

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт имени П.Н. Лебедева
Российской академии наук

На правах рукописи

Желтоухов Андрей Александрович

**Электромагнитные механизмы выделения
энергии в компактных астрофизических
объектах**

01.04.02 - теоретическая физика

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н. В.С. Бескин

Москва — 2013 г.

Содержание

Глава 1. Основные уравнения	16
Глава 2. Аккреционный диск без углового момента вблизи черной дыры.	21
2.1. Упрощенное рассмотрение особенности на звуковой поверхности.	23
2.2. Строгое рассмотрение.	24
2.3. Решение системы уравнений	29
Глава 3. К природе аномального момента сил, действующего на вращающийся намагниченный шар в вакууме	38
3.1. Метод вычисления момента сил	39
3.2. Результаты	42
Глава 4. Аналитические модели магнитосферы черной дыры в активных галактических ядрах	56
Глава 5. Основные параметры и внутренняя структура струйных выбросов.	65
5.1. Определение параметра множественности рождения.	66
5.2. Внутренняя структура струйных выбросов	69
5.3. Причинная связность струйных выбросов	72
Литература	93

Введение

Актуальность темы.

К классу компактных астрофизических объектов относятся белые карлики, нейтронные звезды и черные дыры. Эти объекты представляют собой последнюю стадию эволюции звезд, когда гравитация, не сдерживаемая давлением нагретого термоядерной реакцией газа, сжимает вещество до очень компактных размеров. Так массы порядка солнечной оказываются сжаты до масштабов порядка 10^4 км в белых карликах, порядка 10 км в нейтронных звездах, а радиус горизонта черных дыр звездных масс составляет лишь несколько километров [1]. Отдельный подкласс составляют сверхмассивные черные дыры в центрах галактик, радиус горизонта которых может достигать 10^{10} км. Большая часть этих объектов излучает слабо и поэтому остается недоступной для астрономических наблюдений, однако, в некоторых случаях в окрестности компактных объектов проходят процессы со значительным выделением энергии. Это относится к таким объектам, как рентгеновские и радио-пульсары, микроквазары, активные ядра галактик. Важным видимым проявлением выделения энергии являются струйные выбросы. Ключевую роль в этом процессе играет электромагнитное поле.

Первые исследования электромагнитных моделей компактных астрофизических объектов были проведены в конце 60-х годов XX века [2, 3] и касались радиопульсаров. Затем в 1976 году Р.Блендфорд [4] и Р.Лавлейс [5] независимо друг от друга высказали идею, что электромагнитная модель может работать также в активных галактических ядрах.

В основе электромагнитной модели выделения энергии лежит идея униполярного индуктора. Во вращающемся намагниченном шаре возникает элек-

трическое поле, которое может служить источником тока, если к шару на разных широтах будет подключен электрический контур, не вращающийся вместе с шаром. Подобная «центральная машина» присутствует во многих компактных астрофизических объектах. В качестве шара выступает быстро вращающееся центральное тело - черная дыра либо нейтронная звезда, в его окрестности существует регулярное магнитное поле. Это приводит к возникновению индукционных электрических полей, которые вызывают ускорение частиц. Таким образом, кинетическая энергия вращения переходит в поток электромагнитной энергии, который постепенно перекачивается в кинетическую энергию поступательного движения частиц.

В современной астрофизике сложилось следующее представление о свойствах центральной машины в активных галактических ядрах [1, 6]. В центре родительской галактики находится сверхмассивная черная дыра с массой $10^6 - 10^9 M_\odot$, на которую происходит аккреция окружающего вещества [7]. Только в этом случае удастся объяснить чрезвычайно высокую эффективность энерговыделения и компактность центральной машины [8]. В качестве источника энергии может выступать как энергия аккрецирующего вещества, так и энергия вращения черной дыры

$$E_{tot} = \frac{J_r \Omega^2}{2} \approx 10^{63} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{\Omega r_g}{c} \right)^2 \text{ эрг}, \quad (0.1)$$

где J_r — момент инерции, M — масса, Ω — угловая скорость черной дыры, а $r_g = 2GM/c^2$ — радиус горизонта черной дыры. Обычно предполагается, что аккреция является дисковой. Тогда в пространстве возникает выделенное направление - ось вращения диска, вдоль которого происходит формирование струйных выбросов. Черная дыра не может иметь собственного магнитного поля (так называемая «теорема об отсутствии волос»), поэтому регулярное

магнитное поле в ее окрестности может возникать лишь через его генерацию в аккреционном диске [9–11].

К сожалению, вплоть до последнего времени угловое разрешение телескопов не позволяло непосредственно наблюдать процессы, происходящие на масштабах сравнимых с радиусом горизонта черной дыры $r_g \approx 3 \times 10^{14} M/M_\odot$ см. Поэтому приходится делать выводы о природе активности галактических ядер по косвенным явлениям, которые можно наблюдать на больших масштабах. В качестве примера можно привести диффузные области радиоизлучения вблизи активных галактик, удаленные от их ядер на десятки и даже сотни килопарсек. Эти области были обнаружены в начале 1960-х гг. и практически сразу были ассоциированы со струйными выбросами плазмы, которые поставляют в эти области вещество и энергию. Из наблюдений следует, что формирование струйных выбросов, их ускорение и коллимация происходит очень близко к ядру. Например, в случае галактики M87 размер области формирования струйного выброса составляет порядка $60r_g$ [12].

Струйные выбросы из активных ядер галактик ускоряются до огромных энергий, причем лоренц-фактор джета как целого может достигать нескольких единиц. Например, в галактике M87 лоренц-фактор определяемый непосредственно из наблюдений составляет $\gamma \approx 6$ [13]. Релятивистские скорости могут сохраняться на огромных расстояниях от ядра, прежде чем вещество джета затормозится от взаимодействия с межгалактической средой. Еще одним важным свойством струйных выбросов является высокая степень коллимации. Угол раствора струйного выброса составляет всего несколько градусов.

В вопросе о механизме ускорения и коллимации струйных выбросов до

сих пор нет однозначности. Было предложено несколько механизмов, но не ясно, какие из них реализуются в конкретных астрофизических объектах. Возможно все механизмы присутствуют одновременно, или какой-то из них преобладает в зависимости от типа источника. В газодинамическом механизме ускорение и коллимация связывается с наличием внешней среды с высоким давлением, которое падает при удалении от центра [14, 15]. Однако, этот механизм может объяснить лишь формирование слабых джетов, так как наблюдаемое давление горячего вещества у самых мощных джетов недостаточно для их ускорения до наблюдаемых скоростей в рамках этого механизма. Еще одним механизмом является ускорение за счет давления излучения. В этом механизме предполагается, что внутренние части аккреционного диска работают как сопло, направляя вещество, а ускорение происходит за счет давления фотонов, плотность которых вблизи источника может быть очень высока [16, 17]. Данный механизм также не может являться универсальным, поскольку, во-первых, многие источники с мощными джетами имеют слабую светимость [18]. Во-вторых, начиная с определенных энергий частиц $\gamma \approx 3$ поле излучения гораздо эффективней тормозит их, чем ускоряет [19]. Таким образом, этот механизм не может быть ответственен за ускорение в "сверх-световых" джетах, в которых энергия частиц гораздо больше. В-третьих, этот механизм не может объяснить коллимацию джетов в системах с тонким аккреционным диском.

В настоящее время большинство исследователей склоняется к магнито-гидродинамической модели образования струйных выбросов, восходящей к работе Блендфорда и Знайека [20]. Согласно этой модели основная роль в передаче энергии от центральной машины к струйному выбросу принадлежит

потоку электромагнитного поля — вектору Пойнтинга. Полоидальное магнитное поле, генерируемое в диске, связывает центральную машину с внешними областями, причем поток энергии и истечение вещества происходят вдоль магнитных силовых линий. Продольный электрический ток, текущий вдоль джета, создает тороидальное магнитное поле, и давление этого поля может коллимировать струйный выброс.

Как уже было отмечено, процесс аккреции (падения вещества на гравитационный центр) играет важную роль в энерговыделении из компактных объектов. Основы теории аккреционных течений были заложены еще в сороковых-пятидесятых годах XX века в работах [21–23], где были исследованы чисто гидродинамические сферически-симметричные задачи трансзвуковой аккреции и эжекции идеального газа. Наибольшего расцвета теория гидродинамической аккреции достигла после открытия в начале семидесятых годов рентгеновских пульсаров, а также активных галактических ядер. Основным источником энергии этих объектов является гравитационная энергия, которая при приближении вещества к гравитационному центру переходит в кинетическую энергию, тепловую энергию и энергию излучения. Например, при аккреции на нейтронную звезду энерговыделение должно полностью определяться темпом аккреции \dot{M} .

$$L = \frac{GM\dot{M}}{R}.$$

Однако темп аккреции \dot{M} не может быть бесконечно большим, так как при увеличении \dot{M} растет энергия излучения и при некотором критическом значении темпа аккреции давление излучения может превысить силу гравитации и остановить падение вещества. Равновесие силы гравитации и силы давления излучения определяет критическое значение светимости, которое называется

эддингтоновским пределом.

$$L_{Edd} \approx 10^{38} \text{ эрг/с} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)$$

Замечательно, что L_{Edd} определяется только массой центрального тела и механизмом непрозрачности аккрецирующего вещества (приведенная формула получена для томсоновским рассеянием на электронах). При $L > L_{Edd}$ давление излучения будет превосходить гравитационное притяжение, что приведет к остановке падения вещества на гравитационный центр, и может даже начаться истечения вещества.

Сферически-симметричная аккреция на гравитирующий центр возможна лишь при малом удельном моменте импульса падающего вещества. При наличии у вещества значительного удельного момента импульса L оно не сможет приблизиться к гравитационному центру существенно ближе определенного расстояния, поскольку возникнет дополнительный центробежный потенциальный барьер

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2}.$$

Поэтому вещество будет приближаться к гравитационному центру, только если оно будет отдавать свой угловой момент. Таким образом, для аккреции необходим механизм переноса углового момента вдоль диска наружу. Основными процессами, приводящими к переносу углового момента, являются вязкое трение и эффекты в магнитном поле (пересоединением магнитных линий).

Первая модель дисковой аккреции, которая сейчас называется стандартной моделью или моделью альфа-диска, была построена более 35 лет назад

в работе Шакура и Сюняев [24]. В качестве количественной характеристики потерь орбитального момента и, следовательно, эффективности аккреции, Шакура и Сюняев вводят параметр альфа, который связывает тензор вязких напряжений с давлением газа

$$t_{r\phi} = \alpha_{SS}P.$$

Также в данной модели используется предположение о полном переизлучении энергии, выделяемой в результате вязкого трения. Сделанных предположений оказалось достаточно, чтобы в случае тонкого диска все параметры течения можно было найти из простых аналитических соотношений. В работе [25] Пачинский и Бисноватый-Коган усовершенствовали стандартную модель дисковой аккреции, попытавшись хотя бы отчасти учесть эффекты общей теории относительности с помощью модельного потенциала Пачинского-Вииты:

$$\Phi = -\frac{GM}{r - r_g}. \quad (0.2)$$

где M - масса черной дыры, r_g - гравитационный радиус $r_g = 2GM/c^2$. Еще одно усовершенствование работы [25] состоит в том, что в уравнении теплового баланса учитывается теплообмен между слоями диска (адвекционный член, пропорциональный TdS/dr) В этой работе также было показано, что усредняя осесимметричные стационарные уравнения гидродинамики в направлении, перпендикулярном плоскости диска, можно свести их к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых все величины будут зависеть только от координаты r . Процедура вертикального усреднения физических величин по толщине диска использовалась во многочисленных последующих работах (см., например, [26–28]). При подобном подходе, однако, особенность в радиальных гидродинамических уравнениях не совпадает с

положением звуковой поверхности $v_p = c_s$ (где v_p – полоидальная скорость). Иногда даже возникает вторая, заведомо нефизическая особенность [26]. Используя формализм уравнения Грэда-Шафранова в идеальной газодинамике на примере модельного течения вещества в форме диска без углового момента удается показать, что особенность в уравнениях, описывающих тонкие трансзвуковые диски, находится на именно на звуковой поверхности.

Еще один важный вопрос астрофизики компактных объектов - вопрос о структуре магнитного поля в окрестности черной дыры (которое должно генерироваться в аккреционном диске), и он до сих пор остается открытым. Этот вопрос становится особенно актуальным как в связи с последними наблюдениями внутренних областей струйных выбросов (см., например, [29]), так и с успешным запуском космической обсерватории Спектр-Р (Радиоастрон), также позволяющим разрешить пространственные масштабы, сравнимые с размером центральной черной дыры [30].

В литературе предлагалось несколько аналитических моделей магнитосферы черной дыры. Первая из них была построена Блендфордом и Знайеком [20], рассмотревшими медленно вращающуюся черную дыру, для которой в качестве нулевого приближения была выбрана невращающаяся черная дыра с квазирадиальным (*split*) монопольным полем. Такая геометрия легко может быть реализована в присутствии тонкого аккреционного диска. Эти же авторы рассмотрели модель магнитосферы с параболическим магнитным полем в окрестности медленно вращающейся черной дыры. В работе [31] был исследован случай, когда черная дыра находится в центре хорошо проводящего диска, ограниченного внутренним радиусом b . При этом вблизи черной дыры поле являлось почти однородным, а на больших расстояниях ($r \gg b$) магнит-

ное поле оставалось по-прежнему квазирадиальным. Во всех указанных моделях угловая скорость вращения плазмы $\Omega_F(\Psi)$ вблизи оси вращения равна ровно половине угловой скорости черной дыры. Однако, согласно недавним результатам численного моделирования магнитосферы черной дыры [32] Ω_F может не только отличаться от $\Omega_H/2$ вблизи оси, но даже становится здесь отрицательной.

Цель работы

Целью работы является исследование электромагнитных механизмов выделения энергии в компактных астрофизических объектах.

Основные задачи, решаемые в диссертационной работе

1. Нахождение трансзвукового решения задачи об аккреции газа с политропным уравнением состояния без углового момента в форме диска. Определение положения звуковой поверхности с использованием распространенных оценок толщины диска и с использованием более точного метода уравнения Грэда-Шафранова.
2. Нахождение аномального момента сил, действующих на вращающийся намагниченный шар в вакууме для различных вариантов структуры его внутреннего магнитного поля — однородного поля, поля магнитного диполя и комбинированного варианта — однородного поля в «ядре» и дипольного магнитного поля в «прослойке».
3. Создание и анализ новой аналитической модели магнитосферы черной дыры, и применение этой модели для объяснения результатов численного моделирования, в частности, отличия угловой скорости вращения плазмы $\Omega_F(\Psi)$ вблизи оси вращения от половины угловой скорости чер-

ной дыры.

4. Определение основных параметров струйных выбросов - параметра намагниченности и множественности рождения частиц - по эффекту наблюдаемого сдвига ядра джета, и определение по найденным значениям параметров внутренней структуры струйного выброса.

Научная новизна работы

Впервые на задаче об аккреции вещества в форме диска без углового момента показано, что при использовании стандартных приближенных соотношений особая поверхность в уравнениях смещается относительно звуковой поверхности, тогда как при использовании более строгого метода уравнения Грэда-Шафранова этот эффект отсутствует. Новым методом был вычислен аномальный момент сил, действующий на вращающийся намагниченный шар в вакууме для разных вариантов структуры его внутреннего магнитного поля: однородного поля, поля магнитного диполя и комбинированного варианта — однородного поля в "ядре" и дипольного магнитного поля в "прослойке". Последовательно учтены токи коротации, текущие в шаре, что ранее не делалось. Впервые исследована аналитическая модель магнитосферы черной дыры, основанной на следующей геометрии магнитного поля: радиального магнитного поля вблизи горизонта и вертикального поля на больших расстояниях от черной дыры. Применен новый метод определения параметра намагниченности σ и параметра множественности рождения λ по видимому сдвигу ядра джета. Для характерных значений параметров σ и λ впервые определена внутренняя структура джета.

Научная и практическая ценность

Проведенный анализ задачи об аккреции газа с политропным уравне-

нием состояния без углового момента в форме диска показывает, насколько нужно быть осторожным, используя стандартную оценку $H/r \approx c_s/v_K$ для толщины аккреционного диска. Фактически, такое предположение столь же жестко ограничивает параметры течения, как и в случае сферически симметричной аккреции. Однако хорошо известно, что задача о сферически симметричной аккреции (аккреции Бонди) имеет на одну степень свободы меньше, чем задача о произвольных двумерных течениях [8]. Это связано с тем, что аккреция Бонди по сути является одномерной задачей. При учете же двумерности течения критическое условие на звуковой поверхности будет определять не темп аккреции, а лишь прогиб линий тока вблизи особой точки. В частности, поэтому критическое условие не накладывает никаких ограничений и на угловой момент, как это иногда предполагается при стандартном рассмотрении.

Исследование новой аналитической модели магнитосферы черной дыры, основанной на ранее не рассматривавшейся геометрии магнитных поверхностей: радиального магнитного поля вблизи горизонта и вертикального поля на больших расстояниях от черной дыры показало, что при наличии плотной сердцевины вблизи оси джета имеет место отличное согласие рассмотренной модели с результатами численного моделирования. И это при том, что аналитические расчеты были выполнены в рамках простейшего бессилового приближения, а также в предположении об осесимметричности и стационарности течения, тогда как в работе [32] проводилось трехмерное численное моделирование в полной МГД версии, учитывающее нестационарность рассматриваемых течений.

Хорошее согласие между теорией и результатами численного моделиро-

вания еще раз показывает, что осесимметричные стационарные течения, для которых за последние три десятка лет удалось получить достаточно много аналитических результатов, остаются хорошей основой для анализа процессов, происходящих в реальных астрофизических источниках. Одно из таких свойств состоит в том, что несмотря на турбулентный характер течения в области над аккреционным диском, вблизи оси вращения течение остается достаточно регулярным. Поэтому есть надежда, что сформулированные ранее простые аналитические асимптотики (и, в частности, утверждение о том, что структура магнитного поля вблизи горизонта должно быть близко к радиальному) будут востребованы и в дальнейшем.

По наблюдательным данным видимого сдвига ядра джета для 20 источников были определены основные параметры струйных выбросов - параметр намагниченности σ и параметр множественности рождения λ . Значения параметра λ (порядка $10^{13} - 10^{14}$) хорошо согласуются со значениями плотности электронов n_e , найденной другим способом в работе [33]. Кроме того, значения параметра σ (характерные значения порядка 30) согласуются с оценками Лоренц-фактора джетов по VLBI-наблюдениям [34] и измерениям радио-переменности [35]. Для характерных значений параметров σ и λ в рамках модели цилиндрического струйного выброса удастся полностью определить внутреннюю структуру джета. В частности, было показано, что магнитное поле на оси джета значительно больше, чем на его границе.

Положения, выносимые на защиту

1. Отличие положения особой и звуковой поверхностей в стандартном подходе, а также появление дополнительных особых поверхностей, является следствием некорректных приближений, ограничивающих верти-

кальную структуру течения.

2. Величина аномального момента сил, действующих на вращающийся намагниченный шар в вакууме, может быть отлична от нуля и существенно зависит от внутренней структуры магнитного поля.
3. Создание новой аналитической модели магнитосферы черной дыры, основанной на ранее не рассматривавшейся геометрии магнитного поля: радиального магнитного поля вблизи горизонта и вертикального поля на больших расстояниях от черной дыры.
4. Для параметра намагниченности σ и множественности рождения частиц λ , найденных с использованием результатов радионаблюдений по эффекту видимого сдвига ядра джета, в рамках модели цилиндрического струйного выброса была полностью определена внутренняя структура джета. В частности, было показано, что магнитное поле на оси джета значительно больше, чем на его границе, а также то, что на больших расстояниях вдоль джета лоренц-фактор истекающей плазмы постепенно выходит на насыщение, причем ускорение на 60-100 пк имеет значения около $\dot{\gamma}/\gamma \approx 10^{-3}$, что согласуется с результатами VLBI-исследований ускорения джетов в активных галактических ядрах.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на астрофизическом семинаре отделения теоретической физики ФИАН, а также на следующих конференциях:

1. XXVI конференция "Актуальные проблемы внегалактической астрономии Россия, Пущино, 21 - 23 апреля 2009 г. стендовый доклад "АККРЕ-

ЦИОННЫЙ ДИСК БЕЗ УГЛОВОГО МОМЕНТА ВБЛИЗИ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ."

2. Всероссийская школа для молодых ученых "ГАЛАКТИЧЕСКИЕ И АККРЕЦИОННЫЕ ДИСКИ Россия, Нижний Архыз, 21-26 сентября 2009 г., доклад "Структура аккреционного диска без углового момента".
3. XXX конференция "Актуальные проблемы внегалактической астрономии Россия, Пущино, 08 - 10 апреля 2013 г. доклад "Определение параметров истекающей плазмы в релятивистских джетах на парсековых масштабах".
4. Всероссийская астрономическая конференция "Многоликая Вселенная" (ВАК-2013), Россия, Санкт-Петербург, Park Inn Pulkovskaya, 23-27 сентября 2013 года, доклад "Аномальный момент сил, действующий на намагниченный шар в вакууме".

Личный вклад автора

Большая часть результатов, представленных в диссертации, получены автором лично. Выбор общего направления исследований, постановка рассмотренных задач и обсуждение полученных результатов осуществлялись совместно с научным руководителем и соавторами работ.

Структура и объем работы

Диссертационная работа изложена на 97 страницах, состоит из введения, пяти глав и заключения, содержит 21 рисунков и список литературы из 75 наименований.

Глава 1

Основные уравнения

Одним из наиболее мощных аналитических методов исследования активности компактных астрофизических объектов является метод уравнения Грэда-Шафранова. Этот подход описывает осесимметричные стационарные течения в рамках идеальной магнитной гидродинамики. Данное приближение справедливо в условиях хорошей проводимости плазмы, заполняющей магнитосферу компактного объекта. Благодаря высокому энерговыделению в окрестности компактного объекта сохраняется высокая степень ионизации вещества, а в окрестности черной дыры происходит рождение электрон-позитронной плазмы, поэтому указанное условие выполняется. Кроме того, для большей части наблюдаемых компактных астрофизических объектов с хорошей точностью применимо приближение осесимметричности и стационарности.

Удобство метода уравнения Грэда-Шафранова связано с тем, что в случае стационарной идеальной магнитной гидродинамики существует достаточно много интегралов движения, т.е. величин, сохраняющихся вдоль траектории движения частиц. Это позволяет свести уравнения магнитной гидродинамики к одному уравнению второго порядка на функцию магнитного потока $\Psi(r, \theta)$, определяющую магнитное поле:

$$\mathbf{V} = \frac{\nabla\Psi \times \mathbf{e}_\varphi}{2\pi\varpi} - \frac{2I}{c\varpi}\mathbf{e}_\varphi. \quad (1.0.1)$$

Здесь $\varpi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}$ есть расстояние до оси вращения. При таком выборе обозначений функция $\Psi(r, \theta)$ совпадает с потоком магнитного поля, проходящем

через круг $r, \theta, 0 < \varphi < 2\pi$, а функция $I(r, \theta)$ представляет собой полный ток, текущий через тот же круг.

Кроме того, выполняются следующие важные свойства.

1. Уравнение $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ выполняется автоматически. В результате три компоненты магнитного поля определяются двумя скалярными функциями $\Psi(r, \theta)$ и $I(r, \theta)$.

2. Автоматически выполняется уравнение $\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = \mathbf{0}$, поэтому линии $\Psi(r, \theta) = \text{const}$ задают форму магнитных поверхностей.

В более простом случае чистой гидродинамики можно ввести потенциал $\Phi(r, \theta)$, который определяет полоидальную компоненту физической 4-скорости $\vec{u}_{\hat{r}} = u_{\hat{r}}\vec{e}_{\hat{r}} + u_{\hat{\theta}}\vec{e}_{\hat{\theta}}$.

$$\alpha n \vec{u}_{\hat{r}} = \frac{1}{2\pi\varpi} \left[\vec{\nabla} \Phi \times \vec{e}_{\hat{\varphi}} \right]. \quad (1.0.2)$$

Уравнение $\Phi(r, \theta) = \text{const}$ определяет линии тока.

