^2\rangle''). \tag{3.58}$$

Можно составить несколько нулевых комбинаций из этих корреляторов. Например, из несжимаемости потока:

$$\langle \delta v_L^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle + 2\langle \delta v_L^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle = 0, \tag{3.59}$$

$$\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle + \langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle + \langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{T'T'} \rangle = 0. \tag{3.60}$$

Назовем нулевые комбинации (3.59) и (3.60) тривиальными, поскольку для их выполнения не требуется ни условия статистической однородности или изотропии потока, ни динамических соображений. Таким образом они не дают новой содержательной информации об изотропной турбулентности.

Также можно составить две другие линейно-независимые нулевые комбинации, которые не будут прямым следствием несжимаемости:

$$\tfrac{2}{\sqrt{6}}\langle \delta v_T \delta v_{T'} \overline{\delta} A_{TT'} \rangle + \tfrac{1}{\sqrt{6}}\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{T'T'} \rangle - \tfrac{1}{\sqrt{6}}\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle = 0, \tag{3.61}$$

$$\tfrac{8}{\sqrt{105}}\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle - \tfrac{4}{\sqrt{105}}\langle \delta v_L \delta v_T \overline{\delta} A_{LT} \rangle - \tfrac{5}{\sqrt{105}}\langle \delta v_L^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle = 0. \tag{3.62}$$

Коэффициенты при корреляторах для дальнейшего удобства нормированы так, чтобы сумма их квадратов была равна единице. Нулевые комбинации (3.61) и (3.62) назовем изотропными, поскольку для их получения, очевидно, необходимы условия изотропии потока. Такие названия будем давать и в дальнейшем подобным комбинациям при рассмотрении других корреляторов.

Четыре оставшихся независимых точных соотношения для смешанных корреляторов первого порядка можно также разбить на две пары, где первая пара (3.51) и (3.56) зависит только от потока энергии ε:

$$\langle \delta v_L^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle = -\tfrac{8}{15}\varepsilon + 4\nu \langle \delta v_L^2 \rangle'',$$
$$\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle = -\tfrac{8}{15}\varepsilon + \tfrac{2\nu}{b}(\langle \delta v_L^2 \rangle' + b\langle \delta v_L^2 \rangle''),$$

а вторая пара (3.52) и (3.53) также и от неизвестной функции $d(b)$:

$$\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle = \tfrac{4}{15}\varepsilon + 4d(b) - \tfrac{\nu}{b}(\langle \delta v_L^2 \rangle' + b\langle \delta v_L^2 \rangle''),$$
$$\langle \delta v_L \delta v_T \overline{\delta} A_{TL} \rangle = -\tfrac{2}{5}\varepsilon - 2d(b) + \tfrac{\nu}{2b}(\langle \delta v_L^2 \rangle' + 5b\langle \delta v_L^2 \rangle'' + 2b^2\langle \delta v_L^2 \rangle''').$$

Таким образом, выражения (3.51) для $\langle \delta v_L^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle$ и (3.56) для $\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle$ представляют из себя новые точные законы локально изотропной турбулентности, допускающие экспериментальную и численную проверку. На рисунке 3.2

показано выполнение этих законов в JHTDB_1 и JHTDB_2. Статистические погрешности на рисунке посчитаны из изотропных нулевых комбинаций (3.54) и (3.58) посредством оценки отклонений этих выражений от нуля для рассматриваемых данных (см. приложение A).

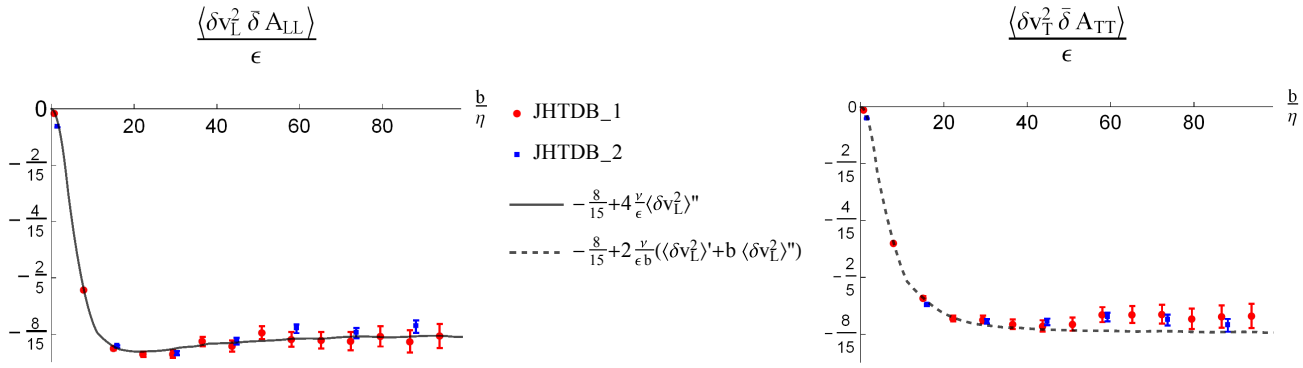


Рисунок 3.2 — Выполнение законов восьми пятнадцатых в JHTDB_1 и JHTDB_2: (3.51) на левой картинке и (3.56) — на правой. Горизонтальная ось обезразмерена делением на η, что позволяет отображать результаты обоих расчетов на одном графике. Статистические погрешности посчитаны из изотропных нулевых комбинаций (3.54) и (3.58) (см. приложение A).

Выражения (3.52) для $\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle$ и (3.53) для $\langle \delta v_L \delta v_T \overline{\delta} A_{TL} \rangle$ позволяют определить неизвестную скалярную функцию $d(b)$ путем обработки численных данных. Например, можно найти функцию $d(b)$ с помощью выражения

$$d(b) = \tfrac{1}{4}\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle + \tfrac{1}{8}\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle, \tag{3.63}$$

использующего (3.52) и (3.56). Отложим обсуждение этого выражения до следующего раздела.

3.5.4 Следствия для корреляторов второго порядка в локально изотропной турбулентности

Легко также показать, что смешанные корреляторы $\langle \delta v_i \delta A_{jl} \delta A_{km} \rangle$, $\langle \delta v_i \overline{\delta} A_{jl} \delta A_{km} \rangle$, $\langle \delta v_i \overline{\delta} A_{jl} \overline{\delta} A_{km} \rangle$ являются изотропными в локально-изотропной турбулентности. При этом аналогично случаю корреляторов первого порядка имеем как тождественно нулевые корреляторы

$$\langle \delta v_i \overline{\delta} A_{jl} \delta A_{km} \rangle \equiv 0, \tag{3.64}$$

так и выражающиеся через корреляторы введенные в разделе 3.3:

$$\begin{aligned}\langle\delta v_i\delta A_{jl}\delta A_{km}\rangle &= 2\big(\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})A_{jl}(\mathbf{r})A_{km}(\mathbf{r})\rangle \\ &+ \langle A_{jl}(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_i(\mathbf{r})A_{km}(\mathbf{r})\rangle + \langle A_{km}(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_i(\mathbf{r})A_{jl}(\mathbf{r})\rangle\big), \qquad (3.65)\\ \langle\delta v_i\overline{\delta} A_{jl}\overline{\delta} A_{km}\rangle &= 2\big(\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})A_{jl}(\mathbf{r})A_{km}(\mathbf{r})\rangle - \\ &- \langle A_{jl}(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_i(\mathbf{r})A_{km}(\mathbf{r})\rangle - \langle A_{km}(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_i(\mathbf{r})A_{jl}(\mathbf{r})\rangle\big). \qquad (3.66)\end{aligned}$$

Для корреляторов типа (3.26) достаточно знать первый порядок разложения трехточечного тензора $X_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, поэтому из первого порядка разложения тензора (3.43) может быть выражена локально-изотропная разность смешанных корреляторов второго порядка, которую мы обозначим $\Delta_{\langle \mathrm{i\,(j,l)\,(k,m)}\rangle}$:

$$\begin{aligned}\Delta_{\langle \mathrm{i\,(j,l)\,(k,m)}\rangle} &= \langle\delta v_i\delta A_{jl}\delta A_{km}\rangle - \langle\delta v_i\overline{\delta} A_{jl}\overline{\delta} A_{km}\rangle = \qquad (3.67)\\ &4\big(\langle A_{jl}(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_i(\mathbf{r})A_{km}(\mathbf{r})\rangle + \langle A_{km}(\mathbf{r}+\mathbf{b})v_i(\mathbf{r})A_{jl}(\mathbf{r})\rangle\big).\end{aligned}$$

Исключая из рассмотрения $\Delta_{\langle \mathrm{L\,(L,L)\,(T,T)}\rangle}$, $\Delta_{\langle \mathrm{L\,(T,T)\,(T',T')}\rangle}$, $\Delta_{\langle \mathrm{T\,(L,T)\,(T',T')}\rangle}$ и $\Delta_{\langle \mathrm{T\,(T,L)\,(T',T')}\rangle}$ ввиду возможности их нахождения из других корреляторов через условия несжимаемости потока, из (3.67) можно выделить пять ненулевых линейно-независимых разностей, например,

$$\begin{aligned}\Delta_{\langle \mathrm{L\,(L,L)\,(L,L)}\rangle} &= -4\nu\langle\delta v_L^2\rangle''', \qquad (3.68)\\ \Delta_{\langle \mathrm{T\,(L,L)\,(T,L)}\rangle} &= -4d'(b) + \tfrac{\nu}{b^2}\big(-\langle\delta v_L^2\rangle' + b\,\langle\delta v_L^2\rangle'' + b^2\,\langle\delta v_L^2\rangle'''\big), \qquad (3.69)\\ \Delta_{\langle \mathrm{L\,(T,L)\,(T,L)}\rangle} &= 8d'(b) + \tfrac{2\nu}{b^2}\big(\langle\delta v_L^2\rangle' - b\,\langle\delta v_L^2\rangle'' - \\ &- 4b^2\,\langle\delta v_L^2\rangle''' - b^3\,\langle\delta v_L^2\rangle^{IV}\big), \qquad (3.70)\\ \Delta_{\langle \mathrm{L\,(L,T)\,(L,T)}\rangle} &= \tfrac{8\nu}{b^2}\big(\langle\delta v_L^2\rangle' - b\,\langle\delta v_L^2\rangle''\big), \qquad (3.71)\\ \Delta_{\langle \mathrm{T\,(T',L)\,(T,T')}\rangle} &= -\tfrac{8}{b}d(b), \qquad (3.72)\end{aligned}$$

