

ГУБЕРНОВ ВЛАДИМИР ВЛАДИМИРОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФУЗИОННО-ТЕПЛОВОЙ
УСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН ГОРЕНИЯ В МОДЕЛЯХ
ПЕРЕМЕШАННОГО ПЛАМЕНИ С
ДВУХСТУПЕНЧАТЫМ ЦЕПНЫМ МЕХАНИЗМОМ
РЕАКЦИИ**

Специальность

01.04.02 — Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена в Отделении теоретической физики им.И.Е.Тамма Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Лобанов Алексей Иванович

доктор физико-математических наук,
профессор
Минаев Сергей Сергеевич

доктор физико-математических наук,
член-корр. РАН, профессор
Трубецков Дмитрий Иванович

Ведущая организация: Механико-математический факультет МГУ
имени М.В.Ломоносова (г. Москва)

Защита состоится “ 24 ” ФЕВРАЛЯ 2013г. в ____ ч. ____ мин. на заседании диссертационного совета Д 002.023.02 в Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991 Россия, Москва Ленинский проспект, 53

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического института им. П.Н. Лебедева РАН

Автореферат разослан “ ____ ” _____ 2013г.

Ученый секретарь Диссертационного совета Д 002.023.02
Доктор физико-математических наук

профессор Я.Н. Истомин



ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации

Модели типа реакция-диффузия описывают широкий спектр явлений в физике, химии и биофизике, связанных с образованием сложных пространственно-временных структур. В горении так же наблюдаются самые разнообразные формы пространственно-временной самоорганизации (см. работы Я. Б. Зельдовича, А. Г. Мержанова, Г. И. Сивашинского, П. Клавина и др. [1, 2, 3, 4]). Многообразие различных видов нелинейных волн включает в себя бегущие волны горения, пульсирующие волны горения, ячеистое пламя, радиальные и спиральные волны, образование локализованных очагов горения – горячих точек, которые обладают богатым динамическим поведением, вращающиеся волны, стоячие (или симметричные) волны, сферическое пламя, квазистационарные режимы горения, пространственно-временной хаос и т.д.

Изучение нелинейно-волновых процессов в системах типа реакция-диффузия насчитывает не один десяток лет. В целом достигнуто понимание механизмов формообразования для сравнительно простых моделей, описываемых системами двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Увеличение степеней свободы может приводить к появлению других, более сложных сценариев и механизмов образования пространственно-временных структур, которые не изучены по настоящий момент. Исследование систем, описываемых тремя и более уравнениями в частных производных, является актуальной проблемой физики нелинейно-волновых процессов. Похожая ситуация наблюдается и в теории процессов горения.

Формирование различных сложных динамических структур тесно связано с пространственно-временными неустойчивостями нелинейных волн горения, это подчеркивает необходимость развития фундаментального понимания природы и механизмов возникновения неустойчивости. В области теории горения подобные исследования ведутся довольно давно и одним из наиболее важных результатов данных исследований явилось понимание того, что во многих случаях для описания возникновения неустойчивостей при горении газов, аэрозолей, твердых тел достаточно учитывать два основных процесса: диффузию, участвующих в реакции веществ, и теплопроводность с одной стороны, и выделение энергии в ходе химических реакций с другой. В данном приближении другие процессы, связанные, например, с тепловым расширением веществ при нагревании качественно не влияют на картину возникновения неустойчивости. Модели, полученные в данном приближении, обычно носят название диффузионно-тепловых.

К настоящему моменту свойства и устойчивость процессов горения в одноступенчатых диффузионно-тепловых моделях подробно исследованы как аналитически, так и численно. Математически данные модели описываются системой двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Было показано, что как в горючих смесях, так и в диффузионном пламени существует фундаментальное автоволновое ре-

шение в виде плоской бегущей или стоячей волны соответственно. При изменении параметров данные решения могут терять устойчивость таким образом, что решение либо затухает, либо возникают более сложные режимы горения такие, как пульсирующие волны или ячеистое пламя. Данные эффекты были аналитически исследованы на основе приближения высокой энергии активации. Помимо этого существует целый ряд работ, где авторы проводят численный анализ устойчивости пламени в рамках одноступенчатой модели. Эти работы в частности показали, что существуют и более сложные пространственно-временные решения типа горячих точек, спиральных волн и т.д. Механизмы возникновения таких решений до конца не изучены.

Одноступенчатые модели позволяют качественно объяснить многие экспериментально наблюдаемые эффекты, однако, не позволяют получить удовлетворительное количественное описание наблюдаемых в эксперименте явлений. Помимо этого, некоторые экспериментально наблюдаемые явления не могут быть описаны в рамках моделей с одноступенчатой кинетикой. Это связано с тем, что в реальности любой процесс горения включает в себя множество шагов каждый со своими промежуточными химическими соединениями, которые должны быть учтены, если мы хотим получить реалистическое описание кинетики пламени. Таким образом, для понимания механизмов генерации пространственно-временных структур в данных системах необходимо увеличение степеней свободы. В частности, необходимо рассмотрение более сложных кинетических схем реакции горения. Механизмы возникновения неустойчивостей в более сложных системах - моделях с двухступенчатыми реакциями до конца не изучены по настоящий момент. Данные вопросы носят фундаментальный характер и их прояснение необходимо для понимания, как динамики процессов горения, так и общих закономерностей структурообразования в моделях типа реакция-диффузия.

Несмотря на то, что есть некоторый задел [5] в исследовании устойчивости волн горения для моделей ламинарного перемешанного пламени с двухступенчатой кинетикой реакции, существует целый класс задач, связанный с моделями пламени с двухступенчатым цепным механизмом реакции, для которых данный вопрос практически не был затронут ранее. Пламена с цепным разветвленным механизмом реакции принципиально не могут быть описаны в рамках одноступенчатого приближения и для своего описания требуют как минимум две реакции в кинетической схеме. Таким образом, модели с двухступенчатым цепным механизмом являются минимальным фундаментальным представлением данного класса задач. Другим не менее важным обстоятельством является то, что большинство практически важных углеводородных пламен идут по схеме с цепным механизмом реакции [1]. Это еще раз подчеркивает важность и актуальность исследования устойчивости и формирования сложных пространственно-временных режимов горения в моделях с двухступенчатым цепным кинетическим механизмом. В этой связи отметим ряд аспектов, имеющих как

фундаментальное, так и прикладное значение.

В ближайшие десятилетия использование процессов горения углеводородного топлива в качестве одного из основных источников энергии неизбежно. На сегодняшний день на первый план выходят вопросы повышения эффективности и снижения выбросов при сгорании различных видов топлива, что в частности связано с переходом в режимы горения, близкие к пределам воспламенения, например, при горении обедненных смесей и в микрогорении [6, 7, 8]. С приближением к границам гашения пламени первостепенными становятся вопросы устойчивости и формирования сложных пространственно-временных режимов горения. Исследование устойчивости распространения ламинарных волн горения в заранее перемешанных смесях является одной из фундаментальных задач, лежащих в этом русле, которой посвящена работа.

Возникновение и развитие неустойчивостей с одной стороны приводит к утечке топлива, неполному выгоранию и динамическому гашению волн горения [9, 10], что связано с вопросами энергоэффективности, экологической и технологической безопасности и носит нежелательный характер. С другой стороны сложные пространственно-временные режимы горения чрезвычайно чувствительны к параметрам процесса и могут быть использованы для задач диагностики, так же пульсирующие режимы горения предполагается использовать в области микрогенерации, где по прежнему нет альтернативы углеводородам по плотности энергии, при создании источников питания переменного тока в связке с термоэлектрическим эффектом [11].

В последние годы наблюдается возросший интерес к моделированию горения водорода, вызванный перспективами развития водородной энергетики, двигателей на водороде и вопросам безопасности использования водорода. Все это требует дальнейшего развития понимания процессов горения водорода и фундаментальных проблем, связанных с этим: воспламенения, дефлаграции водород-воздушной смеси, диффузионного горения водорода и т. д. Исследование скорости, структуры, устойчивости волн горения, возникновения сложных динамических режимов распространения пламени и пределов воспламенения безусловно является одной из фундаментальных задач в этом ряду. Существует ряд моделей, как феноменологических, так и редуцированных с двухступенчатым цепным механизмом реакции, описывающих распространение волн горения в водород-воздушных смесях, которые могут быть применены для решения указанных задач.

Цели и задачи исследования Целью данной диссертационной работы является систематическое исследование скорости, структуры, устойчивости волн горения, возникновения сложных пространственно-временных режимов распространения пламени, роли подобных динамических структур в гашении дефлаграции, пределов воспламенения в моделях распространения ламинарного пламени в заранее перемешанных смесях в рамках моделей с двухступенчатым цепным кинетическим механизмом реакции.

В соответствии с общей целью исследования были поставлены и реализованы следующие основные задачи:

1. Разработка методов и численных алгоритмов исследования устойчивости решений в виде бегущих волн для моделей, описываемых тремя и более уравнениями в частных производных второго порядка, в одно-, двух- и трехмерной пространственной геометрии путем обобщения метода функции Эванса с целью получения методики, которая может быть использована для анализа устойчивости волновых решений широкого класса физических, химических и биологических моделей, описываемых уравнениями типа реакция-диффузия со сложной кинетикой.
2. Исследовать свойства, структуру и устойчивость решений в виде бегущих волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта, описывающей распространение ламинарного пламени в заранее перемешанной смеси с цепным двухступенчатым кинетическим механизмом и реакцией рекомбинации первого порядка по концентрации радикалов, как в адиабатическом случае, так и с учетом тепловых потерь. В пространстве параметров установить область существования, границы воспламенения и устойчивости бегущих волн горения, а так же типы и свойства бифуркаций, приводящих к затуханию волны горения и потере устойчивости.
3. В рамках модели Зельдовича-Баренблатта исследовать свойства и структуру решений, возникающих при потере устойчивости бегущих волн горения в одномерной и двухмерной пространственной геометрии. Используя одномерную формулировку задачи, детально исследовать свойства пульсирующих волн горения таких, как последовательность бифуркаций удвоения периода, переход к хаосу и свойства хаотических режимов, установить влияние и роль пульсаций на сценарий динамического гашения пламени, а так же изучить механизм, приводящий к динамическому гашению.
4. Исследовать свойства, структуру и устойчивость решений в виде бегущих волн горения в модели Зельдовича-Линяна, описывающей распространение ламинарного пламени в заранее перемешанной смеси с цепным двухступенчатым кинетическим механизмом и реакцией рекомбинации второго порядка по концентрации радикалов. В пространстве параметров установить область существования, границы воспламенения и устойчивости бегущих волн горения, а так же типы и свойства бифуркаций, приводящих к затуханию волны горения и потере устойчивости, и исследовать свойства и структуру решений, возникающих при потере устойчивости бегущих волн горения в одномерной и двухмерной пространственной геометрии.
5. На основе проведенного рассмотрения установить каким образом кинетика реакции рекомбинации радикалов влияет на сценарии затуха-

ния и потери устойчивости бегущих волн горения в рамках моделей с цепным механизмом реакции.

6. Используя рассмотренные модели типа Зельдовича-Баренблатта и Зельдовича-Линяна, а так же модели с редуцированной двухступенчатой кинетикой такие, как модель Клавина-Линяна, исследовать скорость распространения, структуру и устойчивость волн горения в богатой смеси водорода и воздуха вблизи предела воспламенения.