В идеальной гидродинамике существуют 3 интеграла движения, которые сохраняются на линиях тока:

- $S = S(\Phi)$ - энтропия;
- $E(\Phi) = \mu\alpha\gamma$ - интеграл Бернулли;
- $L(\Phi) = \mu\varpi u_{\hat{\varphi}}$ - z-я компонента углового момента,

где μ – релятивистская энтальпия в расчете на одну частицу.

В данной работе мы будем использовать политропное уравнение состояния вещества (т.е. теплоемкость – $C = \text{const}$). В этом случае имеем (см.

[8],[1]):

$$P = nT = k(S)n^\Gamma; \quad T = k(S)n^{\Gamma-1} \quad (1.0.3)$$

$$\mu = m_p + \frac{\Gamma}{\Gamma-1}k(S)n^{\Gamma-1} \quad (1.0.4)$$

$$c_s^2 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_S = \frac{\Gamma}{\mu} k(S)n^{\Gamma-1}; \quad (1.0.5)$$

Для идеального газа $\Gamma = \text{const}$, $k(S) = k_0 \exp[(\Gamma - 1)S]$.

Полоидальная компонента релятивистского уравнения Эйлера имеет вид (см. [9]):

$$nu^b \nabla_b (\mu u_a) + \nabla_a P - \mu n (u_{\dot{\varphi}})^2 \frac{1}{\varpi} \nabla_a \varpi + \mu n \gamma^2 \frac{1}{\alpha} \nabla_a \alpha = 0, \quad (1.0.6)$$

где индексы a и b принимают значения r и θ .

Используя определение инвариантов $S(\Phi)$, $E(\Phi)$ и $L(\Phi)$ это уравнение можно переписать как произведение скалярного множителя [GS] на вектор $\vec{\nabla}\Phi$ (см [36] или [8]):

$$[\text{Эйлер}]_p = [\text{GS}] \cdot \vec{\nabla}\Phi \quad (1.0.7)$$

Таким образом, векторное уравнение Эйлера сводится к скалярному уравнению Грэда-Шафранова $[\text{GS}] = 0$ на функцию $\Phi(r, \theta)$.

$$-\mathcal{M}^2 \left[\frac{1}{\alpha} \nabla_k \left(\frac{1}{\alpha \varpi^2} \nabla^k \Phi \right) + \frac{1}{\alpha^2 \varpi^2 (\nabla \Phi)^2} \frac{\nabla^i \Phi \nabla^k \Phi \nabla_i \nabla_k \Phi}{D} \right] + \frac{\mathcal{M}^2 \nabla'_k F \nabla^k \Phi}{2\alpha^2 \varpi^2 (\nabla \Phi)^2 D} +$$

$$\frac{64\pi^4}{\alpha^2 \varpi^2 \mathcal{M}^2} \times \left(\varpi^2 E \frac{dE}{d\Phi} - \alpha^2 L \frac{dL}{d\Phi} \right) - 16\pi^3 n T \frac{dS}{d\Phi} = 0, \quad (1.0.8)$$

где ∇'_k действует на все переменные, кроме \mathcal{M} .

$$D = -1 + \frac{1}{u_p^2} \frac{c_s^2}{1 - c_s^2};$$

$$F = \frac{64\pi^4}{\mathcal{M}^4} [\varpi^2 E^2 - \alpha^2 L^2 - \varpi^2 \alpha^2 \mu^2];$$

$$\mathcal{M}^2 = \frac{4\pi\mu}{n}.$$

Уравнение (1.0.8) имеет одну особую поверхность, определяемую условием $D = 0$. На этой поверхности уравнение Грэда-Шафранова меняет тип с эллиптического на гиперболический.

В компактной же форме уравнение Грэда-Шафранова имеет вид (см [8]):

$$-\frac{1}{\alpha} \nabla_k \left(\frac{1}{\alpha \varpi^2} \mathcal{M}^2 \nabla^k \Phi \right) + \frac{64\pi^4}{\alpha^2 \varpi^2 \mathcal{M}^2} \left(\varpi^2 E \frac{dE}{d\Phi} - \alpha^2 L \frac{dL}{d\Phi} \right) - 16\pi^3 n T \frac{dS}{d\Phi} = 0$$

(1.0.9)

Аналогичные уравнения удается записать и в случае идеальной магнитной гидродинамики. Однако, в этом случае будет уже не три, а пять интегралов движения, что является следствием выполнения условия вмороженности

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c = 0$$

(1.0.10)

Это условие, а также предположение об осесимметричности позволяют определить электрическое поле следующим образом (подробнее см. [37])

$$\mathbf{E} = -\frac{(\Omega_F - \omega)}{2\pi c} \nabla \Psi,$$

(1.0.11)

где ω — угловая частота Лензе-Тирринга. В итоге уравнение Максвелла $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ приводит к соотношению $\nabla \Omega_F \times \nabla \Psi = 0$, откуда следует, что

$$\Omega_F = \Omega_F(\Psi).$$

(1.0.12)

Введенная таким образом функция Ω_F имеет смысл угловой скорости вращения частиц, движущихся в магнитосфере, полностью заполненной плазмой, а условие (1.0.11) представляет собой закон изоротации Ферраро, согласно которому угловая скорость вращения частиц на осесимметричных магнитных поверхностях должна быть постоянной [38].

Аналогичным образом из уравнений Максвелла можно вывести, что $\nabla I \times \nabla \Psi = 0$, и, следовательно,

$$I = I(\Psi). \quad (1.0.13)$$

Это значит, что полный электрический ток внутри магнитной трубки также сохраняется.

Важно подчеркнуть, что в отличие от нерелятивистской задачи, в магнитосфере черной дыры присутствует второе семейство особых поверхностей, связанное с аккрецирующим веществом. В результате, дополнительное критическое условие позволяет определить дополнительную связь между током $I(\Psi)$ и угловой скоростью $\Omega_F(\Psi)$. В бессиловом приближении эта связь может быть записана в виде (см. [37, 39])

$$4\pi I(\Psi) = [\Omega_H - \Omega_F(\Psi)] \sin \theta \frac{r_g^2 + a^2}{r_g^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\Psi}{d\theta} \right), \quad (1.0.14)$$

где r_g — радиус черной дыры, a — параметр вращения, Ω_H — угловая скорость вращения черной дыры. Напомним, что истинный смысл соотношения (1.0.14) — это критическое условие на внутренней быстрой магнитозвуковой поверхности, которая в бессиловом приближении совпадает с горизонтом черной дыры [37].

Глава 2

Аккреционный диск без углового момента вблизи черной дыры.

Как хорошо известно, при исследовании структуры тонких аккреционных дисков обычно используются различные упрощающие предположения. В частности, как в классических ([24, 25]), так и в многочисленных последующих работах (см., например, [26–28]) используется процедура вертикального усреднения физических величин по толщине диска. При этом для оценки толщины диска используется равенство z -компонент силы гравитации и градиента давления:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{GM}{r^3} z. \quad (2.0.1)$$

Для тонких нерелятивистских дисков такое соотношение будет выполнено точно, если вертикальная компонента скорости тождественно равна нулю ($v_z = 0$), что обычно и предполагается. Во многих задачах по аккреции на черную дыру более удобной оказывается не цилиндрическая, а сферическая система координат, и поэтому более распространенной формулировкой отсутствия вертикального движения является $u_\theta = 0$. Подчеркнем, что это условие прямо определяет структуру течения.

В результате, полутолщина диска оценивается формулой

$$\frac{H}{r} \approx \frac{c_s}{v_K}, \quad (2.0.2)$$

где c_s – скорость звука, $v_K = (GM/r)^{1/2}$ – кеплеровская скорость. Использование этой оценки позволяло авторам указанных выше работ рассматривать лишь радиальную структуру аккреционного диска, т.е. зависимости ли-

бо значений физических величин на экваторе диска, либо усредненных по толщине значений физических величин от расстояния до гравитационного центра. При подобном подходе, однако, особенность в радиальных гидродинамических уравнениях не совпадает с положением звуковой поверхности $v_p = c_s$ (где v_p – полоидальная скорость). Иногда даже возникает вторая, заведомо нефизическая особенность [26].

В данной работе течение анализируется в рамках уравнения Грэда-Шафранова, т.е. не обращаясь к каким-либо упрощающим предположениям о структуре течения. Такая постановка задачи позволяет провести более строгое и самосогласованное рассмотрение течения вещества. Для простоты мы рассматриваем аккреционный диск без углового момента при условии, что на некоторой цилиндрической поверхности $r = R_{\text{out}}$ выполняется вертикальный баланс сил (2.0.1) и вещество движется со скоростью, меньшей скорости звука на этой поверхности.

В результате, будет показано, что при последовательном учете двумерности течения особенность в гидродинамических уравнениях находится на звуковой поверхности, а не на смещенной поверхности, как это имеет место при стандартной оценке толщины диска. Кроме того, будет показано, что для аккреционного диска без углового момента существует трансзвуковое течение как при положительном, так и при отрицательном значении энергии E . Напомним, что для сферически-симметричной аккреции Бонди [22] при отрицательной энергии E звуковой поверхности не существует, т.е. не существует стационарных трансзвуковых течений. Следовательно, жесткое задание строго радиального течения в нашем случае также привело бы к неверному результату при отрицательной энергии E .

Следует отметить, что ограничением метода уравнения Грэда-Шафранова является требование сохранения на линиях тока указанных выше инвариантов, что приводит к невозможности учесть в рамках данного подхода вязкое трение и излучение из аккреционного диска. Без учета этих процессов на больших расстояниях от черной дыры вещество, обладая постоянным угловым моментом, не сможет приближаться к черной дыре. Однако, внутри последней устойчивой орбиты вещество будет падать на черную дыру и при отсутствии механизма передачи углового момента внешним областям диска. Поэтому, в данной области вязкость и излучение несущественны и применим метод Грэда-Шафранова.

2.1. Упрощенное рассмотрение особенности на звуковой поверхности.

Рассмотрим прежде всего вопрос о смещении особенности в радиальных гидродинамических уравнениях. Используя оценку (2.0.2) на толщину аккреционного диска и закон сохранения вещества

$$2\pi r^2 H v_r \rho = \dot{M} = \text{const}, \quad (2.1.1)$$

нетрудно получить, что

$$v_r^2 = \frac{\dot{M}^2 G M}{16\pi^2} \cdot \frac{1}{c_s^2 \rho^2 r^5}. \quad (2.1.2)$$

Дифференцируя по r уравнение Бернулли на экваторе аккреционного диска

$$\frac{v_r^2}{2} + \frac{c_s^2}{\Gamma - 1} - \frac{GM}{r} = \text{const} \quad (2.1.3)$$

с учетом формулы (2.1.2) и уравнения состояния

$$P = k_0 e^{(\Gamma-1)s} n^\Gamma, \quad (2.1.4)$$

получаем следующую формулу для логарифмической производной плотности вещества диска на экваторе:

$$\frac{r \, d\rho}{\rho \, dr} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{GM}{rv_r^2}}{-\frac{\Gamma+1}{2} + \frac{c_s^2}{v_r^2}}. \quad (2.1.5)$$

Из последнего выражения следует, что плотность вещества имеет особенность не на звуковой поверхности, где $c_s^2/v_r^2 = 1$, а на поверхности, где $c_s^2/v_r^2 = (\Gamma+1)/2$ (см., например, [40], [41]).

Далее будет показано, что при строгом рассмотрении без использования уравнения (2.0.1), особенность находится именно на звуковой поверхности.

2.2. Строгое рассмотрение.

Следуя работе [42], перейдем теперь к более строгому рассмотрению аккреционного течения, когда вертикальное движение также будет последовательно учтено. Для простоты мы рассмотрим здесь тонкий аккреционный диск без углового момента ($v_\varphi = 0$) при условии, что на некоторой цилиндрической поверхности $r = R_{\text{out}}$ выполняется вертикальный баланс сил (2.0.1) и вещество движется со скоростью, меньшей скорости звука на этой поверхности. Иными словами, мы будем рассматривать случай, когда на поверхности $r = R_{\text{out}}$ выполнено условие

$$v_p \ll c_s \ll v_K. \quad (2.2.1)$$

Легко проверить, что в этом случае энергия $E = v_p^2/2 + c_s^2/(\Gamma - 1) - GM/r$ будет отрицательной.

Будем считать, что зависимость концентрации от расстояния z до экватора определяется формулой:

$$n(r, z) = n_0(r) \exp \left[-\frac{z^2}{2H^2(r)} \right], \quad (2.2.2)$$

где $n_0(r)$ и $H(r) \ll r$ – неизвестные функции, определяющие концентрацию вещества на экваторе и характерную полутолщину диска. Далее, как станет понятно ниже, функцию потока Φ удобно записать в виде

$$\Phi = f(r) \int_0^z \exp \left[-\frac{z^2}{2H^2(r)} k(r) \right] dz = f(r) \frac{H\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \int_0^{\frac{z\sqrt{k}}{H\sqrt{2}}} \exp(-\xi^2) d\xi, \quad (2.2.3)$$

где $f(r)$ и $k(r)$ – неизвестные функции. Соответственно, энтропию s мы определим как

$$s = s_0 \exp \left[-\frac{z^2}{2H^2(r)} \sigma_1(r) f_1^2(r) \right], \quad (2.2.4)$$

где $s_0 = \text{const}$, а $\sigma_1(r)$ – неизвестная функция.

Мы будем рассматривать лишь области вблизи экватора аккреционного диска $z \ll r$. Тогда мы можем разложить основные физические величины в ряд Тейлора по степеням z с неизвестными коэффициентами.

$$n(r, z) = n_0(r) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{z^2}{H^2(r)} + \dots \right], \quad (2.2.5)$$

$$\Phi(r, z) = f(r) \left[z - \frac{k(r)}{6} \frac{z^3}{H^2(r)} + \dots \right], \quad (2.2.6)$$

$$s(r, z) = s_0 \left[1 - \frac{1}{2} \sigma_1(r) f^2(r) \frac{z^2}{H^2(r)} + \dots \right]. \quad (2.2.7)$$

Для аксиально-симметричного течения функция потока $\Phi(r, z)$ опреде-

ляется соотношением [8]

$$\mathbf{v}_p = \frac{\nabla\Phi \times \mathbf{e}_\varphi}{2\pi nr}. \quad (2.2.8)$$

Следовательно,

$$v_r = -v_0(r) \exp\left[-\frac{z^2(k(r)-1)}{2H^2(r)}\right], \quad (2.2.9)$$

$$v_z = v_0(r) \frac{H}{\sqrt{k}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sqrt{k}}{H}\right) \cdot \exp\left[-\frac{z^2(k(r)-1)}{2H^2}\right] \cdot z, \quad (2.2.10)$$

где мы ввели обозначение

$$v_0(r) = \frac{f(r)}{2\pi n_0(r)r}.$$

Далее, темп аккреции \dot{M} должен быть записан как

$$\dot{M} = 2 \int_0^\infty 2\pi r |v_r(r, z)| n(r, z) dz. \quad (2.2.11)$$

Проведя интегрирование и учитывая, что $\Phi(r, 0) = 0$, получим

$$\dot{M} = \frac{fH\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{k}}. \quad (2.2.12)$$

Раскладывая теперь функции $v^2(r, z)$ и $c_s^2(r, z)$ в ряд Тейлора по z вблизи экватора и подставляя разложения в уравнение Бернулли, имеем

$$E = E(r, 0) + \varepsilon(r) f^2(r) z^2, \quad (2.2.13)$$

где введено обозначение

$$\varepsilon(r) = \frac{1}{f^2(r)} \left[\frac{v_0^2}{2} \left(\frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \right)^2 - \frac{v_0^2}{2} \cdot \frac{k(r)-1}{H^2(r)} - c_s^2(r, 0) \frac{1 + \sigma_1(r) f^2(r)}{2H^2(r)} + \frac{GM}{2r^3} \right]. \quad (2.2.14)$$

Величины s и E являются интегралами движения. Следовательно, они должны зависеть от координат r и z только через функцию потока Φ :

$$E(r, z) = E(\Phi(r, z)), \quad s(r, z) = s(\Phi(r, z)). \quad (2.2.15)$$

Из формул (2.2.4), (2.2.13) и (2.2.15) следует, что вблизи экватора диска

$$s(r, z) \approx s|_{\Phi=0} + \left. \frac{\partial^2 s}{\partial \Phi^2} \right|_{\Phi=0} \cdot \Phi^2 \approx s_0 + Af^2(r)z^2, \quad (2.2.16)$$

$$E(r, z) \approx E|_{\Phi=0} + \left. \frac{\partial^2 E}{\partial \Phi^2} \right|_{\Phi=0} \cdot \Phi^2 \approx E_0 + Bf^2(r)z^2, \quad (2.2.17)$$

где введены обозначения $s_0 = s(r, 0) = \text{const}$ и $E_0 = E(r, 0) = \text{const}$. Наконец, сравнивая формулы (2.2.4) и (2.2.16), а также (2.2.13) и (2.2.17), получаем

$$A = -\frac{s_0 \sigma_1(r)}{2H^2(r)} = \text{const}, \quad (2.2.18)$$

$$B = \varepsilon(r) = \text{const}. \quad (2.2.19)$$

Таким образом, величины A и B и являются основными параметрами, задающими течение.

Рассмотрим теперь уравнение Бернулли при $z = 0$:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{f(r)}{2\pi n_0(r)r} \right]^2 + \frac{c_s^2(r, 0)}{\Gamma - 1} - \frac{GM}{r} = E_0. \quad (2.2.20)$$

Для политропного уравнения состояния (2.1.4) скорость звука будет иметь вид

$$c_s^2(r, 0) = \frac{1}{m_p} \Gamma k_0 e^{(\Gamma-1)s_0} (n_0)^{(\Gamma-1)} = \Gamma \kappa (n_0)^{(\Gamma-1)}, \quad (2.2.21)$$

где $\kappa = k_0 e^{(\Gamma-1)s_0} / m_p$. Тогда уравнение Бернулли на экваторе аккреционного диска запишется следующим образом

$$\frac{1}{2} \left[\frac{f(r)}{2\pi n_0(r)r} \right]^2 + \frac{\Gamma \kappa (n_0)^{(\Gamma-1)}}{\Gamma - 1} - \frac{GM}{r} = E_0. \quad (2.2.22)$$

Дифференцируя последнее уравнение по r , находим формулу для логарифмической производной концентрации:

$$\eta = \frac{r}{n_0} \frac{dn_0}{dr} = \frac{-\frac{r}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} + 1 - \frac{GM}{rv_0^2}}{-1 + \frac{c_s^2(r, 0)}{v_0^2}}. \quad (2.2.23)$$

Из последнего выражения видно, что особенность, как и должно быть, имеет место на звуковой поверхности. Для сферически-симметричного течения $f \propto r^{-1}$ мы возвращаемся к стандартному выражению

$$\eta = \frac{r}{n_0} \frac{dn_0}{dr} = \frac{2 - \frac{GM}{rv_0^2}}{-1 + \frac{c_s^2(r, 0)}{v_0^2}}. \quad (2.2.24)$$

Наконец, запишем уравнение Грэда-Шафранова, т.е. уравнение баланса сил в направлении, перпендикулярном линиям тока

$$-r^2 \nabla_k \left(\frac{1}{r^2 n} \nabla^k \Phi \right) + 4\pi^2 r^2 n \frac{dE}{d\Phi} - 4\pi^2 r^2 n \frac{T}{m_p} \frac{ds}{d\Phi} = 0. \quad (2.2.25)$$

Вычисляя соответствующие производные и подставляя выражение T через n_0 , получаем:

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \right) \frac{1}{f} \frac{df}{dr} - \frac{k(r) - 1}{H^2(r)} = 8\pi^2 r^2 n_0^2 (B - A\kappa \cdot n_0^{\Gamma-1}). \quad (2.2.26)$$

Таким образом, мы получили систему из пяти уравнений (2.2.12), (2.2.22), (2.2.18), (2.2.19) и (2.2.26) на пять неизвестных функций $n_0(r)$, $f(r)$, $H(r)$,

$k(r)$ и $\sigma_1(r)$

$$\frac{fH\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{k}} = \dot{M}, \quad (2.2.27)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{f(r)}{2\pi n_0(r)r} \right)^2 + \frac{\Gamma\kappa(n_0)^{(\Gamma-1)}}{\Gamma-1} - \frac{GM}{r} = E_0, \quad (2.2.28)$$

$$A = -\frac{s_0\sigma_1(r)}{2H^2(r)}, \quad (2.2.29)$$

$$B = \varepsilon(r), \quad (2.2.30)$$

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \right) \frac{1}{f} \frac{df}{dr} - \frac{k(r)-1}{H^2(r)} = 8\pi^2 r^2 n_0^2 (B - A\kappa \cdot n_0^{\Gamma-1}) \quad (2.31)$$

2.3. Решение системы уравнений

Для получения решения удобно выразить функцию $f(r)$ через функцию $n_0(r)$ из уравнения Бернулли

$$f^2(r) = 8\pi^2 r^2 \cdot n_0^2 \left(E_0 + \frac{GM}{r} - \frac{\Gamma\kappa n_0^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} \right). \quad (2.3.1)$$

Продифференцируя последнее выражение по r , получим

$$\frac{df(r)}{dr} = \frac{4\pi^2}{f} \cdot \left[A_1(r, n_0) + A_2(r, n_0) \frac{dn_0}{dr} \right], \quad (2.3.2)$$

где

$$A_1 = 2E_0 r n_0^2 + GM n_0^2 - 2r \frac{\Gamma\kappa(n_0)^{\Gamma+1}}{\Gamma-1}; \quad A_2 = 2E_0 r^2 n_0 + 2GM \cdot r n_0 - \frac{\Gamma\kappa(\Gamma+1)r^2(n_0)^\Gamma}{\Gamma-1}. \quad (2.3.3)$$

Дифференцируя второй раз, находим для второй производной $d^2 f(r)/dr^2$

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} = \frac{(4\pi^2)^2}{f^3} \cdot \left[C_1(r, n_0) + C_2(r, n_0) \frac{dn_0}{dr} + C_3(r, n_0) \left(\frac{dn_0}{dr} \right)^2 + C_4(r, n_0) \frac{d^2 n_0}{dr^2} \right], \quad (2.3.4)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= v_0^2 n_0^2 r^2 B_1 - A_1^2; & C_2 &= v_0^2 n_0^2 r^2 B_2 - 2A_1 A_2; \\ C_3 &= v_0^2 n_0^2 r^2 B_3 - A_2^2; & C_4 &= v_0^2 n_0^2 r^2 A_2; \end{aligned}$$

Выражая теперь $\sigma_1(r)$ из уравнения (2.2.18) и $k(r)$ из закона сохранения вещества (2.2.12), можно переписать уравнение (2.2.19) в следующем виде

$$H^2(r) = \frac{c_s^2 - v_0^2}{\mathcal{D}}, \quad (2.3.5)$$

где

$$\mathcal{D} = \frac{1}{v_0^2} \cdot \left[\frac{\tilde{A}_1}{r} + \frac{\tilde{A}_2}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \right]^2 - \kappa_H \cdot r^2 n_0^2 v_0^4 - 2(2\pi r n_0 v_0)^2 (B - c_s^2 \sigma_2) + \frac{GM}{r^3}, \quad (2.3.6)$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{A_1}{r n_0^2}; \quad \tilde{A}_2 = \frac{A_1}{r^2 n_0}. \quad (2.3.7)$$

Условие регулярности $H(r)$ в звуковой точке $r = r_*$ требует обращения в ноль знаменателя выражения (2.3.5) в этой точке

$$\mathcal{D}(r_*) = 0. \quad (2.3.8)$$

Наконец, подставляя производные $df(r)/dr$, $d^2f(r)/dr^2$ и $k(r)$ в уравнение Грэда-Шафранова (2.2.26), получаем окончательно

$$\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2 \frac{r}{n_0} \frac{dn_0}{dr} + \tilde{D}_3 \frac{r^2}{n_0^2} \left(\frac{dn_0}{dr} \right)^2 + \tilde{D}_4 \frac{r^2}{n_0} \frac{d^2 n_0}{dr^2} = 0, \quad (2.3.9)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_1 &= 4 \left(E_0 + \frac{GM}{r} - \frac{\Gamma \kappa(n_0)^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} \right) \left[-\frac{GM}{2r} - \left(E_0 + \frac{GM}{r} - \frac{\Gamma \kappa(n_0)^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\left(2 - \frac{3\sqrt{2}\dot{M}}{8\pi r n_0 H v_0} \right) \frac{r^2}{4H^2} + 8\pi^2 r^4 n_0^2 (B - A\kappa \cdot n_0^{\Gamma-1}) \right) \right] - \\
&\quad - 4 \left(E_0 + \frac{GM}{2r} - \frac{\Gamma \kappa(n_0)^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} \right)^2, \\
\tilde{D}_2 &= 2 \left(E_0 + \frac{GM}{r} - \frac{\Gamma \kappa(n_0)^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} \right) \left(4E_0 + \frac{GM}{r} - \frac{\Gamma \kappa(n_0)^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} (3\Gamma + 1) \right) - \\
&\quad - 8 \cdot \left(E_0 + \frac{GM}{2r} - \frac{\Gamma \kappa(n_0)^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} \right) \cdot \left(E_0 + \frac{GM}{r} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma \kappa(\Gamma + 1)(n_0)^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} \right), \\
\tilde{D}_3 &= -2 \left(E_0 + \frac{GM}{r} - \frac{\Gamma \kappa(n_0)^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} \right) \Gamma(\Gamma + 1) \kappa n_0^{\Gamma-1} - \\
&\quad - 4 \left(E_0 + \frac{GM}{r} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma \kappa(\Gamma + 1)(n_0)^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} \right)^2, \\
\tilde{D}_4 &= 4 \left(E_0 + \frac{GM}{r} - \frac{\Gamma \kappa(n_0)^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} \right) \left(E_0 + \frac{GM}{r} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma \kappa(\Gamma + 1)(n_0)^{\Gamma-1}}{\Gamma-1} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом мы свели систему уравнений (2.2.12), (2.2.22), (2.2.18), (2.2.19) и (2.2.26) к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (2.3.9) на концентрацию вещества аккреционного диска на экваторе. Следовательно, для получения решения необходимо задать на внешней границе течения $r = R_{\text{out}}$ значения n_0 и dn_0/dr . Наибольший интерес для нас представляют решения, соответствующие трансзвуковым течениям, когда в звуковой точке знаменатель формулы (2.2.23) обращается в ноль. Это накладывает дополнительное граничное условие на физические величины в звуковой точке (в случае сферически симметричной аккреции Бонди оно полностью определяло все течение).

