Учреждение Российской Академии Наук

Физический Институт им. П. Н. Лебедева РАН

на правах рукописи

УДК 530.145 + 535.14

Коренной Яков Александрович

Вероятностные представления квантовой механики и неклассические состояния поля излучения

01.04.02 - Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2011

Работа выполнена в *Учреждении Российской Академии Наук Физическом Институте им. П. Н. Лебедева РАН*

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук, профессор Манько Владимир Иванович
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук Кукушкин Александр Борисович; доктор физ.-мат. наук Соловьев Михаил Александрович
Ведущая организация:	Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» (МФТИ)

Защита состоится «______»_____________ 2011 г. в _____ часов на заседании Диссертационного совета Д 002.023.02 при Физическом Институте им. П. Н. Лебедева РАН, расположенном по адресу: 117924, Москва, Ленинский проспект д. 53 .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской Академии Наук Физического Института им. П. Н. Лебедева РАН.

Автореферат разослан «______»_____________ 2011 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеупомянутому адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Истомин Я.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Еще на заре создания квантовой механики принимались неоднократные попытки ее построения в форме динамической теории классических траекторий. [1, 2, 3, 4, 5]. Р. Фейнман предложил рассмотрение квантовой механики в терминах интегралов по траекториям [6].

При решении задачи нахождения адекватного вероятностного описания квантовых состояний, различными авторами было предложено множество функций квазивероятности, таких как функция Вигнера [7], функция Хусими [8], функция Глаубера-Сударшана [9, 10], которые позже были объединены в однопараметрическое семейство [11]. Но благодаря принципу неопределенностей Гейзенберга, в отличие от классической вероятности, все эти функции квазивероятности не описывают распределений измеримых переменных на фазовой плоскости.

Формулировка квантовой механики, похожая на классическую стохастическую механику, была предложена Мойалом [12], но введенное им уравнение эволюции было уравнением для функции квазивероятности (функции Вигнера), не являющейся распределением вероятности.

В 1987 году Дж. Бертраном и П. Бертраном [13] для применения в квантово-оптических измерениях была введена оптическая томограмма $w(X,\theta)$, имеющая смысл функции распределения измеряемой квантово-оптическим балансным гомодинным детектором квадратурной компоненты $\hat{X}_\theta = (e^{i\theta}\hat{a}_s^\dagger + e^{-i\theta}\hat{a}_s)/\sqrt{2}$, где θ – фаза локального осциллятора и $\hat{a}_s$ – оператор уничтожения для моды сигнала. Эта томограмма, содержащая всю доступную информацию о квантовом состоянии, является результатом (в одномерном случае) обратного преобразования Радона [14] от функции Вигнера (см. [15]).

Оптическая томограмма и ее связь с функцией Вигнера были использованы в экспериментах по гомодинному детектированию квантовых состояний фотонов [16] (см. обзорную статью [17]), в которых измерение оптической томограммы применялось в качестве технического инструментария для реконструкции функции Вигнера.

В работе [18] была введена функция распределения, позже названная симплектической томограммой [19]. Было показано, что симплектическая томограмма $M(X, \mu, \nu)$, являющаяся неотрицательной функцией распределения гомодинной квадратурной компоненты $\hat{X}_{\mu\nu}$, зависящей от внешних действительных параметров μ и ν, связана с оптической томограммой и эта связь дает возможность реконструирования функции Вигнера из симплектической томограммы при помощи преобразования Фурье.

В работах [20], [21] предложена новая формулировка квантовой механики, названная вероятностным представлением квантовой механики (см. недавние обзоры [22], [23]). Вероятностное представление развивалось в ряде работ [24], [25], [26]. В вероятностном представлении квантовые состояния описываются непосредственно функциями распределения вероятности, называемыми квантовыми томограммами или томографическими распределениями вероятности. Томограммы содержат всю доступную информацию о квантовом состоянии и связаны с операторами плотности посредством обратимых преобразований. Вообще говоря, существует множество видов томограмм, связанных с операторами плотности различными обратимыми преобразованиями. Например, в работе [27] рассмотрена так называемая томография центра масс.

Развитое сначала для непрерывных переменных, томографическое представление затем было обобщено на случай дискретных спиновых переменных (спиновая томография [28, 29, 30]) и на случай дискретной переменной числа фотонов (томография числа фотонов [31, 32]).

Неотрицательность томографической функции распределения вероятности является весьма привлекательным свойством для компьютерного моделирования квантовых систем [33].

С другой стороны, в современных экспериментальных исследованиях широко применяется именно оптическая томография, и поэтому дальнейшее развитие представления оптической томографии является особенно актуальным.

Квантовая оптическая томография, реализуемая посредством балансного гомодинного детектирования, на сегодняшний день является основным инструментом экспериментальных исследований неклассических состояний поля излучения.

Такие состояния являются перспективными для создания новых устройств, обладающих чувствительностью, существенно превышающей стандартный квантовый предел [34], для оптической передачи информации [35], квантовой криптографии [36], и других применений. В связи с этим в последние два десятилетия исследовались различные виды неклассических фотонных состояний (см., например, обзор [37]).

Среди них – состояния с добавленными фотонами [38], являющиеся результатом элементарных процессов усиления квантового сигнала [39]. Некоторые из этого класса состояний были экспериментально реализованы в недавних работах [39], [40], [41], [42], [43], в частности, в связи с тестированием квантовых коммутационных соотношений бозонных операторов рождения и уничтожения.

Практическая значимость состояний с добавленными фотонами и недавние эксперименты по их реализации предопределяют актуальность их исследований.

Кроме того, по нашему мнению, особенно перспективным является распространение методов квантовой томографии и квантовой оптики классических и неклассических состояний на квантовые системы атомов в магнитных ловушках [44], являющиеся основой экспериментов по созданию так называемых «атомных лазеров», прототипы которых реализованы в настоящее время во многих странах мира [45, 46].

Ввиду вышесказанного, исследование и развитие вероятностного подхода в его применении к квантовым системам, а также изучение неклассических состояний поля излучения, является актуальной задачей, представляющей научный и практический интерес.

Целью диссертационной работы является дальнейшее развитие вероятностного представления квантовой механики и исследование неклассических состояний поля излучения.

Основными задачами работы являются:

Развитие рассматриваемого ранее вероятностного представления квантовой механики в терминах оптической томографической функции распределения вероятности, имеющей равное с матрицей плотности число степеней свободы, и доказательство возможности вероятностного представления квантовой механики без увеличения мерности задачи, введения дополнительных переменных и скрытых параметров.

Получение явных выражений для операторов в представлении оптической томографии и их дуальных символов в виде регулярных обобщенных функций.

Вывод динамического уравнения и уравнения стационарных состояний квантовых систем в представлении оптической томографии для произвольных многомерных гамильтонианов; получение уравнения Лиувилля в представлении оптической томографии.

Получение уравнения для пропагатора оптической томограммы квантовой системы с произвольным гамильтонианом; нахождение интегральных выражений связи оптического пропагатора и квантового пропагатора для матрицы плотности; нахождение явного выражения пропагатора оптической томограммы произвольной квадратичной квантовой системы.

Исследование свойств неклассических состояний с добавленными фотонами для параметрической квантово-оптической системы; получение явных выражений для параметрически возбужденных когерентных состояний с добавленными фотонами, четных/нечетных состояний с добавленными фотонами, а также температурных состояний с добавленными фотонами; предложение дополнительных тестовых выражений для оценки точности получаемых в квантово-оптических экспериментах томограмм состояний.

Исследование оптических томограмм стационарных состояний водородоподобных атомов и ионов.

Развитие обобщения вероятностного представления на случай релятивистских квантовых систем; нахождение релятивистского уравнения Лиувилля в представлении оптической томографии и динамического уравнения для оптической томограммы слабо-релятивистской бесспиновой квантовой частицы в достаточно слабых полях.

Научная новизна результатов, представленных в настоящем исследовании, состоит в следующем:

1. Развито рассматриваемое ранее вероятностное представление квантовой механики в терминах оптической томографической функции распределения вероятности, имеющей равное с матрицей плотности число степеней свободы, и тем самым доказано, что возможно вероятностное представление квантовой механики без увеличения мерности задачи, введения дополнительных переменных и скрытых параметров. Проиллюстрировано применение разработанного формализма на примерах конкретных квантовых систем и состояний.

2. Получены явные выражения для операторов в представлении оптической томографии. Найдены дуальные символы операторов в представлении оптической томографии в виде регулярных обобщенных функций.

3. Выведены динамическое уравнение и уравнение стационарных состо-

яний квантовых систем в представлении оптической томографии для произвольных многомерных гамильтонианов. Получено уравнение Лиувилля в представлении оптической томографии.