Научная новизна

- Впервые детально исследована структура волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта и установлено, что в адиабатическом пределе в зависимости от числа Льюиса для топлива возможно два сценария затухания пламени: либо скорость волны горения стремиться к нулю при конечных значениях параметров, либо затухание происходит в результате бифуркации складки при конечной скорости волны горения. Показано, что вблизи предела затухания волны горения ее структура носит характер режима быстрой, а вдали от предела затухания, режима медленной рекомбинации. В пространстве параметров найдена граница затухания и исследовано каким образом параметры модели влияют на ее расположение.
- Исследована устойчивость волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта, установлены типы бифуркаций, приводящих к потере устойчивости, в пространстве параметров найдена нейтральная граница устойчивости и изучены сложные пространственно-временные режимы распространения пламени, возникающие в результате потери устойчивости бегущих волн горения.
- Методами нелинейной динамики исследовано возникновение хаотических режимов распространения волн горения в результате каскада бифуркаций удвоения периода по сценарию Фейгенбаума, что характеризуется непрерывным Фурье спектром наблюдаемых динамических переменных, случайным нерегулярным распределением изображающих точек на сечении Пуанкаре и положительным максимальным показателем Ляпунова. Так же было продемонстрировано, что область с хаотическим режимом имеет конечную ширину в пространстве параметров и сменяется затуханием при дальнейшем увеличении параметра критичности.
- Впервые теоретически найден и исследован сценарий динамического затухания волн горения, приводящий к исчезновению хаотического режима распространения пламени. Установлено, что возникновение затухания происходит по сценарию переходного хаоса за счет кризиса хаотического аттрактора, исследованы статистические свойства данного процесса, а так же показано, что полученные результаты качественно согласуются с результатами экспериментов.

- На основе бифуркационного анализа и исходя из расположения в пространстве параметров областей существования различных динамических режимов показано, что при приближении числа Льюиса для топлива к единице, система становится чрезвычайно чувствительна к малому изменению параметров. Это объясняет то, что удвоение периода осцилляций свободно распространяющегося волнового фронта практически не фиксируется в экспериментах с газовыми смесями с числами Льюиса, близкими к единице.
- Впервые исследована устойчивость волн горения в моделях Зельдовича-Линяна, установлены типы бифуркаций, приводящих к потере устойчивости, и изучены сложные пространственно-временные режимы распространения пламени, возникающие в результате потери устойчивости бегущих волн горения.
- В рамках диффузионно-тепловых моделей с двухступенчатой кинетикой исследована устойчивость волн горения в богатых водород-воздушных смесях при нормальных внешних условиях и впервые показано, что данный подход позволяет получить адекватное описание как скорости и структуры, так и устойчивости пламени и возникновения пульсаций, что подтверждается сравнением с данными экспериментов и прямого численного счета на основании моделей с детальной кинетикой.

Научная и практическая ценность

В настоящей работе исследуется распространение волн горения в смесях в рамках моделей с двухступенчатым цепным кинетическим механизмом. Исследования в этой области важны как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения, поскольку горение большинства практически важных углеводородов идет по схеме с цепным механизмом реакции. Результаты, полученные в работе, позволяют понять, прогнозировать и использовать возникновение и развитие неустойчивостей в данных процессах, что связано с вопросами энергоэффективности и безопасности использования углеводородного топлива с экологической и технологической точек зрения, а так же важно в области диагностики и микрогенерации.

В работе предложен подход, позволяющий получить адекватное описание скорости, структуры и устойчивости волн горения в богатых водород-воздушных смесях, что имеет непосредственное практическое применение.

Разработаны методы и численные алгоритмы исследования устойчивости решений в виде бегущих волн для моделей, описываемых тремя и более уравнениями в частных производных второго порядка в одно-, двух- и трехмерной пространственной геометрии, которые могут быть использованы для анализа устойчивости волновых решений широкого класса физических, химических и биологических моделей.

Положения, выносимые на защиту

1. Разработаны методы и численные алгоритмы исследования устойчивости решений в виде бегущих волн для моделей, описываемых тремя и более нелинейными уравнениями в частных производных второго порядка в одно-, двух- и трехмерной пространственной геометрии.
2. Установлено, что порядок реакции рекомбинации радикалов существенно влияет на динамику пламени, на свойства и устойчивость бегущих волн горения в моделях с цепным кинетическим механизмом реакции.
3. Впервые систематически исследована устойчивость волн горения в моделях с двухступенчатым цепным механизмом реакции: Зельдовича-Баренблатта, Зельдовича-Линяна, Клавина-Линяна и диффузионно-тепловая устойчивость волн горения в богатых водород-воздушных смесях вблизи предела воспламенения, в результате чего установлены и изучены типы бифуркаций, приводящих к потере устойчивости, найдены и изучены сложные пространственно-временные режимы распространения пламени, возникающие в результате потери устойчивости бегущих волн горения.
4. Обнаружен и исследован сценарий перехода к хаотическому режиму распространения волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта через каскад бифуркаций удвоения периода временных осцилляций пульсирующих волн горения; впервые прямым расчетом показателей Ляпунова, анализом спектральных и фазовых характеристик пульсирующих волн показано существование хаотического режима распространения волн горения.
5. Впервые теоретически найден и исследован сценарий динамического затухания волн горения при возникновении пульсаций, в рамках рассматриваемых моделей выяснена природа данного явления и показано, что затухание пламени происходит по сценарию переходного хаоса за счет кризиса хаотического аттрактора.
6. На основе полученных данных о расположении в пространстве параметров критических значений для различных типов бифуркаций качественно объяснено, что экспериментальное наблюдение пульсирующих плоских волн горения для газовых смесей с числами Льюиса близкими к единице практически не реализуемо.

Обоснованность и достоверность результатов

Результаты, представленные в диссертации, получены на основе численных вычислений с использованием тщательно протестированных программ. Достоверность обеспечивается корректностью постановки задачи и адекватностью применяемых математических моделей. Полученные вычислительные результаты сравнивались с аналитическими в различных предельных случаях, а так же с данными известных из литературы экспериментальных работ. Они неоднократно обсуждались на семинарах и

докладывались на специализированных конференциях, большая часть результатов опубликована в международных и российских научных журналах. Это позволяет считать все полученные результаты обоснованными и достоверными, а также полностью отвечающими современному мировому уровню исследований. Большинство представленных результатов являются новыми и получены впервые.

Апробация работы

Результаты работы неоднократно докладывались и обсуждались на Российских и международных конференциях, основные из которых: Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Conference (Австралия 2001, 2002); Computational Techniques and Applications Conference (Австралия, Брисбен 2001); Ежегодная встреча Австралийского Математического Общества (Канберра, Австралия 2001); Australasian workshop on Mathematics in Combustion (Magnetic Island, Queensland, 2003); 5-ая (Аделаида, Австралия, 2005) и 9-ая (Кёнджу, Корея, 2013) Азиатско-Тихоокеанская Конференция по Горению; Конференция молодых ученых "Фундаментальные и Прикладные Задачи Нелинейной Физики" (Нижний Новгород, 2008, 2010, 2012); 36-ая и 38-ая Австралийская Конференция Хим. Инженеров CHEMESA (2008, 2010); 18-ый и 19-ый Международный Конгресс IMACS и MODSIM09 2009, 2011; 16-ая и 20-ая международная конференция "Математика, компьютер, образование" (Пушино, 2009, 2013); 13-ая Международная конференция по численным методам в горении (Корфу, Греция 2011); Гинзбургская конференция по физике (ФИАН, Москва, 2012); 34-ый Международный симпозиум по горению (Польша, Варшава, 2012).

Публикации

По теме диссертации опубликовано **40** научных работ, из которых **25** - статей в ведущих российских и зарубежных рецензируемых научных журналах из перечня ВАК.

Личный вклад автора

Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором лично, либо при его непосредственном участии.

Структура и объем диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет **298** страниц, включая **79** рисунков. Список литературы содержит **288** наименований.

Во введении дается общая характеристика диссертации: обоснована актуальность темы; сформулированы цели работы, научная новизна и практическая ценность полученных результатов; перечислены основные положения, выносимые на защиту; приведены сведения об апробации результатов, основных публикациях, объеме и структуре работы.

В главе 1 дается обзор современного состояния исследований в обла-

сти изучения диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени в рамках моделей с одно и двухстадийной кинетикой реакции горения.

Глава 2 посвящена описанию результатов численного и асимптотического анализа свойств, структуры и устойчивости волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта, описывающей распространение ламинарного пламени в заранее перемешанной смеси с цепным двухступенчатым кинетическим механизмом и реакцией рекомбинации первого порядка по концентрации радикалов. Во введении к главе дан обзор литературы, посвященной исследованиям волн горения в рамках данной модели. В следующем параграфе формулируется математическая модель, записываются уравнения в частных производных, описывающие процесс распространения волн горения, вводятся безразмерные переменные и безразмерный вид модельных уравнений в частных производных и граничных условий.

Далее сформулирована задача о распространении плоских волн горения в сопутствующей системе отсчета в бесконечной среде в виде связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованы свойства автоволновых решений в одномерном адиабатическом случае. Показано, что число Льюиса для топлива, L_A , имеет существенное влияние на свойства волн горения в то время как вариация числа Льюиса для радикалов сказывается только количественно (но не качественно) на поведении автоволнового решения. Установлено, что для чисел Льюиса для топлива меньше единицы скорость распространения пламени является монотонно убывающей функцией безразмерной энергии активации. Эффект затухания наблюдается при конечных значениях энергии активации. Приближение к границе затухания в пространстве параметров модели сопровождается падением скорости распространения волны до нуля при этом скорость квадратично зависит от энергии активации. За границей затухания волновых решений не было найдено. Данная ситуация проиллюстрирована на рис. 1 (а) кривая ' $h = 0$ '.

Случай числа Льюиса для топлива равного единице допускает аналитическое исследование с помощью асимптотических методов и рассматривается отдельно. Особое внимание уделяется изучению явления затухания решения в виде бегущей волны. Показано, что скорость бегущей волны горения является монотонно убывающей однозначной функцией энергии активации и обращается в ноль при конечном значении энергии активации по линейному закону.

Для чисел Льюиса для топлива больших единицы скорость автоволнового решения является двухзначной функцией энергии активации и носит характер "С"-образной кривой, как изображено на рис. 1 (b) кривая ' $h = 0$ '. Для фиксированных значений параметров одновременно либо существует два решения - быстрое и медленное, либо решений не существует. Затухание бегущей волны горения происходит при конечном значении энергии активации и скорости волны не равной нулю в результате бифуркации складки при значениях параметров, когда быстрая и медленная ветви решений встречаются.