Для вычисления логарифмической производной концентрации η в зву-

ковой точке можно воспользоваться правилом Лопиталья раскрытия неопределенности вида $0/0$, т.е. разложить числитель и знаменатель выражения (2.2.23) в ряд Тейлора. Другой способ состоит в следующем. Известно (см., например, [8]), что в звуковой точке коэффициент при старшей производной в уравнении Грэда-Шафранова обращается в ноль. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что этим свойством обладает и уравнение (2.3.9), т.е. $\tilde{D}_4(r_*, n_{0*}, H_*) = 0$. Здесь и далее для обозначения величин, взятых в звуковой точке, мы будем использовать индекс "*".

Таким образом, уравнение (2.3.9), записанное в звуковой точке, имеет вид

$$\tilde{D}_{1*} + \tilde{D}_{2*}\eta_* + \tilde{D}_{3*}\eta_*^2 = 0. \quad (2.3.10)$$

Но коэффициенты \tilde{D}_{i*} зависят от H_* , выражение для которого также содержит неопределенность вида $0/0$ в звуковой точке. Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталья, находим:

$$\frac{H^2(r_*)}{r_*^2} = \frac{(\Gamma + 1)\eta_* + 2\zeta_{1*} + 2}{K_2\eta_*^2 + K_1\eta_* + K_0}, \quad (2.3.11)$$

где

$$\begin{aligned} K_2 &= -2\frac{\tilde{A}_{1*}^2}{c_*^2}(\Gamma + 1) \\ K_1 &= 4\frac{\tilde{A}_{1*}^2}{c_*^4} - 4\frac{\tilde{A}_{1*}(\zeta_{1*} + 2)}{c_*^2} - 2(2\pi)^2 r_*^4 n_{0*}^2 (2(B - c_*^2\sigma_2) - c_*^2\sigma_2(\Gamma - 1)) + 2\frac{GM}{r_*c_*^2} \\ K_0 &= 2\frac{\tilde{A}_{1*}^2}{c_*^4} \left(2\zeta_{1*} + 2 - \frac{c_*^2}{\tilde{A}_{1*}}(\zeta_{1*} + 1) \right) + 2\kappa_H r_*^4 n_{0*}^2 c_*^2 (\zeta_{1*} - 1) - \\ &\quad 8(2\pi)^2 r_*^4 n_{0*}^2 (B - c_*^2\sigma_2) + \frac{GM}{r_*c_*^2} (2\zeta_{1*} + 1). \end{aligned}$$

Подставляя выражение для H_* в (2.3.10), получим кубическое уравнение на

η_* .

$$(\Gamma + 1)^2 \eta_*^3 + L_2 \eta_*^2 + L_1 \eta_* + L_0 = 0, \quad (2.3.12)$$

где

$$L_2 = (5\zeta_{1*} + 6)(\Gamma + 1) - K_2 \quad (2.3.13)$$

$$L_1 = 2(\zeta_{1*} + 1)(3\zeta_{1*} + 4) + \left[1 + \zeta_{1*} + \zeta_{1*}^2 + \tilde{C}(\zeta_{1*})\right] (\Gamma + 1) - K_1 \quad (2.3.14)$$

$$L_0 = \left[1 + \zeta_{1*} + \zeta_{1*}^2 + \tilde{C}(\zeta_{1*})\right] 2(\zeta_{1*} + 1) - K_0 \quad (2.3.15)$$

$$\zeta_1(r) = -\frac{r}{f(r)} \frac{df}{dr}; \quad \zeta_{1*} = \frac{GM}{r_* c_*^2} - 1. \quad (2.3.16)$$

Причем, как выяснилось из анализа численного решения, только один корень этого уравнения позволяет построить глобальное решение, соответствующее трансзвуковому течению. Заметим, что первый способ вычисления η_* , упомянутый в начале этого параграфа, также приводит к кубическому уравнению на η_* , полностью эквивалентному уравнению (2.3.10).

Мы проинтегрировали уравнение (2.3.9) численно, используя схему Дормана-Принса 8(7) [43] из семейства явных методов Рунге-Кутты, обладающую 8 порядком аппроксимации. Было найдено трансзвуковое решение при отрицательных значениях энергии связи. При этом использовались следующие значения параметров задачи:

$$\Gamma = 5/3; \quad \kappa = 1.0; \quad E_0 = -0.001; \quad s_0 = 0.1; \quad (2.3.17)$$

$$\dot{M}/M = 0.001; \quad A = 10000.0; \quad B = -3084.2. \quad (2.3.18)$$

Параметры выписаны в системе единиц измерения $M = 1$, $G = 1$, $c = 1$. В этой системе единиц $r_g = GM/c^2 = 1$.

На рис.2.1 для этого решения приведен график зависимостей скорости вещества и скорости звука на экваторе диска от расстояния до гравитаци-

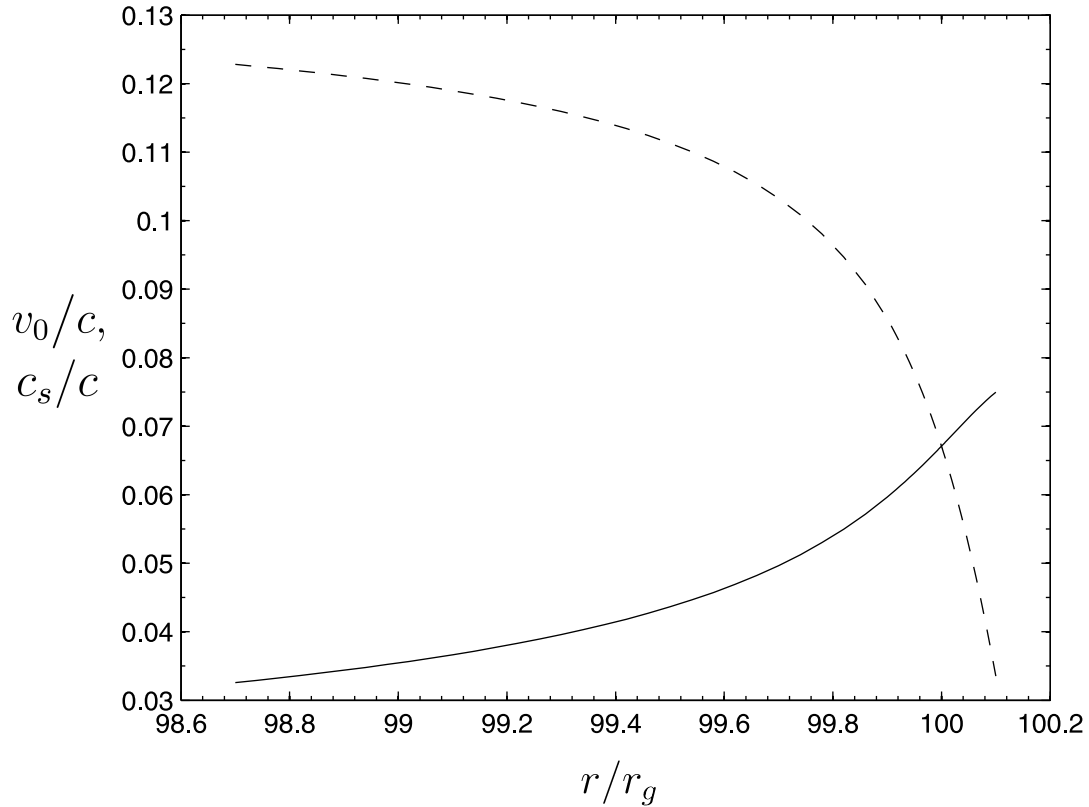


Рис. 2.1. График зависимости скорости вещества v_0 (штриховая линия) и скорости звука c_s (сплошная линия) на экваторе диска от расстояния до гравитационного центра.

онного центра. Из графика видно, что звуковая точка находится вблизи от внешней границы, в нашем примере — на расстоянии $r = 100r_g$ от гравитационного центра. Положение звуковой точки определяет значения скорости вещества и концентрации в этой точке, а также связь между параметрами A и B через условие (2.3.8).

Зависимости $f(r)$, $H(r)$ и $n_0(r)$ показаны на рис. 2-4. Величина $f(r)$ является главным членом первой производной по z от функции потока и, следовательно, определяет искривление линий тока $\Phi = \text{const}$. Из рис. 2.2 видно, что $f(r)$ имеет максимум в звуковой точке, что означает наличие сопла. Из

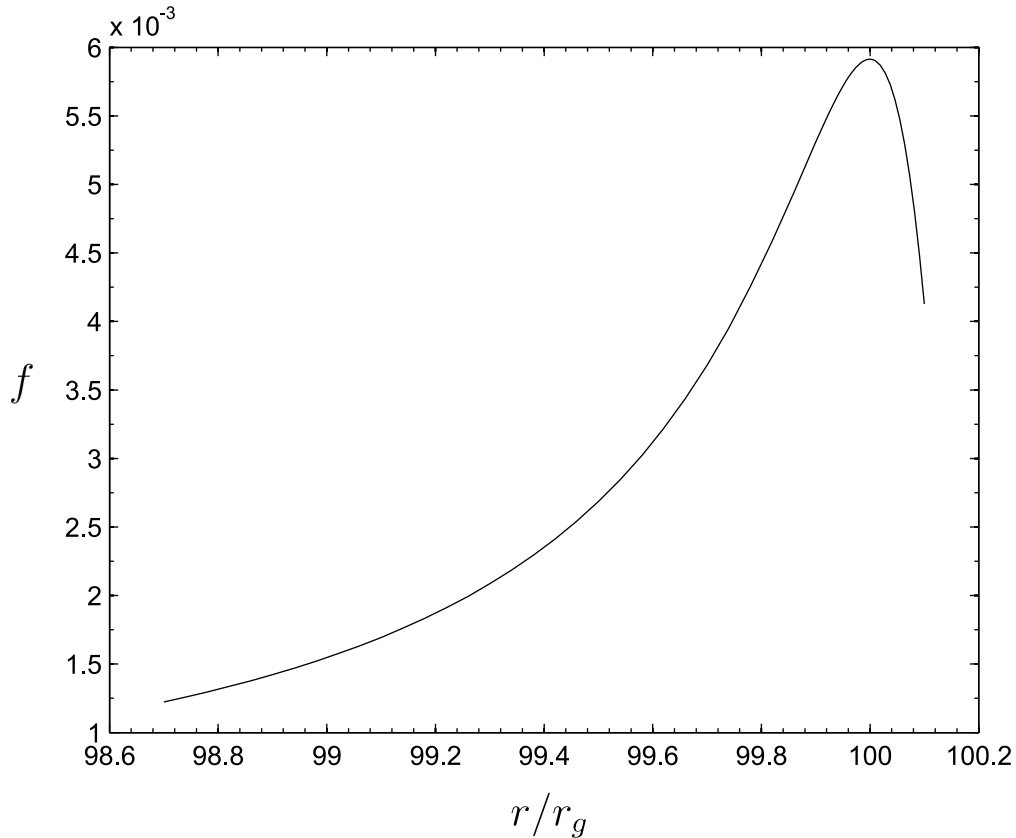


Рис. 2.2. График зависимости функции f от расстояния до гравитационного центра.

графика зависимости $H(r)$ (рис. 2.3) видно, что характерная толщина диска мало меняется в дозвуковой области, что соответствует приближенному равенству z -компоненты силы гравитации и силы газодинамического давления в диске. После прохождения через сопло в звуковой точке диск начинает расширяться.

Оценим в баллистическом приближении, на каком расстоянии от сопла z -компонента силы гравитации остановит расширение диска. Предполагая, что скорость вещества порядка скорости звука в звуковой точке $v \sim c_*$ и направлена под углом $\pi/4$ к экватору диска, из z -компоненты уравнения

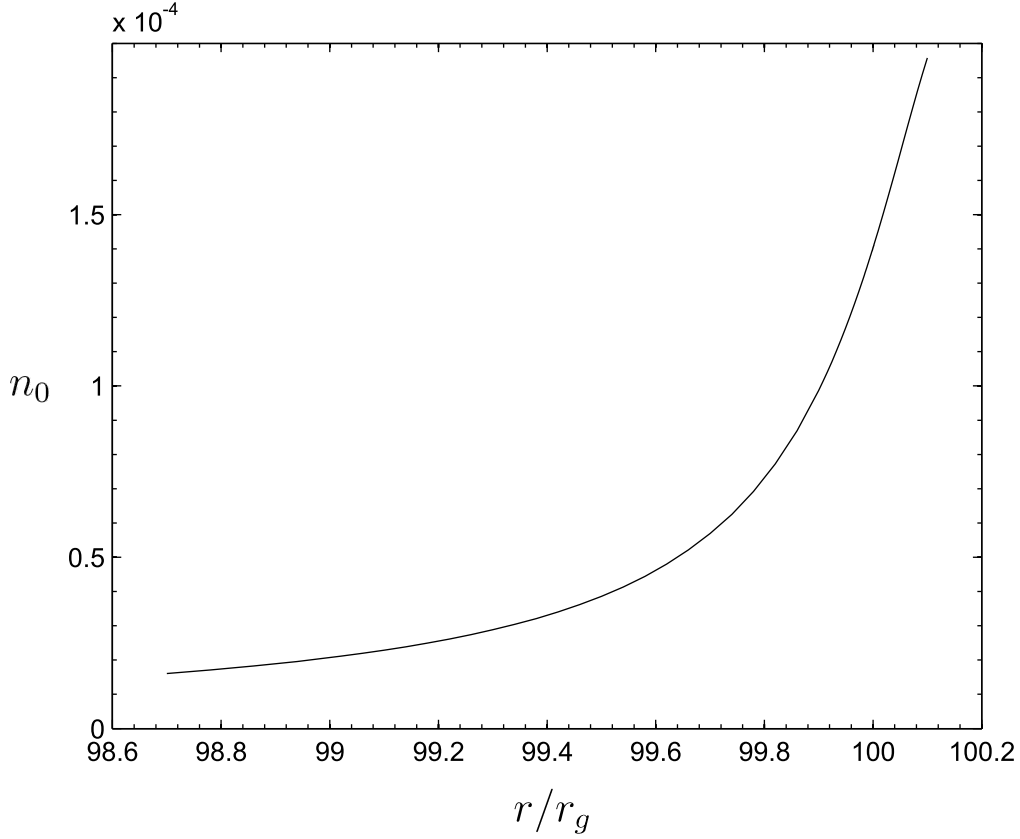


Рис. 2.3. График зависимости концентрации вещества на экваторе диска n_0 от расстояния до гравитационного центра.

движения частицы в гравитационном поле

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{GM}{r_*^3}z$$

находим характерное время $T \sqrt{\frac{r_*^3}{GM}}$. Тогда сжатие начнется на расстоянии

$$L/r_* \sim c_*T = \frac{c_*}{c} \sqrt{\frac{r_*}{r_g}}. \quad (2.3.19)$$

Метод разложения в ряд Тейлора вблизи экватора диска, использовавшийся при получении системы уравнений, становится неприменимым, когда H по порядку величины приближается к r . В связи с этим на графиках изображена область вблизи звуковой точки, хотя формально решение можно

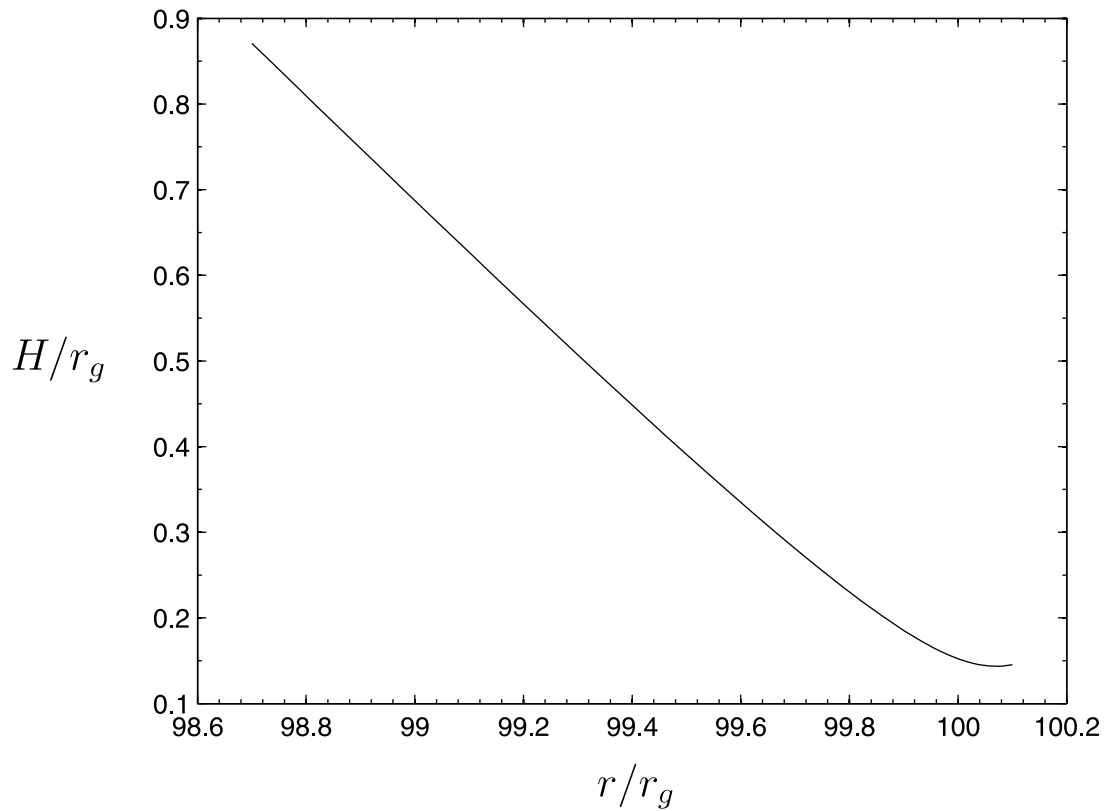


Рис. 2.4. График зависимости характерной полутолщины диска H от расстояния до гравитационного центра.

продлить ближе к гравитационному центру. Для рассматриваемого решения оценка (2.3.19) дает $L/r_* \sim 1$. Следовательно, сужение диска начнется в области, лежащей за границами применимости используемой системы уравнений.

Глава 3

К природе аномального момента сил, действующего на вращающийся намагниченный шар в вакууме

Простейшей моделью, описывающей магнитосферу нейтронных звезд, является вакуумная модель [44, 45]. Согласно этой модели, нейтронная звезда представляет собой хорошо проводящий намагниченный шар, вращающийся в вакууме. При этом основное энергосодержание происходит за счет магнитодипольного излучения, которое приводит к замедлению вращения и к уменьшению угла χ между осью вращения и магнитным моментом \mathbf{m} [46].

Несмотря на то, что вакуумная модель известна довольно давно, по некоторым вопросам все еще не достигнута полная ясность. В частности, на данный момент нет единого мнения о т.н. аномальном моменте сил, т.е. о моменте, действующем в направлении, перпендикулярном плоскости $(\mathbf{m}\boldsymbol{\Omega})$ и приводящем к прецессии оси вращения. Такое название связано с тем, что его величина

$$K = \xi \frac{\mathbf{m}^2}{R^3} \left(\frac{\Omega R}{c} \right)^2 \sin \chi \cos \chi, \quad (3.0.1)$$

где R — радиус шара, а ξ — численный коэффициент порядка единицы, оказывается в $(\Omega R/c)^{-1}$ раз больше, чем тормозящий момент. При этом разные авторы дают разные значения величины ξ , а именно $\xi = 1$ [46, 47] и $\xi = 3/5$ [48] (см. также работы [49, 50], в которых, однако, заведомо не учитывался вклад электрического поля). С другой стороны, согласно [51, 52] аномальный момент вообще равен нулю ($\xi = 0$), и поэтому подобная прецессия

должна отсутствовать. Далее, следуя работе [53], рассмотрим метод вычисления момента сил, основанный на построении самосогласованной картины взаимодействия электромагнитных полей с зарядами и токами, текущими во вращающемся намагниченном шаре.

3.1. Метод вычисления момента сил

Как было отмечено, для определения аномального момента необходимо определить объемные и поверхностные токи и заряды, связанные с вращением шара. Ниже мы будем считать шар идеально проводящим, так что в нем выполнено условие вмороженности

$$\mathbf{E} + \beta_{\mathbf{R}} \times \mathbf{B} = 0, \quad (3.1.1)$$

где здесь и далее $\beta_{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}/c$. В результате, силы, действующие на шар, могут быть записаны в виде

$$d\mathbf{F} = \rho_e \mathbf{E} dV + [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]/c dV + \sigma_e \mathbf{E} dS + [\mathbf{I}_S \times \mathbf{B}]/c dS, \quad (3.1.2)$$

где первые два слагаемых соответствуют объемному, а вторые — поверхностному вкладу. Однако если предположить, что в объеме шара существуют лишь токи коротации $\mathbf{j} = c\rho_e\beta_{\mathbf{R}}$, то, как легко проверить, объемная часть силы (3.1.2) будет равна нулю.

На поверхности шара для электрического и магнитного полей выполняются следующие граничные условия

$$\{E_r\} = 4\pi\sigma_e, \quad [\mathbf{n} \times \{\mathbf{E}\}] = 0, \quad (3.1.3)$$

$$\{B_r\} = 0, \quad [\mathbf{n} \times \{\mathbf{B}\}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{I}_S, \quad (3.1.4)$$

где фигурными скобками обозначены скачки поля на поверхности шара.