4. Получено уравнение для пропагатора оптической томограммы квантовой системы с произвольным гамильтонианом. Найдены интегральные выражения связи пропагатора для оптической томограммы и квантового пропагатора для матрицы плотности. Найдено явное выражение для пропагатора оптической томограммы произвольной квадратичной квантовой системы.

5. Исследованы свойства неклассических состояний с добавленными фотонами для параметрической квантово-оптической системы. Получены явные выражения для параметрически возбужденных когерентных состояний с добавленными фотонами, четных/нечетных состояний с добавленными фотонами, а также температурных состояний с добавленными фотонами. Предложены дополнительные тестовые выражения для оценки точности получаемых в квантово-оптических экспериментах томограмм состояний.

6. Исследованы оптические томограммы стационарных состояний водородоподобных атомов и ионов.

7. Развито обобщение вероятностного представления на случай релятивистских квантовых систем. Найдено релятивистское уравнение Лиувилля в представлении оптической томографии и динамическое уравнение для оптической томограммы слабо-релятивистской бесспиновой квантовой частицы в достаточно слабых полях.

Практическая значимость полученных результатов: Результаты диссертации вносят заметный вклад в работы по дальнейшему развитию квантовой механики и исследованию состояний квантовых систем.

В диссертации развито предложенное ранее вероятностное представление квантовой механики в терминах оптической томографической функции распределения вероятности (оптической томограммы). Важность такого представления для теоретических и экспериментальных исследований обусловлена возможностью непосредственного экспериментального измерения оптической томограммы состояния квантовой системы.

Применение полученных в диссертации результатов при рассмотрении состояний квантовых систем (в частности, в квантовой оптике) в теоретических исследованиях и анализе получаемых в экспериментах оптических томограмм позволяет проводить дополнительные тесты оценки точности экспериментов, а также вычислять значения практически любых интересующих наблюдаемых физических величин квантовых состояний непосредственно из оптических томограмм с помощью найденных в работе символов операторов без использования представления квазивероятности или представления матрицы плотности.

Пропагатор и динамическое уравнение для оптической томограммы, найденные в диссертации, позволяют осуществлять мониторинг состояния квантовой системы в процессе эволюции. Динамическое уравнение для оптической томограммы и уравнение стационарных состояний в представлении оптической томографии допускают достаточно эффективное применение итерационных численных алгоритмов.

Дуальные символы операторов в виде регулярных обобщенных функций наряду с динамическим уравнением и уравнением стационарных состояний и другими результатами диссертации в представлении оптической томографической функции распределения вероятности, когда в функции распределения содержится вся доступная информация о квантовом состоянии, причем без всяких дополнительных «скрытых» параметров и другого рода переопределений (увеличений размерности задачи), предоставляют современной физике эффективный новый инструментарий для активного использования во многих приложениях.

По мнению автора, полученные результаты, несомненно, найдут применение, в частности, в прецизионных исследованиях фундаментальных аспектов квантовой механики.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Вероятностное представление квантовой механики в терминах оптической томографической функции распределения вероятности, имеющей равное с матрицей плотности число степеней свободы, доказывающее, что возможно вероятностное представление квантовой механики без увеличения мерности задачи, введения дополнительных переменных и скрытых параметров. Иллюстрация применения разработанного формализма на примерах конкретных квантовых систем и состояний.

2. Аналитические явные выражения для операторов в представлении оптической томографии, дуальные символы операторов в представлении оптической томографии в виде регулярных обобщенных функций.

3. Динамическое уравнение и уравнение стационарных состояний квантовых систем в представлении оптической томографии для произвольных многомерных гамильтонианов; уравнение Лиувилля в представлении оптической томографии.

4. Уравнение для пропагатора оптической томограммы квантовой системы с произвольным гамильтонианом; интегральные выражения связи пропагатора для оптической томограммы и квантового пропагатора для матрицы плотности; явное выражение для пропагатора оптической томограммы произвольной квадратичной квантовой системы.

5. Результаты исследования свойств неклассических состояний с добавленными фотонами для параметрической квантово-оптической системы, явные выражения для параметрически возбужденных когерентных состояний с добавленными фотонами, четных/нечетных когерентных состояний с добавленными фотонами, а также температурных состояний с добавленными

фотонами, дополнительные тестовые выражения для оценки точности получаемых в квантово-оптических экспериментах томограмм состояний.

6. Оптические томограммы стационарных состояний водородоподобных атомов и ионов.

7. Результаты обобщения вероятностного представления на случай релятивистских квантовых систем; релятивистское уравнение Лиувилля в представлении оптической томографии и динамическое уравнение для оптической томограммы слабо-релятивистской бесспиновой квантовой частицы в достаточно слабых полях.

Эти результаты являются новыми и достоверными.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на семинаре отделения теоретической физики Физического института имени П.Н.Лебедева по квантовой теории поля, на общепредметном семинаре кафедры теоретической физики Московского физико-технического института.

Кроме того, результаты диссертации направлены и будут докладываться методом заочного содоклада на *12-й международной конференции по сжатым состояниям и соотношениям неопределенностей* ICSSUR 2011, Foz do Iguaçu, Brazil, May 02-06, (2011).

Публикации. Результаты диссертационного исследования были опубликованы в 7 научных работах (см. Список публикаций). Из приведенного перечня 5 статей опубликовано в рецензируемых научных журналах [A1, A2, A3, A4, A6], две статьи опубликованы в архиве Лос-Аламоса [A5, A7]. Кроме того, статья [A5] принята 15 апреля 2011 года к публикации в журнале *Physical Review A*.

Личный вклад автора состоял в нахождении представленных аналитических результатов, построении графиков, написании программных кодов, необходимых для численного исследования полученных аналитических результатов, в предложениях методологического характера по существу выполняемых работ. Вклад соискателя в получение результатов является определяющим.

Структура и объем диссертации. Представленная диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа включает в себя более 120 страниц, более 10 иллюстраций и более 110 цитирований литературы. В конце каждой главы содержатся выводы, в которых сформулированы основные результаты исследований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, а также представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе вводятся основные понятия и определения оптического томографического представления. Оптическая томограмма для многомерной квантовой системы определяется через функцию Вигнера следующим образом:

$$w(\vec{X},\vec{\theta},t) = \int W(\vec{q},\vec{p},t)\prod_{\sigma=1}^{n}\delta\left(X_\sigma - q_\sigma\cos\theta_\sigma - p_\sigma\frac{\sin\theta_\sigma}{m_\sigma\omega_\sigma}\right)\frac{\mathrm{d}^n q\ \mathrm{d}^n p}{(2\pi\hbar)^n}, \qquad (1)$$

где m_σ и ω_σ - размерные постоянные для $\sigma-$й степени свободы. Постоянные m_σ и ω_σ выбираются из соображений удобства исходя из гамильтониана системы и являются характерными массовыми и частотными параметрами задачи. Матрица плотности, функция Вигнера и, соответственно, оптическая томограмма состояния предполагаются нормированными.

Далее, чтобы не загромождать формулы, в ряде случаев, где размерные постоянные очевидным образом могут быть восстановлены, мы будем их опускать, используя соответствующие системы единиц измерения.

В диссертации показано, что оптическая томограмма удовлетворяет условию симметрии

$$\partial_\theta^l w(X,\theta,t) = \partial_\theta^l w((-1)^k X, \theta+\pi k, t),\ \ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,\ \ l=0,\ 1,\ 2,\cdots \quad (2)$$

Решается задача нахождения явного вида наиболее интересных с физической точки зрения операторов в представлении оптической томографии. Если $\hat{A}$ - оператор, действующий на матрицу плотности $\hat{\rho}$ состояния квантовой системы, то преобразование Радона результата такого действия $R[\hat{A}\hat{\rho}](\vec{X},\vec{\theta})$ может быть представлено в виде действия этого оператора в томографическом представлении $R[\hat{A}](\vec{X},\vec{\theta})$ на оптическую томограмму $w(\vec{X},\vec{\theta})$.