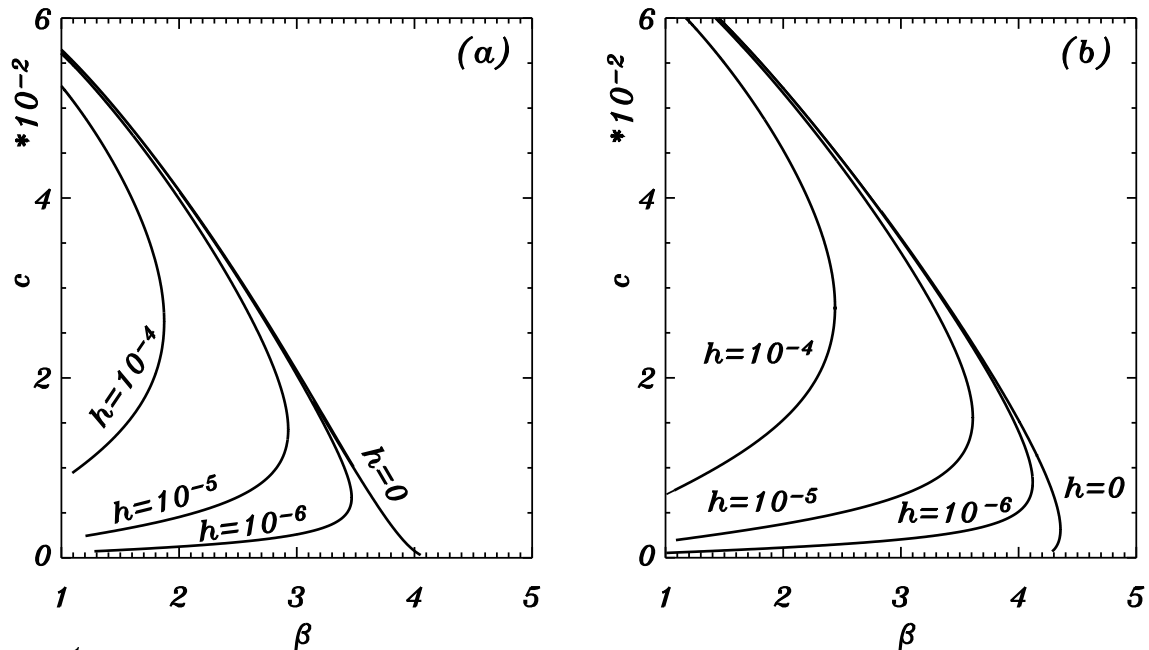


Рис. 1. Зависимость скорости пламени, c , от энергии активации, β , для различных значений коэффициента тепловых потерь, h , при $L_A = 0.5$ (а) и $L_A = 2$ (б). Остальные значения параметров взяты как $L_b = 1$, $u_a = 0$ и $r = 0.001$.

Исследована структура пламени в зависимости от изменения параметров модели. В случае, когда параметры взяты вдалеке от точки затухания (речь идет о быстрой ветви) реакция разветвления доминирует над реакцией рекомбинации. Фронт пламени изображен на рис. 2 (а) и состоит из тонкой области распада топлива с быстрой реакцией разветвления и широкой области рекомбинации с медленной реакцией обрыва цепи. В области потребления топлива максимальная концентрация радикалов достигает значения порядка $O(1)$, все топливо быстро конвертируется в радикалы и утечка топлива через зону реакции разветвления отсутствует. Реакция рекомбинации более медленная и оказывает влияние на структуру фронта горения на больших масштабах длины, приводя к формированию области рекомбинации радикалов за зоной реакции разветвления, характеризующейся плавным затуханием концентрации радикалов. Таким образом в данном случае наблюдается режим медленной рекомбинации.

Приближение в пространстве параметров к границе затухания приводит изменению структуры пламени, как показано на рис. 2 (б). Вблизи предела затухания реакция рекомбинации начинает конкурировать с реакцией разветвления, концентрация радикалов становится асимптотически малой и обе реакции идут в одной области пламени. Свойства волны горения соответствуют режиму быстрой рекомбинации. В случае $L_A > 1$ переход с быстрой на медленную ветвь приводит дальнейшему усилению режима быстрой рекомбинации и последующему затуханию, а при $L_A \leq 1$ затухание наступает на единственной ветви решений. Вместе со снижением концентрации радикалов, падает и количество выделяемого тепла, что отражается на не полном сгорании топлива и появлении его утечки через зону реакции.

Свойства решений в виде бегущей волны для модели Зельдовича-

Баренблатта до некоторой степени напоминают свойства решений одноступенчатой неадиабатической модели горения. В частности, в обоих случаях наблюдается наличие утечки топлива через зону реакции и затухание волн горения. В этом смысле можно говорить о том, что в модели Зельдовича-Баренблатта буфер радикалов служит химическим аналогом теплообмена с окружающей средой, а реакция рекомбинации так же выступает ингибитором реакции разветвления цепи. Однако, как показывает детальное изучение сценариев затухания, поведение волн горения вблизи точки затухания коренным образом отличается для этих двух моделей, поэтому одноступенчатое приближение не может быть использовано для адекватного описания свойств пламени с цепным механизмом реакции.

Изучено влияние изменения внешней температуры на свойства бегущих волн горения. Внешняя температура является одним из наиболее легко варьируемых в эксперименте параметров. Показано, что увеличение внешней температуры приводит к росту как скорости пламени, так и области существования решений в виде бегущей волны и в то же время варьирование качественно не изменяет характер зависимости скорости от параметров. Еще одним важным параметром является отношение скоростей реакций рекомбинации и разветвления цепи, r . Анализ показывает, что увеличение r ускоряет реакцию рекомбинации радикалов и приводит к изменению структуры пламени в сторону медленного режима рекомбинации. Это в конечном итоге приводит к затуханию решения в виде бегущей волны. Верно и обратное, уменьшение r ингибирует реакцию рекомбинации, что отражается на росте концентрации радикалов и сдвигу в сторону режима медленной рекомбинации. В данном случае область существования решений в виде бегущей волны расширяется и затухание наблюдается при больших значениях энергии активации. Изменение числа Льюиса для радикалов очень слабо влияет на положение границы затухания, в то время как увеличение числа Льюиса для топлива существенно расширяет область существования решений в виде бегущих волн и сдвигает границу затухания в сторону больших значений энергии активации.

Мы так же изучили влияние тепловых потерь на свойства бегущих волн горения. В отличие от адиабатического случая, это приводит к тому, что скорость пламени становится двухзначной функцией энергии активации вне зависимости от вариации числа Льюиса для топлива и других параметров модели (см. рис. 1). Затухание наступает всегда при конечных значениях скорости волны горения и энергии активации в результате бифуркации складки. Эти результаты качественно согласуются с известными для неадиабатической одноступенчатой модели. Увеличение интенсивности тепловых потерь, очевидным образом, приводит к снижению скорости волны горения и сокращению области существования решений в виде бегущих волн.

Формулируется задача линейной устойчивости, как проблема поиска собственных значений и собственных функций краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

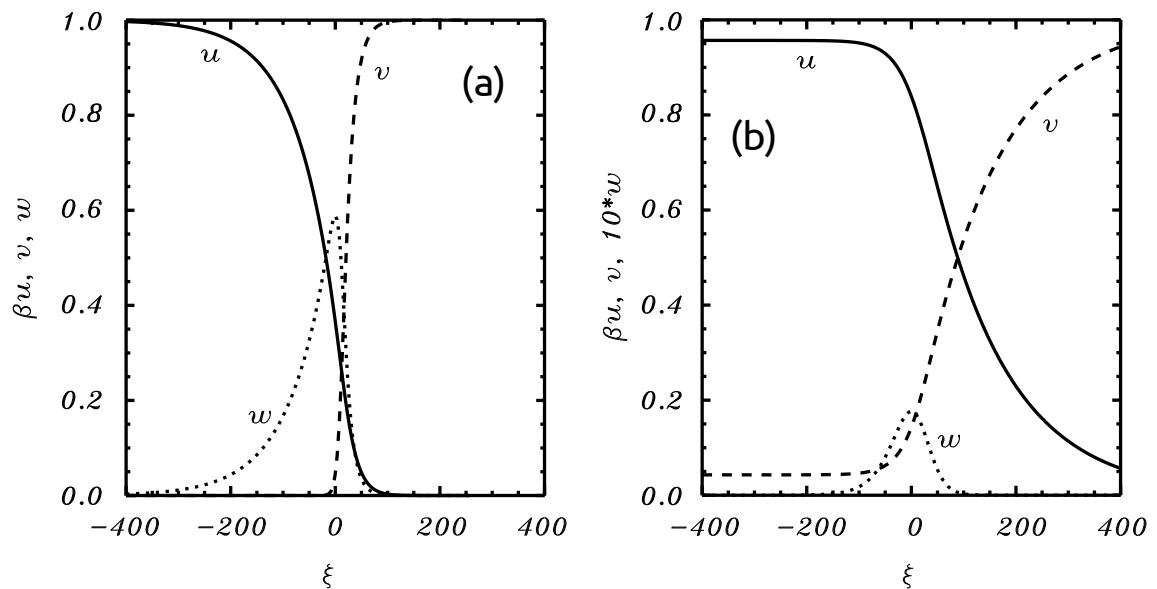


Рис. 2. Решение в виде бегущей волны в сопутствующей системе отсчета. Сплошная линия показывает температуру, пунктирная линия соответствует концентрации топлива, а концентрация радикалов построена точечной кривой. На рисунке (а) параметры взяты вдалеке, а на рисунке (б) вблизи бифуркации складки.

С ее помощью исследована устойчивость бегущих волн горения в одномерном адиабатическом случае. Показано, что при числах Льюиса для топлива больших единицы медленная ветвь решений всегда неустойчива, а быстрая ветвь либо устойчива, либо теряет устойчивость по отношению к пульсирующим модам возмущения в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Критические значения для бифуркации Андронова-Хопфа найдены в пространстве параметров и показано, что бифуркация Андронова-Хопфа рождается в результате бифуркации Богданова-Тakens при числе Льюиса для топлива равного единице, когда критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа и складки пересекаются (см. рис. 4). При L_A больше единицы нейтральная граница устойчивости сначала сдвигается в сторону меньших энергий активации, делая бегущие волны горения менее устойчивыми, а затем следует вдоль границы затухания, что имеет стабилизирующий эффект и сдвигает границу устойчивости в сторону большей энергии активации. Существенное влияние на устойчивость пламени оказывает диффузия радикалов. Исследования показали, что для более легких и подвижных радикалов (меньших числах Льюиса для радикалов, L_B) волны горения менее устойчивы, а критические значения энергии активации для бифуркации Андронова-Хопфа существенно снижаются.