а также десять линейно-независимых изотропных нулевых комбинаций, обсуждаемых в приложении А. Соотношения (3.68) – (3.72) позволяют выразить через разности $\Delta_{\langle \mathrm{i\,(j,l)\,(k,m)}\rangle}$ введенные ранее скалярные функции. Например, производные второго продольного коррелятора $\langle\delta v_L^2\rangle$ можно выразить с помощью следующих комбинаций:

$$\langle \delta v_L^2 \rangle' - b\,\langle \delta v_L^2 \rangle'' = \tfrac{b^2}{8\nu}\,\Delta_{\langle\, \mathrm{L\,(L,T)\,(L,T)} \,\rangle}, \tag{3.73}$$

$$\langle \delta v_L^2 \rangle''' = -\tfrac{1}{4\nu}\,\Delta_{\langle\, \mathrm{L\,(L,L)\,(L,L)} \,\rangle}, \tag{3.74}$$

$$b\,\langle \delta v_L^2 \rangle^{IV} = \tfrac{3}{4\nu}\,\Delta_{\langle\, \mathrm{L\,(L,L)\,(L,L)} \,\rangle} - \tfrac{1}{2\nu}\,\Delta_{\langle\, \mathrm{L\,(T,L)\,(T,L)} \,\rangle} - \tfrac{1}{\nu}\,\Delta_{\langle\, \mathrm{T\,(L,L)\,(T,L)} \,\rangle}, \tag{3.75}$$

последние две из которых могут значительно увеличить точность расчета высших производных второго продольного коррелятора. Например, (3.74) можно использовать для выражения $d(b)$ из выражения (3.53). Привлекая также выражения (3.51) и (3.56), имеем:

$$d(b) = \tfrac{1}{4}\langle \delta v_L^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle + \tfrac{1}{8}\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle - \tfrac{1}{2}\langle \delta v_L \delta v_T \overline{\delta} A_{TL} \rangle - \tfrac{b}{8}\,\Delta_{\langle\, \mathrm{L\,(L,L)\,(L,L)} \,\rangle}. \tag{3.76}$$

Также из выражений (3.68) – (3.72) можно напрямую выразить скалярную функцию $d(b)$ и ее производную $d'(b)$:

$$d(b) = -\tfrac{b}{8}\,\Delta_{\langle\, \mathrm{T\,(T',L)\,(T,T')} \,\rangle}, \tag{3.77}$$

$$d'(b) = -\tfrac{1}{4}\,\Delta_{\langle\, \mathrm{T\,(L,L)\,(T,L)} \,\rangle} - \tfrac{1}{32}\,\Delta_{\langle\, \mathrm{L\,(L,T)\,(L,T)} \,\rangle} - \tfrac{1}{16}\,\Delta_{\langle\, \mathrm{L\,(L,L)\,(L,L)} \,\rangle}. \tag{3.78}$$

На рисунке 3.3 производится сравнение формул (3.63), (3.76) и (3.77) для вычисления функции $d(b)$ в JHTDB_1. Видно, что методы находятся в хорошем согласии друг с другом, однако наименьшие погрешности достигаются в (3.63).

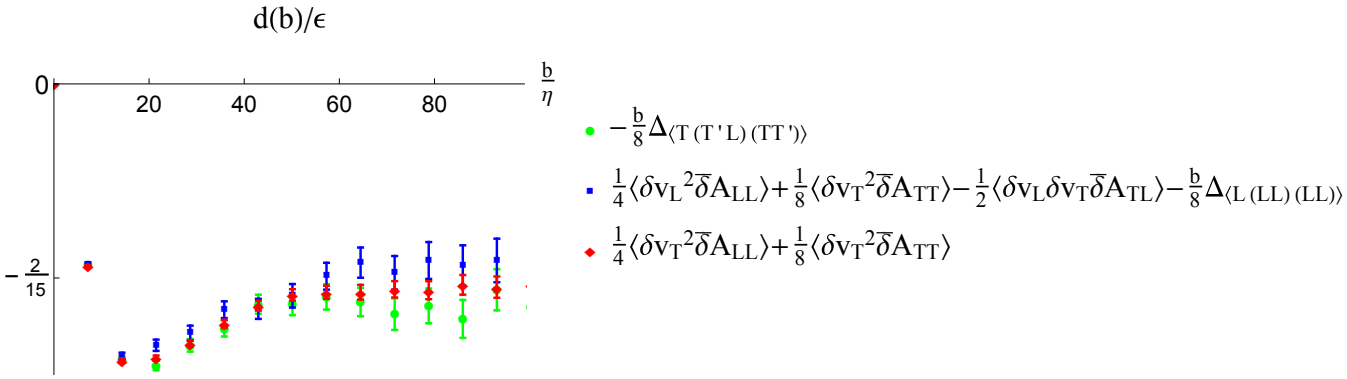


Рисунок 3.3 — Численный расчет функции $d(b)$ в JHTDB_1 различными методами.

На рисунке 3.4 представлен расчет функции $d(b)$ из (3.63) ее производной $d'(b)$ из (3.78) в JHTDB_1 и JHTDB_2. Видно, что $d(b)$ имеет универсальный вид в выбранных осях и хорошо аппроксимируются в инерционном интервале константой, зависящей от ε:

$$d(b) \simeq -\tfrac{2}{15}\varepsilon. \tag{3.79}$$

Показательно, что $d'(b)$ с хорошей точностью зануляется в инерционном интервале. Множитель $-2/15$ в аппроксимации (3.79) выбран в духе точных законов (3.15), (3.16), (3.51) и (3.56), в которых множители содержат целое число пятнадцатых долей.

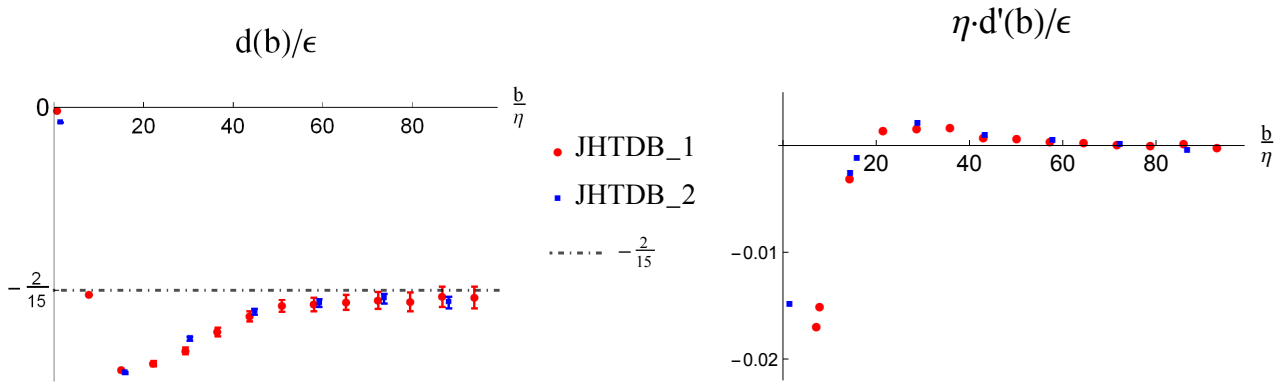


Рисунок 3.4 — Численный расчет функции $d(b)$ из (3.63) (левая картинка) и $d'(b)$ из (3.78) (правая картинка) в JHTDB_1 и JHTDB_2. На левой картинке указано аппроксимационное значение $-2/15$ функции $d(b)/\varepsilon$ в инерционном интервале. Статистические погрешности на правой картинке меньше точек.

С помощью (3.79) выражение (3.45) сильно упрощается в инерционном интервале:

$$\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{b})A_{jl}(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r})\rangle \simeq \tfrac{\varepsilon}{30}\big(8\delta_{ij}\delta_{kl} - 5\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} - \\ - 4n_in_j\delta_{kl} + 4n_in_k\delta_{jl} + 8n_jn_l\delta_{ik} - 8n_kn_l\delta_{ij}\big). \quad (3.80)$$

Этот коррелятор позволяет учесть статистическую асимметрию поля скорости в задачах турбулентного транспорта [68—70].

3.6 Второй порядок разложения трехточечного тензора

3.6.1 Ограничение изотропии и несжимаемости

Вычисление $X^{(2)}_{ijk}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ аналогично, но значительно более громоздко. Применение в следующем порядке разложения (3.34) — (3.37) дает дополнительные ограничения на скалярные функции из (3.33):

$$(3.34) \Rightarrow \begin{cases} 2b\,d(b) + b^2\,(g_4(b) - g_5(b)) + \frac{1}{4}b^2\,C''(b) &= 0 \\ -b\,d(b) + b^2\,(l_1(b) - l_2(b)) + \frac{1}{2}(b\,C'(b) - C(b)) &= 0 \\ (b^2\,d'(b) - 2b\,d(b)) - b^2\,(g_1(b) - g_2(b)) - & \\ -\frac{1}{2}(2b^2\,C''(b) + b\,C'(b) - C(b)) &= 0 \\ (b^2\,d'(b) - 2b\,d(b)) + b^2\,(l_4(b) - l_5(b)) - & \\ -\frac{1}{2}(b^2\,C''(b) - 3b\,C'(b) + 3\,C(b)) &= 0 \\ (2b^2\,d'(b) - 4b\,d(b)) + b^2\,(G_4(b) - G_5(b)) + & \\ +\frac{1}{4}(b^3\,C'''(b) - b^2\,C''(b)) &= 0. \end{cases}$$

$$(3.35) \Rightarrow \begin{cases} g_3(b) + g_4(b) + g_5(b) + (b\,g_6{}'(b) + 2g_6(b)) &= 0 \\ g_1(b) + g_2(b) + l_1(b) + l_2(b) + (b\,l_3{}'(b) + 2l_3(b)) &= 0 \\ (b\,g_4{}'(b) - g_4(b)) + (b\,g_5{}'(b) - g_5(b)) + & \\ +(b\,h_2{}'(b) + 2h_2(b)) + l_6(b) &= 0 \\ (b\,g_2{}'(b) - g_2(b)) + 2\,G_4(b) + (b\,l_1{}'(b) - l_1(b)) + & \\ +(b\,l_5{}'(b) + 2\,l_5(b)) + l_6(b) &= 0 \\ (b\,g_1{}'(b) - g_1(b)) + 2\,G_5(b) + (b\,l_2{}'(b) - l_2(b)) + & \\ +(b\,l_4{}'(b) + 2\,l_4(b)) + l_6(b) &= 0 \\ (b\,g_3{}'(b) - g_3(b)) + G_4(b) + G_5(b) + & \\ (b\,G_6{}'(b) + 2\,G_6(b)) &= 0 \\ (b\,G_4{}'(b) - 3\,G_4(b)) + (b\,G_5{}'(b) - 3\,G_5(b)) + & \\ +(b\,H_2{}'(b) + 2\,H_2(b)) + (b\,l_6{}'(b) - 3\,l_6(b)) &= 0. \end{cases}$$