Так, в частности, в представлении оптической томографии для $i-$х компонент операторов $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{p}}$ явные выражения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\hat{q}_i &= \sin\theta_i \left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-1} \frac{\partial}{\partial\theta_i} + X_i\cos\theta_i + \frac{i}{2}\frac{\hbar}{m_i\omega_{oi}}\sin\theta_i\frac{\partial}{\partial X_i};\\
\hat{p}_i &= m_i\omega_{0i}\left(-\cos\theta_i\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_i} + X_i\sin\theta_i\right) - \frac{i\hbar}{2}\cos\theta_i\frac{\partial}{\partial X_i};\\
\hat{q}_i^2 &= \sin^2\theta_i\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}+1\right) + X_i\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-1}\left(\sin 2\theta_i\frac{\partial}{\partial\theta_i} - \sin^2\theta_i\right)\\
&+ X_i^2\cos^2\theta_i + i\frac{\hbar}{m_i\omega_{oi}}\left\{\sin^2\theta_i\frac{\partial}{\partial\theta_i} + \frac{\sin 2\theta_i}{2}\left(1+X_i\frac{\partial}{\partial X_i}\right)\right\}\\
&- \frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{m_i^2\omega_{oi}^2}\sin^2\theta_i\frac{\partial^2}{\partial X^2};\\
\hat{p}_i^2 &= m_i^2\omega_{oi}^2\left\{\cos^2\theta_i\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}+1\right)\right.\\
&- \left. X_i\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-1}\left(\sin 2\theta_i\frac{\partial}{\partial\theta_i} + \cos^2\theta_i\right) + X_i^2\sin^2\theta_i\right\}\\
&+ i\hbar m_i\omega_{0i}\left\{\cos^2\theta_i\frac{\partial}{\partial\theta_i} - \frac{\sin 2\theta_i}{2}\left(1+X_i\frac{\partial}{\partial X_i}\right)\right\} - \frac{\hbar^2}{4}\cos^2\theta_i\frac{\partial^2}{\partial X^2};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_i\hat{p}_i &= m_i\omega_{oi}\left\{-\frac{\sin 2\theta_i}{2}\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}+1\right)\right.\\
&+ X_i\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-1}\left(\frac{\sin 2\theta_i}{2}-\cos 2\theta_i\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right)+\left.X_i^2\frac{\sin^2\theta_i}{2}\right\}\\
&- i\hbar\left\{\frac{X_i}{2}\frac{\partial}{\partial X_i}\cos 2\theta_i+\frac{\sin 2\theta_i}{2}\frac{\partial}{\partial\theta_i}-\sin^2\theta_i\right\}+\frac{\hbar^2}{8m_i\omega_{oi}}\sin 2\theta_i\frac{\partial^2}{\partial X^2}.
\end{aligned}
$$

Оператор момента импульса для матрицы плотности в координатном представлении $\hat{l}=-i\hbar[\vec{q},\nabla_{\vec{q}}]$, или $\hat{l}_1=\hat{q}_2\hat{p}_3-\hat{p}_2\hat{q}_3$.

В представлении оптической томографии

$$
\begin{aligned}
\hat{l}_1 &= -i\left\{\frac{1}{2}\left(\sin\theta_2\left[\frac{\partial}{\partial X_2}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}+X_2\cos\theta_2\right)\cos\theta_3\frac{\partial}{\partial X_3}\right.\\
&+ i\left(\sin\theta_2\left[\frac{\partial}{\partial X_2}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}+X_2\cos\theta_2\right)\left(-\cos\theta_3\left[\frac{\partial}{\partial X_3}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_3}+X_3\sin\theta_3\right)\\
&+ \left.\frac{i}{4}\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial X_2}\cos\theta_3\frac{\partial}{\partial X_3}+\frac{\sin\theta_2}{2}\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\cos\theta_3\left[\frac{\partial}{\partial X_3}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_3}-X_3\sin\theta_3\right)\right\}\\
&+ i\left\{2\leftrightarrow 3\right\},
\end{aligned}
$$

а компоненты l_2 и l_3 получаются из выражения для $\hat{l}_1$ циклической перестановкой индексов.

Операторы рождения и уничтожения, действующие на матрицу плотности, в координатном представлении имеют форму

$$
\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(q+\frac{\partial}{\partial q}\right);\qquad \hat{a}^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(q-\frac{\partial}{\partial q}\right).
$$

В представлении оптической томографии этим операторам соответствуют операторы, действующие на оптическую томограмму

$$
\hat{a}_i = \frac{\exp(i\theta_i)}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_i}+X_i-i\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right\},
$$

$$\hat{a}_i^\dagger = \frac{\exp(-i\theta_i)}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_i}+X_i+i\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right\}.$$

Для оператора числа частиц $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ в $i-$й моде $n-$мерного осциллятора имеем:

$$\hat{N}_i\rho(\vec{q},\vec{q}') = \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\rho(\vec{q},\vec{q}') = \frac{1}{2}\left\{q_i^2-\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}-1\right\}\rho(\vec{q},\vec{q}'),$$

а в представлении оптической томографии

$$\begin{aligned}\hat{N}_i w(\vec{X},\vec{\theta}) &= \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i w(\vec{X},\vec{\theta}) = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}+1\right)\right.\\ &+ \left. X_i^2 - X_i\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\right]^{-1}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial X_i^2}+i\frac{\partial}{\partial\theta_i}-1\right\}w(\vec{X},\vec{\theta}).\end{aligned}$$

Оператор $\hat{N}_i$ действует на оптические томограммы $w_n(\vec{X},\vec{\theta})$ стационарных состояний гармонического осциллятора в соответствии с формулой

$$\hat{N}_i w_{n_i}(\vec{X},\vec{\theta}) = n_i w_{n_i}(\vec{X},\vec{\theta}),$$

где n_i - число квантов в $i-$й моде.

Отметим, что при выводе правил соответствия фактически использовалась принадлежность функции $W(\vec{q},\vec{p})$ пространству [47] основных функций $\mathcal{S}^{2n}$, на котором может быть построено пространство обобщенных функций медленного роста $\mathcal{S}'^{2n}$.

Далее в диссертации решается задача нахождения явного вида символов операторов в виде сингулярных и регулярных обобщенных функций.

Соотношение между матрицей плотности и оптической томограммой может быть представлено в следующей форме:

$$w(X,\theta) = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}\hat{U}(X,\theta)\}, \quad \hat{\rho} = \int w(X,\theta)\hat{D}(X,\theta)\mathrm{d}X\ \mathrm{d}\theta,$$

где операторы

$$\hat{U}(X,\theta) = \delta(X\hat{1}-\hat{q}\cos\theta-\hat{p}\sin\theta),$$

$$\hat{D}(X,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int |\eta|\; e^{i\eta(X - \hat{q}\cos\theta - \hat{p}\sin\theta)} \mathrm{d}\eta$$

- деквантайзер и квантайзер соответственно. Эти операторы удовлетворяют соотношениям ортогональности и полноты

$$\mathrm{Tr}\{\hat{U}(X,\theta)\hat{D}(X',\theta')\} = \delta(X\cos(\theta-\theta') - X')\delta(\sin(\theta-\theta')),$$

$$\int \hat{D}_{\hat{q}'\hat{p}'}(X,\theta)\hat{U}_{\hat{q}\hat{p}}(X,\theta)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}\theta = \delta(\hat{q}-\hat{q}')\delta(\hat{p}-\hat{p}'). \tag{3}$$

Среднее значение оператора $\hat{A}$, действующего на матрицу плотности, равно

$$\mathrm{Tr}\{\hat{A}\hat{\rho}\} = \int w(X,\theta)\mathrm{Tr}\{\hat{A}\hat{D}(X,\theta)\}\mathrm{d}X\ \mathrm{d}\theta = \int w(X,\theta)w^{(d)}_{\hat{A}}(X,\theta)\mathrm{d}X\ \mathrm{d}\theta, \tag{4}$$

где введено определение дуального символа оператора $\hat{A}$

$$w^{(d)}_{\hat{A}}(X,\theta) = \mathrm{Tr}\{\hat{A}\hat{D}(X,\theta)\}. \tag{5}$$

С помощью соотношения полноты (3) оператор $\hat{A}$ может быть найден из его дуального символа:

$$\hat{A} = \int w^{(d)}_{\hat{A}}(X,\theta)\hat{U}(X,\theta)\mathrm{d}X\ \mathrm{d}\theta.$$

Из определения дуального символа (5) для операторов $\hat{1}$, $\hat{q}$, $\hat{p}$ и $\hat{q}\hat{p}$ после вычислений находим явные выражения их дуальных символов в форме сингулярных обобщенных функций:

$$w^{(d)}_{\hat{1}}(X,\theta) = \delta(\sin(\theta-\theta_o)), \qquad \theta_o \in [0,\pi];$$

$$w^{(d)}_{\hat{q}}(X,\theta) = X\cos\theta\delta(\sin\theta);$$

$$w^{(d)}_{\hat{p}}(X,\theta) = X\delta(\theta-\pi/2);$$

$$w^{(d)}_{\hat{q}\hat{p}}(X,\theta) = X^2\delta(\theta-\pi/4) - \frac{1}{2}X^2\delta(\sin\theta) - \frac{1}{2}X^2\delta(\theta-\pi/2) + \frac{i}{2\pi}.$$

В соответствии с формулой (4) символ $w^{(d)}_{\hat{A}}(X,\theta)$ оператора $\hat{A}$ задает линейный непрерывный функционал на множестве функций распределения

$w(X,\theta)$, принадлежащих пространству $\mathcal{S}^{2n}$ основных функций, т.е. множество $w_{\hat{A}}^{(d)}(X,\theta)$ фактически задает множество обобщенных функций на $\mathcal{S}^{2n}$. Очевидно, что для оператора $\hat{A}$ существует, вообще говоря, множество символов, равных в смысле функционального равенства обобщенных функций (4).