Тогда, учитывая что на поверхности шара $\mathbf{r} = R \cdot \mathbf{n}$ и $dS = R^2 d\omega$, где $d\omega$ — элемент телесного угла, для полного момента сил, действующих на поверхность шара получим

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \frac{R^3}{4\pi} \int \left([\mathbf{n} \times \{\mathbf{B}\}] (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] (\{\mathbf{E}\} \cdot \mathbf{n}) \right) d\omega \quad (3.1.5)$$

Таким образом, задача о нахождении момента сил сводится к задаче нахождения электромагнитного поля внутри и вне шара.

Мы будем решать задачу методом разложения по параметру $(\Omega R/c)$, причем, как видно из соотношения (3.1.5), нам достаточно ограничиться лишь членами первого порядка для электрического и второго порядка для магнитного поля.

$$\mathbf{K}_y = \frac{R^3}{4\pi} \int \left(\left[\mathbf{n} \times \{\mathbf{B}\}^{(0)} \right]_y B_r^{(2)} + \left[\mathbf{n} \times \{\mathbf{B}\}^{(2)} \right]_y B_r^{(0)} + \left[\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)} \right]_y \left\{ E_r^{(1)} \right\} \right) d\omega \quad (3.1.6)$$

Далее мы воспользуемся известным свойством квазистационарных конфигураций, когда для полей, зависящих от угла φ и времени t лишь в комбинации $\varphi - \Omega t$ временные производные можно заменить на пространственные по формулам (см. [8])

$$\partial_t A = -\Omega \cdot \partial_\phi A \quad (3.1.7)$$

$$\partial_t \mathbf{E} = -(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \nabla) \mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E}. \quad (3.1.8)$$

Последнее соотношение можно переписать с использованием вектора β_R в следующем виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \nabla \times [\beta_R \times \mathbf{E}] - (\nabla \cdot \mathbf{E}) \beta_R, \quad (3.1.9)$$

В результате уравнения Максвелла могут быть представлены в виде [8]

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \beta_R \times \mathbf{B}) = 0, \quad (3.1.10)$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} - \beta_R \times \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - 4\pi \rho_e \beta_R. \quad (3.1.11)$$

Поскольку же как внутри, так и вне шара правая часть второго уравнения оказывается равной нулю, получаем в итоге

$$\mathbf{E} + \beta_R \times \mathbf{B} = -\nabla\psi, \quad (3.1.12)$$

$$\mathbf{B} - \beta_R \times \mathbf{E} = \nabla h, \quad (3.1.13)$$

где ψ и h суть две скалярные функции, которые следует находить из условия непрерывности соответствующих компонент электрического (3.1.3) и магнитного (3.1.4) полей, и из условий $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ вне шара.

Таким образом, зная магнитное поле в нулевом порядке по параметру $(\Omega R/c)$, можно, используя уравнение (3.1.12), найти электрическое поле, соответствующее первому порядку по параметру $(\Omega R/c)$. Как хорошо известно, вне шара оно складывается из радиационного поля излучения магнитного диполя и квадрупольного поля зарядов, наводимых в шаре. В свою очередь, уравнение (3.1.13) позволяет однозначно найти магнитное поле во втором порядке по параметру $(\Omega R/c)$. Оно складывается из волнового поля как магнитодипольного, так и квадрупольного излучения.

Подчеркнем, что предлагаемый здесь метод неприменим для расчета момента, ответственного за магнитодипольное излучение, поскольку он не может различить запаздывающие и опережающие потенциалы [8]. Однако эта неопределенность появляется лишь на следующем шаге разложения, поскольку, как мы видели, аномальный момент (3.1.5) в $(\Omega R/c)^{-1}$ больше тормозяще-

го момента, направленного против оси вращения. Поэтому описанная выше процедура оказывается адекватной поставленной задаче.

3.2. Результаты

Прежде всего, рассмотрим случай, когда в нулевом порядке по параметру $(\Omega R/c)$ магнитное поле как внутри, так и вне шара является дипольным

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{m}r^2}{r^5}. \quad (3.2.1)$$

В этом случае поверхностные токи нулевого порядка отсутствуют, и поэтому для вычисления аномального момента требуется определение электрического поля и токов второго порядка.

Разложим магнитное поле на две составляющих

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\parallel} + \mathbf{B}^{\perp},$$

где \mathbf{B}^{\parallel} направлено вдоль $\boldsymbol{\Omega}$, а \mathbf{B}^{\perp} перпендикулярно $\boldsymbol{\Omega}$. Тогда компоненты магнитного поля нулевого порядка как внутри, так и вне шара будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_r^{\perp} &= \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \sin \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\ \mathbf{B}_{\theta}^{\perp} &= -\frac{\mathbf{m}}{r^3} \cos \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\ \mathbf{B}_{\phi}^{\perp} &= \frac{\mathbf{m}}{r^3} \sin(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_r^{\parallel} &= \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \cos \theta \cdot \cos \chi \\
\mathbf{B}_\theta^{\parallel} &= \frac{\mathbf{m}}{r^3} \sin \theta \cdot \cos \chi \\
\mathbf{B}_\phi^{\parallel} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Электрическое поле внутри шара находится непосредственно из условия вмерженности (3.1.1), и его компоненты имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_r^{\perp(\text{In})} &= -\frac{\Omega r}{c} \frac{\mathbf{m}}{r^3} \sin \theta \cos \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\
\mathbf{E}_\theta^{\perp(\text{In})} &= -\frac{\Omega r}{c} \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \sin^2 \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\
\mathbf{E}_\phi^{\perp(\text{In})} &= 0
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_r^{\parallel(\text{In})} &= \frac{\Omega r}{c} \frac{\mathbf{m}}{r^3} \sin^2 \theta \cdot \cos \chi \\
\mathbf{E}_\theta^{\parallel(\text{In})} &= -\frac{\Omega r}{c} \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \sin \theta \cos \theta \cdot \cos \chi \\
\mathbf{E}_\phi^{\parallel(\text{In})} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Заметим, что дивергенция электрического поля не равна нулю, что соответствует ненулевой плотности заряда внутри шара. Поэтому, чтобы получить электрическое поле вне шара, данные выражения должны быть скорректированы с помощью функции ψ (3.1.12) так, чтобы дивергенция стала равной нулю. Нетрудно проверить, что этому условию удовлетворяет функции

$$\begin{aligned}
\psi_0^{\perp} &= \frac{\Omega}{c} \frac{\mathbf{m}}{r} \sin \theta \cos \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi, \\
\psi_0^{\parallel} &= -\frac{\Omega}{2c} \frac{\mathbf{m}}{r} (\cos 2\theta - 1) \cdot \cos \chi,
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

которым, согласно уравнению (3.1.12), соответствуют следующее электрическое поле ортогональной компоненты

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_r^{\perp(\text{Out})} &= 0 \\
\mathbf{E}_\theta^{\perp(\text{Out})} &= -\frac{\Omega r}{c} \frac{\mathbf{m}}{r^3} \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\
\mathbf{E}_\phi^{\perp(\text{Out})} &= \frac{\Omega r}{c} \frac{\mathbf{m}}{r^3} \cos \theta \sin(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Поле же параллельной компоненты обращается в ноль, что соответствует выполнению предположения о равенстве нулю полного заряда, то есть об электрической нейтральности шара.

Следует отметить, что условие равенства нулю дивергенции электрического поля вне шара не позволяет однозначно определить функции ψ , поскольку при добавлении к ним линейной комбинации решений уравнения Лапласа это условие останется выполненным, как и уравнение Максвелла в форме (3.1.10). Однако, условие непрерывности тангенциальных компонент электрического поля на поверхности шара делает задачу определения ψ однозначной. Из всего ряда решений уравнения Лапласа

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^m r^{-l-1} Y_l^m(\theta, \phi) \tag{3.2.8}$$

останутся только те, которые содержат сферические функции, присутствующие в полях внутри шара (3.2.4),(3.2.5).

$$\begin{aligned}
\psi_1^\perp &= A^\perp \frac{\Omega \mathbf{m}}{cR} \left(\frac{R}{r}\right)^3 Y_2^1 \sin \chi; & Y_2^1 &= \sin \theta \cos \theta \cos(\phi - \Omega t) \\
\psi_1^\parallel &= A^\parallel \frac{\Omega \mathbf{m}}{cR} \left(\frac{R}{r}\right)^3 Y_2^0 \cos \chi; & Y_2^0 &= 3 \cos^2 \theta - 1.
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Таким образом, из условия непрерывности тангенциальных компонент электрического поля на поверхности шара находим $A^\perp = 1$, $A^\parallel = 1/3$. Электрические поля, соответствующие функциям ψ_1^\perp и ψ_1^\parallel , являются хорошо известными полями квадрупольного излучения

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_r^{\perp Q} &= -\frac{\Omega R^2}{c} \frac{3\mathbf{m}}{r^4} \sin\theta \cos\theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin\chi \\ \mathbf{E}_\theta^{\perp Q} &= \frac{\Omega R^2}{c} \frac{\mathbf{m}}{r^4} \cos 2\theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin\chi \\ \mathbf{E}_\phi^{\perp Q} &= -\frac{\Omega R^2}{c} \frac{\mathbf{m}}{r^4} \cos\theta \sin(\phi - \Omega t) \cdot \sin\chi\end{aligned}\quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_r^{\parallel Q} &= -\frac{\Omega R^2}{c} \frac{\mathbf{m}}{r^4} (3 \cos^2\theta - 1) \cdot \cos\chi \\ \mathbf{E}_\theta^{\parallel Q} &= -\frac{\Omega R^2}{c} \frac{2\mathbf{m}}{r^4} \sin\theta \cos\theta \cdot \cos\chi \\ \mathbf{E}_\phi^{\parallel Q} &= 0.\end{aligned}\quad (3.2.11)$$

Таким образом, мы полностью определили электрические поля первого порядка как внутри, так и вне шара. При этом поверхностный заряд имеет вид

$$\sigma_e = -\frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{R^3} \left(\frac{\Omega R}{c} \right) (\cos^2\theta \cos\chi + \sin\theta \cos\theta \cos(\phi - \Omega t) \sin\chi). \quad (3.2.12)$$

Магнитное поле второго порядка как внутри, так и вне шара, находится по электрическому полю первого порядка из уравнения (3.1.13), причем для выполнения условия $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ необходимо подобрать соответствующие функции h .

$$\begin{aligned}h_0^\perp &= \frac{\Omega^2 \mathbf{m}}{c^2} \frac{1}{2} \sin\theta (2 - \cos^2\theta) \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin\chi \\ h_0^\parallel &= \frac{\Omega^2 \mathbf{m}}{c^2} \frac{1}{2} \cos\theta (3 - \cos^2\theta) \cdot \cos\chi\end{aligned}\quad (3.2.13)$$

В результате для магнитных полей второго порядка внутри шара имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_r^{\perp(\text{In}2)} &= \left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \sin^3 \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\
\mathbf{B}_\theta^{\perp(\text{In}2)} &= \left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \frac{\mathbf{m}}{2r^3} \cos \theta (\sin^2 \theta + 1) \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\
\mathbf{B}_\phi^{\perp(\text{In}2)} &= \left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \frac{\mathbf{m}}{2r^3} (\cos^2 \theta - 2) \sin(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_r^{\parallel(\text{In}2)} &= \left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \sin^2 \theta \cos \theta \cdot \cos \chi \\
\mathbf{B}_\theta^{\parallel(\text{In}2)} &= -\left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \frac{\mathbf{m}}{2r^3} \sin^3 \theta \cdot \cos \chi \\
\mathbf{B}_\phi^{\parallel(\text{In}2)} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Применяя ту же процедуру с электрическими полями (3.2.7), (3.2.10) для ортогональной компоненты магнитных полей второго порядка вне шара получаем

$$\begin{aligned}
h^{\perp(\text{Out}2)} &= \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 \frac{\mathbf{m}}{2} \sin \theta \cos(\phi - \Omega t) \\
\mathbf{B}_r^{\perp(\text{Out}2)} &= \left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \frac{\mathbf{m}}{r^3} \sin \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\
\mathbf{B}_\theta^{\perp(\text{Out}2)} &= \left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \frac{\mathbf{m}}{2r^3} \cos \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\
\mathbf{B}_\phi^{\perp(\text{Out}2)} &= -\left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \frac{\mathbf{m}}{2r^3} \sin(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

$$\begin{aligned}
h^{\perp Q} &= - \left(\frac{\Omega}{c} \right)^2 \frac{\mathbf{m}}{r^2} \sin \theta \cos 2\theta \cos(\phi - \Omega t) \\
\mathbf{B}_r^{\perp Q} &= 0 \\
\mathbf{B}_\theta^{\perp Q} &= - \left(\frac{\Omega R}{c} \right)^2 \frac{\mathbf{m}}{2r^3} \cos \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\
\mathbf{B}_\phi^{\perp Q} &= \left(\frac{\Omega R}{c} \right)^2 \frac{\mathbf{m}}{2r^3} \cos 2\theta \sin(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \quad (3.2.17)
\end{aligned}$$

Аналогично для параллельной компоненты получаем, что функции

$$\begin{aligned}
h^{\parallel(\text{Out}2)} &= \left(\frac{\Omega}{c} \right)^2 \frac{\mathbf{m}}{2} \cos \theta \cos \chi \\
h^{\parallel Q} &= \left(\frac{\Omega}{c} \right)^2 \frac{\mathbf{m}}{r^2} \cos \theta \sin^2 \theta \cos \chi \quad (3.2.18)
\end{aligned}$$

дают нулевые магнитные поля второго порядка. Это связано с тем, что электрические поля параллельной компоненты не зависят от времени, поэтому уравнение (3.1.13), основанное на уравнении Максвелла, не дает вихревых магнитных полей.

Для обеспечения непрерывности радиальной компоненты магнитного поля на поверхности шара необходимо воспользоваться тем, что магнитные поля второго порядка определены с точностью до градиента функции h , являющейся решением уравнения Лапласа.

$$\begin{aligned}
h^{(\text{In})} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^m r^l Y_l^m(\theta, \phi) \\
h^{(\text{Out})} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^m r^{-l-1} Y_l^m(\theta, \phi)
\end{aligned}$$

Поскольку мы предполагаем, что в шаре существуют только токи коротации, в h должны входить только те сферические функции, которые входят в

объемный и поверхностный заряд, умноженный на β_R .

$$\begin{aligned} h^{\perp(\text{In})} &= a^{\perp(\text{In})} \frac{r}{R} Y_1^1 + b^{\perp(\text{In})} \frac{r^3}{R^3} Y_3^1 \\ h^{\perp(\text{Out})} &= a^{\perp(\text{Out})} \frac{R^2}{r^2} Y_1^1 + b^{\perp(\text{Out})} \frac{R^4}{r^4} Y_3^1 \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

$$\begin{aligned} h^{\parallel(\text{In})} &= a^{\parallel(\text{In})} \frac{r}{R} Y_1^0 + b^{\parallel(\text{In})} \frac{r^3}{R^3} Y_3^0 \\ h^{\parallel(\text{Out})} &= a^{\parallel(\text{Out})} \frac{R^2}{r^2} Y_1^0 + b^{\parallel(\text{Out})} \frac{R^4}{r^4} Y_3^0 \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Условие непрерывности радиальной компоненты магнитного поля дает следующую связь между коэффициентами

$$\begin{aligned} a^{\perp(\text{In})} &= -2a^{\perp(\text{Out})} - \frac{3}{5}; & b^{\perp(\text{In})} &= -\frac{4}{3}b^{\perp(\text{Out})} + \frac{2}{15} \\ a^{\parallel(\text{In})} &= -2a^{\parallel(\text{Out})} - \frac{4}{5}; & b^{\parallel(\text{In})} &= -\frac{4}{3}b^{\parallel(\text{Out})} + \frac{2}{15} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Предположение о том, что поверхностные токи являются токами коротации, т.е. $I_\phi = \sigma_e \Omega R \sin \theta$, $I_\theta = 0$ позволяет получить точные значения коэффициентов

$$\begin{aligned} a^{\perp(\text{Out})} &= -\frac{1}{6}; & a^{\perp(\text{In})} &= -\frac{4}{15}; & b^{\perp(\text{Out})} &= \frac{1}{10}; & b^{\perp(\text{In})} &= 0 \\ a^{\parallel(\text{Out})} &= 0; & a^{\parallel(\text{In})} &= -\frac{4}{5}; & b^{\parallel(\text{Out})} &= \frac{1}{10}; & b^{\parallel(\text{In})} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Подставляя поля в выражение для момента сил

$$\mathbf{K}_y^B = \frac{R^3}{4\pi} \int \left(\{B_\theta\} \cos(\phi - \Omega t) - \{B_\phi\} \cos \theta \sin(\phi - \Omega t) \right) B_r d\omega$$

$$\mathbf{K}_y^E = \frac{R^3}{4\pi} \int \left(E_\theta \cos(\phi - \Omega t) - E_\phi \cos \theta \sin(\phi - \Omega t) \right) \{E_r\} d\omega$$

получаем, что моменты сил от электрического и магнитного поля полностью компенсируют друг друга

$$\mathbf{K}_y^B = -\mathbf{K}_y^E = -\frac{8}{15} \frac{\mathbf{m}^2}{R^3} \left(\frac{\Omega R}{c} \right)^2 \sin \chi \cos \chi$$

Таким образом, в случае дипольного поля внутри шара

$$\xi = 0. \quad (3.2.23)$$

В случае же однородно намагниченного шара магнитное поле в нулевом порядке по параметру $(\Omega R/c)$ внутри шара определяется через магнитный момент формулой $\mathbf{B} = 2\mathbf{m}/R^3$. Тогда компоненты магнитного поля внутри шара выражаются следующими формулами

$$\begin{aligned} B_r^\perp &= \frac{2\mathbf{m}}{R^3} \sin \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\ B_\theta^\perp &= \frac{2\mathbf{m}}{R^3} \cos \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\ B_\phi^\perp &= -\frac{2\mathbf{m}}{R^3} \sin(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

$$\begin{aligned} B_r^\parallel &= \frac{2\mathbf{m}}{R^3} \cos \theta \cdot \cos \chi \\ B_\theta^\parallel &= -\frac{2\mathbf{m}}{R^3} \sin \theta \cdot \cos \chi \\ B_\phi^\parallel &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Магнитное поле вне шара является дипольным и выражается формулами (3.2.1). Это значит, что на поверхности шара существует скачок магнит-

ного поля нулевого порядка, а следовательно, и электрический ток нулевого порядка.

Электрическое поле внутри шара, получаемое из условия замороженности (3.1.1), имеет вид

$$\begin{aligned}
 E_r^{\perp(\text{In})} &= \frac{2\mathbf{m}}{R^3} \frac{\Omega r}{c} \sin \theta \cos \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\
 E_\theta^{\perp(\text{In})} &= -\frac{2\mathbf{m}}{R^3} \frac{\Omega r}{c} \sin^2 \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\
 E_\phi^{\perp(\text{In})} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

$$\begin{aligned}
 E_r^{\parallel(\text{In})} &= -\frac{2\mathbf{m}}{R^3} \frac{\Omega r}{c} \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos \chi \\
 E_\theta^{\parallel(\text{In})} &= -\frac{2\mathbf{m}}{R^3} \frac{\Omega r}{c} \cdot \sin \theta \cos \theta \cdot \cos \chi \\
 E_\phi^{\parallel(\text{In})} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Поскольку магнитные поля нулевого порядка вне шара в данном случае совпадают с полями магнитного диполя, «радиационное» электрическое поле ортогональной компоненты в данном случае также, как и в случае дипольного поля внутри шара, будет выражаться формулами (3.2.7), а электрическое поле параллельной компоненты будет также равно нулю. Следует отметить, что на тангенциальная компонента электрического поля первого порядка на поверхности шара также полностью совпадает со случаем дипольного поля внутри шара. Поэтому условие непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля дает те же функции ψ_1 (3.2.9), а следовательно и те же поля (3.2.10),(3.2.11), что и для случая дипольного поля внутри шара. Таким образом, электрические поля первого порядка вне шара для случаев

однородного поля внутри шара и дипольного поля внутри шара полностью совпадают.

Магнитное поле второго порядка находится по электрическому полю первого порядка из уравнения (3.1.13), и условия $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Следовательно, для ортогональной компоненты полей вне шара мы имеем те же выражения (3.2.16),(3.2.17), что и для случая дипольного поля внутри шара, а поля параллельной компоненты также равны нулю.

Внутри шара имеем

$$\begin{aligned} h_0^\perp &= -\frac{3}{5} \frac{\mathbf{m}}{R^3} \left(\frac{\Omega r}{c} \right)^2 \sin \theta \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\ h_0^\parallel &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

что дает следующие выражения для магнитных полей второго порядка

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_r^{\perp(\text{In}2)} &= \left(\frac{\Omega r}{c} \right)^2 \frac{\mathbf{m}}{R^3} \left(2 \sin^3 \theta - \frac{9}{5} \sin \theta \right) \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\ \mathbf{B}_\theta^{\perp(\text{In}2)} &= \left(\frac{\Omega r}{c} \right)^2 \frac{\mathbf{m}}{R^3} \cos \theta \left(2 \sin^2 \theta - \frac{3}{5} \right) \cos(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \\ \mathbf{B}_\phi^{\perp(\text{In}2)} &= \frac{3}{5} \left(\frac{\Omega r}{c} \right)^2 \frac{\mathbf{m}}{R^3} \sin(\phi - \Omega t) \cdot \sin \chi \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_r^{\parallel(\text{In}2)} &= \left(\frac{\Omega r}{c} \right)^2 \frac{2\mathbf{m}}{R^3} \sin^2 \theta \cos \theta \cdot \cos \chi \\ \mathbf{B}_\theta^{\parallel(\text{In}2)} &= - \left(\frac{\Omega r}{c} \right)^2 \frac{2\mathbf{m}}{R^3} \sin^3 \theta \cdot \cos \chi \\ \mathbf{B}_\phi^{\parallel(\text{In}2)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Аналогично ранее рассмотренному случаю, эти поля определены с точностью до градиента функции h вида (3.2.19),(3.2.20). Условие непрерывности радиальной компоненты магнитного поля дает следующую связь между коэффициентами

$$\begin{aligned} a^{\perp(\text{In})} &= -2a^{\perp(\text{Out})} + \frac{6}{5}; & b^{\perp(\text{In})} &= -\frac{4}{3}b^{\perp(\text{Out})} + \frac{2}{15} \\ a^{\parallel(\text{In})} &= -2a^{\parallel(\text{Out})} - \frac{4}{5}; & b^{\parallel(\text{In})} &= -\frac{4}{3}b^{\parallel(\text{Out})} + \frac{2}{15} \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Предположение о том, что токи второго порядка на поверхности связаны только с вращением $I_\phi = \sigma_e \Omega R \sin \theta$, $I_\theta = 0$, дает точные значения коэффициентов

$$\begin{aligned} a^{\perp(\text{Out})} &= -\frac{1}{15}; & a^{\perp(\text{In})} &= \frac{4}{3}; & b^{\perp(\text{Out})} &= \frac{1}{7}; & b^{\perp(\text{In})} &= -\frac{2}{35} \\ a^{\parallel(\text{Out})} &= -\frac{2}{5}; & a^{\parallel(\text{In})} &= 0; & b^{\parallel(\text{Out})} &= \frac{1}{7}; & b^{\parallel(\text{In})} &= -\frac{2}{35} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Подставляя поля в выражение для момента сил получаем

$$\mathbf{K}_y^B = \frac{\mathbf{m}^2}{R^3} \left(\frac{\Omega R}{c} \right)^2 \sin \chi \cos \chi; \quad \mathbf{K}_y^E = -\frac{2}{3} \frac{\mathbf{m}^2}{R^3} \left(\frac{\Omega R}{c} \right)^2 \sin \chi \cos \chi$$

Следует отметить, что при выполнении уравнений (3.2.31) момент сил \mathbf{K}_y^B оказывается не зависящим от значений $a^{\perp(\text{Out})}$, $b^{\perp(\text{Out})}$ и $a^{\parallel(\text{Out})}$, $b^{\parallel(\text{Out})}$.