$$(3.36) \Rightarrow \begin{cases} g_3(b) + 2g_4(b) + 4l_1(b) + l_2(b) + l_6(b) &= 0 \\ g_1(b) + 2g_6(b) + l_2(b) + 4l_3(b) + l_4(b) &= 0 \\ g_1(b) + 4g_2(b) + g_3(b) + 2g_5(b) + 2G_5(b) &= 0 \\ 2G_4(b) + 2G_6(b) + 2h_2(b) + 2H_2(b) + l_4(b) + 4l_5(b) + l_6(b) &= 0. \end{cases}$$

$$(3.37) \Rightarrow \begin{cases} b\,d(b) - b^2\,(g_3(b) + 2g_5(b) + l_1(b) + 4l_2(b) + l_6(b)) + \\ \qquad + \frac{1}{2}(b^2\,C''(b) + 3b\,C'(b) - 3C(b)) = 0 \\ b\,d(b) - b^2\,(g_2(b) + 2g_6(b) + l_1(b) + 4l_3(b) + l_5(b)) + \\ \qquad + \frac{1}{2}(b^2\,C''(b) + 3b\,C'(b) - 3C(b)) = 0 \\ (b^2\,d'(b) + 2b\,d(b)) + \\ +b^2\,(4g_1(b) + g_2(b) + g_3(b) + 2g_4(b) + 2G_4(b)) + \\ \quad + \frac{1}{2}(b^3\,C'''(b) + 6b^2\,C''(b) + 3b\,C'(b) - 3\,C(b)) = 0 \\ (b^2\,d'(b) - 2b\,d(b)) - b^2\,(2G_5(b) + 2G_6(b) + \\ +2h_2(b) + 2H_2(b) + 4l_4(b) + l_5(b) + l_6(b)) + \\ \quad + \frac{1}{2}(b^3\,C'''(b) + 2b^2\,C''(b) - 9b\,C'(b) + 9\,C(b)) = 0. \end{cases}$$

Полученную систему дифференциальных уравнений можно свести к линейной, произведя замену аргумента $B = \ln b$ и соответствующую замену скалярных функций:

$$\begin{cases} \tilde{C}(B) = C(\mathrm{e}^B) \\ \tilde{d}(B) = \mathrm{e}^B\,d(\mathrm{e}^B) \\ \tilde{f}^{(2)}(B) = \mathrm{e}^{2B}\,f^{(2)}(\mathrm{e}^B), \end{cases}$$

где $f^{(2)}(B) = \big(g_i(B);\, G_i(B);\, h_2(B);\, H_2(B);\, l_i(B)\big)$ — функции из (3.33). Тогда, произведя во всех полученных условиях преобразование Фурье:

$$F_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(B)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha B}\mathrm{d}B,$$

где $\tilde{F}$ – произвольная функция из введенных в предыдущей системе, затем решая полученную недоопределенную линейную систему уравнений методами символьной математики, и возвращаясь к исходным функциям посредством обратного преобразования Фурье:

$$\tilde{F}(B) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha B}\mathrm{d}B,$$

можно выразить часть скалярных функций через функции нулевого и первого порядков $C(b)$ и $d(b)$, а также, например[1], через четыре новые неизвестные скалярные функции $g_2(b)$, $g_5(b)$, $g_6(b)$ и $l_6(b)$:

[1]как известно, переопределенная система имеет много фундаментальных систем решений и полученное представление не является, возможно, наиболее простым

$$
\begin{aligned}
g_1(b) =& \tfrac{-2d(b)+b\,d'(b)}{b} + g_2(b) + \tfrac{C(b)-b\,C'(b)-2b^2\,C''(b)}{2b^2},\\
g_3(b) =& \tfrac{2d(b)}{b} - 2g_5(b) - \big(2g_6(b) + b\,g_6'(b)\big) + \tfrac{C''(b)}{4},\\
g_4(b) =& -\tfrac{2d(b)}{b} + g_5(b) - \tfrac{C''(b)}{4},\\
G_4(b) =& \tfrac{8d(b)-5b\,d'(b)}{2b} - \tfrac{5}{2}g_2(b) + \tfrac{1}{2}\big(2g_6(b) + b\,g_6'(b)\big)\\
&+ \tfrac{-2C(b)+2b\,C'(b)+5b^2\,C''(b)-2b^3\,C'''(b)}{8b^2},\\
G_5(b) =& -\tfrac{d'(b)}{2} - \tfrac{5}{2}g_2(b) + \tfrac{1}{2}\big(2g_6(b) + b\,g_6'(b)\big) + \tfrac{-2C(b)+2b\,C'(b)+3b^2\,C''(b)}{8b^2},\\
G_6(b) =& \big(-\tfrac{1}{b^2}\int_0^b d(x)\mathrm{d}x + \tfrac{d(b)}{b}\big) + \tfrac{5}{b^2}\int_0^b x\,g_2(x)\mathrm{d}x +\\
&+ 2\,\big(-\tfrac{3}{b^2}\int_0^b x\,g_5(x)\mathrm{d}x + g_5(b)\big) + \big(-2g_6(b) + b\,g_6'(b)\big) +\\
&+ \big(\tfrac{1}{2b^2}\int_0^b \tfrac{C(x)}{x}\mathrm{d}x + \tfrac{C(b)-3b\,C'(b)}{4b^2}\big),\\
h_2(b) =& 2\big(-\tfrac{3}{b^2}\int_0^b d(x)\mathrm{d}x + \tfrac{d(b)}{b}\big) + 2\left(\tfrac{3}{b^2}\int_0^b x\,g_5(x)\mathrm{d}x - g_5(b)\right) -\\
&- \tfrac{1}{b^2}\int_0^b x\,l_6(x)\mathrm{d}x + \tfrac{3C(b)-3b\,C'(b)+b^2\,C''(b)}{4b^2},\\
H_2(b) =& \big(\tfrac{35}{b^2}\int_0^b d(x)\mathrm{d}x + \tfrac{-19d(b)+3b\,d'(b)}{b}\big) + 5\big(-\tfrac{5}{b^2}\int_0^b x\,g_2(x)\mathrm{d}x + g_2(b)\big) +\\
&+ \big(3g_6(b) - g_6'(b)\big) + \big(\tfrac{5}{b^2}\int_0^b x\,l_6(x)\mathrm{d}x - l_6(b)\big) +\\
&+ \big(-\tfrac{5}{2b^2}\int_0^b \tfrac{C(x)}{x}\mathrm{d}x + \tfrac{-18C(b)+28b\,C'(b)-9b^2\,C''(b)+b^3\,C'''(b)}{4b^2}\big),\\
l_1(b) =& \tfrac{3d(b)}{5b} + \tfrac{1}{5}\big(2g_6(b) + b\,g_6'(b)\big) - \tfrac{1}{5}l_6(b) + \tfrac{2C(b)-2b\,C'(b)+b^2\,C''(b)}{20b^2},\\
l_2(b) =& -\tfrac{2d(b)}{5b} + \tfrac{1}{5}\big(2g_6(b) + b\,g_6'(b)\big) - \tfrac{1}{5}l_6(b) + \tfrac{-8C(b)+8b\,C'(b)+b^2\,C''(b)}{20b^2},\\
l_3(b) =& \big(\tfrac{14}{5b^2}\int_0^b d(x)\mathrm{d}x - \tfrac{d(b)}{b}\big) - \tfrac{2}{b^2}\int_0^b x\,g_2(x)\mathrm{d}x - \tfrac{2}{5}g_6(b) +\\
&+ \tfrac{2}{5b^2}\int_0^b x\,l_6(x)\mathrm{d}x + \big(-\tfrac{1}{5b^2}\int_0^b \tfrac{C(x)}{x}\mathrm{d}x + \tfrac{-7C(b)+9b\,C'(b)}{10b^2}\big),\\
l_4(b) =& \big(-\tfrac{56}{5b^2}\int_0^b d(x)\mathrm{d}x + \tfrac{32d(b)-5b\,d'(b)}{5b}\big) + \big(\tfrac{8}{b^2}\int_0^b x\,g_2(x)\mathrm{d}x - g_2(b)\big) -\\
&- \tfrac{1}{5}\big(4g_6(b) + g_6'(b)\big) + \tfrac{1}{5}\big(-\tfrac{8}{b^2}\int_0^b x\,l_6(x)\mathrm{d}x + l_6(b)\big) +\\
&+ \big(\tfrac{4}{5b^2}\int_0^b \tfrac{C(x)}{x}\mathrm{d}x + \tfrac{54C(b)-70b\,C'(b)+19b^2\,C''(b)}{20b^2}\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_5(b) =& \big(-\tfrac{56}{5b^2}\int_0^b d(x)\mathrm{d}x + \tfrac{22d(b)}{5b}\big) + \big(\tfrac{8}{b^2}\int_0^b x\, g_2(x)\mathrm{d}x - g_2(b)\big) - \\
& - \tfrac{1}{5}\big(4g_6(b) + g_6'(b)\big) + \tfrac{1}{5}\big(-\tfrac{8}{b^2}\int_0^b x\, l_6(x)\mathrm{d}x + l_6(b)\big) + \\
& + \big(\tfrac{4}{5b^2}\int_0^b \tfrac{C(x)}{x}\mathrm{d}x + \tfrac{24C(b) - 40b\, C'(b) + 9b^2\, C''(b)}{20b^2}\big).
\end{aligned}
$$

3.6.2 Следствия для корреляторов второго порядка в локально изотропной турбулентности