Сингулярный вид символов операторов является, вообще говоря, более удобным для теоретических расчетов, чем регулярный, однако для машинных расчетов и обработки экспериментальных данных более предпочтительно иметь символы операторов в виде регулярных обобщенных функций (в виде гладких непрерывных функций, имеющих не более чем конечно-степенной рост на бесконечности по переменным $\vec{X}$ и регулярных на границах области интегрирования по переменным $\vec{\theta}$).

Если $\hat{A}$ – некоторый произвольный оператор в вигнеровском представлении, среднее значение которого существует, то интеграл

$$\int \mathrm{R}[\hat{A}\ W(\vec{q},\vec{p})](\vec{X},\vec{\theta})\mathrm{d}^n X = \langle\hat{A}\rangle$$

не зависит от $\vec{\theta}$. Принимая во внимание определение символа оператора имеем:

$$\begin{aligned}\langle\hat{A}\rangle &= \int w_{\hat{A}}^{(d)}(\vec{X},\vec{\theta})w(\vec{X},\vec{\theta})\mathrm{d}^n X\mathrm{d}^n\theta \\ &= \frac{1}{\pi^n}\int \mathrm{R}[\hat{A}W(\vec{q},\vec{p})](\vec{X},\vec{\theta})\mathrm{d}^n X\mathrm{d}^n\theta = \frac{1}{\pi^n}\int \mathrm{R}[\hat{A}]\mathrm{R}[W(\vec{q},\vec{p})](\vec{X},\vec{\theta})\mathrm{d}^n X\mathrm{d}^n\theta.\end{aligned}$$

Таким образом, линейные непрерывные функционалы (обобщенные функции) вида

$$\frac{1}{\pi^n}\int \mathrm{d}^n X\mathrm{d}^n\theta\mathrm{R}[\hat{K}]w(\vec{X},\vec{\theta}),$$

действующие на множестве оптических томограмм $w(\vec{X},\vec{\theta})$, в соответствии с найденными в диссертации правилами могут быть представлены в виде регулярных обобщенных функций.

Так, в частности, для компонент операторов $\hat{\vec{q}}$ и $\hat{\vec{p}}$ в диссертации найдены выражения их дуальных символов в следующем виде :

$$w^{(d)}_{\hat{q}_i}(\vec{X},\vec{\theta}) = \frac{2}{\pi^n}X_i\cos\theta_i; \qquad w^{(d)}_{\hat{p}_i}(\vec{X},\vec{\theta}) = \frac{2}{\pi^n}X_i\sin\theta_i;$$

$$w^{(d)}_{\hat{q}_i^2}(\vec{X},\vec{\theta}) = \frac{X_i^2}{\pi^n}(1+2\cos 2\theta_i); \qquad w^{(d)}_{\hat{p}_i^2}(\vec{X},\vec{\theta}) = \frac{X_i^2}{\pi^n}(1-2\cos 2\theta_i);$$

$$w^{(d)}_{\hat{q}_i\hat{p}_i}(\vec{X},\vec{\theta}) = \frac{2}{\pi^n}X_i^2\sin 2\theta_i + \frac{i}{2\pi^n}.$$

Дуальные символы компонент оператора момента импульса в виде регулярных обобщенных функций могут быть выражены следующим образом:

$$w^{(d)}_{\hat{l}_1}(X_1,X_2,X_3;\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \frac{4}{\pi^{2n}}X_2X_3\sin(\theta_3-\theta_2);$$

$$w^{(d)}_{\hat{l}_2}(X_1,X_2,X_3;\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \frac{4}{\pi^{2n}}X_3X_1\sin(\theta_1-\theta_3);$$

$$w^{(d)}_{\hat{l}_3}(X_1,X_2,X_3;\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \frac{4}{\pi^{2n}}X_1X_2\sin(\theta_2-\theta_1).$$

Для дуальных символов операторов рождения и уничтожения мы можем записать следующие выражения:

$$w^{(d)}_{\hat{a}_i}(\vec{X},\vec{\theta}) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^n}X_i(\cos\theta_i + i\sin\theta_i); \qquad w^{(d)}_{\hat{a}_i^\dagger}(\vec{X},\vec{\theta}) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^n}X_i(\cos\theta_i - i\sin\theta_i);$$

$$w^{(d)}_{\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i}(\vec{X},\vec{\theta}) = w^{(d)}_{\hat{N}_i}(\vec{X},\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi^n}(X_i^2 - 1/2).$$

Во второй главе исследуется динамика оптических томограмм состояний квантовых систем с произвольным многомерным гамильтонианом; выводится уравнение эволюции оптической томограммы для таких гамильтонианов.

Так, для гамильтонианов вида

$$\hat{H} = \sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\hat{p}_\sigma^2}{2m_\sigma} \;+\; V(\vec{q}), \qquad \vec{q} = \{q_\sigma\}, \tag{6}$$

автором получено динамическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}w(\vec{X},\vec{\theta},t) = \left[\sum_{\sigma=1}^{n}\omega_\sigma\left[\cos^2\theta_\sigma\frac{\partial}{\partial\theta_\sigma} - \frac{1}{2}\sin 2\theta_\sigma\left\{1 + X_\sigma\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right\}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{2}{\hbar}\mathrm{Im}\; V\left\{\sin\theta_\sigma\frac{\partial}{\partial\theta_\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right]^{-1} + X_\sigma\cos\theta_\sigma + i\frac{\hbar\sin\theta_\sigma}{2m_\sigma\omega_\sigma}\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right\}\right] w(\vec{X},\vec{\theta},t), \tag{7}$$

соответствующее уравнениям Шредингера-Робертсона и фон-Неймана в представлении волновой функции и матрицы плотности.

Для классической функции распределения в фазовом пространстве $f(\vec{q},\vec{p})$ оптическая томограмма $w_{cl}(\vec{X},\vec{\theta},t)$ может быть введена по аналогии со случаем квантовой системы:

$$w_{cl}(\vec{X},\vec{\theta},t) = \int f(\vec{q},\vec{p},t)\prod_{\sigma=1}^{n}\delta\left(X_\sigma - q_\sigma\cos\theta_\sigma - p_\sigma\frac{\sin\theta_\sigma}{m_\sigma\omega_\sigma}\right)\mathrm{d}^n q\;\mathrm{d}^n p. \tag{8}$$

Тогда из $n-$мерного уравнения Лиувилля для потенциала $V(\vec{q})$ в фазовом пространстве

$$\frac{\partial f(\vec{q},\vec{p},t)}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{n}\frac{p_\sigma}{m_\sigma}\frac{\partial f(\vec{q},\vec{p},t)}{\partial q_\sigma} - \sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial V(\vec{q},t)}{\partial q_\sigma}\frac{\partial f(\vec{q},\vec{p},t)}{\partial p_\sigma} = 0, \tag{9}$$

мы можем вывести уравнение Лиувилля в томографической форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}w_{cl}(\vec{X},\vec{\theta},t) = \sum_{\sigma=1}^{n}\omega_\sigma\left[\cos^2\theta_\sigma\frac{\partial}{\partial\theta_\sigma} - \frac{1}{2}\sin 2\theta_\sigma\left\{1 + X_\sigma\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right\}\right] w_{cl}(\vec{X},\vec{\theta},t)$$

$$+ \left[\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\;V\left\{q_\sigma\to\sin\theta_\sigma\frac{\partial}{\partial\theta_\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right]^{-1} + X_\sigma\cos\theta_\sigma\right\}\frac{\sin\theta_\sigma}{m_\sigma\omega_\sigma}\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right] w_{cl}(\vec{X},\vec{\theta},t). \tag{10}$$

Уравнение (7) переходит в уравнение (10) при $\hbar\to 0$.

Для стационарных гамильтонианов, когда потенциал $V(\vec{q})$ не зависит от времени, в диссертации получено уравнение на стационарные состояния квантовой системы в томографической форме:

$$E\ w_E(\vec{X},\vec{\theta}) = \left[\sum_{\sigma=1}^{n} m_\sigma\omega_\sigma^2 \left\{\frac{\cos^2\theta_\sigma}{2}\left[\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right]^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_\sigma^2}+1\right)\right.\right.$$

$$-\frac{X_\sigma}{2}\left[\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right]^{-1}\left(\cos^2\theta_\sigma+\sin 2\theta_\sigma\frac{\partial}{\partial\theta_\sigma}\right)+\frac{X_\sigma^2}{2}\sin^2\theta_\sigma-\frac{\hbar^2}{8m_\sigma^2\omega_\sigma^2}\cos^2\theta_\sigma\frac{\partial^2}{\partial X_\sigma^2}\right\}$$

$$\left.+\,\mathrm{Re}\ V\left\{\sin\theta_\sigma\frac{\partial}{\partial\theta_\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right]^{-1}+X_\sigma\cos\theta_\sigma+i\frac{\hbar\sin\theta_\sigma}{2m_\sigma\omega_\sigma}\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right\}\right] w_E(\vec{X},\vec{\theta}). \quad (11)$$

Условие стационарности оптической томограммы $w_E(\vec{X},\vec{\theta})$ получается из уравнения эволюции (7), принимая во внимание, что $\partial_t w_E = 0$. Таким образом, оптические томограммы стационарных состояний квантовых систем удовлетворяют одновременно двум уравнениям: (11) и условию стационарности.