В результате, для случая однородного поля внутри шара имеем

$$\xi = \frac{1}{3}. \quad (3.2.33)$$

Далее рассмотрим комбинированный вариант, когда внутри шара есть «ядро» радиуса R_{in} с однородным магнитным полем, окруженное «прослойкой» с дипольным магнитным полем. В этом случае почти все поля будут

выражаться полученными выше формулами, с заменой R на R_{in} для полей внутри «ядра». Отличие будет только в функциях h , поскольку теперь функции h в прослойке могут содержать как растущую, так падающую компоненты

$$h^{\perp(\text{Mid})} = \left(a_1^{\perp(\text{Mid})} \frac{r}{R_{in}} + a_2^{\perp(\text{Mid})} \frac{R_{in}^2}{r^2} \right) Y_1^1 + \left(b_1^{\perp(\text{Mid})} \frac{r^3}{R_{in}^3} + b_2^{\perp(\text{Mid})} \frac{R_{in}^4}{r^4} \right) Y_3^1$$

$$h^{\parallel(\text{Mid})} = \left(a_1^{\parallel(\text{Mid})} \frac{r}{R_{in}} + a_2^{\parallel(\text{Mid})} \frac{R_{in}^2}{r^2} \right) Y_1^0 + \left(b_1^{\parallel(\text{Mid})} \frac{r^3}{R_{in}^3} + b_2^{\parallel(\text{Mid})} \frac{R_{in}^4}{r^4} \right) Y_3^0$$

Условие непрерывности радиальной компоненты магнитного поля на границе между «ядром» и «прослойкой» дает следующие соотношения

$$a^{\perp(\text{In})} = a_1^{\perp(\text{Mid})} - 2a_2^{\perp(\text{Mid})} + \frac{9}{5}; \quad b^{\perp(\text{In})} = b_1^{\perp(\text{Mid})} - \frac{4}{3}b_2^{\perp(\text{Mid})}r^{-4}$$

$$a^{\parallel(\text{In})} = a_1^{\parallel(\text{Mid})} - 2a_2^{\parallel(\text{Mid})}; \quad b^{\parallel(\text{In})} = b_1^{\parallel(\text{Mid})} - \frac{4}{3}b_2^{\parallel(\text{Mid})}$$

Аналогичное условие на границе между «прослойкой» и вакуумом дает

$$a^{\perp(\text{Out})} = -\frac{1}{2}a_1^{\perp(\text{Mid})} \frac{R}{R_{in}} + a_2^{\perp(\text{Mid})} \frac{R_{in}^2}{R^2} - \frac{3}{10}$$

$$b^{\perp(\text{Out})} = -\frac{3}{4}b_1^{\perp(\text{Mid})} \frac{R^3}{R_{in}^3} + b_2^{\perp(\text{Mid})} \frac{R_{in}^4}{R^4} + \frac{1}{10}$$

$$a^{\parallel(\text{Out})} = -\frac{1}{2}a_1^{\parallel(\text{Mid})} \frac{R}{R_{in}} + a_2^{\parallel(\text{Mid})} \frac{R_{in}^2}{R^2} - \frac{2}{5}$$

$$b^{\parallel(\text{Out})} = -\frac{3}{4}b_1^{\parallel(\text{Mid})} \frac{R^3}{R_{in}^3} + b_2^{\parallel(\text{Mid})} \frac{R_{in}^4}{R^4} + \frac{1}{10}$$

Предположение о том, что токи второго порядка на границах между «ядром» и «прослойкой», и между «прослойкой» и вакуумом связаны только с

вращением дает

$$\begin{aligned}
a_1^{\perp(\text{Mid})} &= -\frac{4}{15} \frac{R}{R_{in}}; & a_2^{\perp(\text{Mid})} &= \frac{1}{10} \frac{R_{in}^2}{R^2} - \frac{3}{10} \\
b_1^{\perp(\text{Mid})} &= 0; & b_2^{\perp(\text{Mid})} &= \frac{3}{70} \\
a_1^{\parallel(\text{Mid})} &= -\frac{4}{5} \frac{R}{R_{in}}; & a_2^{\parallel(\text{Mid})} &= -\frac{2}{5} \\
b_1^{\parallel(\text{Mid})} &= 0; & b_2^{\parallel(\text{Mid})} &= \frac{3}{70}
\end{aligned}$$

В результате для момента, действующего на границу между «ядром» и «прослойкой» имеем

$$\xi = \frac{8}{15} - \frac{1}{5} \frac{R}{R_{in}}, \quad (3.2.34)$$

а момент действующий на границу между дипольной «прослойкой» и вакуумом, как и в случае шара с чисто дипольным полем, оказывается равен нулю.

Заметим, что при $R_{in} = R$, все формулы комбинированного случая переходят в формулы для шара с однородным магнитным полем.

Таким образом, мы видим, что аномальный момент сил, действующий на вращающийся намагниченный шар в вакууме, не равен нулю и при этом зависит от структуры его внутреннего магнитного поля. Отличие же от предыдущих расчетов, по-видимому, связано с тем, что в них не были корректно учтены токи коротации внутри звезды. Так в работе [48] аномальный момент вычислялся как поток вектора углового момента электромагнитного поля по формуле

$$\mathbf{K}^M = \frac{1}{4\pi} \int_S \left([\mathbf{x} \times \mathbf{B}] (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) + [\mathbf{x} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)] (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) [\mathbf{x} \times d\mathbf{S}] \right)$$

При интегрировании по сфере, совпадающей с поверхностью шара, $\mathbf{x} = R \cdot \mathbf{n}$ и $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot R^2 d\omega$, где $d\omega$ — элемент телесного угла, получаем

$$\mathbf{K}_y^M = \frac{R^3}{4\pi} \int \left([\mathbf{n} \times \mathbf{B}]_y (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_y (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \right) d\omega$$

Эта формула отличается от (3.1.5) тем, что в ней отсутствуют скачки электрического и магнитного полей на поверхности. Если мы подставим в эту формулу найденные выше поля для случая однородного магнитного поля внутри шара, то получим в точности

$$\xi = \frac{3}{5}, \quad (3.2.35)$$

как и в работе [48]. Отличие, по-видимому, связано с тем, поток вектора углового момента электромагнитного поля связан не только с угловым моментом сил, действующих на поверхность, но и с изменением углового момента поля, связанным с вращением шара.

Отметим, наконец, что для реальной магнитосферы радиопульсара в уравнении (3.1.12) с хорошей точностью можно положить $\psi = 0$ не только внутри, но и вне нейтронной звезды [8]. В результате, в модели с магнитным диполем в центре звезды скачок нормальной компоненты электрического поля (а, значит, и поверхностный заряд) будут равны нулю. Следовательно, для нулевого продольного тока в магнитосфере аномальный момент также будет отсутствовать ($\xi = 0$).

Глава 4

Аналитические модели магнитосферы черной дыры в активных галактических ядрах

Как уже говорилось, в литературе предлагалось несколько аналитических моделей магнитосферы черной дыры. Первая из них была построена Блендфордом и Знайеком [20], рассмотревшими медленно вращающуюся черную дыру, для которой в качестве нулевого приближения была выбрана невращающаяся черная дыра с квазирадиальным (*split*) монопольным полем. Такая геометрия легко может быть реализована в присутствии тонкого аккреционного диска. В этом случае функция потока $\Psi = \Psi_*(1 - \cos \theta)$ при $\theta < \pi/2$ и $\Psi = \Psi_*(1 + \cos \theta)$ при $\theta > \pi/2$ будет точным решением уравнения Грэда-Шафранова для невращающейся черной дыры. Эти же авторы рассмотрели модель магнитосферы с параболическим магнитным полем в окрестности медленно вращающейся черной дыры. Форму силовых линий при $\theta < \pi/2$ на больших расстояниях описывает функция потока $\Psi = \Psi_* r(1 - \cos \theta)$. Поскольку для нее $\Psi(r, \pi) \neq \text{const}$, то это означает наличие в объеме (а не только в гравитирующем центре или на бесконечности) источников или стоков. Такие источники также могут быть реализованы в аккреционном диске. Наконец, в работе Бескина и др. [31] был исследован случай, когда черная дыра находится в центре хорошо проводящего диска, ограниченного внутренним радиусом b . При этом вблизи черной дыры поле являлось почти однородным, а на больших расстояниях ($r \gg b$) магнитное поле оставалось по-прежнему квазирадиальным. Как видно из рис. 5, во всех этих случаях угловая скорость

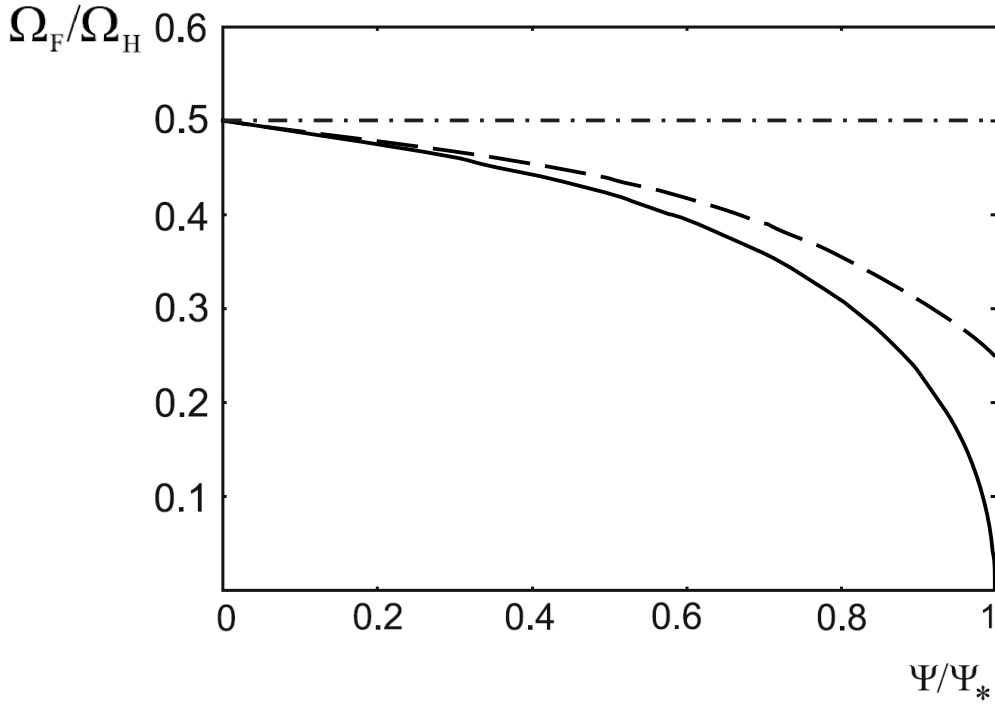


Рис. 4.1. График Ω_F/Ω_H в случае квазирадиального поля у горизонта и вдали от черной дыры (штрих-пунктирная линия), параболического поля у горизонта и вдали от черной дыры (штриховая линия), а также однородного магнитного поле вблизи горизонта и квазирадиальное поле на больших расстояниях (сплошная линия). Здесь Ψ_* — полный поток через поверхность горизонта

$\Omega_F(\Psi)$ вблизи оси вращения равна $\Omega_H/2$.

С другой стороны, как показано на Рис. 6, в недавней работе Маккини и др. [32], посвященной численному моделированию магнитосферы черной дыры, был получен профиль угловой скорости Ω_F , которая не только отличается от $\Omega_H/2$ вблизи оси, но даже становится здесь отрицательной. При этом авторы делают вывод, что получившийся профиль все же ближе к параболическому решению, тем более что внешне магнитные поверхности действительно имеют подобную форму. Однако в параболическом решении значительная часть магнитных силовых линий должна проходить через аккреци-

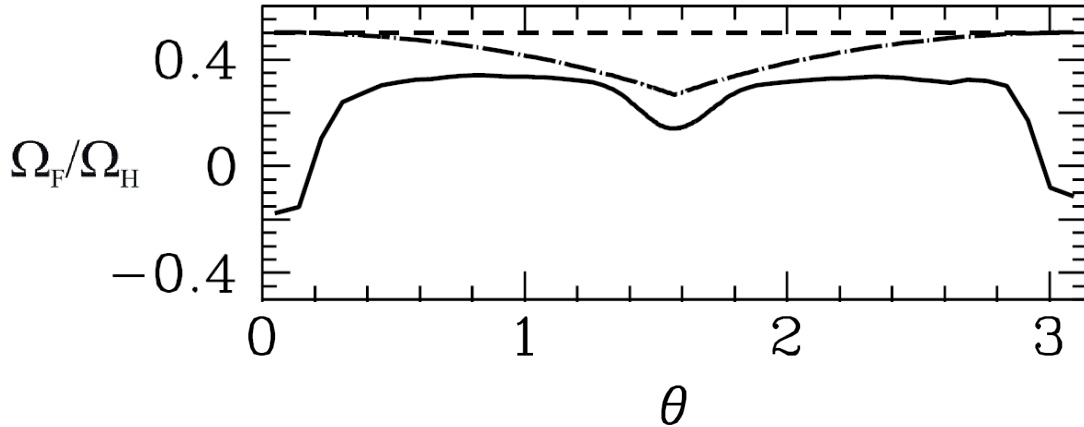


Рис. 4.2. График Ω_F/Ω_H на горизонте в зависимости от полярного угла θ , полученный в процессе численного моделирования магнитосферы черной дыры [32]. Штриховая линия соответствует монополю, штрих-пунктирная — параболическому.

онный диск. Следовательно, для соответствующих магнитных поверхностей источником энергии будет не вращающаяся черная дыра, а экваториальная область эргосферы (подобная модель развивалась, например, в работах Пансли, см. [54]).

В работе [55] было показано, что лучше всего полученные в работе [32] результаты согласуются с еще не рассмотренной ранее моделью магнитосферы черной дыры с (квази)монополюсным магнитным полем вблизи горизонта черной дыры и цилиндрическим полем вдали от горизонта. В этой модели, в которой теперь основная часть магнитного потока проходит через горизонт черной дыры, можно получить не только коллимацию магнитных поверхностей (она будет связана с достаточно большой плотностью внешней среды), но и значения угловой скорости меньше $\Omega_H/2$ вблизи оси.

В нашей модели мы будем использовать предположение, что на больших расстояниях от черной дыры, как это получается в численном моделирова-

нии, вблизи оси вращения течение является цилиндрическим, так что все величины зависят только от цилиндрического радиуса ϖ . В данном случае уравнение Грэда-Шафранова является одномерным и может быть проинтегрировано. В бессиловом приближении решение уравнения Грэда-Шафранова принимает вид (см., например, [56])

$$\Omega_{\text{F}}^2(\Psi)\varpi^4 B_z^2 c^{-2} = \varpi^2 B_\varphi^2 + \int_0^{\varpi} x^2 \frac{d}{dx} (B_z)^2 dx. \quad (4.0.1)$$

Подставляя выражение тороидального поля через полный ток $B_\varphi = -2I/\varpi c$ (1.0.1), можно переписать уравнение (4.0.1) в виде

$$\Omega_{\text{F}}^2(\Psi)A_1^2(\Psi) = 4I^2(\Psi) + A_2(\Psi), \quad (4.0.2)$$

где были введены обозначения:

$$A_1(\Psi) = \varpi^2 B_z; \quad (4.0.3)$$

$$A_2(\Psi) = c^2 \int_0^{\varpi} x^2 \frac{d}{dx} (B_z)^2 dx. \quad (4.0.4)$$

Что же касается "граничного условия на горизонте" (1.0.14), то его можно переписать в виде

$$2I(\Psi) = [\Omega_{\text{H}} - \Omega_{\text{F}}(\Psi)] A_3(\Psi), \quad (4.0.5)$$

где

$$A_3 = \frac{1}{2\pi} \sin \theta \frac{r_{\text{g}}^2 + a^2}{r_{\text{g}}^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\Psi}{d\theta} \right). \quad (4.0.6)$$

Подставляя последнее выражение для $2I(\Psi)$ в уравнение (4.0.2), получим квадратное уравнение на $\Omega_{\text{F}}(\Psi)$

$$\Omega_{\text{F}}^2(A_3^2 - A_1^2) - 2\Omega_{\text{F}}\Omega_{\text{H}}A_3^2 + \Omega_{\text{H}}^2A_3^2 + A_2 = 0. \quad (4.0.7)$$

Отсюда общее выражение для угловой скорости $\Omega_{\text{F}}(\Psi)$ может быть записано в виде

$$\Omega_{\text{F}} = \Omega_{\text{H}} \left[\frac{A_3}{A_3 + A_1} + \frac{A_2}{\Omega_{\text{H}}^2 A_1 A_3 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{A_2(A_3^2 - A_1^2)}{\Omega_{\text{H}}^2 A_1^2 A_3^2}} \right)} \right]. \quad (4.0.8)$$

Такая форма записи связана с тем, что для рассмотренных ранее решений на оси вращения выполнено соотношение $A_1 = A_3$, и мы поэтому постарались избежать величин $(A_1 - A_3)$ в знаменателях соответствующих выражений.

Рассмотрим, прежде всего, случай, когда магнитное поле вдали от черной дыры является вертикальным и однородным ($\Psi = \pi \varpi^2 B_0$ при $r \gg r_g$), а на горизонте оно является строго радиальным ($\Psi = \Psi_*(1 - \cos \theta)$ при $r = r_g$). Тогда, подставляя в выражения (4.0.3) и (4.0.7) соответствующие функции потока, получим

$$\begin{aligned} A_1(\Psi) &= \varpi^2 \frac{1}{2\pi\varpi} \frac{d\Psi}{d\varpi} = \frac{\Psi}{\pi}, \\ A_2(\Psi) &= c^2 \int_0^{\varpi} x^2 \frac{d}{dx} (B_0)^2 dx = 0, \\ A_3(\Psi) &= \frac{\Psi}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2\Psi_*} \right) \cdot \frac{r_g^2 + a^2}{r_g^2 + a^2(1 - \Psi/\Psi_*)^2}. \end{aligned} \quad (4.0.9)$$

Следовательно, на оси вращения вращения $\Omega_{\text{F}} = \Omega_{\text{H}}/2$.

С другой стороны, как аналитические [57], так и численные (см., например, [58–60]) расчеты показывают, что в джете может существовать центральный кор, который, как будет показано далее, может существенно изменить ситуацию.

Рассмотрим случай, когда магнитное поле на горизонте по-прежнему является строго радиальным, а вдали от черной дыры поле является вертикальным, но теперь вблизи оси вращения существует более плотная сердцевина

радиуса r_{core} . Как было показано, такая сердцевина действительно должна образовываться при достаточно малом давлении внешней среды, причем (см. например, [57])

$$r_{\text{core}} = k \frac{c}{\Omega_{\text{F}}(0)}. \quad (4.0.10)$$

Здесь $k \approx \gamma_{\text{in}}$, где γ_{in} есть характерный лоренц-фактор частиц, текущих вдоль оси джета. Тогда на расстояниях $\varpi \leq r_{\text{core}}$ от оси вращения можно записать

$$B_z = B_0 - B_0 \frac{\varpi^2}{r_{\text{core}}^2}. \quad (4.0.11)$$

Этому полю соответствует следующая функция потока

$$\Psi = \pi \varpi^2 B_0 - \frac{1}{2} \pi B_0 \frac{\varpi^4}{r_{\text{core}}^2}. \quad (4.0.12)$$

В результате, вблизи оси вращения в первом порядке по величине Ψ мы по-прежнему имеем $A_1(\Psi) \approx A_3(\Psi) \approx \Psi/\pi$. Однако, теперь A_2 уже будет отличаться от нуля

$$A_2 \approx -\frac{\Psi^2}{\pi^2 r_{\text{core}}^2}. \quad (4.0.13)$$

В итоге, подставляя выражения для A_1, A_2 и A_3 в общую формулу (4.0.8), имеем

$$\Omega_{\text{F}}(0) \approx \frac{\Omega_{\text{H}}}{2} \left(1 - \frac{c^2}{\Omega_{\text{H}}^2 r_{\text{core}}^2} \right). \quad (4.0.14)$$

Если же выразить здесь r_{core} с помощью соотношения (4.0.10), то

$$\Omega_{\text{F}}(0) \approx \frac{\Omega_{\text{H}}}{1 + \sqrt{1 + 1/k^2}}. \quad (4.0.15)$$

Как мы видим, при наличии плотной сердцевины угловая скорость на оси джета $\Omega_{\text{F}}(0)$ может быть меньше $\Omega_{\text{H}}/2$. В частности, для слаборелятивистского течения $k = 1$ получаем $\Omega_{\text{F}}(0) = 0.41 \Omega_{\text{H}}$.

Применим теперь нашу модель для анализа результатов численного моделирования, проведенного в работе [32], в которых плотная сердцевина также имеет место. Согласно этим результатам, вблизи горизонта черной дыры магнитное поле с хорошей точностью можно считать радиальным. Тогда по графику $B_r(r_H, \theta)$ можно получить график функции магнитного потока $\Psi(r_H, \theta)$, а затем и график $A_3(\Psi)$. Вблизи оси на больших расстояниях течение можно с хорошей точностью считать цилиндрическим, поэтому в этой области можно положить $B_z \approx B_r$ и использовать график радиального магнитного поля на $r = 30r_g$. Однако, непосредственно на оси магнитное поле завышено, что связано с особенностями численного метода.

Рассмотрим теперь модельное магнитное поле

$$B_z = \frac{B_0}{1 + \varpi^2/r_{\text{core}}^2} + B_1, \quad (4.0.16)$$

где B_0, B_1 и r_{core} есть параметры задачи. Выберем их таким образом, чтобы, во-первых, график функции $B_z(\theta)$ при малых θ был близок к графику $B_r(30r_g, \theta)$ из работы [32]. Во-вторых, полный поток магнитного поля, соответствующий этому B_z должен совпадать с полным потоком магнитного поля на горизонте. Последнее условие основано на свойстве сохранения магнитного потока и том факте, что значительная часть магнитного потока, выходящего с горизонта черной дыры, далее сосредотачивается внутри джета, т.е. вблизи оси.

Модельному магнитному полю (4.0.16) соответствует следующая функция потока

$$\Psi = \pi r_{\text{core}}^2 B_0 \ln(1 + \varpi^2/r_{\text{core}}^2) + \pi B_1 \varpi^2. \quad (4.0.17)$$

Такая функция потока не дает возможность аналитически получить обратную зависимость $\varpi(\Psi)$, а следовательно и зависимости $A_1(\Psi)$ и $A_2(\Psi)$. Одна-

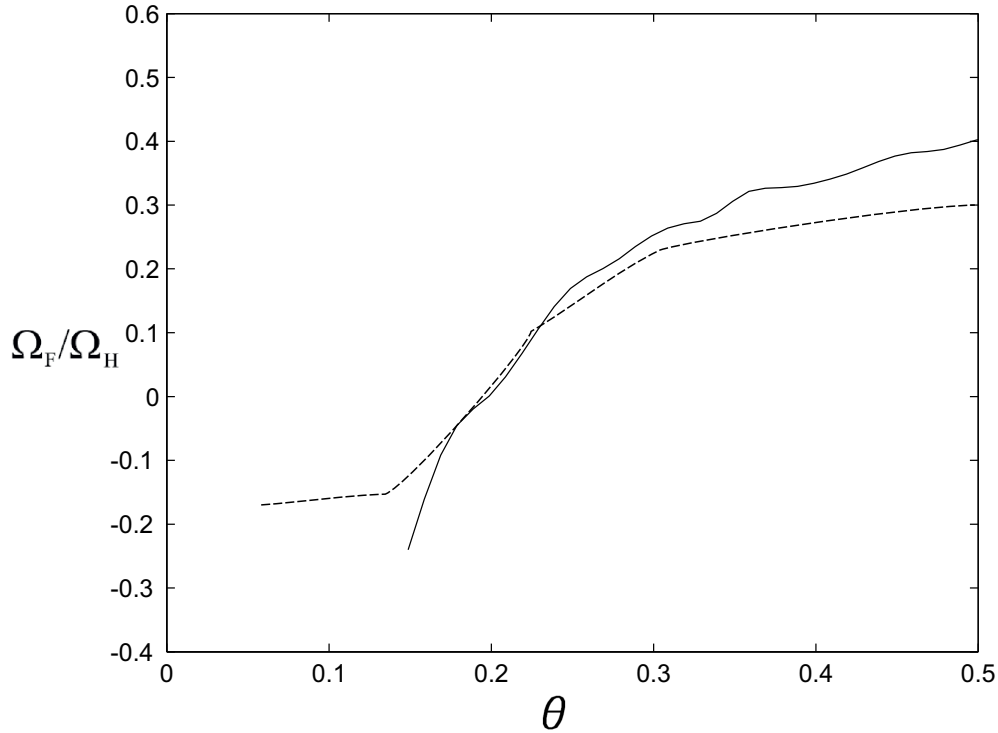


Рис. 4.3. График Ω_F/Ω_H на горизонте в зависимости от полярного угла θ , полученный на основе новой аналитической модели (сплошная линия) и график из работы [32] (штриховая линия).