Для нахождения локально-изотропных разностей $\Delta_{\langle \mathrm{i\,(j,l)\,(k,m)} \rangle}$ требовался только первый порядок разложения тензора $X_{ijk}\,(\mathbf{a},\mathbf{b})$ по вектору $\mathbf{a}$. Для нахождения остальных линейно-независимых корреляторов второго порядка, введенных в разделе 3.5.4 (это могут быть как $\langle \delta v_i \delta A_{jl} \delta A_{km} \rangle$, так и $\langle \delta v_i \overline{\delta} A_{jl} \overline{\delta} A_{km} \rangle$), требуется второй порядок разложения. Выберем в качестве линейно-независимого от разностей $\Delta_{\langle \mathrm{i\,(j,l)\,(k,m)} \rangle}$ набора корреляторы $\langle \delta v_i \delta A_{jl} \delta A_{km} \rangle$. При этом опять будем иметь, во-первых, тривиальные нулевые комбинации, которые исключают необходимость рассмотрения корреляторов $\langle \delta v_L \delta A_{LL} \delta A_{TT} \rangle$, $\langle \delta v_L \delta A_{TT} \delta A_{T'T'} \rangle$, $\langle \delta v_T \delta A_{LT} \delta A_{T'T'} \rangle$ и $\langle \delta v_T \delta A_{TL} \delta A_{T'T'} \rangle$, а во-вторых, изотропные нулевые комбинации, которые могут быть использованы при численном анализе корреляторов для оценки погрешностей (см. приложение А). Оставшиеся линейно-независимые корреляторы могут быть выражены через введенные ранее скалярные функции $d(b)$, $g_2(b)$, $g_5(b)$, $g_6(b)$, $l_6(b)$ и второй продольный коррелятор $\langle \delta v_L^2 \rangle$:

$$
\begin{aligned}
\langle \delta v_L (\delta A_{LL})^2 \rangle &= \big(-\tfrac{168}{5b^2}\textstyle\int_0^b d(x)\mathrm{d}x + \tfrac{16d(b)}{b}\big) + \tfrac{24}{b^2}\textstyle\int_0^b x\, g_2(x)\mathrm{d}x - \\
& - \tfrac{16}{5} g_6(b) - \tfrac{24}{5b^2}\textstyle\int_0^b x\, l_6(x)\mathrm{d}x + \tfrac{2\nu}{5}\big(-\tfrac{3}{b^2}\textstyle\int_0^b \tfrac{\langle \delta v_L^2 \rangle}{x^2}\mathrm{d}x + \\
& + \tfrac{-3\langle \delta v_L^2 \rangle - 3b\,\langle \delta v_L^2 \rangle' + 6b^2\,\langle \delta v_L^2 \rangle'' - 5b^3\,\langle \delta v_L^2 \rangle'''}{b^3}\big), \\
\langle \delta v_T \delta A_{LL} \delta A_{TL} \rangle &= 2d'(b) + 6g_2(b) - 4g_5(b) - 2\big(2g_6(b) + b\, g_6'(b)\big) + \\
& + \tfrac{\nu\big(-2\langle \delta v_L^2 \rangle' + 2b\,\langle \delta v_L^2 \rangle'' + 5b^2\,\langle \delta v_L^2 \rangle'''\big)}{4b^2}, \\
\langle \delta v_T \delta A_{LL} \delta A_{LT} \rangle &= -\tfrac{12d(b)}{5b} + 4g_5(b) + \tfrac{6}{5}\big(2g_6(b) + b\, g_6'(b)\big) - \tfrac{6}{5} l_6(b) \\
& + \tfrac{\nu\big(64\langle \delta v_L^2 \rangle' - 64b\,\langle \delta v_L^2 \rangle'' - 3b^2\,\langle \delta v_L^2 \rangle'''\big)}{20b^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \delta v_L (\delta A_{TL})^2 \rangle &= 4\Big(\tfrac{1}{b^2}\int_0^b d(x)\mathrm{d}x + \tfrac{-3d(b)+b\,d'(b)}{b}\Big) - \tfrac{20}{b^2}\int_0^b x\,g_2(x)\mathrm{d}x + \\
&+ \tfrac{24}{b^2}\int_0^b x\,g_5(x)\mathrm{d}x + 12 g_6(b) + \tfrac{\nu}{2}\Big(\tfrac{2}{b^2}\int_0^b \tfrac{\langle \delta v_L^2\rangle}{x^2}\mathrm{d}x + \\
&+ \tfrac{2\langle \delta v_L^2\rangle + 3b\,\langle \delta v_L^2\rangle' - 5b^2\,\langle \delta v_L^2\rangle'' - 8b^3\,\langle \delta v_L^2\rangle''' - 2b^4\,\langle \delta v_L^2\rangle^{IV}}{b^3}\Big), \\
\langle \delta v_L (\delta A_{LT})^2 \rangle &= \tfrac{24}{b^2}\int_0^b d(x)\mathrm{d}x - \tfrac{24}{b^2}\int_0^b x\,g_5(x)\mathrm{d}x - 4g_6(b) + \\
&+ \tfrac{4}{b^2}\int_0^b x\,l_6(x)\mathrm{d}x + \tfrac{7\nu\big(\langle \delta v_L^2\rangle' - b\,\langle \delta v_L^2\rangle''\big)}{2b^2}, \\
\langle \delta v_T \delta A_{TL} \delta A_{TT} \rangle &= -2d'(b) - 4g_2(b) + 4g_5(b) + 2\big(2g_6(b) + b\,g_6'(b)\big) + \\
&+ \tfrac{\nu\big(4\langle \delta v_L^2\rangle' - 4b\,\langle \delta v_L^2\rangle'' - 5b^2\,\langle \delta v_L^2\rangle'''\big)}{4b^2}, \\
\langle \delta v_T \delta A_{LT} \delta A_{TT} \rangle &= \tfrac{8d(b)}{5b} - 4g_5(b) - \tfrac{4}{5}\big(2g_6(b) + b\,g_6'(b)\big) + \tfrac{4}{5}l_6(b) + \\
&+ \tfrac{\nu\big(-23\langle \delta v_L^2\rangle' + 23b\,\langle \delta v_L^2\rangle'' + b^2\,\langle \delta v_L^2\rangle'''\big)}{10b^2}, \\
\langle \delta v_L (\delta A_{TT})^2 \rangle &= \Big(-\tfrac{56}{5b^2}\int_0^b d(x)\mathrm{d}x + \tfrac{8d(b)}{b}\Big) + \tfrac{8}{b^2}\int_0^b x\,g_2(x)\mathrm{d}x - \\
&- \tfrac{12}{5}g_6(b) - \tfrac{8}{5b^2}\int_0^b x\,l_6(x)\mathrm{d}x + \tfrac{\nu}{10}\Big(-\tfrac{4}{b^2}\int_0^b \tfrac{\langle \delta v_L^2\rangle}{x^2}\mathrm{d}x + \\
&+ \tfrac{-4\langle \delta v_L^2\rangle + b\,\langle \delta v_L^2\rangle' + 3b^2\,\langle \delta v_L^2\rangle'' - 10b^3\,\langle \delta v_L^2\rangle'''}{b^3}\Big).
\end{aligned}
$$

Для выражения неизвестных скалярных функций через корреляторы удобно заменить полученные соотношения на систему из независимых линейных комбинаций:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) =& \langle \delta v_L (\delta A_{LL})^2 \rangle - 3\,\langle \delta v_L (\delta A_{TT})^2 \rangle = \qquad (3.81)\\
&= 4g_6(b) - \tfrac{8}{b}d(b) + \tfrac{\nu}{2b^2}\left(-3\langle \delta v_L^2\rangle' + 3b\,\langle \delta v_L^2\rangle''(b) + 2b^2\,\langle \delta v_L^2\rangle'''\right), \\
(\mathrm{II}) =& \langle \delta v_T \delta A_{LL} \delta A_{TL} \rangle + \langle \delta v_T \delta A_{TL} \delta A_{TT} \rangle = \qquad (3.82)\\
&= 2g_2(b) + \tfrac{\nu}{2b^2}\left(\langle \delta v_L^2\rangle' - b\,\langle \delta v_L^2\rangle''\right), \\
(\mathrm{III}) =& 2\,\langle \delta v_T \delta A_{LL} \delta A_{LT} \rangle + 3\,\langle \delta v_T \delta A_{LT} \delta A_{TT} \rangle = \qquad (3.83)\\
&= -4g_5(b) + \tfrac{\nu}{2b^2}\left(-\langle \delta v_L^2\rangle' + b\,\langle \delta v_L^2\rangle''\right), \\
(\mathrm{IV}) =& -3\,\langle \delta v_T \delta A_{LL} \delta A_{LT} \rangle - 2\,\langle \delta v_T \delta A_{LT} \delta A_{TT} \rangle + \qquad (3.84)\\
&+ 2\,\langle \delta v_T \delta A_{LL} \delta A_{TL} \rangle + 3\,\langle \delta v_T \delta A_{TL} \delta A_{TT} \rangle = \\
&= 2l_6(b) + \tfrac{2}{b}(2d(b) - b\,d'(b)) + \tfrac{\nu}{b^2}\left(-3\langle \delta v_L^2\rangle' + 3b\,\langle \delta v_L^2\rangle'' - b^2\,\langle \delta v_L^2\rangle'''\right), \\
(\mathrm{V}) =& 2\,\langle \delta v_T \delta A_{LL} \delta A_{LT} \rangle + 3\,\langle \delta v_T \delta A_{LT} \delta A_{TT} \rangle + \qquad (3.85)\\
&+ 2\,\langle \delta v_T \delta A_{LL} \delta A_{TL} \rangle + 3\,\langle \delta v_T \delta A_{TL} \delta A_{TT} \rangle = \\
&= 2(b\,g_6'(b) + 2g_6(b)) - 2\,d'(b) + \tfrac{\nu}{4b^2}\left(6\langle \delta v_L^2\rangle' - 6b\,\langle \delta v_L^2\rangle'' - 5b^2\,\langle \delta v_L^2\rangle'''\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{VI}) = &- \langle \delta v_L (\delta A_{LL})^2 \rangle + 2 \langle \delta v_L (\delta A_{TL})^2 \rangle + \\
&+ 2 \langle \delta v_L (\delta A_{LT})^2 \rangle + 8 \langle \delta v_L (\delta A_{TT})^2 \rangle = \\
&= \tfrac{8}{b} \left(b\, d'(b) + 3 d(b) \right) + \\
&+ \tfrac{2\nu}{b^2} \left(6 \langle \delta v_L^2 \rangle' - 6b \langle \delta v_L^2 \rangle'' - 7b^2 \langle \delta v_L^2 \rangle''' - b^3 \langle \delta v_L^2 \rangle^{IV} \right),
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{VIId}) = &\tfrac{1}{b} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \left(3b^2 \langle \delta v_L (\delta A_{LL})^2 \rangle - 4b^2 \langle \delta v_L (\delta A_{TT})^2 \rangle \right) = \\
&= 40 g_2(b) - 8 l_6(b) + \tfrac{8}{b} \left(2b\, d'(b) - 5 d(b) \right) + \\
&+ \tfrac{2\nu}{b^2} \left(- \langle \delta v_L^2 \rangle' + b \langle \delta v_L^2 \rangle'' + b^2 \langle \delta v_L^2 \rangle''' - b^3 \langle \delta v_L^2 \rangle^{IV} \right),
\end{aligned} \tag{3.87}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{VIIId}) = &\tfrac{1}{b} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \left(2b^2 \langle \delta v_L (\delta A_{LT})^2 \rangle + 5b^2 \langle \delta v_L (\delta A_{LL})^2 \rangle - \right. \\
&\left. - 10 b^2 \langle \delta v_L (\delta A_{TT})^2 \rangle \right) = \\
&= 40 g_2(b) - 48 g_5(b) - \tfrac{8}{b} d(b) + \tfrac{2\nu}{b^2} \left(- \langle \delta v_L^2 \rangle' + b \langle \delta v_L^2 \rangle'' + b^2 \langle \delta v_L^2 \rangle''' \right).
\end{aligned} \tag{3.88}
$$