Эволюцию оптической томограммы $w(X,\theta)$ можно представить в виде следующего интегрального соотношения :

$$w(X,\theta,t) = \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\theta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}X\ \Pi(X,\theta,t;X',\theta',t')w(X',\theta',t'), \qquad t \geq t', \qquad (12)$$

где $\Pi(X,\theta,t;X',\theta',t')$ - функция Грина уравнения (7). Мы называем эту функцию оптическим пропагатором. Благодаря (2), оптический пропагатор удовлетворяет условию симметрии

$$\Pi\left(X,\theta,t;X',\theta',t'\right) = \Pi\left((-1)^k X, \theta+\pi k, t; X',\theta',t'\right), \qquad t \geq t'. \qquad (13)$$

По физическому смыслу, пропагатор удовлетворяет нелинейному интегральному соотношению для N последовательных моментов времени t_k $(k=\overline{1,\ N})$ между $t_1 = t_{in}$ and $t_f = t_N$

$$\Pi(X_N,\theta_N,t_f;X_1,\theta_1,t_{in}) = \int \left\{\prod_{k=1}^{N-1}\Pi(X_{k+1},\theta_{k+1},t_{k+1};X_k,\theta_k,t_k)\right\}\prod_{k=2}^{N-1} dX_k\, d\theta_k. \qquad (14)$$

Если принять в этом выражении $t_f - t_{in} = N\tau$, $t_k = t_{in} + k\tau$, то в пределе $\tau \to 0$, $N \to \infty$, можно получить выражение для оптического попагатора в виде функционального интеграла.

В диссертации найдена связь между оптическим пропагатором и квантовым пропагатором (функцией Грина) для матрицы плотности $\rho(q, q', t)$.

Для чистого состояния с волновой функцией $\Psi(q, t)$ имеем:

$$\rho(q, q', t) = \Psi(q, t)\Psi^*(q', t).$$

Так как волновая функция в момент времени t связана с волновой функцией в момент времени t' функцией Грина $G(q, q', t, t')$ для уравнения Шредингера

$$\Psi(q, t) = \int G(q, \tilde{q}, t, t')\Psi(\tilde{q}, t')d\tilde{q}, \qquad t \geq t',$$

то можно записать :

$$\rho(q, q', t) = \int K(q, q', t; \tilde{q}, \tilde{q}', t')\rho(\tilde{q}, \tilde{q}', t')\, d\tilde{q}\, d\tilde{q}', \qquad t \geq t',$$

где $K(q, q', t; \tilde{q}, \tilde{q}', t') = G(q, \tilde{q}, t, t')G^*(q', \tilde{q}', t, t')$ - квантовый пропагатор для матрицы плотности. Очевидно, что квантовый пропагатор удовлетворяет начальному условию

$$K(q, q', t'; \tilde{q}, \tilde{q}', t') = \delta(q - \tilde{q})\delta(q' - \tilde{q}'), \tag{15}$$

и обычно он принимается равным нулю при $t < t'$.

Зная соотношение между матрицей плотности и оптической томограммой, было получено соотношение между соответствующими пропагаторами:

$$K(q, q', t; \tilde{q}, \tilde{q}', t') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \Pi\left(X, \theta, t; \frac{1}{2}(\tilde{q} + \tilde{q}')\cos\theta' + p'\sin\theta', \theta', t'\right)$$
$$\times e^{-ip'(\tilde{q} - \tilde{q}')}e^{i\eta[X - ((q+q')\cos\theta)/2]}|\eta|\delta(q - q' - \eta\sin\theta)\, d\eta\, dp'\, dX\, d\theta\, d\theta'. \tag{16}$$

Таким образом, если известен пропагатор для оптической томограммы $w(X, \theta)$, мы можем найти квантовый пропагатор для матрицы плотности квантового состояния.

Формула (16) может быть обращена:

$$\Pi(X,\theta,t;X',\theta',t') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int K\left(q+\frac{k\sin\theta}{2}, q-\frac{k\sin\theta}{2}, t; \tilde{q}'+\eta\sin\theta', \tilde{q}', t'\right)$$
$$\times \exp\left\{i\eta\left(X'-\frac{2\tilde{q}+\eta\sin\theta'}{2}\cos\theta'\right)\right\}\exp\left\{-ik(X-q\cos\theta)\right\}|\eta|\,dk\,d\eta\,dq\,d\tilde{q}'. \tag{17}$$

После подстановки начального условия (15) для квантового пропагатора в выражение (17), можно получить начальное условие для оптического пропагатора, а именно:

$$\Pi(X,\theta,t';X',\theta',t') = \delta(X\cos(\theta-\theta')-X')\delta(\sin(\theta-\theta')). \tag{18}$$

Очевидно, это условие удовлетворяет свойству симметрии (13).

В силу (12), с учетом начального условия (18), а также определяя

$$\Pi(X,\theta,t;X',\theta',t') = 0, \quad \text{при} \quad t<t',$$

из (7) получается динамическое уравнение для оптического пропагатора

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi(X,\theta,t;X',\theta',t') - \left[\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\sin 2\theta\left\{1+X\frac{\partial}{\partial X}\right\}\right]\Pi(X,\theta,t;X',\theta',t')$$
$$-2\left[\operatorname{Im} V\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial X}\right]^{-1} + X\cos\theta + i\frac{\sin\theta}{2}\frac{\partial}{\partial X}\right\}\right]\Pi(X,\theta,t;X',\theta',t')$$
$$= \delta(X\cos(\theta-\theta')-X')\delta(\sin(\theta-\theta'))\delta(t-t'). \tag{19}$$

Далее в диссертации рассмотрены кинетические уравнения в классической релятивистской кинетике, динамическое уравнение для функции Вигнера бесспиновой релятивистской квантовой частицы в электро-магнитном и скалярном полях, а также, развивая подходы работ [48], [49], предпринята попытка распространения вероятностного томографического представления на релятивистские системы.

Так, в диссертации найдено релятивистское уравнение Лиувилля в представлении оптической томографии:

$$\frac{\partial}{\partial t}w_{cl}(\vec{X},\vec{\theta},t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j c\omega_j \sum_{i=1}^{3} \left[\cos^2\theta_{ji}\frac{\partial}{\partial\theta_{ji}} - \frac{1}{2}\sin 2\theta_{ji}\left\{1 + X_{ji}\frac{\partial}{\partial X_{ji}}\right\}\right]}{\sqrt{m_j^2c^2 + m_j^2\omega_j^2\sum_{i=1}^{3}\left(\cos\theta_{ji}\left[\frac{\partial}{\partial X_{ji}}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{ji}} - X_{ji}\sin\theta_{ji}\right)^2}} w_{cl}(\vec{X},\vec{\theta},t)$$

$$+ \left[\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} F_{ji}\left\{\sin\theta_\sigma\frac{\partial}{\partial\theta_\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right]^{-1} + X_\sigma\cos\theta_\sigma\right\}\frac{\sin\theta_{ji}}{m_j\omega_j}\frac{\partial}{\partial X_{ji}}\right] w_{cl}(\vec{X},\vec{\theta},t), \tag{20}$$

где $F_{ji}(\vec{q})$ – $i-$я компонента силы, действующей на $j-$ю частицу.

Также в диссертации найдено динамическое уравнение для оптической томограммы слабо-релятивистской бесспиновой квантовой частицы в достаточно слабом поле:

$$\frac{\partial}{\partial t}w(\vec{X},\vec{\theta},t) =$$

$$= \left\{1 + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\sum_{j=1}^{3}\cos\theta_j\frac{\partial^2}{\partial X_j^2} - \frac{\omega^2}{2c^2}\sum_{i=1}^{3}\left(\cos\theta_j\left[\frac{\partial}{\partial X_j}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j} - X_j\sin\theta_j\right)^2\right\}$$

$$\times\left[\sum_{\sigma=1}^{3}\omega\left[\cos^2\theta_\sigma\frac{\partial}{\partial\theta_\sigma} - \frac{1}{2}\sin 2\theta_\sigma\left\{1 + X_\sigma\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right\}\right]\right] w(\vec{X},\vec{\theta},t)$$

$$+ \frac{2}{\hbar}\mathrm{Im}\ V\left\{\sin\theta_\sigma\frac{\partial}{\partial\theta_\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right]^{-1} + X_\sigma\cos\theta_\sigma + i\frac{\hbar\sin\theta_\sigma}{2m\omega}\frac{\partial}{\partial X_\sigma}\right\}\Bigg] w(\vec{X},\vec{\theta},t). \tag{21}$$

Мы видим, что при $c \to \infty$ это уравнение переходит в соответствующее уравнение (7), а при $\hbar \to 0$ оно переходит в уравнение (20), в котором учтены только релятивистские поправки с точностью до c^{-2} включительно.