ко, эти зависимости можно получить численно, и с помощью формулы (4.0.8) найти профиль угловой скорости $\Omega_F(\Psi(\varpi))$.

На рис.7 представлен график, где по вертикальной оси откладывается величина Ω_F/Ω_H на горизонте черной дыры, а по горизонтальной оси — полярный угол θ . При этом интервал углов был выбран из следующих соображений. При очень малых θ магнитное поле, полученное в численном моделировании, расходится, что, скорее всего, связано с особенностями численного метода. С другой стороны, при больших θ будет нарушаться предположение о том, что магнитное поле вертикально. Как мы видим, предложенная модель на-

ходится в отличном согласии с результатами численного счета. Заметим, что вблизи оси Ω_F принимает отрицательные значения, что также согласуется с работой [32].

Глава 5

Основные параметры и внутренняя структура струйных выбросов.

Наиболее важными МГД-параметрами, описывающими релятивистские струйные выбросы являются параметр замагниченности σ (был впервые введен Майклом для радиопульсаров в 1969 г. [3]) и параметр множественности рождения λ . Первый определяет максимально возможный лоренц-фактор джета, когда вся энергия из электромагнитного поля перекачена в кинетическую энергию частиц. Вторым параметром $\lambda = n_e/n_{GJ}$ определяется, как отношения концентрации электронов в магнитосфере n_e к концентрации Гольдрайха-Джулиана $n_{GJ} = \Omega B/2\pi c e$. Два указанных параметра связаны простым соотношением [37]

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{W_{tot}}{W_A} \right)^{1/2}, \quad (5.0.1)$$

где $W_A = m_e^2 c^5 / e^2 \approx 10^{17}$ эрг/с - минимальное энерговыделение из центральной машины, которое может ускорить частицы до релятивистских скоростей, а W_{tot} - полное энерговыделение компактного объекта.

До последнего времени значения этих параметров оставались неизвестными, так как из наблюдений не удавалось получить точную информацию о концентрации электронов и о скорости движения частиц в струйном выбросе. С точки зрения теории, если внутренние области аккреционного диска достаточно горячие, то оттуда могут излучаться фотоны с достаточной энергией, чтобы генерировать электрон-позитронную плазму через двухфотонные столкновения [20]. В этом случае $\lambda \sim 10^{10} - 10^{13}$, а замагниченность

$\sigma \sim 10^2 - 10^3$. Другая модель учитывает существование областей, где плотность Гольдрайха-Джулиана обращается в ноль из-за общерелятивистских эффектов, что соответствует внешнему зазору в магнитосфере пульсаров [61, 62]. Эта модель предсказывает $\lambda \sim 10^2 - 10^3$ и $\sigma \sim 10^{10} - 10^{13}$. Столь сильное различие оценок параметра замагниченности соответствуют двум совершенно разным структурам потока в джете. В частности, этот параметр определяет, является ли поток магнитно доминированным или он находится в режиме равнораспределения. Для обычных джетов отношение цилиндрического радиуса джета к радиусу светового цилиндра $\varpi/R_L \sim 10^4 - 10^5$. Следовательно, используя универсальную асимптотику $\gamma \approx \varpi/R_L$ [37], получаем, что при $\sigma \sim 100$ джет находится в режиме насыщения, когда почти весь поток электромагнитной энергии W_{em} перекачен в кинетическую энергию частиц W_{part} . С другой стороны, когда $\sigma \sim 10^{12}$, джет остается магнитно доминированным ($W_{\text{em}} \gg W_{\text{part}}$). Таким образом, определение значения параметра замагниченности σ имеет большое значение при анализе внутренней структуры релятивистских джетов.

5.1. Определение параметра множественности рождения.

Для оценки концентрации электронов оказалось возможно использовать эффект видимого сдвига ядра джета [33, 63–69]. Этот эффект связан с различной степенью поглощения синхротронных фотонов релятивистскими электронами в джете. Обычно на парсековых масштабах в радио диапазоне виден односторонний джет, так как из-за эффекта Доплера усиливается излучение

приближающейся к нам части джета. Видимое основание джета, как правило, является и самой яркой его частью и называется ядром. Положение ядра джета соответствует той области, где оптическая толщина равна единице. Соответствующая частота (для которой оптическая толщина $\tau = 1$) может быть оценена используя выражения из статьи [63] следующим образом

$$\nu_m^{*(5-2\alpha)} = \frac{c^2(1-2\alpha)}{5(5-2\alpha)} \frac{e^4}{m^2c^2} \left(\frac{e}{2\pi mc} \right)^{3-2\alpha} R_*^2 B^{3-2\alpha} k_e^2. \quad (5.1.1)$$

Здесь B — магнитное поле, R_* — характерный размер излучающей области, α определяет спектр электронов по энергиям $dn_e = k_e \gamma^{-1+2\alpha} d\gamma$. Функция $c(1-2\alpha)$ определяется в [63]. При этом ν_m^* и R_* измеряются в движущейся системе отсчета и связаны со значениями в системе отсчета наблюдателя ν_m и R следующим образом

$$\frac{\nu_m^*}{\nu_m} = \frac{1+z}{\delta}, \quad (5.1.2)$$

$$R_* = \frac{r\chi}{\sin \varphi^*} = \frac{r\chi}{\sin \varphi} \frac{1+z}{\delta}, \quad (5.1.3)$$

где z — красное смещение, δ — доплер-фактор, χ — угол раскрытия джета, а φ — угол зрения. Тогда в системе отсчета наблюдателя

$$\nu_m^{5-2\alpha} = \frac{c^2(1-2\alpha)}{5(5-2\alpha)} \frac{e^4}{m^2c^2} \left(\frac{e}{2\pi mc} \right)^{3-2\alpha} B^{3-2\alpha} k_e^2 \left(\frac{r\chi}{\sin \varphi} \right)^2 \left(\frac{1+z}{\delta} \right)^{-3+2\alpha}. \quad (5.1.4)$$

Будем считать, что магнитное поле и плотность частиц имеют степенную зависимость от расстояния (см., например, [33, 66]):

$$B(r) = B_1 \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-1}, \quad (5.1.5)$$

$$k_e = -2\alpha N_1 \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-2} \gamma_{\min}^{-2\alpha}, \quad (5.1.6)$$

где B_1 — магнитное поле на расстоянии $r_1 = 1$ пс, и $\alpha = -1/2$. Далее, используя соотношение

$$N_1 = \lambda n_{\text{GJ}}(r_1), \quad (5.1.7)$$

и предположение о равномерном распределении энергии между магнитным полем и частицами, получаем следующую связь между частотой ν_m и множественностью рождения λ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{1 \text{ пс}}\right) \left(\frac{\nu_m}{10^{14} \text{ ГГц}}\right) &= 2.4 \cdot 10^{-32} \left(\frac{\gamma_{\text{min}}^2}{K}\right)^{1/3} \times \\ &\times \left(\frac{\chi}{\sin \varphi}\right)^{1/3} \left(\frac{\delta}{1+z}\right)^{2/3} \left(\lambda \sqrt{\frac{W_{\text{tot}} r_0}{mc^3}}\right)^{2/3}, \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

где K — безразмерная функция минимального и максимального значений Лоренц-фактора электронов в их степенном распределении по энергиям [65]. Для измерения видимого сдвига ядра джета может использоваться несколько методов (подробнее см. [67]), которые в результате дают значение сдвига η в единицах [пк·ГГц] или [мас·ГГц] (мас — миллисекунда дуги). Зная эту величину, для параметра множественности рождения можно получить

$$\begin{aligned} \lambda &= 2.6 \times 10^{12} \left(\frac{\eta}{\text{мас} \cdot \text{ГГц}}\right)^{3/2} \left(\frac{D_L}{1 \text{ Гпс}}\right)^{3/2} \left(\frac{W_{\text{tot}}}{10^{47} \text{ эрг/с}}\right)^{-1/2} \frac{\sqrt{K/\gamma_{\text{min}}^2}}{\sqrt{\chi} \sin \varphi \delta (1+z)^2} = \\ &1.3 \times 10^{13} \left(\frac{\eta}{\text{пс} \cdot \text{ГГц}}\right)^{3/2} \left(\frac{W_{\text{tot}}}{10^{47} \text{ эрг/с}}\right)^{-1/2} \frac{\sqrt{K/\gamma_{\text{min}}^2}}{\sqrt{\chi} \sin \varphi \delta (1+z)^2} \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Здесь D_L (в Гпк) — расстояние до объекта.

В нашей работе мы использовали результаты двух больших массивов измерений видимого сдвига ядра джета в активных галактических ядрах: в работе [68] эти измерения были проведены для 20 объектов на 9 частотах в

диапазоне от 1.4 до 15.3 ГГц, и в работе [69] измерения для 163 объектов на 4 частотах в диапазоне от 8.1 до 15.3 ГГц. В таблице 1 приведены значения η для 20 объектов из работы [68]. Красное смещение z для этих источников взято из работы [67]. Расстояние до объектов определяется по красному смещению и Λ CDM космологической модели с параметрами $H_0 = 71 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $\Omega_m = 0.27$, и $\Omega_\Lambda = 0.73$ [70]. Для объектов по которым нет информации о красном смещении, предполагается $z = 1$. Для угла раскрытия χ , угла наблюдения φ и доплер-фактора δ были использованы характерные значения: $\chi = 9^\circ$, $\varphi = 2^\circ$, $\delta = 6$, за исключением объектов 1803+784 и 2201+315. Доплер-фактор и угол наблюдения для источника 1803+784 был взят из работы [35], а угол раскрытия джета для этого объекта – из работы [71]. Доплер-фактор и угол наблюдения для 2201+315 был взят из работы [71]. Будем также предполагать, что полное энерговыделение W_{tot} соответствует Эддингтоновской светимости для центрального объекта массы $10^9 M_\odot$, что дает значение $W_{\text{tot}} = 10^{47}$ эрг/с. Таким образом, используя формулу (5.0.1) можно получить значения параметра замагниченности σ .

Как можно видеть из таблицы 1 основные физические параметры джетов λ и σ не сильно отличаются для разных источников. В частности, пренебрегая источником 1845+797, можно с хорошей точностью считать $\sigma \sim 15$ и $\lambda \sim 10^{14}$. В результате, зная эти параметры и используя достаточно простое одномерное МГД-приближение, можно определить внутреннюю структуру джетов.

5.2. Внутренняя структура струйных выбросов

Для узко коллимированного струйного выброса применимо приближение, в котором его можно рассматривать, как цилиндрический. В работах

Таблица 5.1. Видимый сдвиг ядра, красное смещение, параметр множественности рождения λ и параметр замагниченности σ .

object	$\eta(\text{mas GHz})$	z	$\lambda(10^{13})$	σ
0148+274	3.4	1.3	21.0	4.8
0342+147	1.0	1.6	3.7	27
0425+048	2.2	0.6	6.5	15
0507+179	1.7	0.4	3.6	28
0610+260	3.6	0.6	14.5	6.9
0839+187	2.3	1.2	11.2	9.0
0952+179	1.4	1.5	5.9	16
1004+141	2.4	2.7	14.3	7
1011+250	2.1	...	9.0	11
1049+215	1.8	1.3	7.8	12
1219+285	2.5	0.1	6.2	16
1406-076	1.2	...	3.9	26
1458+718	2.4	...	11.3	8.9
1642+690	1.9	0.8	6.5	15
1655+077	1.5	...	5.4	19
1803+784	1.1	0.7	6.6	15
1830+285	2.8	0.6	9.8	10
1845+797	2.3	0.1	0.5	199
2201+315	3.3	0.3	6.5	15
2320+506	1.3	...	3.8	27

[57, 72, 73] было показано, что данное приближение позволяет воспроизводить большинство результатов, полученных с помощью двумерного численного моделирования. В приближении одномерного цилиндрического струйного выброса задача сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Тогда параметр множественности рождения λ и параметр замагниченности σ позволяют определить внутреннюю поперечную структуру джета заданного радиуса.

На рисунках 8 и 9 представлены логарифмические графики концентрации, лоренц-фактора а так же полоидальной и тороидальной компонент магнитного поля при $\lambda = 10^{13}$, радиус джета $R_{jet} = 1$ пк, и при пяти характерных значениях параметра σ : 5,10,15,20 и 30. На рисунках 10-13 представлены поперечные профили концентрации, лоренц-фактора а так же полоидальной и тороидальной компонент магнитного поля в логарифмическом масштабе в случаях, когда радиус джета $R_{jet} = 10$ пк (рис. 10 и рис. 11) и $R_{jet} = 0.1$ пк (рис. 12 и рис. 13), а остальные параметры имеют те же значения, что и на рис. 8 and рис. 9.

Зависимость поперечных профилей от параметра множественности рождения λ представлена на рисунках 14 и 15 при следующих значениях параметров: параметр замагниченности $\sigma = 20$, радиус джета $R_{jet} = 1$ пк, параметр множественности рождения λ : 10^{12} , $3 \cdot 10^{12}$ и 10^{13} . Недавние аналитические [57] и численные [32, 58–60] исследования джетов указывают на существование так называемого "центрального кора". Как видно из графиков, концентрация в центре джета на три порядка выше, чем на краю. Однако, Лоренц-фактор этих частей джета достаточно мал. Таким образом, данные результаты находятся в качественном согласии с предыдущими исследовани-

ями.

Зная, как Лоренц-фактор на краю джета зависит от радиуса джета, и сделав простые предположения о форме джета, можно вычислить зависимость Лоренц-фактора от координаты вдоль джета. Результат представлен на рисунках 14 и 15 для случаев конической и параболической формы джета соответственно. Также в обоих случаях использовалось предположение, что джет имеет радиус 10 пк на расстоянии 100 пк, что соответствует углу раскрытия $\theta_{\text{jet}} \approx 0.1$. В соответствии с рисунками 14 и 15, ускорение частиц в системе отсчета, где ядро джета покоится, на масштабах 60–100 пк имеет значения около $\dot{\gamma}/\gamma = 10^{-3}$. Это отлично согласуется с результатами VLBI-исследований ускорения джетов в активных галактических ядрах [74].

5.3. Причинная связность струйных выбросов

Вычисленные параметры множественности рождения λ , намагниченности σ , а также наблюдаемый угол раствора джета позволяет проверить причинную связность поперек джета в цилиндрической модели струйного выброса. Каждая точка пространства сверх-быстромагнитозвукового течения имеет свой собственный "конус причинного влияния". В случае однородного течения конус с вершиной в заданной точке, формируемый характеристиками течения, является областью, на которую может повлиять любой сигнал из заданной точки. В случае же неоднородных течений такие конусы, определяющие область, причинно связанную с заданной точкой, начинают принимать более сложную вихреподобную форму.

Если характеристика, исходящая из любой точки на границе джета, достигает оси джета, то принято говорить, что ось джета причинно связана с

границей [59]. Если же существуют точки на границе, характеристики из которых не достигают оси, то такой поток будет причинно не связан. В этом случае возникает вопрос о самосогласованности МГД-решения, так как внутренние области такого потока не будут получать никакой информации об внешней среде. Примеры важности причинной связности в потоке и ее влияние на эффективность ускорения плазмы приводились в работах [75] и [59].

Для случая цилиндрической модели джета вопрос причинности имеет еще большее значение, поскольку в этой модели учитывается только баланс сил поперек джета и задача становится одномерной. Для каждого начального условия на оси решение этой задачи дает профиль течения и положение границы, определяемой так, чтобы она содержала полный поток магнитного поля. Любая физическая величина на границе, такая, как, например, давление, может быть получена из этого решения. Или можно решить обратную задачу и для заданного внешнего давления на границе найти физические величины на оси джета. В любом случае используется связь физических свойств течения на границе джета и на его оси, что возможно только если эти области причинно связаны. Другими словами, для строго цилиндрического джета точка на оси на расстоянии z_0 от основания джета должна «знать» состояние течения в точке на границе на том же расстоянии z_0 от основания джета.

В цилиндрической модели динамика потока вдоль джета получается путем "сложения" описанных выше поперечных срезов так, чтобы обеспечить нужную форму границы джета, либо чтобы получить нужное внешнее давление на границе. В этом случае, применимость цилиндрической модели определяется возможностью пренебречь производными вдоль джета. Это условие позволяет ввести следующий критерий: все характеристики выходящие из

точки на границе на расстоянии z_0 от основания джета должны достигать оси джета в точке z , так что $|z - z_0| \ll z_0$.

Для осесимметричного потока условие причинной связности поперек потока может быть записано в виде [59]

$$\theta_F > \theta_j, \quad (5.3.1)$$

где θ_F — угол раскрытия быстрогомагнитозвукового конуса Маха на границе, а θ_j — угол раскрытия джета. Это условие означает, что характеристики от границы с углом θ_F к локальной полоидальной скорости потока достигнут оси джета. Для ультрарелятивистского потока θ_F может быть определен как [59]

$$\sin \theta_F = \frac{1}{M_F} = \frac{\gamma_{\max} - \gamma}{\gamma^3}. \quad (5.3.2)$$

В цилиндрическом подходе можно проверить причинную связность поперек джета путем применения условия (5.3.1) и прослеживании сетки характеристик, выходящих с границы джета. Введем причинную функцию

$$f = \frac{\gamma_{\max} - \gamma}{\gamma^3} \cdot \frac{1}{\sin \theta_j}. \quad (5.3.3)$$

Из (5.3.1) и (5.3.2) следует, что при $f > 1$ причинная связность поперек джета выполняется, а при $f < 1$ — нет. Если граница джета имеет форму, задаваемую функцией $z = z(\varpi)$, где ϖ — цилиндрический радиус, то угол раскрытия джета определяется следующей формулой

$$\sin \theta_j = \frac{\partial \varpi}{\partial z} \left[1 + \left(\frac{\partial \varpi}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (5.3.4)$$

На рис. 18 представлена причинная функция для параболического джета (см [57]) $z \propto \varpi^2$, для джета с границей $z \propto \varpi^3$ и $z \propto \varpi^{3/2}$. В последнем случае

$f < 1$ на всех расстояниях. Таким образом, первые два джета причинно связаны, а последний - причинно не связан.

Цилиндрический подход позволяет использовать сетку характеристик для проверки причинной связности джета. Сначала рассмотрим параболический поток. В каждой его точке, начиная с границы, можно вычислить угол раскрытия конуса Маха, и таким образом построить точные характеристики. Угол раскрытия определяется по отношению к скорости потока. Хотя в цилиндрическом подходе все скорости имеют лишь z -компоненту, можно ввести ϖ -компоненту путем учета заданной формы магнитных поверхностей, которая для параболического потока определяется следующим соотношением

$$X = \sqrt{\varpi^2 + z^2} - z = \text{const}, \quad (5.3.5)$$

причем во внутренних областях джета для магнитного потока справедливо соотношение $\Psi = \Psi_0 X$. Таким образом, можно определить угол θ_1 между магнитной силовой линией и вертикалью, как $\text{tg}\theta_1 = |B_\varpi| / |B_z| = \partial\varpi / \partial z$. Тогда в заданной точке потока можно построить быструю магнитозвуковую характеристику, которая будет направлена под углом θ_F к определенному выше направлению потока. На рис. 19 представлена сетка характеристик для параболического потока, построенная описанным выше методом. Как хорошо видно из этого рисунка, характеристики достигают оси джета на расстоянии z не сильно отличающемся от расстояния z_0 (на котором находится точка выхода соответствующей характеристики с границы джета). Аналогичный результат получается и для джета с формой границы $z \propto \varpi^3$ (см. рис. 10). Но для джета с формой границы $z \propto \varpi^{3/2}$, напротив, каждая характеристика достигает оси джета на значительно больших расстояниях от его основания, чем z -координата точки выхода данной характеристики. Таким образом, для

джетов с формой границы $z \propto \varpi^2$ и $z \propto \varpi^3$ цилиндрический подход применим с хорошей точностью, тогда как для джетов с формой границы $z \propto \varpi^{3/2}$ цилиндрическое приближение не применимо.

Заключение.

Основные результаты, полученные в диссертационной работе:

1. Используя формализм уравнения Грэда-Шафранова в идеальной газодинамике, на примере задачи об аккреции вещества в форме диска без углового момента было показано, что при строгом учете вертикального движения без использования стандартных приближенных соотношений (2.0.1) и $u_\theta = 0$ особенность в уравнениях, описывающих тонкие трансзвуковые диски, находится на звуковой поверхности. Таким образом, отличие положения особой поверхности в уравнениях и звуковой поверхности, а также появление дополнительных особых поверхностей (см. например [26]) является следствием использования приближений, ограничивающих вертикальную структуру течения. Другой важный вывод состоит в том, что трансзвуковые течения могут существовать и для отрицательных значениях энергии связи E , что является существенно новым физическим эффектом, который не имеет места для радиального течения.
2. Было найдено значение аномального момента сил, действующих на вращающийся намагниченный шар в вакууме для разных вариантов структуры его внутреннего магнитного поля — однородного поля, поля магнитного диполя и комбинированного варианта — однородного поля в «ядре» и дипольного магнитным полем «прослойкой». В случае однородного поля внутри шара в формуле (3.1.5) $\xi = 1/3$, в случае дипольного поля $\xi = 0$. В комбинированном случае $\xi = \frac{8}{15} - \frac{1}{5} \frac{R}{R_{in}}$. Отличие же от предыдущих расчетов, по-видимому, связано с тем, что в них не бы-

ли корректно учтены токи коротации внутри звезды. Следует отметить, что для реальной магнитосферы радиопульсара в модели с магнитным диполем в центре звезды скачок нормальной компоненты электрического поля (а, значит, и поверхностный заряд) будут равны нулю. Следовательно, для нулевого продольного тока (вдоль магнитных силовых линий) в магнитосфере аномальный момент также будет отсутствовать ($\xi = 0$).