Увеличение температуры окружающей среды, u_a , сдвигает как границу области существования решений в виде бегущей волны, так и нейтральную границу устойчивости в сторону больших значений безразмерной энергии активации т.е. прогрев свежей смеси имеет стабилизирующий эффект на процесс распространения волны горения. Этот результат согласуется с выводами для одноступенчатой модели. Таким образом можно заключить, что варьирование температуры окружающей среды качественно не влияет

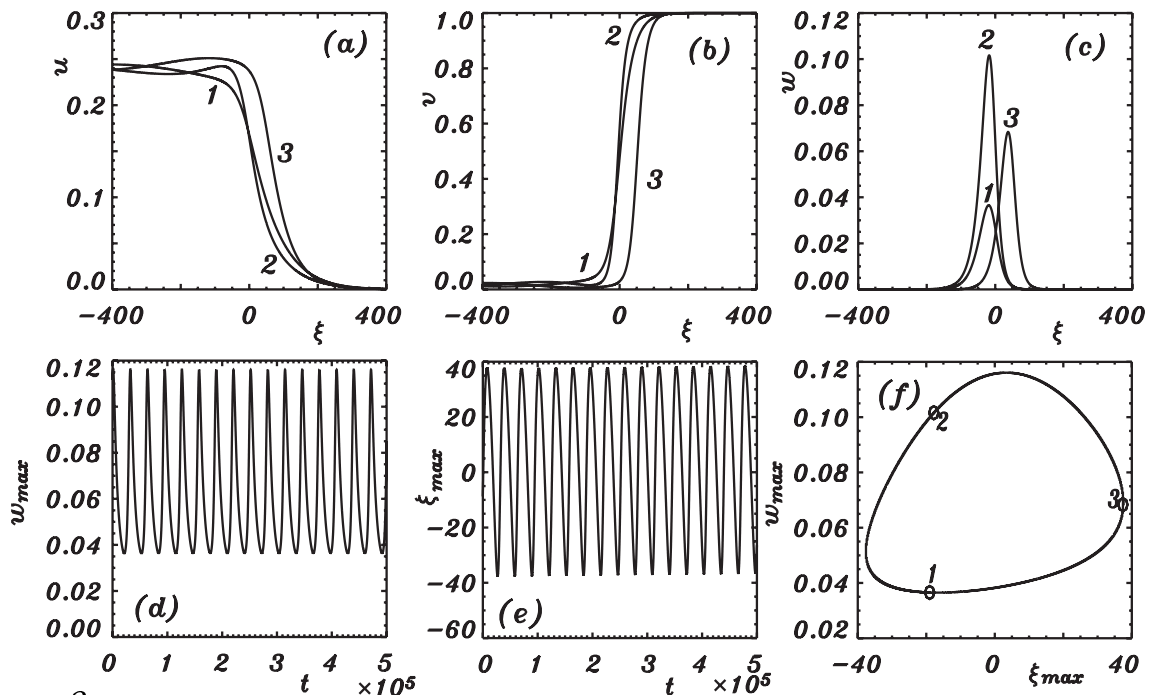


Рис. 3. Пульсирующие волны горения при $L_A = 3$, $L_B = 1$, и $\beta = 4.08$. На рисунках (a), (b) и (c) построены профили температуры, $u(\xi)$, концентрации топлива, $v(\xi)$, и концентрации радикалов, $w(\xi)$, соответственно. Профили взяты в моменты времени $t_1 = 0$, $t_2 = 8750$ и $t_3 = 17500$ и помеченные как 1, 2 и 3, соответственно. Зависимости значений w_{max} и ξ_{max} от времени представлены на рис. (d) и (e). На рис. (f) построен максимум концентрации радикалов, w_{max} , от координаты этого максимума, ξ_{max} .

на поведение волн горения, хотя приводит к существенным изменениям количественных характеристик. Уменьшение параметра рекомбинации, r , и сдвиг в сторону режима медленной рекомбинации имеет такие же последствия т.е. критические значения для затухания и бифуркации Андронова-Хопфа перемещаются в сторону больших энергий активации.

Установлено, что бифуркация Андронова-Хопфа носит закритический характер и в результате нее рождаются пульсирующие волны горения. Свойства бифуркации Андронова-Хопфа детально исследуются методами бифуркационного анализа и прямым интегрированием модельных уравнений в частных производных. Пульсирующие волны распространяются с определенной средней скоростью и в сопутствующей системе отсчета, температура, концентрация топлива и радикалов являются периодическими функциями времени с периодом T , как изображено на рис. 3 (a-c). Показано, что пульсирующие волны в среднем распространяются медленнее, чем соответствующие бегущие волны горения при одних и тех же значениях параметров. При числе Льюиса для топлива, стремящихся к единице, система становится очень чувствительной к малым изменениям параметров т.е. небольшие изменения энергии активации β существенно модифицируют среднюю скорость пульсирующей волны.

Удобными динамическими переменными для описания эволюции волн горения оказались максимальная концентрация радикалов, w_{max} , и координата, ξ_{max} , соответствующая данному максимуму. При этом на

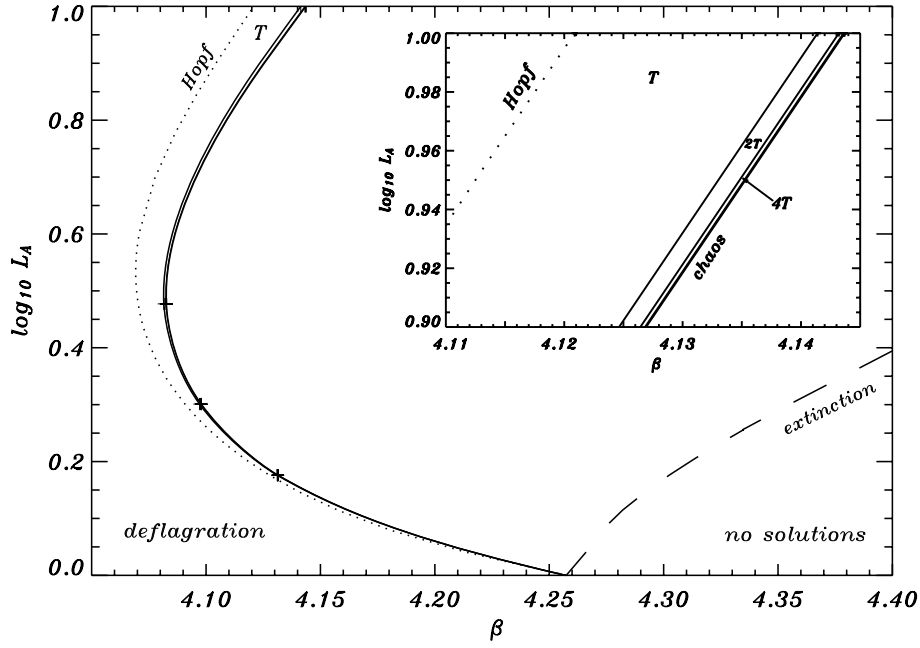


Рис. 4. Диаграмма бифуркаций удвоения периода на плоскости параметров $(\beta, \log_{10} L_A)$ при $L_B = 1$. Пунктирная и точечная линии представляют критические значения параметров для затухания бегущей волны и бифуркации Андронова-Хопфа, соответственно. Кресты, соединенные сплошной линией показывают критические значения параметров для бифуркаций удвоения периода. Вложенный рисунок демонстрирует увеличение отдельной области диаграммы.

плоскости (ξ_{max}, w_{max}) пульсирующее решение периода T отображается предельным циклом, как изображено на рис. 3 (f). Вблизи бифуркации Андронова-Хопфа зависимость $\xi_{max}(t)$ и $w_{max}(t)$ от времени носит практически гармонический характер (см. рис. 3 (d, e)) и определяется частотой осцилляций собственных мод задачи линейной устойчивости. Увеличение параметра за критичность приводит к тому, что в Фурье спектре $w_{max}(t)$ появляются более высокие гармоники основной частоты, предельный цикл на плоскости (ξ_{max}, w_{max}) начинает деформироваться и принимать треугольную форму. Дальнейшее увеличение β приводит к появлению решений периода $2T$ в результате бифуркации удвоения при $\beta = \beta_1$. На плоскости параметров (ξ_{max}, w_{max}) эти решения соответствуют траекториям с двойной петлей. В Фурье спектре появляются спектральные линии кратные как основной частоте T^{-1} , так и ее второй гармонике $(2T)^{-1}$. На отображении Пуанкаре эти решения представлены в виде двух точек. Аналогично при более высоких энергиях активации мы находим вторую и третью бифуркации удвоения периода. При $\beta = \beta_2$ рождается решение периода $4T$, а при β_3 решение периода $8T$, которые соответствуют на отображении Пуанкаре четырем и восьми точкам.

Расстояние между соседними бифуркациями $\beta_{i+1} - \beta_i$ убывает в соответствии с универсальностью Фейгенбаума с константой $\delta = 4.7 \pm 0.1$. На основе численных данных и предположения, что бифуркации удвоения периода следуют каскаду Фейгенбаума, была оценена граница появления хаоса β_∞ . В случае, если параметры системы бе-

рутся выше границы хаотического режима, численные расчеты показали, что динамика осцилляций волн горения становится хаотической и характеризуется непрерывным Фурье спектром $w_{max}(t)$, нерегулярным распределением изображающей точки на отображении Пуанкаре и положительным максимальным показателем Ляпунова (см. рис. 5). Граница области параметров с хаотическим режимом, полученная с помощью расчета показателя Ляпунова, хорошо согласуется с оценкой на основе сценария Фейгенбаума.

Была исследована средняя скорость пульсирующих волн горения, при этом было показано, что пульсирующие волны горения распространяются медленнее, чем решения в виде бегущей волны. Зависимость скорости волны от энергии активации является монотонно убывающей функцией для каждой ветви решений с различными периодами осцилляций. Решения периода $2^i T$ возбуждаются мягким образом из решений периода $2^{(i-1)} T$, когда последние теряют устойчивость.

Ширина хаотической области по энергии активации ограничена явлением затухания пламени. Странный аттрактор формируется, когда β становится больше β_∞ (см. рис. 7 (а)). Однако при некотором значении энергии активации, β_e , распространение хаотической волны горения прерывается затуханием, при котором распространяющееся решение переходит в тривиальное $u(\xi, t) = 0$, $v(\xi, t) = 1$ и $w(\xi, t) = 0$. При увеличении β выше β_∞ бассейн притяжения странного аттрактора изменяется и при некотором значении энергии активации, β_e , соединяется с бассейном притяжения тривиального решения. В этом случае, динамика решений с начальными условиями, близкими к распространяющемуся решению, похоже на хаотические осцилляции волны, однако в какой-то момент времени решение попадает в бассейн притяжения тривиального решения и затухает (см. рис. 7 (b)). Коллапс хаотических осцилляций происходит резким и случайным образом. Исследования статистических свойств этого процесса говорят о

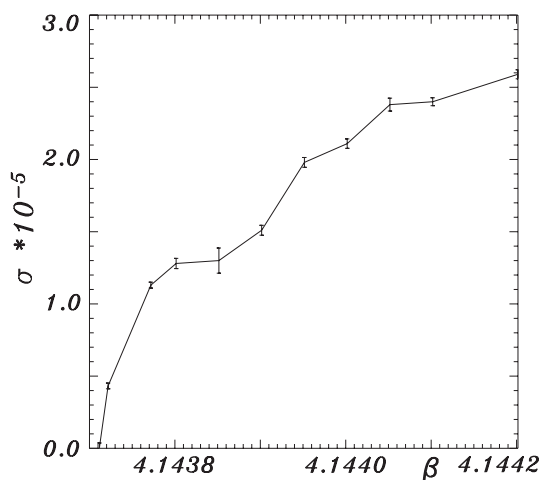


Рис. 5. Максимальный показатель Ляпунова, σ , как функция β при $L_A = 10.0$, $L_B = 1$, $r = 0.001$ и $u_a = 0.0$.