В третьей главе в вероятностном представлении исследуется динамика произвольной квантовой системы с квадратичным гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{Q}}B\hat{\mathbf{Q}}) + \mathbf{C}\hat{\mathbf{Q}},$$

где $\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{p}, \hat{q})$ - векторный оператор, B - симметричная $2{\times}2$ матрица, и $\mathbf{C}$ - действительный 2-вектор, зависящие от времени. Как известно [50, 51], система имеет линейные интегралы движения:

$$\hat{\mathbf{I}}(t) = \Lambda(t)\hat{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\Delta}(t), \tag{22}$$

где действительная симплектическая $2{\times}2$ матрица $\Lambda(t)$ и действительный вектор $\boldsymbol{\Delta}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\Lambda} = i\Lambda B\sigma_y, \qquad \dot{\boldsymbol{\Delta}} = i\boldsymbol{\Delta}\sigma_y\mathbf{C},$$

с начальными условиями $\Lambda(0) = 1$ и $\boldsymbol{\Delta}(0) = 0$. Интегралы движения определяются из следующего уравнения:

$$\partial_t\hat{I}(t) + i[\hat{H}, \hat{I}(t)] = 0. \tag{23}$$

Для рассматриваемых квадратичных систем любые интегралы движения могут быть выражены как функции двух операторов: $\hat{A}(t) = \hat{U}\hat{a}\hat{U}^{-1}$ и $\hat{A}^\dagger(t) = \hat{U}\hat{a}^\dagger\hat{U}^{-1}$, где $\hat{U}$ - оператор эволюции и

$$\hat{A}(t) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon(t)\hat{p} - \dot{\varepsilon}(t)\hat{q}) + \beta(t), \qquad \hat{A}^\dagger(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon^*(t)\hat{p} - \dot{\varepsilon}^*(t)\hat{q}) + \beta^*(t), \tag{24}$$

где ε удовлетворяют классическим уравнениям

$$\ddot{\varepsilon} + \Omega^2(t)\varepsilon = 0, \qquad \dot{\varepsilon}\varepsilon^* - \dot{\varepsilon}^*\varepsilon = 2i, \tag{25}$$

с начальными условиями $\varepsilon(0) = 1$ и $\dot{\varepsilon}(0) = i$. Функция $\beta(t)$ определяется из (23) следующим образом:

$$\beta(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\int\limits_0^t \mathrm{d}t'\varepsilon(t')f(t'), \tag{26}$$

и интегралы движения (22) выражаются из $\hat{A}$ и $\hat{A}^\dagger$ как:

$$\hat{\mathbf{I}}(t) = \begin{pmatrix} \hat{I}_p \\ \hat{I}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{A}-\hat{A}^\dagger}{i\sqrt{2}} \\ \frac{\hat{A}+\hat{A}^\dagger}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{I}}(t=0) = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Матрица Λ и вектор $\mathbf{\Delta}$ равны, соответственно,

$$\Lambda = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon+\varepsilon^* & -(\dot\varepsilon+\dot\varepsilon^*) \\ i(\varepsilon-\varepsilon^*) & -i(\dot\varepsilon-\dot\varepsilon^*) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i(\beta-\beta^*) \\ \beta+\beta^* \end{pmatrix}.$$

Знание интегралов движения (27) позволяет найти функцию Грина (или квантовый пропагатор) для уравнения Шредингера квантовой системы (см. [50]).

В диссертации найден оптический пропагатор для рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned} &\Pi(X,\theta;X',\theta',t) = \delta[X\cos\theta' - X'(\sin\theta(\dot\varepsilon^*+\dot\varepsilon)+\cos\theta(\varepsilon^*-\varepsilon))/2 \\ &+\cos\theta'(\sin\theta(\dot\varepsilon^*\beta+\dot\varepsilon\dot\beta)+\cos\theta(\varepsilon^*\beta+\varepsilon\beta^*))/\sqrt{2}] \\ &\times\delta\left[i\cos\theta'\frac{\sin\theta(\dot\varepsilon^*-\dot\varepsilon)+\cos\theta(\varepsilon^*-\varepsilon)}{\sin\theta(\dot\varepsilon^*+\dot\varepsilon)+\cos\theta(\varepsilon^*+\varepsilon)} - \sin\theta'\right]\Theta(t). \end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, если интегралы движения известны, т.е. известны матрица $\Lambda(t)$ и вектор $\mathbf{\Delta}(t)$, то, согласно формуле (28), известен и оптический пропагатор. В частном случае свободного движения (с гамильтонианом $\hat H = \hat p^2/2$), имеем [50, 51]:

$$p_o(t) = p, \qquad q_o(t) = q - pt, \qquad \mathbf{\Delta}(t) = 0, \qquad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix},$$

и пропагатор свободного движения записывается в форме

$$\Pi_{\mathrm{f}}(X,\theta;X',\theta',t) = \delta(X\cos\theta' - X'\cos\theta)\delta(\cos\theta'(t+\tan\theta)-\sin\theta')\Theta(t). \tag{29}$$

Для гармонического осциллятора с гамильтонианом $\hat H = \hat p^2/2 + \hat q^2/2$ имеем:

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

и из (28) получаем

$$\Pi_{\mathrm{os}}(X,\theta;X',\theta',t) = \delta\left(X\cos(\theta-\theta'+t) - X'\right)\delta(\sin(\theta-\theta'+t))\Theta(t). \tag{30}$$

Уравнение эволюции в этом случае имеет особенно простую форму:

$$(\partial_t - \partial_\theta)\Pi(X,\theta;X',\theta',t) = \delta(t)\delta(X\cos(\theta-\theta')-X')\delta(\sin(\theta-\theta')), \tag{31}$$

или для оптической томограммы

$$(\partial_t - \partial_\theta) w_{\text{os}}(X,\theta,t) = 0.$$

Физический смысл этих выражений состоит в следующем: сдвиг по времени для рассматриваемой системы эквивалентен сдвигу по фазе.

Далее исследуются состояния с добавленными фотонами для одномодового параметрического осциллятора с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \ \Omega^2(t)\frac{\hat{q}^2}{2}, \tag{32}$$

в котором безразмерные единицы выбраны так, что $\Omega(0) = 1$.

Для стационарного гамильтониана (когда $\Omega(t) = 1$) состояния с добавленными фотонами определяются формулами

$$|\psi, m\rangle = \mathcal{N}_m \hat{a}^{\dagger m}|\psi\rangle, \qquad \hat{\rho}_m = \mathcal{N}_m^2 \hat{a}^{\dagger m}\hat{\rho}\hat{a}^m, \tag{33}$$

где $|\psi\rangle$ или $\hat{\rho}$ – может быть произвольным квантовым состоянием, $\hat{a}^\dagger$ – бозонный оператор рождения, m – положительное целое число — число добавленных фотонов (фононов), $\mathcal{N}_m$ – нормировочная постоянная (которая зависит от базового состояния $|\psi\rangle$ или $\hat{\rho}$). Если базовое состояние $|\psi\rangle$ — суперпозиция фоковских состояний

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \qquad \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \tag{34}$$

то вероятность $p_n^{(m)}$ нахождения n квантов (фотонов) в состоянии $|\psi, m\rangle$ может быть выражена через соответствующие вероятности $p_n^{(0)}$ в базовом состоянии следующим образом:

$$p_n^{(m)} = \mathcal{N}_m^2 \frac{n!}{(n-m)!} p_{n-m}^{(0)}. \tag{35}$$

Если в качестве базового состояния взять когерентное состояние $|\alpha\rangle$, то получается когерентное состояние с добавленными фотонами, явное выражение для которого в координатном представлении найдено в работах [A2,A3]:

$$\langle q|\alpha, m\rangle = \left(2^m m! L_m(-|\alpha|^2)\right)^{-1/2} H_m(q-\alpha/\sqrt{2})\langle q \mid \alpha\rangle. \qquad (36)$$

где $L_m(z)$ и $H_m(z)$ – полиномы Лаггера и Эрмита [52, 53].

Зависящие от времени когерентные состояния с добавленными фотонами $|\alpha, m, t\rangle$ определяются по формуле

$$|\alpha, m, t\rangle = \hat{U}(t)|\alpha, m, 0\rangle = \hat{U}(t)|\alpha, m\rangle, \qquad \hat{U}(0) = \hat{1}, \qquad (37)$$

где $\hat{U}(t)$ – унитарный оператор эволюции.