Две последние линейные комбинации являются дифференциальными для того, чтобы избавиться от интегральных слагаемых. Такая система является эквивалентной исходной при учете зануления всех скалярных функций в точке $b = 0$. Также нам понадобится еще одна зависимая дифференциальная комбинация:

$$
(\mathrm{Id}) = \tfrac{1}{b} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \left(b^2 (\mathrm{I}) \right).
$$

Из этих комбинаций можно четырьмя независимыми способами выразить функцию $d(b)$:

$$
d(b) = \tfrac{1}{8b^3} \int\limits_0^b (\mathrm{VI})\, x^3 \mathrm{d}x + \tfrac{\nu}{4b} \left(-3 \langle \delta v_L^2 \rangle' + 3b \langle \delta v_L^2 \rangle'' + b^2 \langle \delta v_L^2 \rangle''' \right), \tag{3.89}
$$

$$
\begin{aligned}
d(b) = &-\tfrac{1}{48} (\mathrm{VIId}) + \tfrac{5}{12} (\mathrm{II}) - \tfrac{1}{12} (\mathrm{IV}) + \tfrac{1}{48} (\mathrm{VI}) + \\
&+ \tfrac{\nu}{4b} \left(-3 \langle \delta v_L^2 \rangle' + 3b \langle \delta v_L^2 \rangle'' + b^2 \langle \delta v_L^2 \rangle''' \right),
\end{aligned} \tag{3.90}
$$

$$
\begin{aligned}
d(b) = &-\tfrac{1}{8} (\mathrm{VIIId}) + \tfrac{5}{2} (\mathrm{II}) + \tfrac{3}{2} (\mathrm{III}) + \\
&+ \tfrac{\nu}{4b} \left(-3 \langle \delta v_L^2 \rangle' + 3b \langle \delta v_L^2 \rangle'' + b^2 \langle \delta v_L^2 \rangle''' \right),
\end{aligned} \tag{3.91}
$$

$$
\begin{aligned}
d(b) = &\tfrac{1}{4} (\mathrm{Id}) - \tfrac{1}{2} (\mathrm{V}) + \tfrac{1}{8} (\mathrm{VI}) + \\
&+ \tfrac{\nu}{4b} \left(-3 \langle \delta v_L^2 \rangle' + 3b \langle \delta v_L^2 \rangle'' + b^2 \langle \delta v_L^2 \rangle''' \right).
\end{aligned} \tag{3.92}
$$

Все эти выражения (методы численного определения $d(b)$) имеют гораздо большие погрешности, чем найденные в разделе 3.5, поскольку величины слагаемых в их правых частях в десятки раз превосходят саму функцию $d(b)$. Наиболее точными из них являются (3.89) и (3.90). Метод (3.90) проиллюстрирован на рисунке 3.5. Видно, что при выходе $d(b)$ на постоянное значение метод

становится непригодным для произведенной выборки. Два последних выражения становятся непригодными для этой выборки значительно раньше.

Также можно выразить четыре скалярные функции второго порядка $g_2(b)$, $g_5(b)$, $g_6(b)$ и $l_6(b)$ (их графики приведены на рисунке 3.6):

$$g_2(b) = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{II}) + \tfrac{\nu}{4b^2}\left(-\langle\delta v_L^2\rangle' + b\,\langle\delta v_L^2\rangle''\right), \tag{3.93}$$

$$g_5(b) = -\tfrac{1}{4}\,(\mathrm{III}) + \tfrac{\nu}{8b^2}\left(-\langle\delta v_L^2\rangle' + b\,\langle\delta v_L^2\rangle''\right), \tag{3.94}$$

$$g_6(b) = \tfrac{1}{4}\,(\mathrm{I}) + \tfrac{2}{b}d(b) + \tfrac{\nu}{8b^2}\left(3\langle\delta v_L^2\rangle' - 3b\,\langle\delta v_L^2\rangle'' - 2b^2\,\langle\delta v_L^2\rangle'''\right), \tag{3.95}$$

$$l_6(b) = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{IV}) - \tfrac{2}{b}d(b) + d'(b) + \tfrac{\nu}{2b^2}\left(3\langle\delta v_L^2\rangle' - 3b\,\langle\delta v_L^2\rangle'' + b^2\,\langle\delta v_L^2\rangle'''\right). \tag{3.96}$$

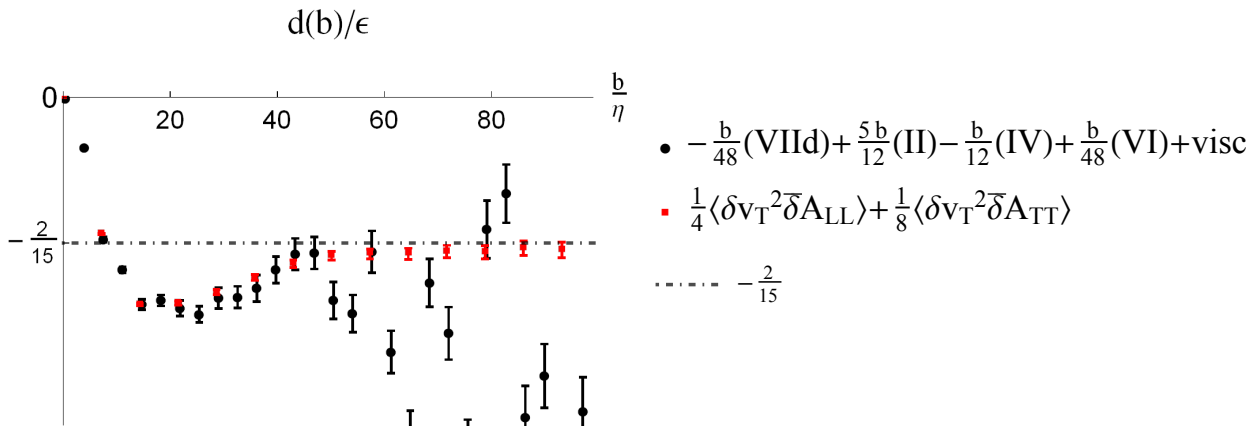


Рисунок 3.5 — Метод (3.90) расчета $d(b)$ из смешанных корреляторов второго порядка в сравнении с методом (3.63) в JHTDB_1.

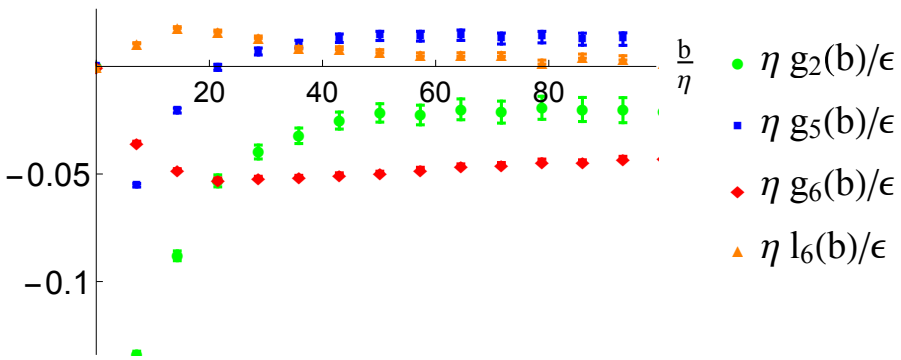


Рисунок 3.6 — Скалярные функции $g_2(b)$, $g_5(b)$, $g_6(b)$ и $l_6(b)$, найденные из (3.93) — (3.96) в JHTDB_1.

3.7 Выводы

В этой главе развит метод кинематического продолжения закона четырех пятых, то есть метода обобщения этого закона, основанного на применении условий изотропии и несжимаемости. С использованием этого метода значительно ограничен произвол в выборе двух первых членов разложения трехточечного тензора скорости до второго порядка по малому вектору $\mathbf{a}$, через которые выражаются третьи смешанные корреляторы скорости и тензора градиентов скорости. Получены новые точные законы «восьми пятнадцатых» локально изотропной турбулентности для двух смешанных корреляторов первого порядка (3.51) и (3.56). Остальные смешанные корреляторы первого порядка выражаются дополнительно через скалярную функцию $d(b)$. Функция $d(b)$ посчитана численно в двух симуляциях изотропной турбулентности, в которых она хорошо аппроксимируется в инерционном интервале постоянным значением $-\frac{2}{15}\varepsilon$. Таким образом, удается предложить универсальный теоретический предел для этой функции при больших числах Рейнольдса и выразить все смешанные корреляторы первого порядка в инерционном интервале через ε (3.80). В перспективе это позволит рассчитать влияние статистической асимметрии поля скорости в задачах турбулентного транспорта.

Показано, что функция $d(b)$ не может быть определена из динамики парных корреляторов, хотя в принципе она должна однозначно определяться из цепочки динамических уравнений. Аналитическое вычисление $d(b)$ из уравнений на корреляторы более высокого порядка является важным продолжением исследования, которое не рассматривается в диссертации. Как было указано во введении основной (и пока непреодолимой) сложностью при рассмотрении динамики корреляторов более высокого порядка является наличие в этих порядках нелокальных смешанных корреляторов скорости и давления.