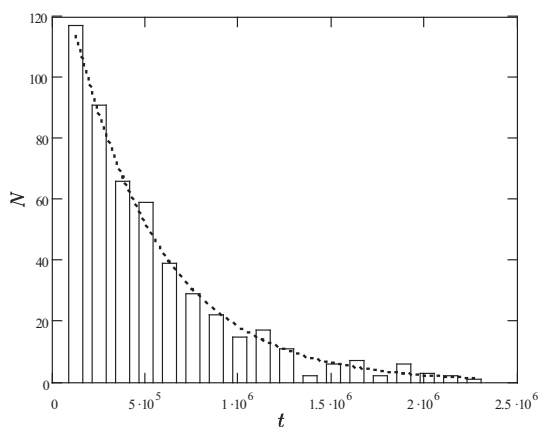


Рис. 6. Зависимость N от времени t при $L_A = 10$, $L_B = 1$, $\beta = 4.14435$, $r = 0.001$ и $u_a = 0.0$. Гистограмма представляет численные данные, а пунктирная линия - это результат численной аппроксимации.

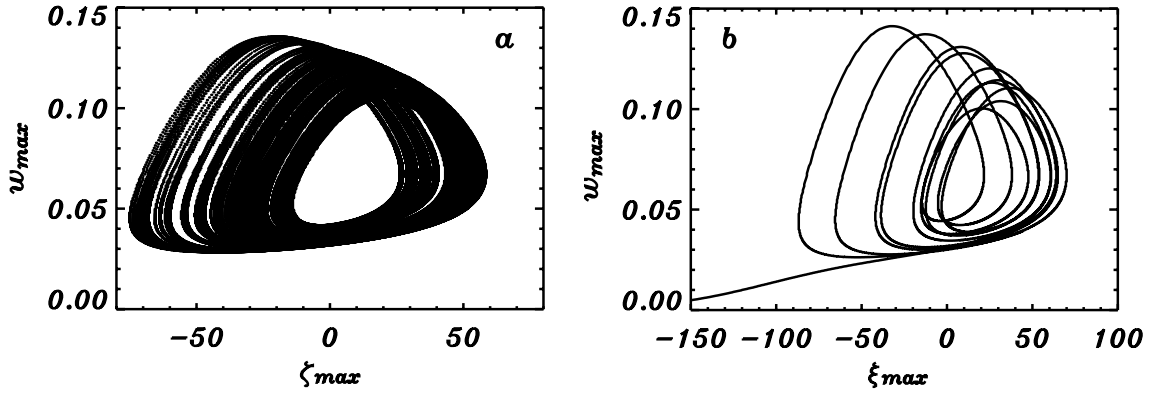


Рис. 7. Проекция странного аттрактора и сценарий затухания построенные на плоскости параметров w_{max} от ξ_{max} при $L_A = 3$, $L_B = 1$, $r = 0.001$, $\beta = 4.0829$ на рисунке (a) и $\beta = 4.0831$ на рисунке (b), соответственно.

том, что время существования переходного хаоса имеет экспоненциальное распределение. На рис. 6 построена зависимость числа событий (затуханий) от времени интегрирования в виде гистограммы, т.е. ось времени разбивается на равные отрезки продолжительностью $\Delta T = 1.26 \times 10^5$ и считается число событий, произошедших за этот интервал времени. Среднее время жизни τ очень чувствительно к изменению контрольных параметров и расходится при приближении к точке кризиса странного аттрактора. Подчеркнем, что эти результаты качественно полностью согласуются с гипотезой Гормана и соавторов [9] и данными проведенных ими экспериментов с пламенем плоской пористой горелки.

В пространстве параметров установлено расположение областей, соответствующих пульсирующим волнам с различным периодом. Показано, что на плоскости (L_A, β) они расположены вдоль кривой критических параметров для бифуркации Андронова-Хопфа в виде тонких полос, расширяющихся с увеличением L_A и сужаются к точке бифуркации Богданова-Тakens при $L_A \rightarrow 1$, как показано на рис. 4. Более формально это означает, что $\beta_{i+1} - \beta_i$ стремится к нулю при $L_A \rightarrow 1$ и монотонно возрастает при увеличении L_A . Этот вывод согласуется с тем, что в экспериментальных наблюдениях пульсирующие волны периода $1T$, $2T$ и $4T$ хорошо наблюдаются при $L_A \gg 1$, когда ширина областей параметров, соответствующих различным режимам осцилляций относительно велика. В противоположность этому, при $L_A \sim 1$ даже решения периода T существуют в настолько узкой области параметров, что их экспериментальное наблюдение затруднительно.

Расстояние между последовательными бифуркациями удвоения периода, $\beta_{i+1} - \beta_i$, уменьшается экспоненциально с ростом индекса i . Структура области параметров с решениями периода старше $2T$ чрезвычайно сложна. Небольшое изменение параметров может приводить как к изменению типа решения, так и к затуханию. Исследование явления затухания говорит о том, что ширина области с хаотическим режимом осцилляций пламени мала по сравнению с расстоянием между критическими значениями параметров для бифуркаций складки и Андронова-Хопфа. Следовательно, рас-

пространение пламени прекращается по сценарию затухания через кризис странного аттрактора, задолго до того как параметры достигают бифуркации складки и исчезновения решений в виде бегущих волн горения.

Анализ устойчивости волн горения и механизмов появления пульсаций обобщен на двухмерных случай для чисел Льюиса для топлива больших единицы, когда ожидается возникновение неустойчивости осциллирующего типа. Рассмотрены как адиабатическая, так и неадиабатическая модель. Показано, что бегущая волна горения может терять устойчивость по отношению к двум типам возмущений: равномерной плоской неустойчивости и волновой неустойчивости. Первая имеет одномерную природу, в то время как последняя носит существенно многомерный характер и ее появления не может быть предсказано в рамках одномерной модели.

Показано, что медленная ветвь решений всегда неустойчива по отношению к равномерным возмущениям. Быстрая ветвь устойчива при значениях параметров, находящихся достаточно далеко от условий затухания решений в виде бегущей волны. По мере приближения к критическим значениям параметров для затухания, быстрая ветвь либо теряет устойчивость по отношению к возмущениям волнового типа, до того, как достигается предел затухания, либо по отношению в равномерной неустойчивости в точке бифуркации складки, определяющей условие затухания, как отображено на рис. 8. Переключение между различными типами неустойчивости происходит в точке бифуркации ко-размерности два, которая появляется в пространстве параметров в точке пересечения критических значений параметров для волновой неустойчивости и бифуркации складки. Мы называем эту бифуркацию двухмерной бифуркацией Богданова-Тakensа, по аналогии с одномерной бифуркацией Богданова-Тakensа, которая находится в точке, из которой выходит кривая критических значений параметров для появления плоской пульсирующей неустойчивости (бифуркации Андронова-Хопфа).

Установлено, что в адиабатическом пределе точки одномерной и двухмерной бифуркации Богданова-Тakensа совпадают и располагаются при $L_A = 1$. Однако, в неадиабатическом случае эти точки расходятся в пространстве параметров от точки затухания при $L_A = 1$ и располагаются в различных местах на кривой, соответствующей бифуркации складки, так, что $1 < L_A^{BT2D} < L_A^{BT1D}$. Двухмерная волновая неустойчивость доминирует над плоской одномерной пульсирующей неустойчивостью. Другими словами, для любой точки пространства параметров, где существует плоская пульсирующая неустойчивость, есть волновая неустойчивость с большим инкрементом экспоненциального роста. Более того, волновая неустойчивость существует в более широкой области параметров, включающей область с одномерной пульсирующей неустойчивостью.

Сравнение результатов двухмерного анализа устойчивости с известными данными для моделей с одноступенчатой кинетикой показывает, что в неадиабатическом случае сценарии потери устойчивости для них качественно согласуются, но только частично. Так точка бифуркации

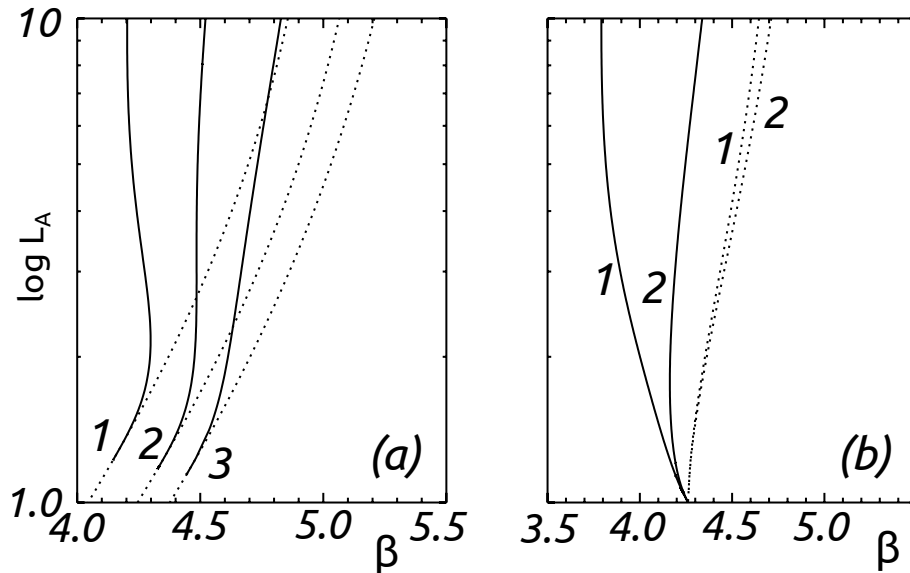


Рис. 8. Диаграмма устойчивости на плоскости параметров L_A от β при $L_A = 1$, $r = 5 \times 10^{-4}$, $h = 10^{-6}$ (рисунок а) и $h = 0$ (рисунок б). Нейтральная граница устойчивости показана сплошными линиями, а критические значения параметров для бифуркации складки построены точечными линиями. На рис. (а) L_A отображается в логарифмическом масштабе и представлены результаты для $L_B = 0.3$, 1.0 и 4.0, отмеченные цифрами 1, 2 и 3, соответственно. На рис. (б) ($h = 0.0$) случай $L_B = 0.3$ показан кривой 1 и $L_B = 4.0$ кривой 2, соответственно.

Богданова-Такенса, ответственная за появление пульсирующих неустойчивостей, расположена в пространстве параметров при числах Льюиса для топлива больших единицы в обоих случаях. Однако, при стремлении параметра тепловых потерь к нулю точка бифуркации Богданова-Такенса стремиться к бесконечности по энергии активации в случае одноступенчатой модели и остается при конечных значениях энергии активации в случае модели Зельдовича-Баренблатта с двухступенчатой цепной реакцией. Помимо этого в модели Зельдовича-Баренблатта есть два параметра, которые не могут принципиально быть учтены в одноступенчатом приближении т.е. отношение скоростей реакций, r , и числа Льюиса для радикалов, L_B . Изменение r и L_B существенно влияет на устойчивость бегущих волн горения. В двумерной модели увеличение r или уменьшение L_B сдвигает нейтральную границу устойчивости в сторону меньших значений энергии активации, β .