Показано [A2,A3], что явное выражение для состояния $|\alpha, m, t\rangle$ в координатном представлении имеет вид

$$\langle q|\alpha, m, t\rangle = \left(m! L_m(-|\alpha|^2)\right)^{-1/2} \left(\frac{\varepsilon^*}{2\varepsilon}\right)^{m/2} H_m\left(\frac{q}{|\varepsilon|} - \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{2\varepsilon}}\alpha\right)\langle q|\alpha, t\rangle, \quad (38)$$

где $\langle q|\alpha, t\rangle$ – зависящее от времени когерентное состояние

$$\langle q|\alpha, t\rangle = \pi^{-1/4}\varepsilon^{-1/2}\exp\left(\frac{i\dot{\varepsilon}q^2}{2\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}\alpha q}{\varepsilon} - \frac{\alpha^2\varepsilon^*}{2\varepsilon} - \frac{|\alpha|^2}{2}\right), \qquad (39)$$

которое рассматривалось, например, в [54], c-числовая функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнениям (25).

Функция Вигнера состояния $\langle q|\alpha, t\rangle$ имеет вид:

$$W_m(q, p|\alpha, t) = \frac{2(-1)^m L_m(|2z-\alpha|^2)}{L_m(-|\alpha|^2)}\exp(-2|z-\alpha|^2), \qquad (40)$$

$$z(q, p, t) = i(\varepsilon p - \dot{\varepsilon} q)/\sqrt{2}.$$

Симплектическая томограмма для этого состояния

$$M_{\alpha m}(X, \mu, \nu, t) = \frac{\left(m! L_m(-|\alpha|^2)\right)^{-1}}{\sqrt{\pi}2^m|\dot{\varepsilon}\nu + \varepsilon\mu|}$$

$$\times\left|H_m\left\{\left(\frac{X\varepsilon + i\sqrt{2}\alpha\nu}{|\varepsilon|(\mu\varepsilon + \nu\dot{\varepsilon})} - \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{2\varepsilon}}\alpha\right)\left(\frac{|\varepsilon|^2(\mu\varepsilon + \nu\dot{\varepsilon})}{\varepsilon^2(\mu\varepsilon^* + \nu\dot{\varepsilon}^*)}\right)^{1/2}\right\}\right|^2$$

$$\times\left|\exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{X^2}{2|\mu\varepsilon + \nu\dot{\varepsilon}|^2} + \frac{\sqrt{2}\alpha X}{\mu\varepsilon + \nu\dot{\varepsilon}} - \frac{\alpha^2\varepsilon^*}{2\varepsilon} + \frac{i\nu\alpha^2}{\varepsilon(\mu\varepsilon + \nu\dot{\varepsilon})}\right\}\right|^2. \quad (41)$$

Подстановка $\mu = \cos\theta$ и $\nu = \sin\theta$ в (41) дает выражение для оптической томограммы $w_{\alpha m}(X,\theta,t)$. В случае стационарного гамильтониана ($\Omega(t) = 1$, $\varepsilon = e^{it}$) имеем:

$$w_{\alpha m}(X,\theta,t,\Omega=1) = \frac{\left(m! L_m(-|\alpha|^2)\right)^{-1}}{\sqrt{\pi}2^m} \left| H_m\left(X - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} e^{-i(t+\theta)}\right)\right|^2$$

$$\times \exp\left\{-X^2 - |\alpha|^2 + 2\sqrt{2} X \mathrm{Re}(\alpha e^{-i(t+\theta)}) - \mathrm{Re}(\alpha^2 e^{-2i(t+\theta)})\right\}. \qquad (42)$$

Четные/нечетные когерентные состояния с добавленными фотонами $|\alpha_\pm, m\rangle$ были введены в [55] следующим образом:

$$|\alpha_\pm, m\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger m}|\alpha_\pm\rangle}{(\langle\alpha_\pm|\hat{a}^m \hat{a}^{\dagger m}|\alpha_\pm\rangle)^{1/2}}, \qquad (43)$$

где $|\alpha_\pm\rangle$ – четные/нечетные когерентные состояния [56], [57] и m – натуральное число, а нормированные состояния $|\alpha_\pm\rangle$ определяются как

$$|\alpha_+\rangle = \frac{e^{|\alpha|^2/2}}{2\sqrt{\cosh|\alpha|^2}}(|\alpha\rangle \ + \ |-\alpha\rangle),$$

$$|\alpha_-\rangle = \frac{e^{|\alpha|^2/2}}{2\sqrt{\sinh|\alpha|^2}}(|\alpha\rangle \ - \ |-\alpha\rangle).$$

Эти состояния выражаются через когерентные состояния с добавленными фотонами $|\alpha, m\rangle$ [55]:

$$|\alpha_\pm, m\rangle = \left(\frac{e^{|\alpha|^2} L_m(-|\alpha|^2)}{2(e^{|\alpha|^2} L_m(-|\alpha|^2) \pm e^{-|\alpha|^2} L_m(|\alpha|^2))}\right)^{1/2} (|\alpha, m\rangle \ \pm \ |-\alpha, m\rangle). \qquad (44)$$

Последняя формула, принимая во внимание (37), позволяет нам получить выражение для симплектической томограммы

$$\begin{aligned} M_{\alpha_\pm m}(X,\mu,\nu,t) \ &= \ \frac{e^{|\alpha|^2} L_m(-|\alpha|^2)}{2(e^{|\alpha|^2} L_m(-|\alpha|^2) \pm e^{-|\alpha|^2} L_m(|\alpha|^2))} \\ &\times \ \{M_{\alpha m}(X,\mu,\nu,t) \ + \ M_{-\alpha m}(X,\mu,\nu,t) \\ &\pm \ 2\mathrm{Re}\left[\langle X,\mu,\nu|\alpha,m,t\rangle\langle -\alpha,m,t|X,\mu,\nu\rangle\right]\}. \end{aligned} \qquad (45)$$

Для оптической томограммы имеем: $w_{\alpha_\pm m}(X,\theta,t) = M_{\alpha_\pm m}(X,\mu=\cos\theta,\nu=\sin\theta,t)$, что для стационарного гамильтониана с $\Omega(t)=1$ дает $w_{\alpha_\pm m}(X,\theta,t) = w_{\alpha_\pm m}(X,t+\theta)$.

Температурные состояния являются наиболее классическими состояниями поля излучения, представляя собой статистическую сумму когерентных состояний. Матрица плотности для температурных состояний имеет вид $\hat\rho_T = Z^{-1}e^{-\hat H/T}$, $Z=\mathrm{Tr}\{e^{-\hat H/T}\}$.

Матрица плотности температурного состояния с добавленными фотонами в представлении фоковских состояний $|n,t\rangle$ дается выражением $(k,\ \ n\geq m)$:

$$\langle k,t|\hat\rho_{Tm}|n,t\rangle = \langle k,t|\hat a^{\dagger m}\hat\rho_T\ \hat a^m|n,t\rangle = \delta_{kn}\frac{(1-e^{-1/T})^{m+1}}{m!}\frac{n!}{(n-m)!}e^{-(n-m)/T}. \tag{46}$$

Симплектическая томограмма этого состояния может быть записана в форме

$$M_{Tm}(X,\mu,\nu,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n+m,t|\hat\rho_{Tm}|n+m,t\rangle|\langle X,\mu,\nu|n+m,t\rangle|^2. \tag{47}$$

Принимая во внимание, что $|\langle X,\mu,\nu|n,t\rangle|^2 = M_{\alpha=0,n}(X,\mu,\nu,t)$, с помощью уравнения (41) находим

$$M_{Tm}(X,\mu,\nu,t) = \frac{(1-e^{-1/T})^{m+1}}{\sqrt{\pi}\ m!\ 2^m\ |\mu\varepsilon+\nu\dot\varepsilon|}\ e^{-X^2/|\mu\varepsilon+\nu\dot\varepsilon|^2}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n/T}}{n!\ 2^n}\left|H_{n+m}\left\{\frac{X\varepsilon}{|\varepsilon|(\mu\varepsilon+\nu\dot\varepsilon)}\left(\frac{|\varepsilon|^2(\mu\varepsilon+\nu\dot\varepsilon)}{\varepsilon^2(\mu\varepsilon^*+\nu\dot\varepsilon^*)}\right)^{1/2}\right\}\right|^2. \tag{48}$$

Для стационарного гамильтониана оптическая томограмма может быть представлена в виде

$$w_{Tm}(X) = \frac{(1-e^{-1/T})^{m+1}}{\sqrt{\pi}\ m!}e^{-X^2}\frac{\partial^m}{\partial\eta^m}\left(\frac{\exp\left(\frac{2X^2\eta}{1+\eta}\right)}{\sqrt{1-\eta^2}}\right)_{\eta=e^{-1/T}}. \tag{49}$$

Заключение

Таким образом, в диссертационном исследовании решены все поставленные задачи, и тем самым достигнута его основная цель.