Наконец, произведен анализ второго члена разложения трехточечного тензора скорости по малому вектору $\mathbf{a}$. Показано, что он дополнительно выражается через четыре скалярные функции, которые также определены численно.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Выведены общие аналитические соотношения между функциями распределения различных инвариантов вращения тензора справедливые для любых несжимаемых изотропных стохастических потоков. Обнаружены инварианты, для которых распределение является квази-одномерным в случае статистически обратимого поля скорости (аналитический результат) и в случае турбулентного поля скорости (численный результат). Аналитически исследована статистика тензора скоростей деформации в изотропном потоке с гауссовой статистикой поля скорости. Найдена логнормальная двухпараметрическая аппроксимация статистики тензора в изотропном турбулентном потоке. Определена зависимость параметров аппроксимации от числа Рейнольдса. Обнаружено, что для малоинтенсивных турбулентных пульсаций (менее 1% от общего распределения) присутствует сторонняя обратимая статистика, связанная с крупномасштабной накачкой энергии.
2. Разработана и аналитически проанализирована стохастическая модель возникновения вихревых структур в изотропном турбулентном потоке. Показано, что крупномасштабный тензор скоростей деформации жидкой частицы можно считать внешним источником для динамики крупномасштабной завихренности. С применением такой модели в дельта-коррелированном гауссовом приближении аналитически исследовано поведение направления завихренности в лагранжевой системе отсчета. Произведено сравнение результатов существующих экспериментов и расчетов с предсказаниями модели и получено их удовлетворительное согласие. Показано, что линейные эффекты, возможно, играют главную роль на начальной стадии образования интенсивных вихревых структур в мелкомасштабной турбулентности.
3. Предложен пертурбативный метод «кинематического» продолжения закона четырех пятых Колмогорова на трехточечную статистику. Посредством этого метода сильно ограничено количество неизвестных скалярных функций, от которых могут зависеть первые два члена

разложения трехточечного тензора по расстоянию между двумя точками — до одной функции в первом члене и до четырех во втором члене. Неизвестные скалярные функции определяются численно. На основании сравнения численных данных двух различных симуляций изотропного турбулентного потока обнаружено, что скалярная функция из первого члена разложения является универсальной костантой, зависящей только от плотности потока энергии ε. Найдено выражение в инерционном интервале изотропной турбулентности для одномоментного третьего смешанного коррелятора скорости, взятой в одной точке, и скорости и градиента скорости, взятых в другой точке.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Зыбину К. П. за постановку интересных задач, поддержку, обсуждение результатов и научное руководство.

Список литературы

1. *Reynolds*, *O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinous, and the law of resistance in parallel channels / O. Reynolds // Phil. Trans. Roy. Soc. — 1883. — Vol. 174. — P. 935—982.
2. *Reynolds*, *O.* On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion / O. Reynolds // Phil. Trans. Roy. Soc. — 1894. — Vol. 186. — P. 123—161.
3. *Keller*, *L. V.* Differentialgleichung fur die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flussigkeit / L. V. Keller, A. A. Friedman // Proceedings of the 1st International Congress for Applied Mechanics. — 1924. — P. 395—405.
4. *Taylor*, *G. I.* Statistical theory of turbulence / G. I. Taylor // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1935. — No. 151. — P. 421—444.
5. *Колмогоров*, *А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса / А. Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 30, № 4. — С. 299—303.
6. *Монин*, *А. С.* Статистическая гидромеханика. Часть 2 / А. С. Монин, А. М. Яглом. — Москва : Наука, 1967. — 720 с.
7. *Волков*, *К. Н.* Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений / К. Н. Волков, Е. Н. Емельянов. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 368 с.
8. *Чернышов*, *А. А.* Подсеточное моделирование для исследования сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы / А. А. Чернышов, К. В. Карельский, А. С. Петросян // УФН. — 2014. — Т. 184, № 5. — С. 457—492.
9. *Обухов*, *А. М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока / А. М. Обухов // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 32, № 1. — С. 22—24.
10. *Ландау*, *Л. Д.* Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 736 с.

11. *Фриш, У.* Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова / У. Фриш. — Москва : ФАЗИС, 1998. — 343 с.

12. *Колмогоров, А. Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности / А. Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 32, № 1. — С. 19—21.

13. High-order velocity structure functions in turbulent shear flow / F. Anselmet [et al.] // J. Fluid Mech. — 1984. — Vol. 140. — P. 63—89.

14. *Кузнецов, В. Р.* Турбулентность и горение / В. Р. Кузнецов, В. А. Сабельников. — Москва : Наука, 1986. — 288 с.

15. *Лойцянский, Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — Москва : Наука, 1973. — 848 с.

16. *Taylor, G. I.* Production and dissipation of vorticity in a turbulent fluid / G. I. Taylor // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1937. — No. 164. — P. 15—23.

17. *Batchelor, G. K.* The nature of turbulent motion at large wave-numbers / G. K. Batchelor, A. A. Townsend // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1949. — No. 199. — P. 238—255.

18. *Siggia, E. D.* Numerical study of small-scale intermittency in three-dimensional turbulence / E. D. Siggia // J. Fluid Mech. — 1981. — Vol. 107. — P. 375—406.

19. *She, Z.-S.* Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence / Z.-S. She, E. Jackson, S. A. Orszag // Nature. — 1990. — Vol. 344. — P. 226—228.

20. *Vincent, A.* The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence / A. Vincent, M. Meneguzzi // J. Fluid Mech. — 1991. — Vol. 225. — P. 1—20.

21. The structure of intense vorticity in isotropic turbulence / J. Jimenez [et al.] // J. Fluid Mech. — 1993. — Vol. 255. — P. 65—90.

22. *Fauve, S.* Pressure fluctuations in swirling turbulent flows / S. Fauve, C. Laroche, B. Castaing // J. Phys. II France. — 1993. — Vol. 3. — P. 271—278.

23. From small scales to large scales in three-dimensional turbulence: The effect of diluted polymers / D. Bonn [et al.] // Phys. Rev. E. — 1993. — Vol. 47. — R28.

24. *Nakayama, K.* The structure of intense vorticity in isotropic turbulence / K. Nakayama, K. Sugiyama, S. Takagi // Fluid Dyn. Res. — 2014. — Vol. 46. — P. 055511.

25. Definitions of vortex vector and vortex / S. Tian [et al.] // J. Fluid Mech. — 2018. — Vol. 849. — P. 312—39.

26. Lagrangian statistical theory of fully developed hydrodynamical turbulence / K. P. Zybin [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100. — P. 174504.

27. *Agafontsev, D. S.* Asymptotic solution for high-vorticity regions in incompressible three-dimensional Euler equations / D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, A. A. Mailybaev // J. Fluid Mech. — 2017. — Vol. 813. — R1.

28. *Wallace, J. M.* Twenty years of experimental and direct numerical simulation access to the velocity gradient tensor: What have we learned about turbulence? / J. M. Wallace // Phys. Fluids. — 2009. — No. 21. — P. 021301.

29. *Никитин, Н. В.* О поддержании колебаний в локализованных турбулентных структурах в трубах / Н. В. Никитин, В. О. Пиманов // Изв. РАН. МЖГ. — 2018. — Т. 1. — С. 68—76.

30. A public turbulence database cluster and applications to study Lagrangian evolution of velocity increments in turbulence / Y. Li [et al.] // Journal of Turbulence. — 2008. — Vol. 9, no. 31. — P. 2008.

31. Data exploration of turbulence simulations using a database cluster / E. Perlman [et al.] // Supercomputing. — 2007. — Vol. SC07.

32. *Yeung, P. K.* Dissipation, enstrophy and pressure statistics in turbulence simulations at high Reynolds numbers / P. K. Yeung, D. A. Donzis, K. R. Sreenivasan // J. Fluid. Mech. — 2012. — Vol. 700. — P. 5.

33. *Ishihara, T.* Study of high–Reynolds number isotropic turbulence by direct numerical simulation / T. Ishihara, T. Gotoh, Y. Kaneda // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2009. — Vol. 41. — P. 165—80.

34. *Betchov, R.* An inequality concerning the production of vorticity in isotropic turbulence / R. Betchov // J. Fluid Mech. — 1956. — Vol. 1, no. 5. — P. 497—504.

35. *Antonia, R. A.* Reynolds number dependence of high-order moments of the streamwise turbulent velocity derivative / R. A. Antonia, A. J. Chambers, B. R. Satyaprakash // Boundary Layer Met. — 1981. — Vol. 21, no. 2. — P. 159—71.

36. *Gylfason, A.* Intermittency, pressure and acceleration statistics from hot-wire measurements in wind-tunnel turbulence / A. Gylfason, S. Ayyalasomayajula, Z. Warhaft // J. Fluid. Mech. — 2004. — Vol. 501. — P. 213—229.

37. *Hill, R. J.* Scaling of acceleration in locally isotropic turbulence / R. J. Hill // J. Fluid. Mech. — 2002. — Vol. 452. — P. 361—70.

38. *Kolmogorov, A. N.* A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number / A. N. Kolmogorov // J. Fluid Mech. — 1962. — Vol. 13, no. 1. — P. 82—85.

39. *Obukhov, A. M.* Some specific features of atmospheric turbulence / A. M. Obukhov // J. Geophys. Res. — 1962. — Vol. 67, no. 8. — P. 3011—14.

40. *Новиков, Е. А.* Перемежаемость турбулентности и спектр флюктуаций диссипации энергии / Е. А. Новиков, Р. У. Стюарт // Изв. АН СССР, сер. геофиз. — 1964. — № 3. — С. 408—413.

41. *Яглом, А. М.* О влияни флюктуаций диссипации энергии на форму характеристик турбулентности в инерционном интервале / А. М. Яглом // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 166, № 1. — С. 49—52.

42. *Frisch, U.* A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence / U. Frisch, P.-L. Sulem, M. Nelkin // J. Fluid Mech. — 1978. — Vol. 87, no. 4. — P. 719—36.

43. *Parisi, G.* On the singularity structure of fully developed turbulence / G. Parisi, U. Frisch // Turbulence and predictability of geophysical fluid dynamics / ed. by M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi. — Amsterdam : North-Holland, 1985. — P. 84—87.

44. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems / R. Benzi [et al.] // J. Phys. A: Math. Gen. — 1984. — No. 17. — P. 3521.

45. Генерация мелкомасштабных структур в развитой турбулентности / К. П. Зыбин [и др.] // ЖЭТФ. — 2007. — Т. 132, 2 (8). — С. 510—23.

46. *Zybin*, *K. P.* Structure functions of fully developed hydrodynamic turbulence: An analytical approach / K. P. Zybin, V. A. Sirota, A. S. Ilyin // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 82. — P. 056324.

47. *Zybin*, *K. P.* Multifractal structure of fully developed turbulence / K. P. Zybin, V. A. Sirota // Phys. Rev. E. — 2013. — Vol. 88. — P. 043017.

48. *Зыбин*, *К. П.* Модель вытягивающихся вихрей и обоснование статистических свойств турбулентности / К. П. Зыбин, В. А. Сирота // УФН. — 2015. — Т. 185, № 6. — С. 593—612.

49. *Яглом*, *А. М.* О локальной структуре поля температур в турбулентном потоке / А. М. Яглом // Докл. АН СССР. — 1949. — Т. 69. — С. 743—46.

50. *Новиков*, *Е. А.* Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности / Е. А. Новиков // Ж. эксп. теор. физ. — 1965. — Т. 47, 5 (11). — С. 1919—26.

51. *Монин*, *А. С.* К теории локально изотропной турбулентности / А. С. Монин // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 515—18.

52. *Hill*, *R. J.* Applicability of Kolmogorov's and Monin's equations of turbulence / R. J. Hill // J. Fluid Mech. — 1997. — Vol. 353. — P. 67.