Исследованы свойства волновой неустойчивости. Найдены зависимости частоты пульсаций и волнового числа в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны, для доминирующей неустойчивой моды от числа Льюиса для топлива при различных значениях остальных параметров модели. Частота пульсаций и волновое число стремятся к нулю, когда L_A приближается к точке двумерной бифуркации Богданова-Такенса в пространстве параметров. В этом случае неустойчивость проявляется в очень медленном возмущении бегущей волны горения, а размеры возмущения в поперечном направлении существенно превышают все характерные продольные размеры длины для волн горения. В противоположном пределе при числах Льюиса для топлива порядка нескольких единиц (что

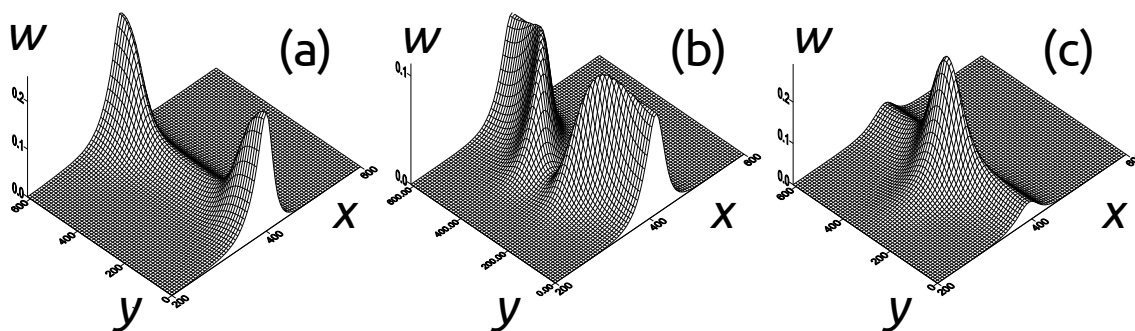


Рис. 9. Моментальное распределение концентрации радикалов, $w(x, y)$, взятое в три последовательных момента времени $t_1 = 4000$ на рисунке (a), $t = 7000$ на рисунке (b) и $t_3 = 10000$ на рисунке (c) при $L_A = 10.0$, $L_b = 1.0$, $\beta = 4.1$, $r = 10^{-3}$ и $h = 0$.

справедливо для случая газовых смесей относительно тяжелых углеводородов и кислорода, разбавленных легким инертным газом, например, гелием) или при $L_A \sim O(10)$ (что скорее относится к случаю твердых горючих смесей) как частота, так и волновое число доминирующей неустойчивости становятся сравнимыми с соответствующими масштабами бегущей волны горения.

Показано, что при пересечении в пространстве параметров критических значений для появления волновой неустойчивости рождаются двумерные пульсирующие решения, проиллюстрированные на рис. 9. При значениях параметров, близких к нейтральной границе устойчивости (небольшой закритичности) период осцилляций и поперечный пространственный период решения, появляющегося при потере устойчивости бегущей волны горения, хорошо согласуется с характеристиками доминирующей волновой неустойчивости, полученными из линейного анализа устойчивости. Первичная бифуркация, в результате которой рождаются пульсирующие решения, является сверхкритической. Распределение концентрации радикалов имеет вид солитонно-подобных уединенных пиков, распространяющихся по определенным траекториям. В конце главы подводятся основные итоги и приводятся выводы.

Глава 3 посвящена исследованию свойств, структуры и устойчивости решений в виде бегущих волн горения в модели Зельдовича-Линяна, описывающей распространение ламинарного пламени в заранее перемешанной смеси с цепным двухступенчатым кинетическим механизмом и реакцией рекомбинации второго порядка по концентрации радикалов. Во введении к главе дан обзор литературы, посвященной исследованиям волн горения в рамках данной модели. В следующем параграфе формулируется математическая модель, записываются уравнения в частных производных, описывающие процесс распространения волн горения, вводятся безразмерные переменные и безразмерный вид модельных уравнений в частных производных и граничных условий.

Далее проводится редукция модельных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описыва-

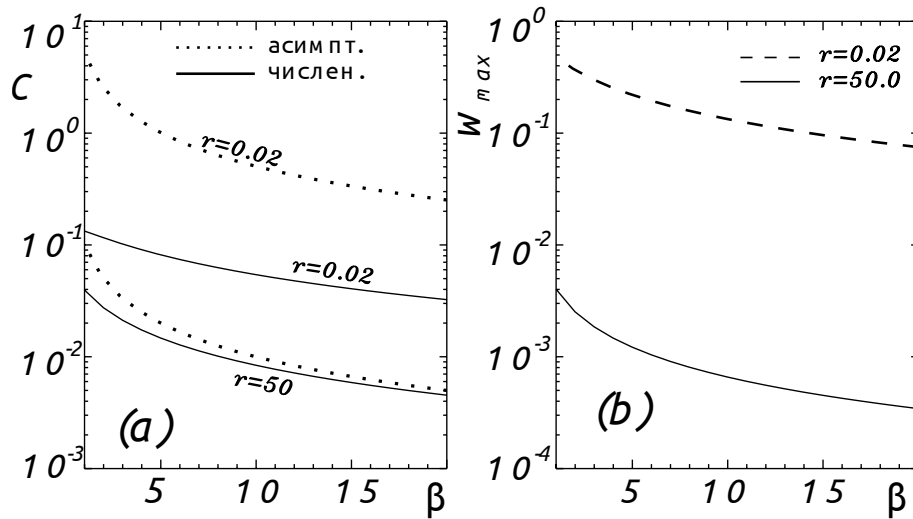


Рис. 10. Зависимость (а) скорости, c , волны горения и (б) максимального значения концентрации радикалов, w_{max} , от энергии активации, β , для $L_A = L_B = 1$ и двух значений параметра рекомбинации $r = 0.02$ и $r = 50$. Графики построены в логарифмическом масштабе.

ющих решения в виде бегущих волн. Находится асимптотика решений в области продуктов и рекомбинации, формулируются граничные условия и численно исследуются бегущие волны горения. Установлено, что для заданных значений параметров решение в виде бегущей волны всегда единственно, как показано на рис. 10. Структура бегущей волны горения зависит от параметра рекомбинации, r , выражающего соотношение между характерными временами реакций разветвления и рекомбинации. При $r < 1$, наблюдается режим медленной рекомбинации распространения пламени. В этом случае передний край пламени определяется процессами диффузии тепла и реагентов, зона реакции состоит из тонкой области разветвления, заключенной в гораздо более широкую область рекомбинации. В зоне разветвления практически все топливо конвертируется в радикалы и их концентрация достигает величин порядка единицы (см. рис. 10 (b)). В зоне рекомбинации радикалы трансформируются в продукты и выделяется тепло. Область, где активна реакция рекомбинации протягивается в зону продуктов, где рекомбинация, а не транспортные процессы (как это характерно для одноступенчатых моделей) является доминирующей. Как следствие этого, температура и концентрация реагентов стремится к асимптотическим значениям суб-экспоненциальным образом.

При $r > 1$ реакция рекомбинации быстрее, чем реакция разветвления цепи и пламя распространяется в режиме быстрой рекомбинации. В зоне прогрева доминируют транспортные процессы. Она сменяется зоной реакции, где реакция рекомбинации следует за реакцией разветвления и к радикалам может быть применено стационарное приближение. В результате концентрация радикалов асимптотически мала. Модель с двухступенчатой реакцией может быть редуцирована к модели с одно-стадийной реакцией второго порядка и удвоенной энергией активации по отношению к реакции разветвления модели Зельдовича-Линяна. В режиме быстрой рекомбина-

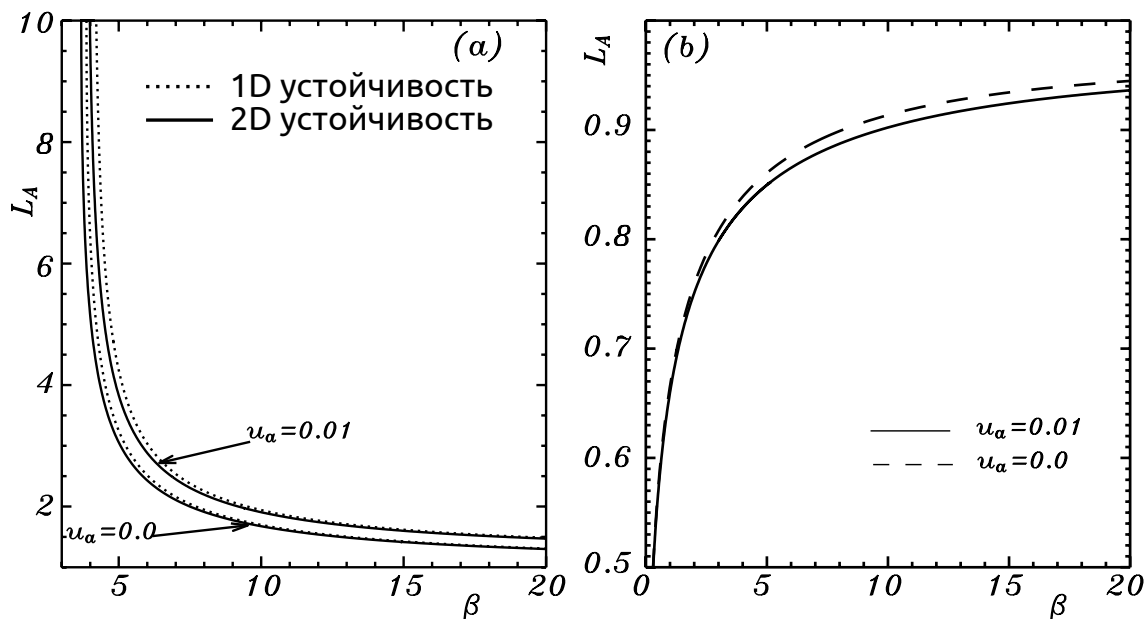


Рис. 11. Диаграмма устойчивости на плоскости L_A от β при $r = 10$, $L_B = 1$ и различных значениях $u_\alpha = 0.0$ и 0.01 для случаев $L_A > 1$ (а) и $L_A < 1$ (б).

ции асимптотический анализ, показанный на рис. 10 (а) пунктирной кривой, дает хорошую оценку скорости распространения пламени при высокой энергии активации. Для умеренных значений энергии активации оба подхода согласуются качественно в режиме быстрой рекомбинации. Однако эти асимптотические результаты нельзя экстраполировать на режим медленной рекомбинации, для которого численный и асимптотический анализ дают существенно отличающиеся оценки.

Устойчивость волн горения в модели Зельдовича-Линяна исследовалась методом функции Эванса и прямым интегрированием модельных уравнений в частных производных. Результаты обоих методов согласуются с высокой степенью точности. Было установлено, что в одномерном случае бегущая волна горения теряет устойчивость в результате бифуркации Андронова-Хопфа, когда пара комплексно сопряженных точек дискретного спектра задачи линейной устойчивости переходят из левой в правую половину комплексной плоскости, пересекая мнимую ось выше и ниже начала координат, соответственно, и приводя к возникновению пульсирующей неустойчивости. Критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа были найдены и показано, что на плоскости параметров L_A от β нейтральная граница устойчивости, $L_A(\beta)$, является монотонно убывающей функцией, что продемонстрировано на рис. 11 (а) точечной кривой. Тип бифуркации Андронова-Хопфа и свойства пульсирующих решений, появляющихся в результате нее детально исследовались. Было показано, что бифуркация имеет надкритический характер. Амплитуда осцилляций растет по коренному закону с увеличением энергии активации за значение, предписываемое нейтральной границей устойчивости.