Развито вероятностное представление квантовой механики в терминах оптической томографической функции распределения вероятности, имеющей столько же степеней свободы, сколько и матрица плотности, и тем самым доказано, что возможно вероятностное представление квантовой механики без всяких дополнительных переменных и скрытых параметров, а также проиллюстрировано применение разработанного формализма на примерах конкретных квантовых систем и состояний.

Исследованы свойства оптических томограмм, найдены явные выражения для операторов и их дуальных символов в представлении оптической томографии, выведены динамическое уравнение и уравнение стационарных состояний в представлении оптической томографии, представлено уравнение для пропагатора оптической томограммы и найдена связь оптического пропагатора с квантовым пропагатором для матрицы плотности.

Исследованы оптические томограммы стационарных состояний водородоподобных атомов и ионов.

Исследованы свойства параметрически возбужденных когерентных состояний с добавленными фотонами, четных/нечетных состояний с добавленными фотонами, а также температурных состояний с добавленными фотонами; предложены дополнительные тестовые выражения для оценки точности получаемых в квантово-оптических экспериментах томограмм состояний.

Развито обобщение вероятностного представления на случай релятивистских квантовых систем. Найдено релятивистское уравнение Лиувилля в представлении оптической томографии и динамическое уравнение для оптической томограммы слабо-релятивистской бесспиновой квантовой частицы в достаточно слабых полях.

Список публикаций

[A1] Я. А. Коренной, В. И. Манько, *Динамическое уравнение для марги-*

нального распределения произвольной n-мерной квантовой системы и маргинальные распределения стационарных состояний атома водорода // *Краткие сообщения по физике*, **10**, 35-40 (1998).

[A2] V. V. Dodonov, M.A. Marchiolli, Ya. A. Korennoy, V. I. Man'ko, Y. A. Moukhin, *Dynamic squeezing of photon-added coherent states* // *Phys. Rev. A*, **58**, 4087-4094 (1998).

[A3] V. V. Dodonov, M.A. Marchiolli, Ya. A. Korennoy, V. I. Man'ko, Y. A. Moukhin, *Parametric excitation of photon-added coherent states* // *Phys. Scripta*, **58**, 469-480 (1998).

[A4] Ya. A. Korennoy, V. I. Man'ko, *Probability representation of quantum evolution and energy level equations for optical tomograms* // *J. Russ. Laser Res.*, **32**, 74-85 (2011).

[A5] Ya. A. Korennoy, V. I. Man'ko, *Optical tomography of photon-added coherent states, even/odd coherent states and thermal states* // *Los Alamos arhiv*, arXiv:1102.1067, [quant-ph] (2011).

[A6] Ya. A. Korennoy, V. I. Man'ko, *Optical propagator of quantum system in probability representation* // *J. Russ. Laser Res.*, **32**, 153-162 (2011).

[A7] G. G. Amosov, Ya. A. Korennoy, V. I. Man'ko, *Operators and their symbols in the optical probabilistic representation of quantum mechanics* // *Los Alamos arhiv*, arXiv:1104 [quant-ph] (2011).

[1] L. De Broglie, *Compt. Rend.*, **183**, 447 (1926).

[2] L. De Broglie, *Compt. Rend.*, **184**, 273 (1927).

[3] L. De Broglie, *Compt. Rend.*, **185**, 380 (1927).

[4] D. Bohm, *Phys. Rev.*, **85**, 166 (1952).

[5] D. Bohm, *Phys. Rev.*, **85**, 180 (1952).

[6] Р. Фейнман, А Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Москва: Мир, (1968).

[7] E. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**, 749 (1932).

[8] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn*, **23**, 264 (1940).

[9] R. J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 84 (1963).

[10] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 277 (1963).

[11] K. E. Cahill and R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **177**, 1882 (1969).

[12] J. E. Moyal, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **45**, 99 (1949).

[13] J. Bertrand and P. Bertrand, *Found. Phys.*, **17**, 397 (1987) .

[14] J. Radon, *Ber. Verh. Sachs. Akad.*, **69**, 262 (1917).

[15] K. Vogel and H. Risken, *Phys. Rev. A*, **40**, 2847 (1989).

[16] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1244 (1993).

[17] A. I. Lvovsky and M. G. Raymer, *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 299 (2009).

[18] S. Mancini, V. I. Man'ko and P. Tombesi, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **7**, 615 (1995).

[19] G. M. D'Ariano, S. Mancini, V. I. Man'ko and P. Tombesi, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **8**, 1017 (1996).

[20] S. Mancini, V. I. Man'ko and P. Tombesi, *Phys. Lett. A*, **213**, 1 (1996).

[21] S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, *Found. Phys.*, **27**, 801 (1997).

[22] A. Ibort, V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, and F. Ventriglia, *Phys. Scr.*, **79**, 065013 (2009).

[23] M. A. Man'ko and V. I. Man'ko, *Found. Phys.*, **41**, 330 (2011).

[24] О. В. Манько, *Динамика и статистические свойства квантовых систем в представлении фазового пространства*, дис. д-ра физ.-мат. наук (2006).

[25] Г. Г. Амосов, *Вероятностные и когомологические характеристики квантовых динамических систем*, дис. д-ра физ.-мат. наук (2008).

[26] О. В. Пилявец, *Некоторые вопросы применения вероятностного представления в квантовой механике и теории бозонных квантовых каналов с памятью*, дис. канд. физ.-мат. наук (2009).

[27] A. S. Arkhipov, Yu. E. Lozovik and V. I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **328**, 419 (2004).

[28] V.V.Dodonov, V.I.Man'ko, *Phys. Lett. A.*, **229**, 335 (1997).

[29] В.И.Манько, О.В.Манько, *ЖЭТФ*, **112**, 796 (1997).

[30] S. Weigert, *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 802 (2000).

[31] S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, *J. Mod. Opt.*, **44**, 2281 (1997).

[32] S. Mancini, P. Tombesi and V. I. Man'ko, *Europhys. Lett.*, **37**, 79 (1997).

[33] Yu. E. Lozovik, V. A. Sharapov, A. S. Arkhipov., *Phys. Rev. A.*, **69**, 022116 (2004).

[34] М.О.Скалли, М.С.Зубайри, *Квантовая оптика*, Москва: Физматлит, (2003).

[35] G. M. D' Ariano, F. M. Zacchi, *Optics communications*, **149**, 152 (1998).

[36] M. Hillery, *Phys. Rev. A*, **61**, 022309 (2000).

[37] V. V. Dodonov, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **4**, R1 (2002).

[38] G.S.Agarwal, K.Tara, *Phys. Rev. A*, **43**, 492 (1991).

[39] A.Zavatta, S. Vicinai, M. Bellini, *Science*, **306**, 660 (2004).

[40] V.Parigi, A.Zavatta, M. Kim, S. Vicinai, M. Bellini, *Science*, **317**, 1890 (2007).

[41] M. Barbieri, N. Spagnolo, M. G. Genoni, F. Ferreyrol, R. Blandino, M. G. A. Paris, P. Grangier, R. Tualle-Brouri, *Phys. Rev. A*, **82**, 063833 (1-5) (2010).

[42] A.Zavatta, V. Parigi, M. S. Kim, M. Bellini, *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 140406 (2009).

[43] T. Kiesel, W. Vogel, M.Bellini, A. Zavatta, *Los Alamos arhiv*, arXiv:1101.1741v1 [quant-ph] (2011).

[44] W. Ketterle, *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 1131 (2002).

[45] M. O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 582 (1997).

[46] I. Bloch, T. W. Hansch, T. Eslinger, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 3008 (1999).

[47] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск первый*, Москва: Добросвет (2007).

[48] V. N. Chernega, V. I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **29**, 43 (2008).

[49] A. S. Arkhipov, V. I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **25**, 468 (2004).

[50] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, Proceedings of the Lebedev Physical Institute, **183**, Nova Science, New York (1989).

[51] I. A. Malkin and V. I. Man'ko, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Москва: Наука (1979).

[52] *Bateman Manuscript Project: Higher Transcendental Functions*, edited by A. Erdélyi, McGraw-Hill, New York (1953).

[53] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, RI, (1959).

[54] I.A. Malkin and V.I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **31**, 243 (1970).

[55] V. V. Dodonov, Ya. A. Korennoy, V.I. Man'ko, E. A. Moukhin, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **8**, 413 (1996).

[56] V.V.Dodonov, I.A.Malkin, V.I.Man'ko, *Physica*, **72**, 597 (1974).

[57] N. A. Ansari, V. I. Manko, *Phys. Rev. A*, **50**, 1942 (1994).