3. Было проведено исследование новой аналитической модели магнитосферы черной дыры, основанной на ранее не рассматривавшейся геометрии магнитных поверхностей: радиального магнитного поля вблизи горизонта и вертикального поля на больших расстояниях от черной дыры. Показано, что при наличии плотной сердцевины вблизи оси джета имеет место отличное согласие рассмотренной модели с результатами численного моделирования. И это при том, что аналитические расчеты были выполнены в рамках простейшего бессилового приближения, а также в предположении об осесимметричности и стационарности течения, тогда как в работе Маккини и др. [32] проводилось трехмерное численное моделирование в полной МГД версии, учитывающее нестационарность рассматриваемых течений. Хорошее согласие между теорией и результатами численного моделирования еще раз показывает, что осесимметричные стационарные течения, для которых за последние три десятка лет удалось получить достаточно много аналитических результатов, остаются хорошей основой для анализа процессов, происходящих в реальных астрофизических источниках.
4. По наблюдательным данным видимого сдвига ядра джета для 20 ис-

точников были определены основные параметры струйных выбросов - параметр намагниченности σ и параметр множественности рождения λ . Значения параметра λ (порядка $10^{13} - 10^{14}$) хорошо согласуются со значениями плотности электронов n_e , найденной другим способом в работе [33]. Кроме того, значения параметра σ (характерные значения порядка 30) согласуются с оценками Лоренц-фактора джетов по VLBI-наблюдениям [34] и измерениям радио-переменности [35]. Для характерных значений параметров σ и λ в рамках модели цилиндрического струйного выброса удастся полностью определить внутреннюю структуру джета. В частности, было показано, что магнитное поле на оси джета значительно больше, чем на его границе, а также, что лоренц-фактор постепенно выходит на насыщение, причем ускорение на 60–100 пк имеет значения около $\dot{\gamma}/\gamma = 10^{-3}$, что отлично согласуется с результатами VLBI-исследований ускорения джетов в активных галактических ядрах [74].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю В.С. Бескину за постановку задач, помощь и постоянное внимание к работе, соавторам работ В.И. Парьеву, Е.Е. Нохриной, Ю.Ю. Ковалеву, а также А.Д. Чеховскому за предоставленные данные численного моделирования, А.В. Колдобе и М.В. Баркову за помощь в изучении численных методов, Д.Н. Собьянину, С.В. Чернову за полезное обсуждение.

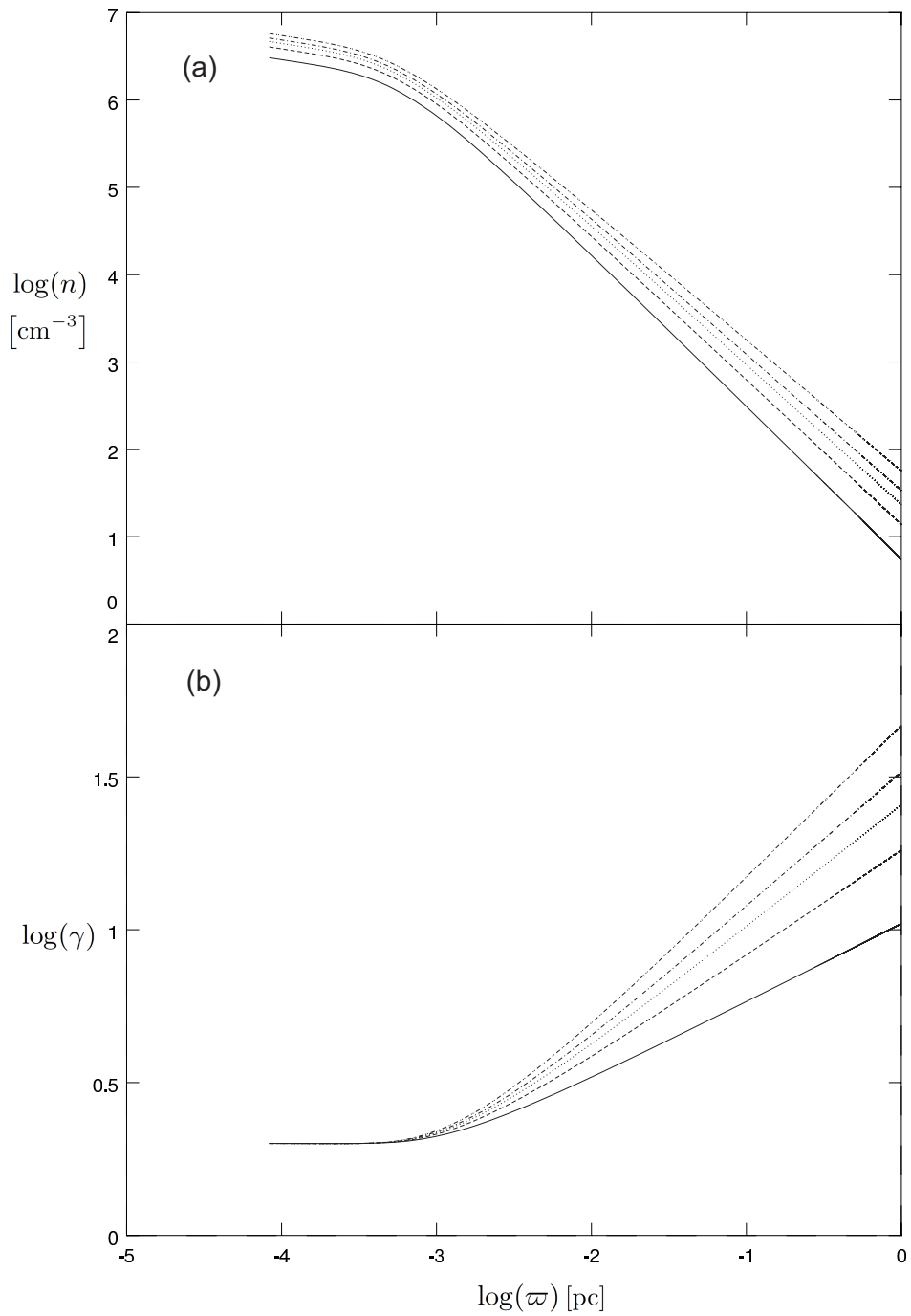


Рис. 5.1. Поперечные профили концентрации и лоренц-фактора при $\lambda = 10^{13}$, радиус джета $R_{\text{jet}} = 1$ пк, при пяти характерных значениях параметра σ : 5 (сплошная линия), 10 (штриховая линия), 15 (пунктирная линия), 20 (штрих-пунктирная линия) и 30 (штрих два пунктира).

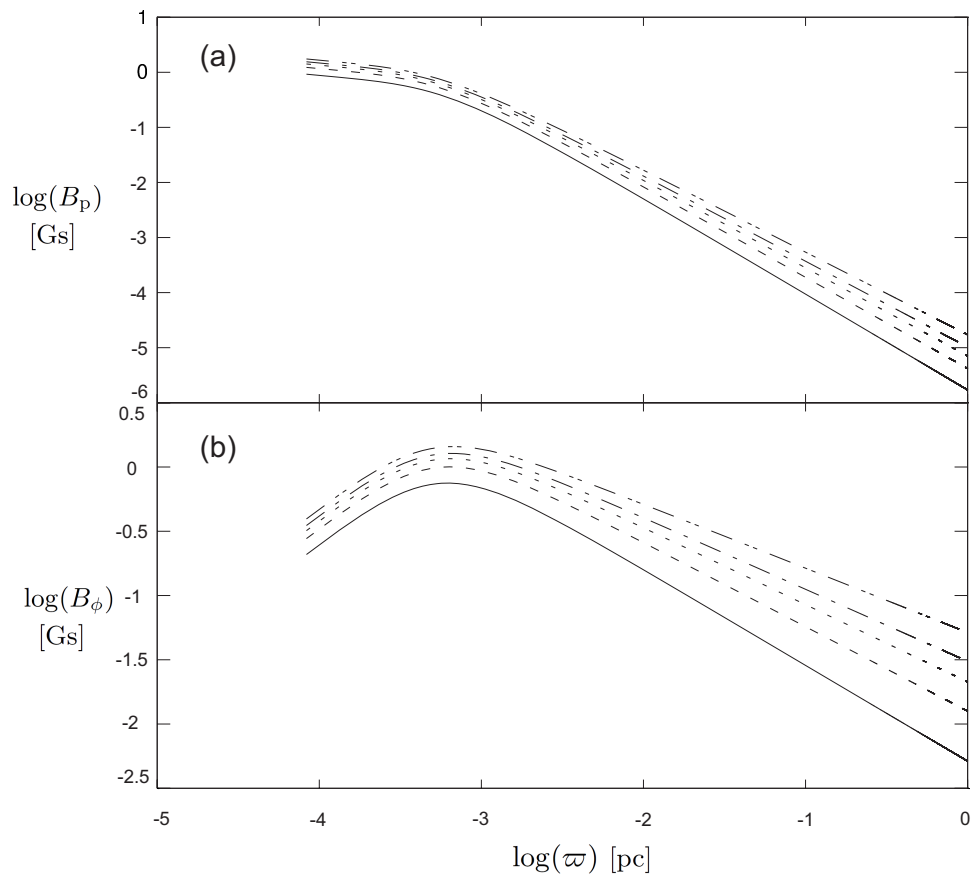


Рис. 5.2. Поперечные профили полоидальной (а) и тороидальной (b) компонент магнитного поля при тех же параметрах, что и на рисунке 8.

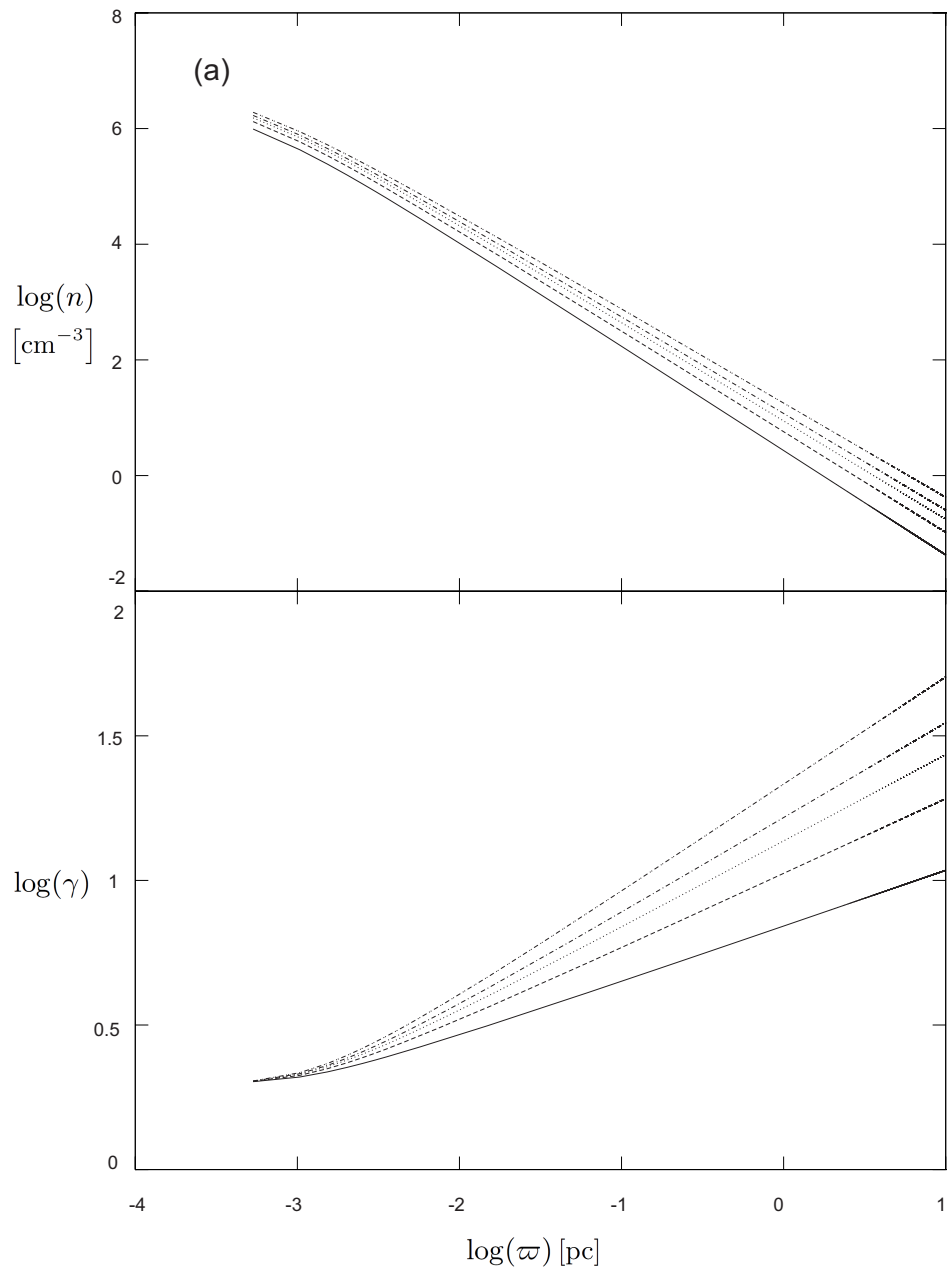


Рис. 5.3. Поперечные профили концентрации и лоренц-фактора при тех же параметрах, что и на рисунке 8, но при $R_j = 10$ пк.

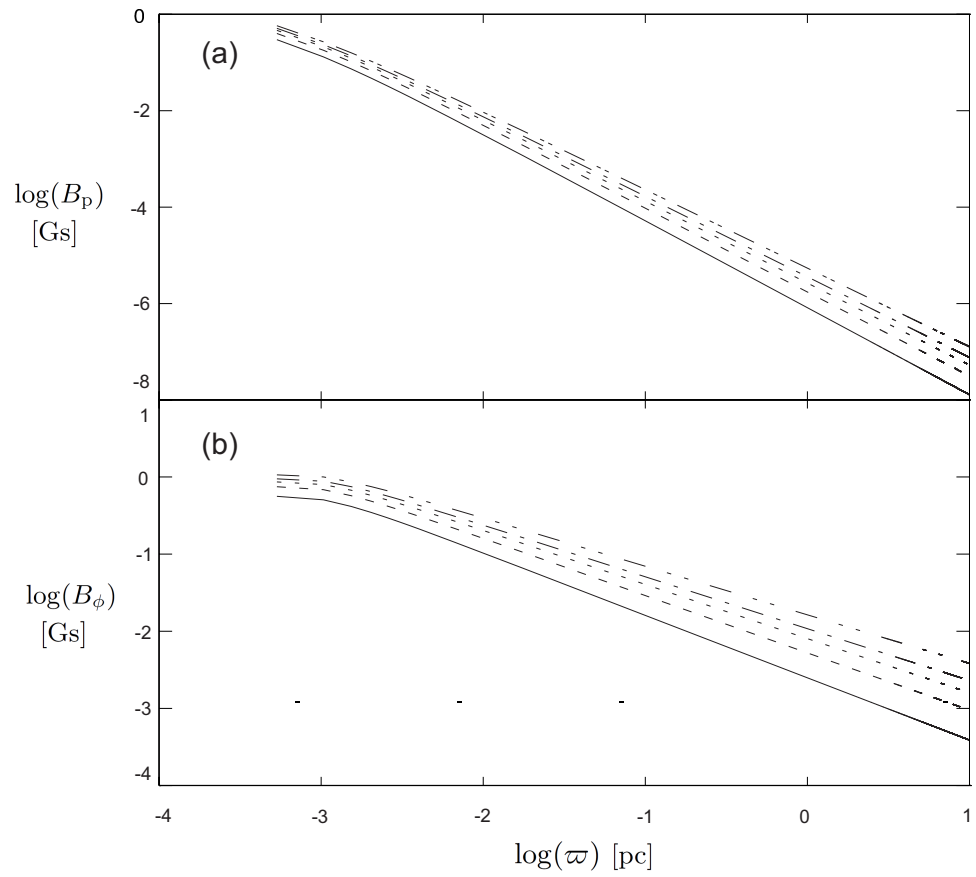


Рис. 5.4. Поперечные профили полоидальной (a) и тороидальной (b) компонент магнитного поля при тех же параметрах, что и на рисунке 8, но при $R_j = 10$ пк.

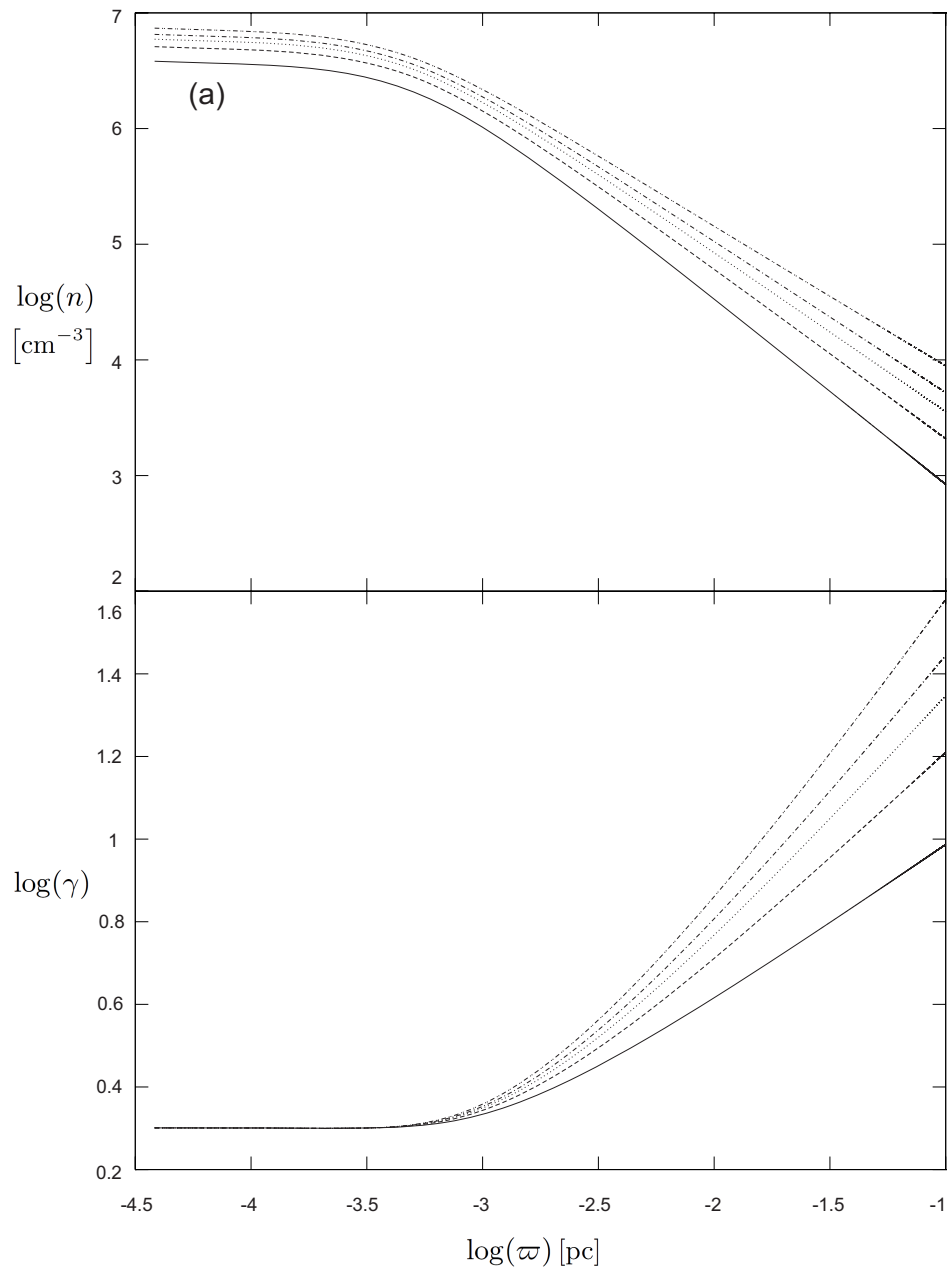


Рис. 5.5. Поперечные профили концентрации и лоренц-фактора при тех же параметрах, что и на рисунке 8, но при $R_j = 0.1$ пк.

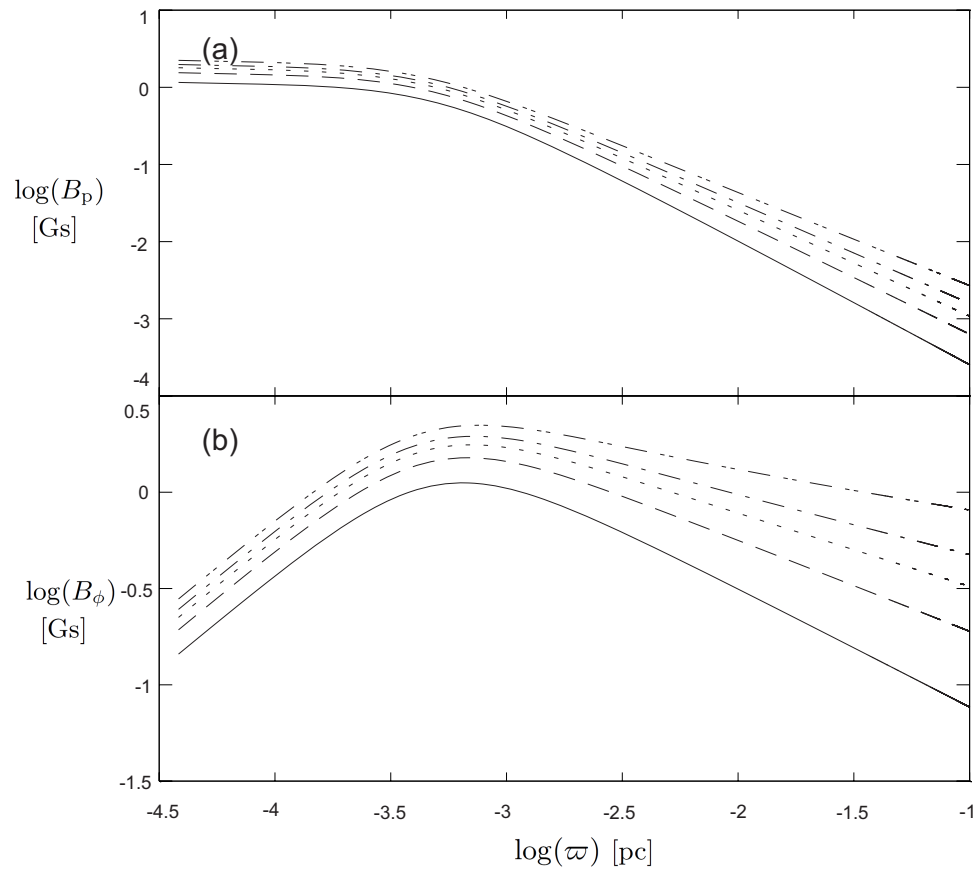


Рис. 5.6. Поперечные профили полоидальной (a) и тороидальной (b) компонент магнитного поля при тех же параметрах, что и на рисунке 8, но при $R_j = 0.1$ пк.