В двухмерном случае было установлено, что бегущая волна горения теряет устойчивость либо из-за волновой, либо ячеистой неустойчивости

в зависимости от числа Льюиса для топлива. На плоскости параметров число Льюиса для топлива - энергия активации найдена нейтральная граница устойчивости. Она проиллюстрировано на рис. 11 (а, б) сплошными линиями. В случае $L_A > 1$ волна горения теряет устойчивость по отношению к возмущениям волнового типа, причем это случается до того, как происходит бифуркация Андронова-Хопфа в одномерной модели (см. рис. 11 (а)). Нейтральная граница устойчивости $L_A(\beta)$ так же является монотонно убывающей функцией, которая стремится к единице при больших значениях энергии активации и неограниченно растет при стремлении β к некоторому критическому значению. Для $L_A < 1$, бегущая волна горения теряет устойчивость по отношению к возмущениям ячеистого типа, как показано на рис. 11 (б). Нейтральная граница устойчивости, $L_A(\beta)$, является монотонно возрастающей функцией. При β стремящихся к нулю L_A так же затухает, а при больших β , критическая энергия активации, L_A , стремится к единице. В обоих случаях, расположение нейтральной границы устойчивости качественно согласуется с результатами для одно ступенчатой адиабатической модели.

Важным экспериментальным параметром, который так же присутствует в одноступенчатых моделях, является температура окружающей среды. Показано, что начальный прогрев свежей смеси стабилизирует распространение волны горения. Критическая граница для появления волновой неустойчивости сдвигается в сторону больших значений β , а критические параметры для ячеистой неустойчивости перемещаются к меньшим значениям L_A . Как продемонстрировано на рис. 11, это приводит к расширению области существования устойчивых решений в виде бегущих волн горения в пространстве параметров и качественно согласуется с предсказанием анализа устойчивости для одноступенчатой модели.

Параметры L_B и r специфичны для модели Зельдовича-Линяна и не могут быть воспроизведены в рамках анализа одностадийной реакции. Изменение параметра рекомбинации так же сильно влияет на устойчивость волн горения. Подобное изменение может контролироваться в эксперименте за счет модификации давления смеси. Реакции разветвления цепи как правило бимолерулярны, а реакции рекомбинации тримолекулярны, что обуславливает различие в зависимости их скоростей от давления и возможность манипулирования параметром r . В режиме медленной рекомбинации $r < 1$, уменьшение параметра рекомбинации сдвигает нейтральную границу устойчивости в сторону больших значений энергии активации как для $L_A > 1$, так и для $L_A < 1$. Таким образом уменьшение параметра рекомбинации стабилизирует волну горения. Когда r становится больше единицы, область устойчивых решений в пространстве параметров стягивается к некоторому предельному поведению таким образом, что увеличение параметра рекомбинации на порядок величины только очень слабо отражается на критических значениях параметров как для волновой, так и для ячеистой неустойчивостей.

Влияние изменения числа Льюиса для радикалов на устойчивость

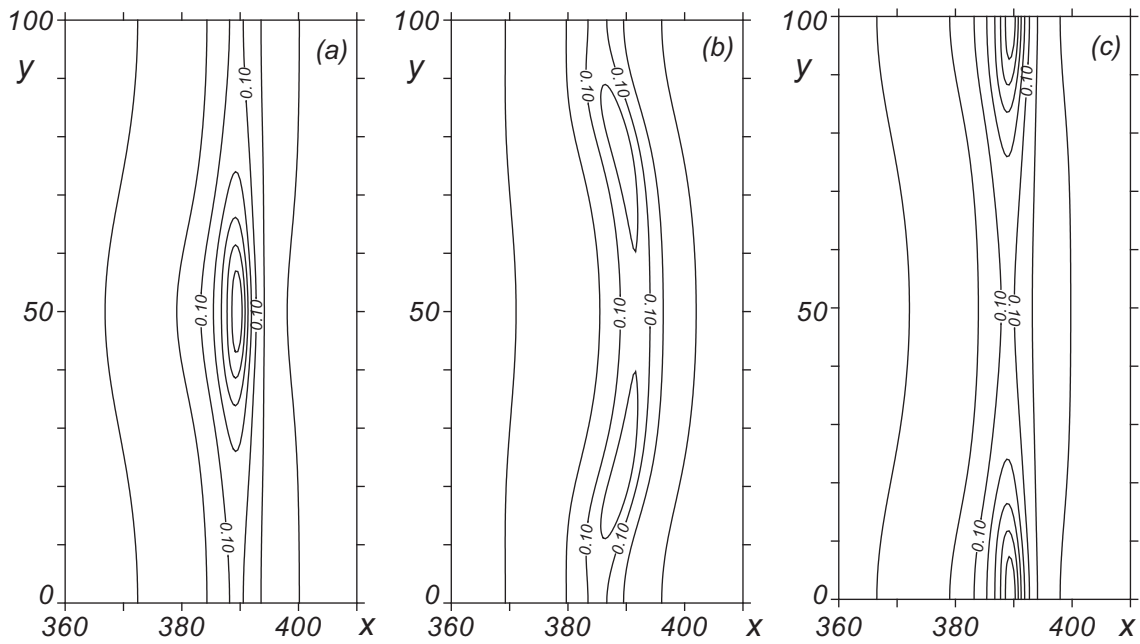


Рис. 12. *Контурные графики распределения концентрации радикалов, $w(x, y)$, взятые в три последовательных момента времени $t_1 = 80$ рисунок (a), $t_2 = 145$ рисунок (b) и $t_3 = 190$ рисунок (c) для $L_A = 10$, $L_B = 1$, $\beta = 7.5$ и $r = 0.1$.*

волн горения так же исследуется. В режиме быстрой рекомбинации увеличение L_B сужает область параметров с устойчивым распространением пламени т.е. для более тяжелых радикалов пламя менее устойчиво. В режиме медленной рекомбинации такой же эффект наблюдается для ячеистой неустойчивости, в то время как для волновой неустойчивости влияние изменения L_B более сложное и зависит от значения энергии активации. Параметр L_B может модифицироваться в эксперименте изменением состава смеси, например, разбавлением смеси инертными газами.

Важно отметить, что модель Зельдовича-Линяна, рассмотренная в данной главе и имеющая реакцию рекомбинации второго порядка, имеет свойства качественно схожие с одноступенчатой адиабатической моделью. Это коренным образом отличается от модели Зельдовича-Баренблатта с реакцией рекомбинации первого порядка по концентрации радикалов, исследованной в прошлой главе, для которой было продемонстрировано существование затухания волн горения и присутствие бифуркации Богданова-Такенса даже в адиабатическом пределе. Другими словами, мы показали, что кинетика реакции рекомбинации, в частности порядок реакции, существенным образом влияет на динамику распространения пламени, на свойства и устойчивость бегущих волн горения.

При пересечении критических кривых в пространстве параметров для волновой неустойчивости появляются пульсирующие двухмерные волновые решения. Для параметров вблизи нейтральной границы устойчивости временной период осцилляций и пространственный период структуры в направлении, поперечном направлению распространения волны, появляющихся решений хорошо согласуются с характеристиками доминирующей неустойчивости задачи линейной устойчивости. Первичная бифуркация,

приводящая к рождению пульсирующих решений, имеет надкритический характер. С точки зрения концентрации радикалов, распространяющиеся пульсирующие волны имеют солитон-подобную структуру радикальных пиков, которые следуют вдоль определенных траекторий, как это отображено на рис. 12. Здесь были рассмотрены условия нулевых потоков на боковых (по отношению к направлению распространения волны) сторонах области интегрирования, а длина области интегрирования в поперечном направлении подбиралась так, чтобы уместить один пространственный период пульсирующего решения. В случае других граничных условий рождаются решения с более сложной динамикой. Распространение стоячей волны сопровождается осцилляциями пиков концентрации радикалов. Амплитуда этих осцилляций следует корневой зависимости от параметра за критичности (разности энергии активации и ее критического значения).

При пересечении критических параметров для ячеистой неустойчивости в результате первичной бифуркации из плоской бегущей волны горения появляется двухмерная ячеистая волна. Ячеистое решение распространяется с постоянной скоростью без изменения своей формы в сопутствующей волне системе отсчета. Скорость ячеистой волны совпадает со скоростью распространения плоской бегущей волны с точностью до ошибки расчетов. Профиль концентрации радикалов представляет собой колокообразную функцию продольной координаты, в то время как вдоль поперечного направления пики распределения радикалов сдвинуты по фазе т.е. фронт пламени имеет гофрированную, искривленную структуру. Это продемонстрировано на рис. 13, где

построен контурный график распределения концентрации радикалов в ячеистой волне. Максимальное значение концентрации радикалов в продольном направлении так же варьируется при изменении поперечной координаты. Эти изменения довольно малы и составляют порядка нескольких процентов от максимального значения концентрации радикалов. В отличие от пульсирующих волн горения, амплитуда изменения максимума концентрации радикалов линейно зависит от параметра за критичности. Профили температуры и концентрации топлива отличаются от соответствующих профилей решений в виде бегущей волны искривлением формы фронта от плоского. При этом не наблюдается существенных пиков температуры по сравнению с бегущей волной. Данные свойства значительно усложняют экспериментальное наблюдение ячеистых волн, если толь-

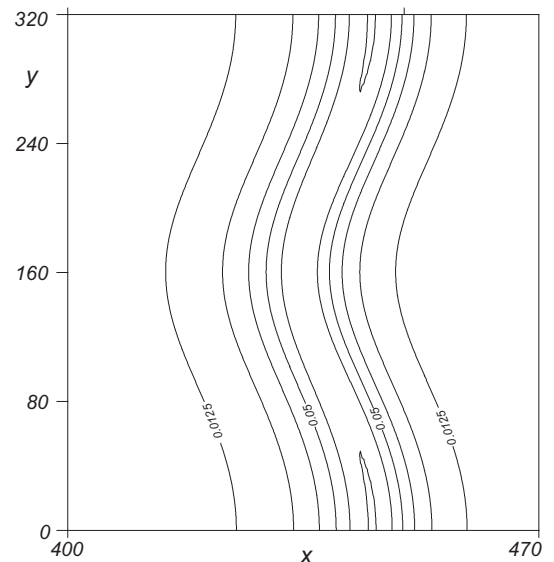


Рис. 13. Контурные графики распределения концентрации радикалов, $w(x, y)$, взятые в три последовательных момента времени $t_1 = 80$ рисунок (a), $t_2 = 145$ рисунок (b) и $t_3 = 190$ рисунок (c) для $L_A = 10$, $L_B = 1$, $\beta = 7.5$ и $r = 0.1$.

ко параметры не взяты далеко от критических. Определение нейтральной границы устойчивости как численно, так и в эксперименте является плохо разрешимой задачей. В конце главы подводятся основные итоги и приводятся выводы.