53. *Nie*, *Q.* A note on third-order structure functions in turbulence / Q. Nie, S. Tanveer // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1999. — Vol. 455. — P. 1615.

54. *Chandrasekhar*, *S.* The invariant theory of isotropic turbulence in magneto-hydrodynamics / S. Chandrasekhar // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1951. — Vol. 204. — P. 435.

55. *Politano*, *H.* Von Karman - Howarth equation for magnetohydrodynamics and its consequences on third-order longitudinal structure and correlation functions / H. Politano, A. Pouquet // Phys. Rev. E. — 1998. — Vol. 57. — R21.

56. *Podesta, J. J.* Laws for third-order moments in homogeneous anisotropic incompressible magnetohydrodynamic turbulence / J. J. Podesta // J. Fluid. Mech. — 2008. — Vol. 609. — P. 171.

57. *Чхетиани, О. Г.* О третьих моментах в спиральной турбулентности / О. Г. Чхетиани // Письма в ЖЭТФ. — 1996. — Т. 63, № 10. — С. 768—72.

58. *Gomez, T.* Exact relationship for third-order structure functions in helical flows / T. Gomez, H. Politano, A. Pouquet // Phys. Rev. E. — 2000. — Vol. 61 (5). — P. 5321.

59. *Falkovich, G.* New relations for correlation functions in Navier-Stokes turbulence / G. Falkovich, I. Fouxon, Y. Oz // J. Fluid Mech. — 2010. — Vol. 644. — P. 465.

60. *Galtier, S.* Exact relation for correlation functions in compressible isothermal turbulence / S. Galtier, S. Banerjee // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 107. — P. 134501.

61. *Banerjee, S.* Exact relation with two-point correlation functions and phenomenological approach for compressible magnetohydrodynamic turbulence / S. Banerjee, S. Galtier // Phys. Rev. E. — 2013. — Vol. 87. — P. 013019.

62. *Banerjee, S.* A Kolmogorov-like exact relation for compressible polytropic turbulence / S. Banerjee, S. Galtier // J. Fluid Mech. — 2014. — Vol. 742. — P. 230.

63. *Fouxon, I.* Exact scaling relations in relativistic hydrodynamic turbulence / I. Fouxon, Y. Oz // Phys. Lett. B. — 2010. — Vol. 694. — P. 261.

64. *Karman, T.* On the statistical theory of isotropic turbulence / T. Karman, L. Howarth // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1938. — No. 164. — P. 192—215.

65. *Hill, R. J.* Equations relating structure functions of all orders / R. J. Hill // J. Fluid Mech. — 2001. — Vol. 434. — P. 379.

66. *Yakhot, V.* Mean-field approximation and a small parameter in turbulence theory / V. Yakhot // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 63. — P. 026307.

67. *Falkovich, G.* Particles and fields in fluid turbulence / G. Falkovich, K. Gawedski, M. Vergassola // Rev. Mod. Phys. — 2001. — Vol. 73. — P. 913—975.

68. *Il'yn, A. S.* Statistical properties of the T-exponential of isotropically distributed random matrices / A. S. Il'yn, V. A. Sirota, K. P. Zybin // J. Stat. Phys. — 2016. — Vol. 163. — P. 765.

69. *Il'yn, A. S.* Passive scalar transport by a non-Gaussian turbulent flow in the Batchelor regime / A. S. Il'yn, V. A. Sirota, K. P. Zybin // Phys. Rev. E. — 2017. — Vol. 96. — P. 013117.

70. *Il'yn, A. S.* Small-scale turbulent magnetic field: Growth vs. decay / A. S. Il'yn, V. A. Sirota, K. P. Zybin // Europhysics Letters. — 2018. — Vol. 121. — P. 34002.

71. *Казанцев, А. П.* Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью / А. П. Казанцев // Ж. эксп. теор. физ. — 1967. — Т. 53, № 5. — С. 1806—13.

72. *Kraichnan, R. H.* Growth of turbulent magnetic fields / R. H. Kraichnan, S. Nagarajan // Phys. Fluids. — 1967. — Vol. 10. — P. 859.

73. *Vergassola, M.* Anomalous scaling for passively advected magnetic fields / M. Vergassola // Phys. Rev. E. — 1995. — Vol. 53(4). — R3021.

74. *Kopyev, A. V.* Degeneracy of velocity strain-rate tensor statistics in random isotropic incompressible flows / A. V. Kopyev // Phys. Rev. Fluids. — 2018. — Vol. 3. — P. 024603.

75. *Kopyev, A. V.* Exact result for mixed triple two-point correlations of velocity and velocity gradients in isotropic turbulence / A. V. Kopyev, K. P. Zybin // Journal of Turbulence. — 2018. — Vol. 19, no. 9. — P. 717—730.

76. *Зыбин, К. П.* К вопросу о модели возникновения вихревых структур в изотропном турбулентном потоке / К. П. Зыбин, А. В. Копьев // Изв. РАН. МЖГ. — 2018. — Т. 4. — С. 39—56.

77. *Копьев, А. В.* XXVI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике / А. В. Копьев // Краткие аннотации выступлений. — 2017.

78. *Копьев, А. В.* Материалы XXIII Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» / А. В. Копьев, К. П. Зыбин // Тезисы докладов. — 2018.

79. *Копьев, А. В.* Всероссийская конференция молодых ученых-механиков / А. В. Копьев, К. П. Зыбин // Тезисы докладов. — 2018.

80. *Копьев, А. В.* Пятая открытая всероссийская конференция по аэроакустике / А. В. Копьев // Тезисы докладов. — 2018.

81. *Xu, H.* The pirouette effect in turbulent flows / H. Xu, A. Pumir, E. Bodenschatz // Nat. Phys. — 2011. — No. 7. — P. 709—12.

82. *Pumir, A.* Tetrahedron deformation and alignment of perceived vorticity and strain in a turbulent flow / A. Pumir, E. Bodenschatz, H. Xu // Phys. Fluids. — 2013. — Vol. 25. — P. 035101.

83. *Kerr, R. M.* Histograms of helicity and strain in numerical turbulence / R. M. Kerr // Phys. Rev. Lett. — 1987. — Vol. 59, no. 7. — P. 783.

84. Alignment of vorticity and scalar gradient with strain rate in simulated Navier–Stokes turbulence / W. T. Ashurst [et al.] // Phys. Fluids. — 1987. — Vol. 30, no. 8. — P. 2343.

85. *Lund, T. S.* An improved measure of strain state probability in turbulent flows / T. S. Lund, M. M. Rogers // Phys. Fluids. — 1994. — Vol. 6, no. 5. — P. 1839.

86. *Tsinober, A.* Experimental investigation of the field of velocity gradients in turbulent flows / A. Tsinober, E. Kit, T. Dracos // J. Fluid Mech. — 1992. — Vol. 242. — P. 169.

87. *Buxton, O. R. H.* The effects of resolution and noise on kinematic features of fine-scale turbulence / O. R. H. Buxton, S. Laizet, B. Ganapathisubramani // Exp. Fluids. — 2011. — Vol. 51, no. 5. — P. 1417.

88. *Gomes-Fernandes, R.* Evolution of the velocity-gradient tensor in a spatially developing turbulent flow / R. Gomes-Fernandes, B. Ganapathisubramani, J. C. Vassilicos // J. Fluid. Mech. — 2014. — No. 756. — P. 252—92.

89. *She, Z.-S.* Structure and dynamics of homogeneous turbulence: models and simulations / Z.-S. She, E. Jackson, S. A. Orszag // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1991. — Vol. 434. — P. 101.

90. *Ширяев, А. Н.* Вероятность – 1 / А. Н. Ширяев. — Москва : МЦНМО, 2004. — 574 с.

91. *Мета, М. Л.* Случайные матрицы / М. Л. Мета. — Москва : МЦНМО, 2012. — 648 с.

92. *Гельфанд, И. М.* Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — Москва : КДУ, 2008. — 408 с.

93. *Il'yn, A. S.* Material deformation tensor in time-reversal symmetry breaking turbulence / A. S. Il'yn, K. P. Zybin // Phys. Letters A. — 2015. — Vol. 379. — P. 650.

94. *Shtilman, L.* On some kinematic versus dynamic properties of homogeneous turbulence / L. Shtilman, M. Spector, A. Tsinober // J. Fluid. Mech. — 1993. — No. 247. — P. 65.

95. *Meneveau, C.* Lagrangian dynamics and models of the velocity gradient tensor in turbulent flows / C. Meneveau // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2010. — Vol. 43. — P. 219.

96. A study of the evolution and characteristics of the invariants of the velocity-gradient tensor in isotropic turbulence / A. Ooi [et al.] // J. Fluid. Mech. — 1999. — Vol. 381. — P. 141.

97. A study of the finescale motions of incompressible timedeveloping mixing layers / J. Soria [et al.] // Phys. Fluids. — 1994. — Vol. 6. — P. 871.

98. *Luthi, B.* Lagrangian measurment of vorticity dynamics in turbulent flow / B. Luthi, A. Tsinober, W. Kinzelbach // J. Fluid. Mech. — 2005. — Vol. 528. — P. 87.

99. Velocity and temperature derivatives in high-Reynolds-number turbulent flows in the atmospheric surface layer. Part 1. Facilities, methods and some general results / G. Gulitski [et al.] // J. Fluid. Mech. — 2007. — Vol. 589. — P. 57.

100. *Chertkov, M.* Lagrangian Tetrad Dynamics and the Phenomenology of Turbulence / M. Chertkov, A. Pumir, B. I. Shraiman // Phys. Fluids. — 1999. — Vol. 11. — P. 2394—410.

101. *Chevillard, L.* Lagrangian time correlations of vorticity alignments in isotropic turbulence observations and model predictions / L. Chevillard, C. Meneveau // Phys. Fluids. — 2011. — Vol. 23. — P. 101704.

102. *Hamlington, P. E.* Local and nonlocal strain rate fields and vorticity alignment in turbulent flows / P. E. Hamlington, J. Schumacher, W. J. A. Dahm // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 77. — P. 026303.

103. *Hamlington*, *P. E.* Direct assessment of vorticity alignment with local and nonlocal strain rates in turbulent flows / P. E. Hamlington, J. Schumacher, W. J. A. Dahm // Phys. Fluids. — 2008. — Vol. 20. — P. 111703.

104. *Кляцкин*, *В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах / В. И. Кляцкин. — Москва : Наука, 1980. — 336 с.

105. *Владимиров*, *В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — Москва : Наука, 1981. — 512 с.

106. *Корн*, *Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — Москва : Наука, 1984. — 831 с.

107. *Cantwell*, *B. J.* Exact solution of a restricted Euler equation for the velocity gradient tensor / B. J. Cantwell // Phys. Fluids A. — 1992. — Vol. 4. — P. 782—93.