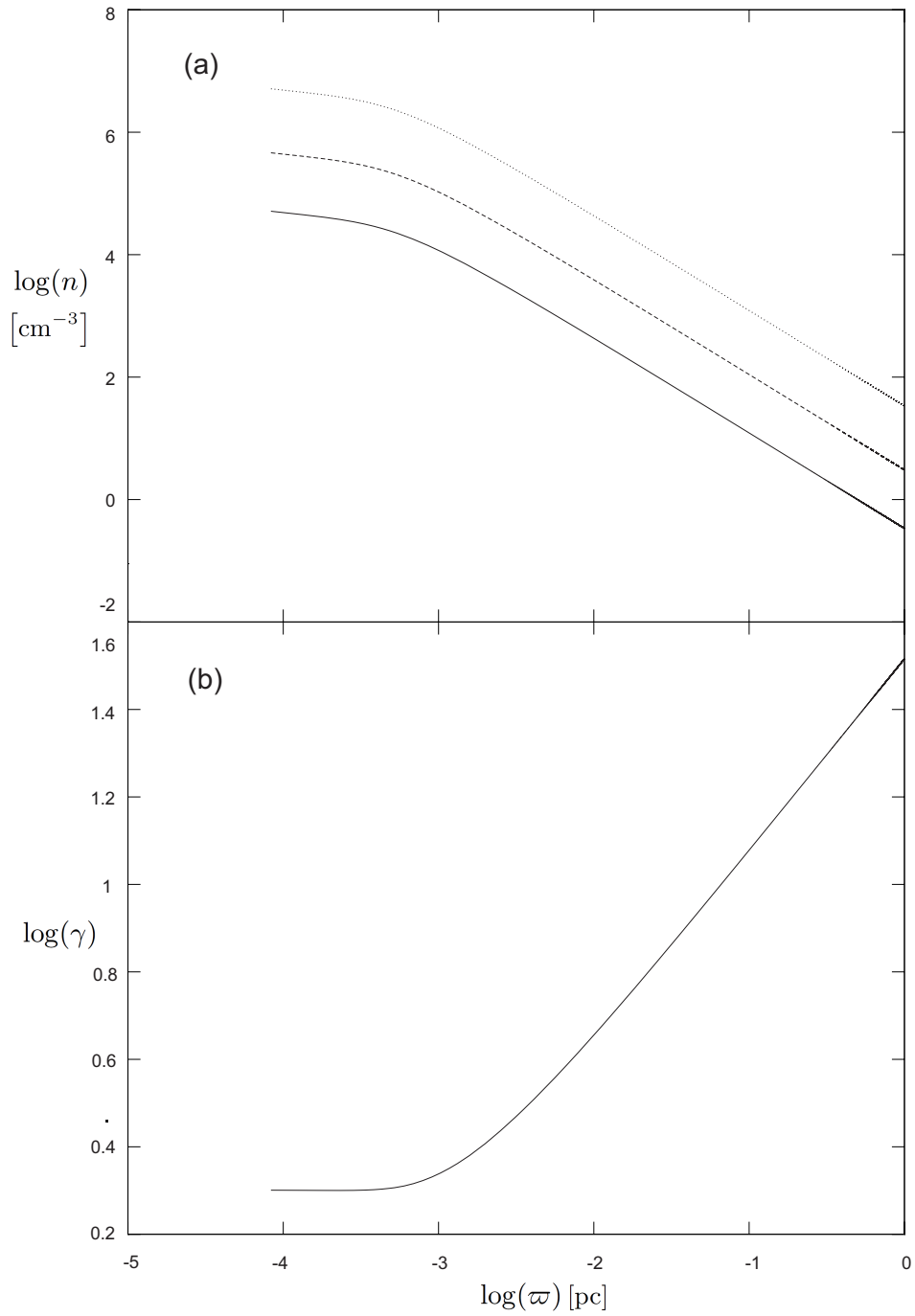


Рис. 5.7. Поперечные профили концентрации (а) и лоренц-фактора (б) при $\sigma = 20$, радиусе джета $R_j = 1$ пк и трех разных значениях λ : 10^{12} (сплошная линия), $3 \cdot 10^{12}$ (штриховая линия) и 10^{13} (пунктирная линия).

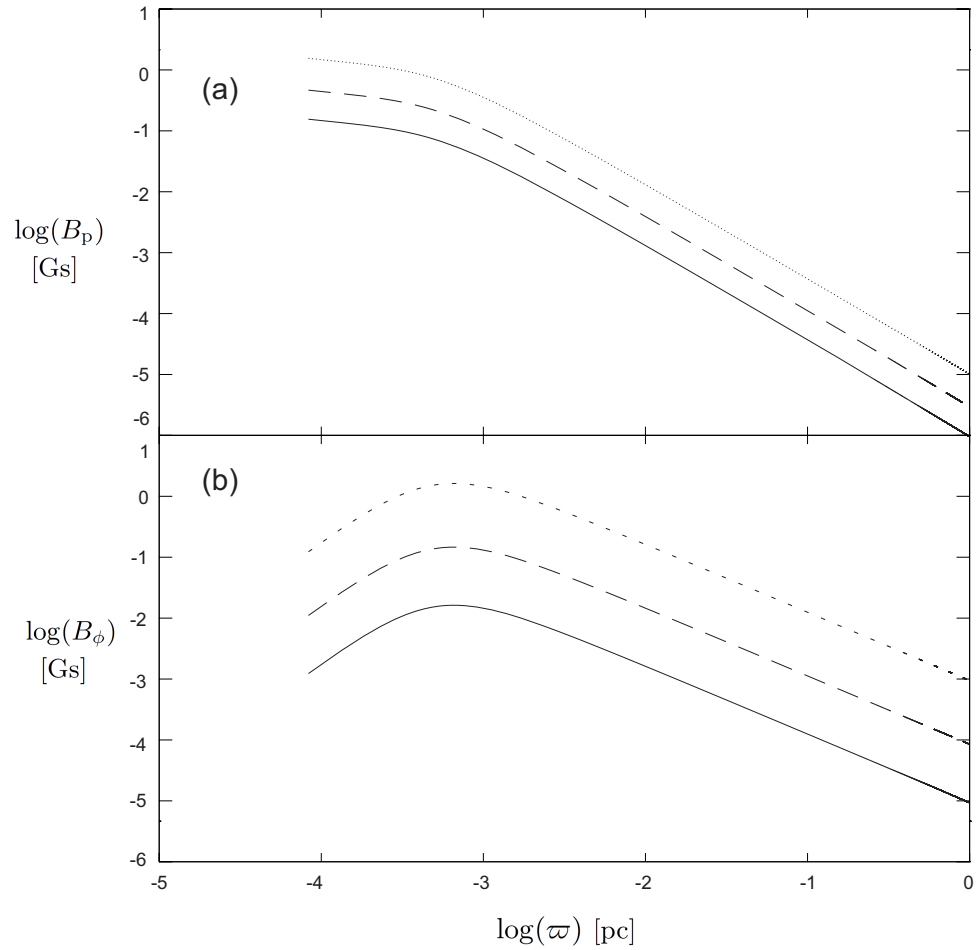


Рис. 5.8. Поперечные профили полоидальной (а) и тороидальной (б) компонент магнитного поля при $\sigma = 20$, радиусе джета $R_j = 1$ пк и трех разных значениях λ : 10^{12} (сплошная линия), $3 \cdot 10^{12}$ (штриховая линия) и 10^{13} (пунктирная линия).

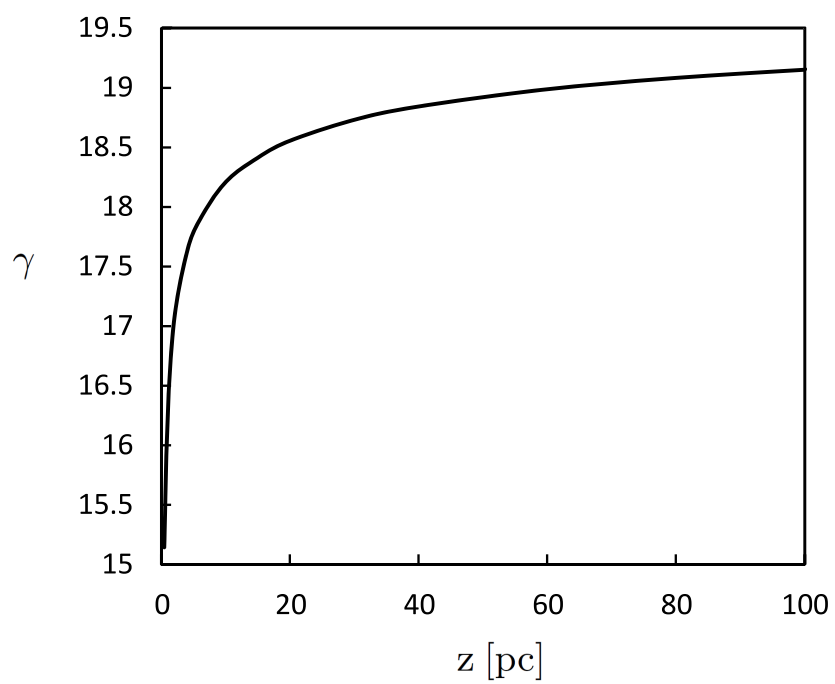


Рис. 5.9. Зависимость Лоренц-фактора от координаты вдоль джета в предположении конической формы джета.

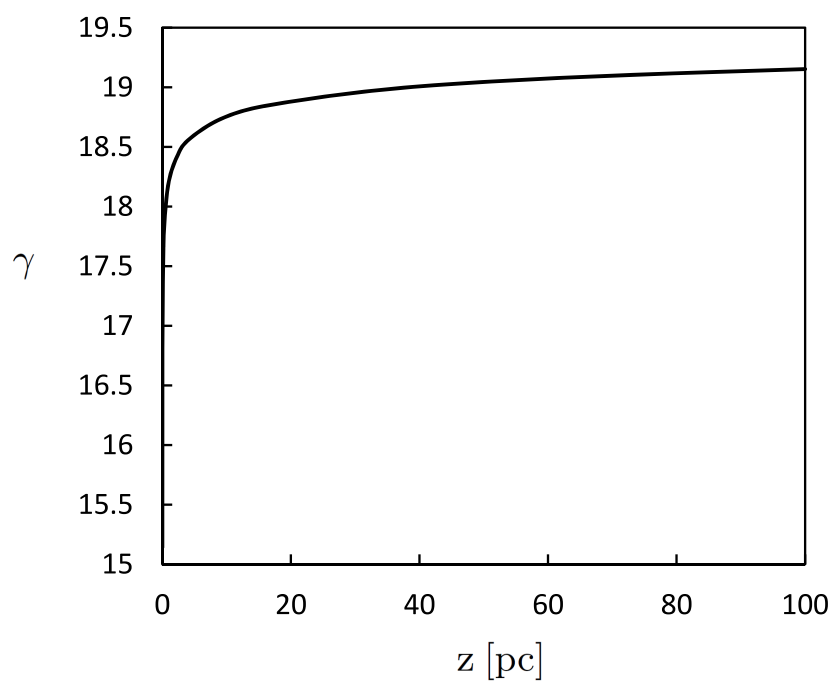


Рис. 5.10. Зависимость Лоренц-фактора от координаты вдоль джета в предположении параболической формы джета.

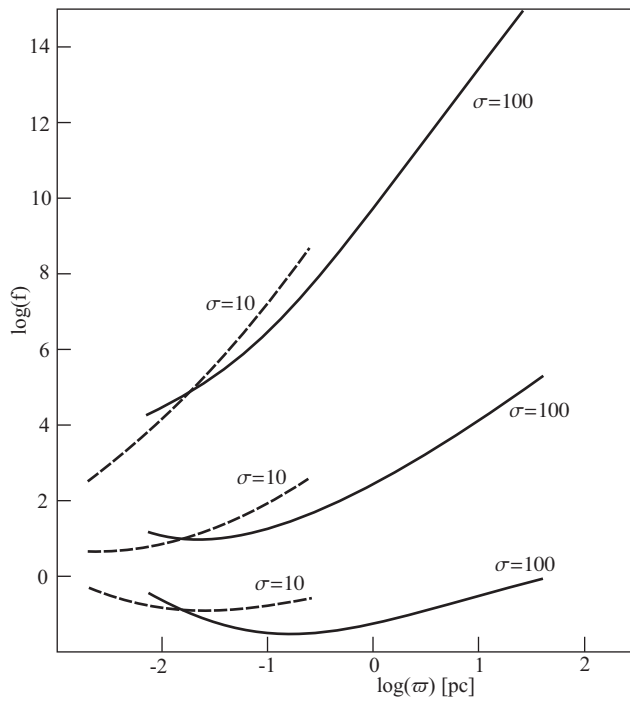


Рис. 5.11. Причинная функция f для разных вариантов границы джета. Верхняя кривая соответствует $z \propto \varpi^3$, средняя — $z \propto \varpi^2$, и нижняя — $z \propto \varpi^{3/2}$.

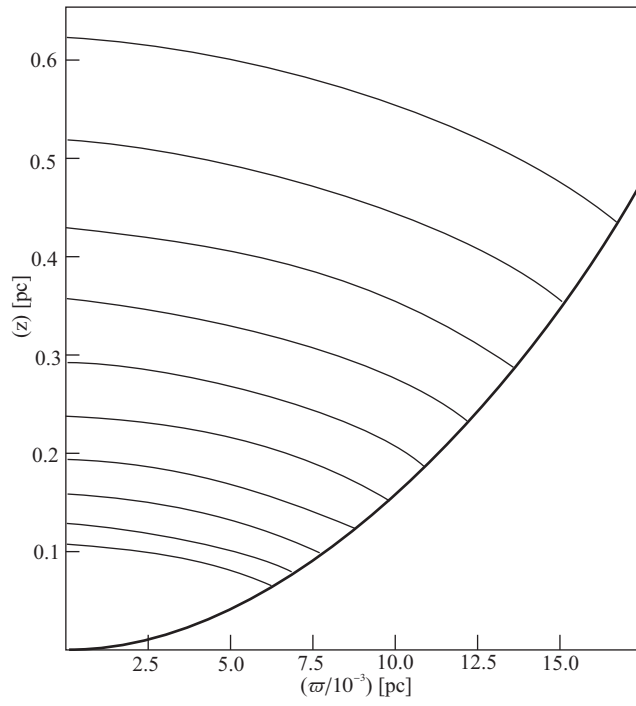


Рис. 5.12. Сетка характеристик для параболического потока. $z \propto \varpi^2$.

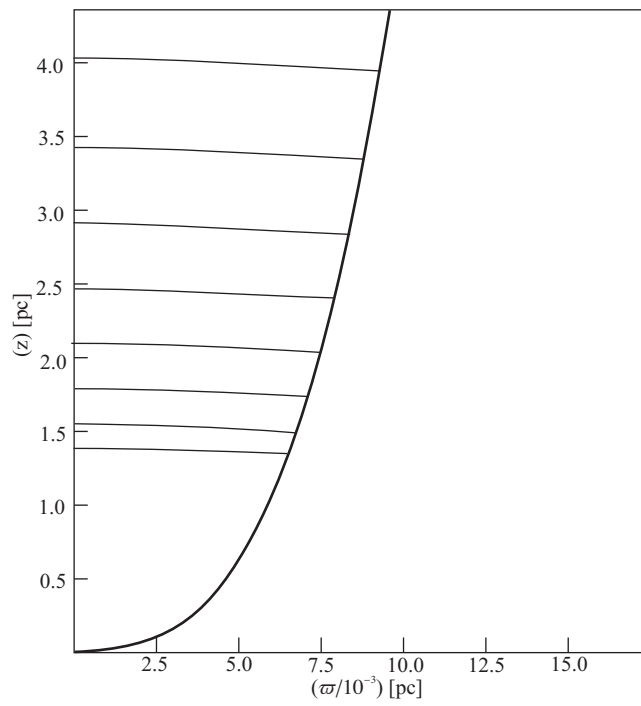


Рис. 5.13. Сетка характеристик для потока с границей $z \propto \varpi^3$.

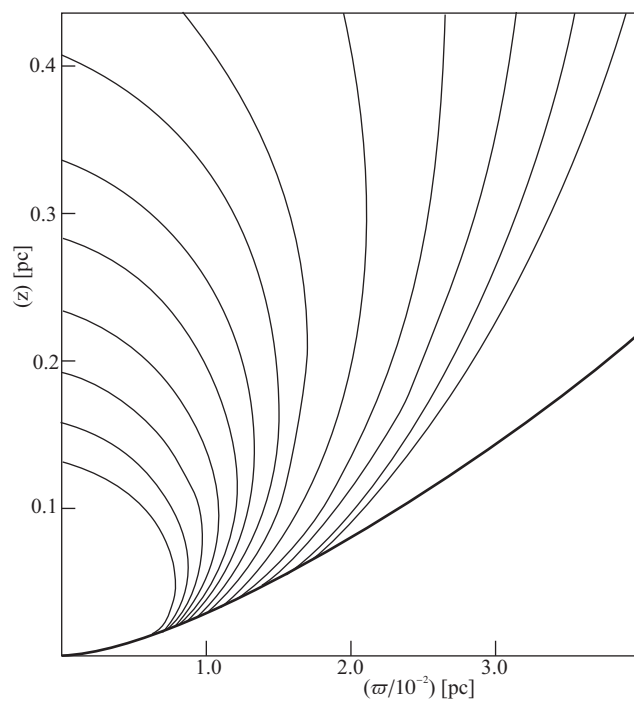


Рис. 5.14. Сетка характеристик для потока с границей $z \propto \varpi^{3/2}$.

Литература

- [1] С. Шапиро, С. Тьюколски *Черные дыры, белые карлики, нейтронные звезды*. М.: Мир, 1985.
- [2] P. Goldreich , W. H. Julian, *ApJ*, **157**, 869 (1969)
- [3] F.C. Michel, *ApJ*, **158**, 727 (1969)
- [4] R.D. Blandford, *MNRAS*, **176**, 465 (1976)
- [5] R.V.E. Lovelace, *Nature*, **262**, 649 (1976)
- [6] M.C. Begelman, R.D. Blandford, M.J. Rees, *Rev. Mod. Phys.*, **56**, 255 (1984)
- [7] M.J. Rees, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **22**, 471 (1984)
- [8] В.С. Бескин *Осесимметричные стационарные течения в астрофизике*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
- [9] V.P. Frolov, I.D. Novikov *Black hole physics : basic concepts and new developments*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [10] G.S. Bisnovatyi-Kogan, A.A. Ruzmaikin, *Astrophys. Space Sci.*, **28**, 45 (1974)
- [11] G.S. Bisnovatyi-Kogan, A.A. Ruzmaikin, *Astrophys. Space Sci.*, **42**, 401 (1976)
- [12] W. Junor, J.A. Biretta, M. Livio, *Nature*, **401**, 891 (1999)
- [13] W. Junor, J.A. Biretta, *Astron. J.*, **109**, 500 (1995)
- [14] R.D. Blandford, M.J. Rees, *MNRAS*, **169**, 395 (1974)

- [15] A.C. Fabian, M.J. Rees, *MNRAS*, **277** L55 (1995)
- [16] A.Y.S. Cheng, S.L. O'Dell, *ApJ*, **251**, L49 (1981)
- [17] D. Proga, J.M. Stone, T.R. Kallman, *ApJ*, **543**, 686 (2000)
- [18] G. Ghisellini et al., *ApJ*, **362**, L1 (1990)
- [19] A. Königl, J.F. Kartje, *ApJ*, **434**, 446 (1994)
- [20] R.D. Blandford, R.L. Znajek, *MNRAS*, **179**, 433 (1977)
- [21] H. Bondi, F. Hoyle, *MNRAS*, **104**, 273 (1944)
- [22] H. Bondi, *MNRAS*, **112**, 195 (1952)
- [23] E.N. Parker, *ApJ*, **128**, 664 (1958)
- [24] N.I. Shakura, R.A. Sunyaev, *Astronomy and Astrophysics*, **24**, 337 (1973)
- [25] B. Paczynski, G. Bisnovatyi-Kogan, *Acta Astron.*, **31**, 283 (1981)
- [26] I.V. Artemova, G.S. Bisnovatyi-Kogan, I.V. Igumenshchev, I.D. Novikov, *ApJ*, **549**, 1050 (2001)
- [27] H. Riffert, H. Herold, *ApJ*, **450**, 508 (1995)
- [28] A.M. Beloborodov, *MNRAS*, **297**, 739 (1998)
- [29] S.S. Doeleman, V.L. Fish, D.E. Schenck et al., *Science*, 10.1126 (2012)
- [30] Н.С. Кардашев, *УФН*, **179**, 1191 (2009)
- [31] В.С. Бескин, Я.Н. Истомина, В.И. Парьев, *АЖ*, **69**, 1258 (1992)

- [32] J.C. McKinney, A. Tchekhovskoy, R.D. Blanford, *MNRAS*, **423**, 3083 (2012)
- [33] A.P. Lobanov, *Astron. and Astrophys.*, **330**, 79 (1998)
- [34] M.H. Cohen, M.L. Lister, D.C. Homan, M. Kadler, K.I. Kellermann, Y.Y. Kovalev, R.C. Vermeulen, *ApJ*, **658**, 232 (2007)
- [35] T. Hovatta, E. Valtaoja, M. Tornikoski, A. Lähteenmäki, *Astron. and Astrophys.*, **498**, 723 (2009)
- [36] V.S. Beskin, *Phys. Usp.*, **40**, 659 (1997)
- [37] В.С. Бескин, *УФН*, **180**, 1241 (2010)
- [38] V.C.A. Ferraro, *MNRAS*, **97**, 458 (1937)
- [39] K.S. Thorne, D. MacDonald, *MNRAS*, **198**, 339 (1982)
- [40] S.K. Chakrabarti, *ApJ*, **347**, 365 (1989)
- [41] S.K. Chakrabarti, *ApJ*, **464**, 664 (1996)
- [42] В. С. Бескин, А. А. Желтоухов, В. И. Парьев, *Астрономический Журнал*, **89**, вып. 1, 3-11 (2012).
- [43] Э. Хайпер, С. Нерсетт, Г. Ваннер *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи*. М.: Мир, 1990.
- [44] A.J. Deutsch, *Annales d'Astrophysique*, **18**, 1 (1955).
- [45] J.P. Ostriker, J.E. Gunn, *ApJ*, **458**, 347 (1969).
- [46] L. Davis, M. Goldstein, *ApJ*, **159**, L81 (1970).

- [47] P. Goldreich, *ApJ*, **160**, L11 (1970).
- [48] A. Melatos, *MNRAS*, **313**, 217 (2000).
- [49] M.L. Good, K.K. Ng, *ApJ*, **299**, 706 (1985).
- [50] L. Mestel, D. Moss, *MNRAS*, **361**, 595 (2005).
- [51] F.C. Michel, *Theory of neutron star magnetospheres* Chicago:University of Chicago Press (1991)
- [52] Ya.N. Istomin in *Progress in Neutron Star Research*, A.P.Wass (Ed.), New-York: Nova Science Publisher (2005) p.27.
- [53] В. С. Бескин, А. А. Желтоухов, А.К. Обухова, Е.Е. Стройнов, *Краткие сообщения по физике*, **40**, вып. 9, 22-27, (2013).
- [54] Punsly B. *Black hole gravitohydrodynamics*. Berlin:Springer, 2001.
- [55] В. С. Бескин, А. А. Желтоухов, *Письма в Астрономический Журнал*, **39**, 243-248, (2013)
- [56] Ya.N. Istomin, V.I. Pariev, *MNRAS*, **267**, 629 (1994)
- [57] V.S. Beskin, E.E. Nokhrina, *MNRAS*, **397**, 1486 (2009)
- [58] S. Komissarov, M. Barkov, N. Vlahakis, A. Königl, *MNRAS*, **380**, 51 (2006)
- [59] A. Tchekhovskoy, J. McKinney, R. Narayan, *ApJ*, **699**, 1789 (2009)
- [60] O. Porth, Ch. Fendt, Z. Meliani, B. Vaidya, *ApJ*, **737**, 42 (2011)
- [61] V.S. Beskin, Ya.N. Istomin, V.I. Pariev, *Sov. Astron.*, **36**, 642 (1992)

- [62] K. Hirotani, I. Okamoto, *ApJ*, **497**, 563 (1998)
- [63] R.J. Gould, *Astron. and Astrophys.*, **76**, 306 (1979)
- [64] R. Blandford, A. Königl, *ApJ*, **232**, 34 (1979)
- [65] A.P. Marscher, *ApJ*, **264**, 296 (1983)
- [66] K. Hirotani, *ApJ*, **619**, 73 (2005)
- [67] Y.Y. Kovalev, A.P. Lobanov, A.B. Pushkarev, J.A. Zensus, *Astron. and Astrophys.*, **483**, 759 (2008)
- [68] K.V. Sokolovsky et al., *Astron. and Astrophys.*, **532**, A38 (2011)
- [69] A.B. Pushkarev, T. Hovatta, Y.Y. Kovalev, et al., *Astron. and Astrophys.*, **545**, A113 (2012)
- [70] E. Komatsu, J. Dunkley, M.R. Nolta, et al., *ApJS*, **180**, 330, (2009)
- [71] S.G. Jorstad et al., *Astron. J.*, **130**, 1418 (2005)
- [72] V.S. Beskin, L.M. Malyshkin, *Astron. Lett.*, **26**, 4 (2000)
- [73] Yu.E. Lyubarsky, *ApJ*, **308**, 1006 (2009)
- [74] D.C. Homan, M. Kadler, K.I. Kellermann, Y.Y. Kovalev, M.L. Lister, E. Ros, T. Savolainen, J.A. Zensus, *ApJ*, **706**, 1253 (2009)
- [75] S.S. Komissarov, N. Vlahakis, A. Königl, M.V. Barkov, *MNRAS*, **394**, 1182 (2009)