108. *Weyl*, *H.* The classical groups. Their invariants and representations / H. Weyl. — Princeton Univ. Press, 1939.

109. *Gotoh*, *T.* Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high-resolution direct numerical simulation / T. Gotoh, D. Fukayama, T. Nakano // Phys. Fluids. — 2002. — Vol. 14(3). — P. 1065.

110. *Taylor*, *M. A.* Exact second-order structure-function relationships / M. A. Taylor, S. Kurien, G. L. Eyink // Phys. Rev. E. — 2003. — Vol. 68. — P. 026310.

Список рисунков

0.1 Численный расчет структуры поля завихренности в изотропном турбулентном потоке при $Re_\lambda \simeq 430$ 9

1.1 Области определения различных инвариантов тензора скоростей деформации 19

1.2 Функции распределения инвариантов $(Q_S; R_S)$ и $(\lambda_1; \lambda_3)$ в гауссовом случае 26

1.3 Функция распределения инвариантов ξ_+ и ξ_- в гауссовом случае при $\langle -Q_S \rangle = 125$ 27

1.4 Функции распределения нормированных собственных значений s и β в статистически обратимом случае 28

1.5 Гистограмма инвариантов ξ_+ и ξ_- в «JHTDB-распределении» 30

1.6 Линейная аппроксимация зависимости $f_s^{-1/2}$ от z для «JHTDB-распределения» 31

1.7 «JHTDB-распределение» инварианта ξ_a в логарифмическом масштабе 32

1.8 «JHTDB-распределение» инварианта η_a и его аппроксимация в логарифмическом масштабе 33

1.9 Сравнение гистограммы ξ_+ и ξ_- «JHTDB-распределения» и найденной аппроксимации 34

1.10 Аппроксимации «JHTDB-распределений» инвариантов $(Q_S; R_S)$ и $(\lambda_1; \lambda_3)$ в 35

1.11 Гистограмма инвариантов ξ_+ и ξ_- в «JHTDB-распределении» в окрестности нуля 38

1.12 Гауссов «хвост» «JHTDB-распределения» инварианта ξ_0 39

3.1 Выполнение закона четырех пятых и закона четырех пятнадцатых в численных расчетах университета Джона Хопкинса 66

3.2 Выполнение законов восьми пятнадцатых в численных расчетах университета Джона Хопкинса 78

3.3 Сравнение различных методов расчета $d(b)$ по данным университета Джона Хопкинса 80

3.4 Численный расчет функции $d(b)$ и ее производной $d'(b)$ по данным университета Джона Хопкинса 81

3.5 Метод расчета $d(b)$ из смешанных корреляторов второго порядка по данным университета Джона Хопкинса 88
3.6 Скалярные функции $g_2(b)$, $g_5(b)$, $g_6(b)$ и $l_6(b)$ по данным университета Джона Хопкинса 88

A.1 Изотропные нулевые комбинации $\langle \delta v_i \delta v_j \overline{\delta} A_{kl} \rangle$ и расчет погрешностей по данным университета Джона Хопкинса 106
A.2 Изотропные нулевые комбинации $\Delta_{\langle i(j,k)(l,m) \rangle}$ и расчет погрешностей по данным университета Джона Хопкинса 106

Список таблиц

1 Результаты расчетов S_∇ и F_∇ при различных Re_λ [33] 37

Приложение А

Статистические погрешности в методах определения смешанных корреляторов

Предположим, что статистические погрешности различных ненулевых компонент $\langle \delta v_i \delta v_j \overline{\delta} A_{kl} \rangle$ одинаковы, то есть

$$\sigma_{\langle \delta v_i \delta v_j \overline{\delta} A_{kl} \rangle}(b) = \sigma_1(b).$$

Таким образом, используя (3.61) и (3.62), можно вычислить $\sigma_1(b)$:

$$\sigma_1^{(3.61)}(b) = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \big| \big(2\langle \delta v_T \delta v_{T'} \overline{\delta} A_{TT'} \rangle + \langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{T'T'} \rangle - \langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle \big) \big|,$$
$$\sigma_1^{(3.62)}(b) = \tfrac{1}{\sqrt{105}} \big| \big(8\langle \delta v_T^2 \overline{\delta} A_{TT} \rangle - 4\langle \delta v_L \delta v_T \overline{\delta} A_{LT} \rangle - 5\langle \delta v_L^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle \big) \big|,$$

где верхний индекс обозначает уравнение, по которому считается погешность. Оценка погрешности одновременного применения двух методов равна

$$\sigma_1(b) = \sqrt{\left(\sigma_1^{(3.61)}(b)\right)^2 + \left(\sigma_1^{(3.62)}(b)\right)^2}.$$

Из рисунка А.1 видно, что отношение и $\sigma_1^{(3.61)}(b)$, и $\sigma_1^{(3.62)}(b)$ к ненулевой компоненте $\langle \delta v_L^2 \overline{\delta} A_{LL} \rangle$ менее 6% в рассматриваемом интервале. Более того, ошибки растут с расстоянием b. Предположим этот рост линейным, тогда по методу наименьших квадратов находим: $\frac{1}{\varepsilon}\sigma_1(b) \simeq 2.8 \times 10^{-4} \frac{b}{\eta}$ в JHTDB_1 и $\frac{1}{\varepsilon}\sigma_1(b) \simeq 1.8 \times 10^{-4} \frac{b}{\eta}$ в JHTDB_2. These estimations are used to plot the errorbars in Figure 3.2.

Аналогично находятся погрешности $\sigma_{\Delta_{\langle i(j,k)(l,m) \rangle}}(b) = \sigma_\Delta(b)$. Как отмечалось в разделе 3.5.4 имеется десять изотропных нулевых комбинаций. Они выписаны на рисунке А.2 с соответствующим графиком. Из картики видно, что отношение погрешностей к ненулевой компоненте $\Delta_{\langle L(L,L)(L,L) \rangle}$ менее 2% в рассматриваемом интервале. Для абсолютных значений погрешностей имеем $\frac{1}{\varepsilon}\sigma_\Delta(b) \simeq 0.43b$ в JHTDB_1 и $\frac{1}{\varepsilon}\sigma_\Delta(b) \simeq 1.17b$ в JHTDB_2.

Аналогично находятся погрешности $\sigma_{\langle \delta v_i \delta A_{jl} \overline{\delta} A_{km} \rangle}(b) = \sigma_2(b)$: $\frac{1}{\varepsilon}\sigma_2 \simeq 0.24b$ в JHTDB_1 и $\frac{1}{\varepsilon}\sigma_2 \simeq 1.05b$ в JHTDB_2.

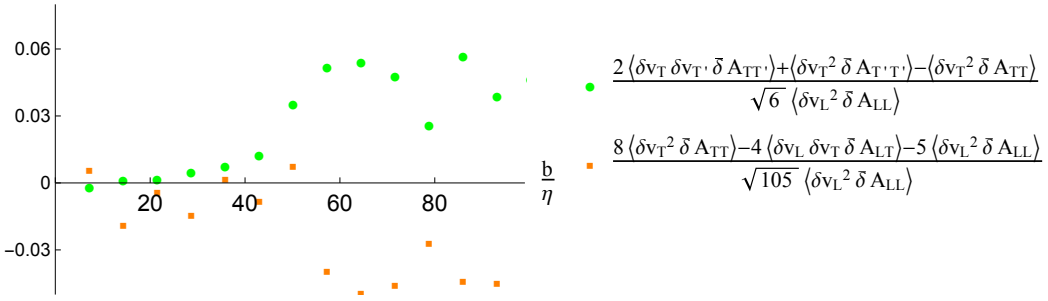


Рисунок A.1 — Изотропные нулевые комбинации $\langle\delta v_i\delta v_j\overline{\delta}A_{kl}\rangle$ (3.61) и (3.62), нормированные на ненулевую компоненту $\langle\delta v_L^2\overline{\delta}A_{LL}\rangle$ в JHTDB_1.

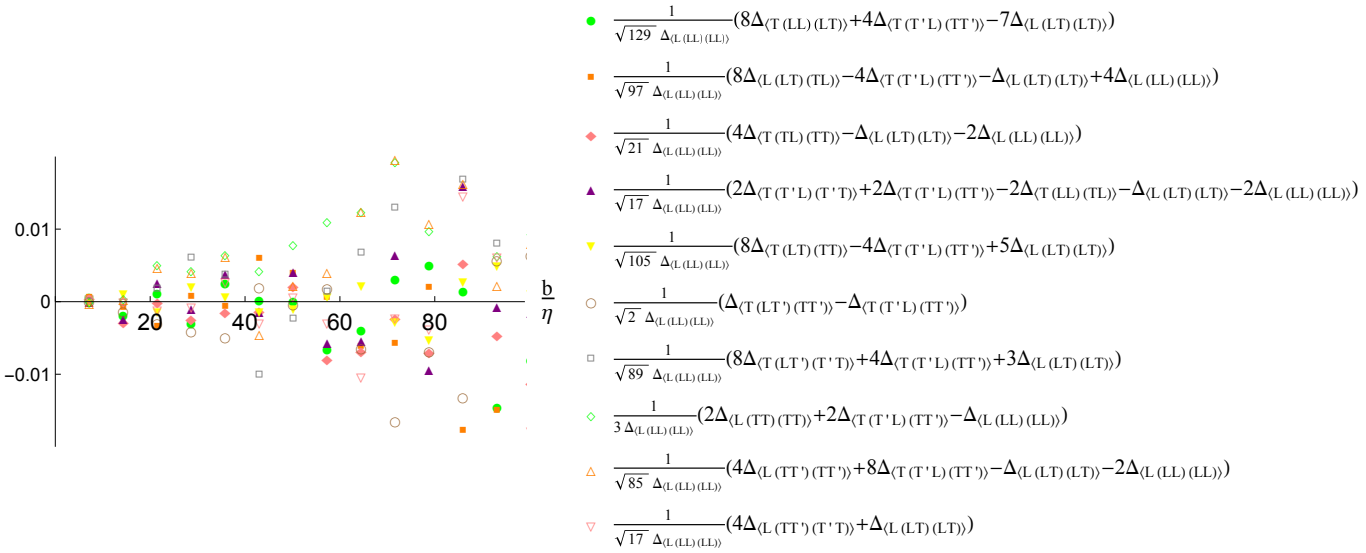


Рисунок A.2 — Изотропные нулевые комбинации $\Delta_{\langle i(j,k)(l,m)\rangle}(b)$, нормированные на ненулевую компоненту $\Delta_{\langle L(L,L)(L,L)\rangle}(b)$ в JHTDB_1.