В **Главе 4** на основе двухступенчатых моделей с цепным механизмом реакции исследуется устойчивость волн горения, свободно распространяющихся в богатой предварительно перемешанной смеси водорода и воздуха при нормальных внешних условиях ($298K$ и 1атм). Во вводной части главы дан обзор численных и экспериментальных исследований скорости, затухания и пульсаций пламени в водород-воздушных смесях с большим коэффициентом избытка топлива. Во втором параграфе дана математическая формулировка рассматриваемой диффузионно-тепловой задачи о распространении пламени в богатой водород-воздушной смеси в адиабатическом пределе в одномерной пространственной конфигурации, включающую две стадии протекания реакции: разветвление цепи $3H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O + 2H$ и рекомбинацию $H + H + M \rightarrow H_2 + M$. Было рассмотрено четыре двухступенчатых адиабатических модели и было предположено, что H является единственным радикалом, вовлеченным в процесс горения. Первая реакция имеет большую энергию активации и малую теплоту, а вторая реакция обладает нулевой энергией активации и является высоко экзотермической. Вводятся безразмерные параметры, переменные и безразмерная форма модельных уравнений и граничных условий. С помощью известных из литературы кинетических и термо-физических данных дается оценка контрольных параметров задачи. Производится редукция уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для решений в виде бегущих волн. Формулируется задача линейной устойчивости бегущих волн горения.

В модели Зельдовича-Линяна глобальные реакции разветвления и рекомбинации контролируются следующими элементарными шагами: $H + O_2 \rightarrow OH + O$ и $H + H + M \rightarrow H_2 + M$, соответственно. Численный анализ показал, что модель с кинетическими данными из работы [12] хорошо предсказывает значение нормальной скорости распространения пламени в богатой смеси по отношению к данным, полученным в расчетах с детальным кинетическим механизмом. Однако, решения в виде бегущих волн горения оказались устойчивыми до очень больших значений коэффициента избытка топлива (более десяти). Это не согласуется с известными в литературе расчетами на основе детальным кинетическим механизмом. Следовательно, эта модель подходит для исследования только стационарного распространения пламени и не подходит для анализа устойчивости и генерации сложных пространственно-временных режимов горения.

В модели Зельдовича-Баренблатта глобальная реакция рекомбинации контролируется двумя элементарными шагами: $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$ и $H + H + M \rightarrow H_2 + M$. Включение реакции $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$ существенным образом интенсифицирует рекомбинацию H радикалов. В результате волна горения гаснет при конечных значениях коэффициен-

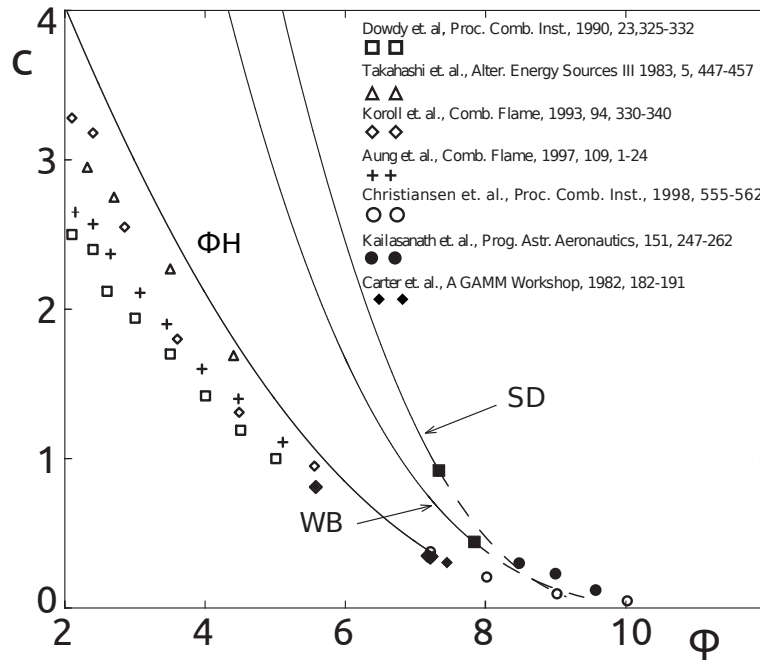


Рис. 14. Зависимость скорости, c , волны горения от коэффициента избытка топлива. Линии, отмеченные индексами 'SD' или 'WB', соответствуют разному выбору констант реакции [12] и [13] для модели Клавина-Линяна, а кривая, отмеченная индексом 'ФН', показывает скорость для феноменологической модели. Неустойчивые ветви решений показаны пунктирной линией. Различные символы представляют экспериментальные и численные данные из литературы (см. пояснения в правом верхнем углу).

та избытка топлива, равного примерно шести, что делает данную модель непригодной для исследования богатых водород-воздушных пламен. Основываясь на формулировке модели Зельдовича-Баренблатта, мы сформулировали феноменологическую модель, в которой константы реакций $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$ и $H + H + M \rightarrow H_2 + M$ рассматриваются как свободные параметры. Данный подход дает достаточно точную аппроксимацию для скорости распространения пламени вблизи предела воспламенения, критического значения коэффициента избытка топлива для появления пульсирующих неустойчивостей и частоты осцилляций. Результаты расчетов представлены на рис. 14, где построена зависимость скорости волны горения в метрах в секунду от коэффициента избытка топлива. Кривая, отмеченная индексом 'ФН', соответствует феноменологической модели. Структура волны горения так же относительно неплохо согласуется с результатами расчетов, основанных на детальном кинетическом механизме, хотя для феноменологической модели наблюдается тенденция переоценки концентрации H радикалов.

Модель Клавина-Линяна учитывает, что H так же вовлечены в реакции, включающие HO_2 , хотя сами гидропероксил радикалы считаются находящимися в стационарном состоянии. В результате скорость глобальной реакции разветвления модифицируется. Помимо этого теплота реакции разветвления тоже берется в расчет. Полученная таким образом модель с кинетическими данными, взятыми из [13], дает оценку скорости и структуры пламени, а так же границы устойчивости и частоты пульсаций, с

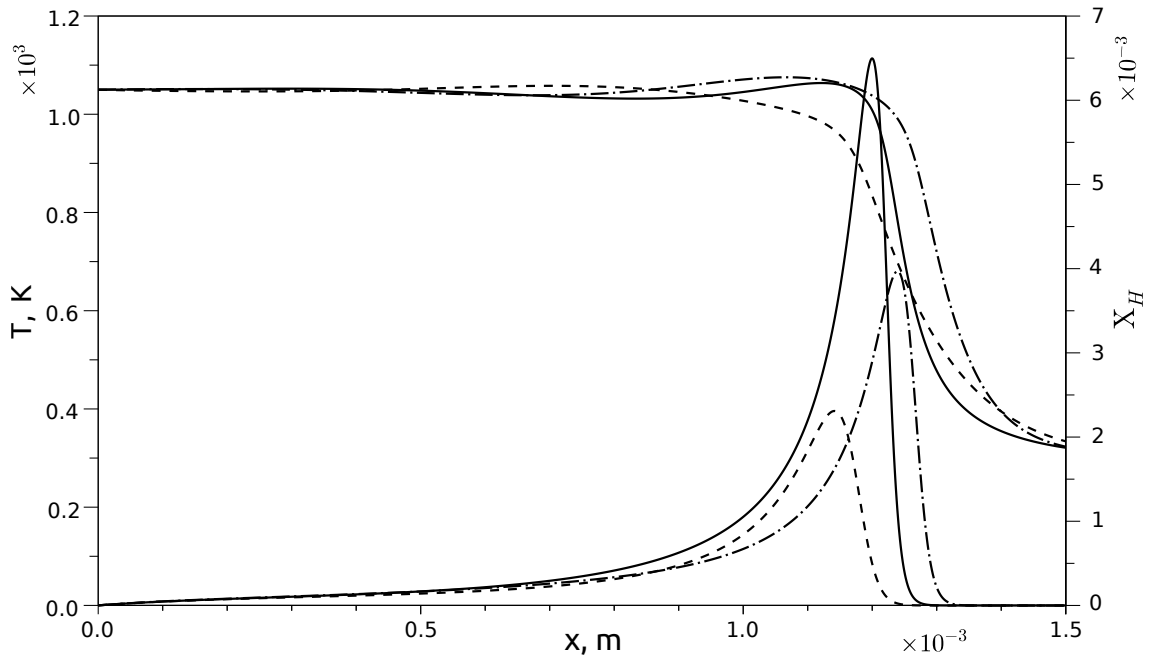


Рис. 15. Решение в виде пульсирующей волны горения при $\phi = 7.478$. Температура (левая ось) и массовая доля радикалов (правая ось), $T(\xi)$ и $X_H(\xi)$, построены как функции координаты в сопутствующей системе отсчета. Профили взяты в моменты времени $t_1 = 0$, $t_2 = 3.148 \times 10^{-3}$ и $t_3 = 1.25918 \times 10^{-2}$ с, и изображены сплошной, точечно-пунктирной и пунктирной линией, соответственно.

хорошей точностью при больших коэффициентах избытка топлива. Вместе с тем модель переоценивает скорость пламени для умеренно богатых смесей, как это видно на рис. 14.

Модели Клавина-Линяна и Зельдовича-Баренблатта со свободными константами реакций были выбраны для дальнейшего анализа устойчивости, поскольку они продемонстрировали способность предсказывать скорость, структуру и устойчивость пламени. Нейтральная граница устойчивости была найдена как функция температуры окружающей среды. Было показано, что увеличение начальной температуры свежей смеси расширяет область устойчивого горения в сторону более богатых составов смесей. Зависимость частоты Андронова-Хопфа от начальной температуры также исследовалась и найдено, что частота пульсаций убывает с прогревом свежей смеси. Помимо этого модель Клавина-Линяна дает завышенную оценку частоты Хопфа по сравнению с другими моделями.

Бифуркация Андронова-Хопфа, ответственная за потерю устойчивости бегущих волн горения, детально исследована. Показано, что она является надкритической и устойчивые пульсирующие волны горения появляются при пересечении нейтральной границы устойчивости в результате этой бифуркации. Пульсирующий режим горения характеризуется осцилляциями максимального значения температуры и концентрации H -радикалов (см. рис. 15). Пульсирующие волны являются периодическими функциями времени в системе отсчета в среднем бегущей вместе с волной. Установлено, что средняя скорость пламени убывает быстрее, чем скорость бегущей волны горения с ростом коэффициента избытка топлива от кри-

тического значения для бифуркации Андронова-Хопфа. При удалении в пространстве параметров от нейтральной границы устойчивости период и амплитуда осцилляции растут.

Резюмируя, наши исследования различных двухступенчатых моделей показали, что модель Клавина-Линяна может быть использована для анализа сложной пульсирующей динамики пламени в богатой водород-воздушной смеси вблизи предела воспламенения. В конце главы подводятся основные итоги и приводятся выводы.

В **Главе 5** рассмотрена общая постановка задачи о линейной устойчивости автоволновых решений для системы нескольких уравнений типа реакция-диффузия. Во введении дан обзор литературы по использованию метода функции Эванса для анализа устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений. Далее исследовались свойства операторов, которые появляются в формулировке задачи на линейную устойчивость. Показано, что для рассматриваемых типов задач непрерывный спектр лежит в левой комплексной полуплоскости и что устойчивость решений полностью определяется дискретным спектром этих операторов. Расположение дискретного спектра на комплексной плоскости связывается с нулями функции Эванса, которая определяется двумя разными способами: через Вронскиан, построенный на решениях задачи на линейную устойчивость, и в терминах внешней алгебры. Показано, как эти определения связаны друг с другом, и продемонстрированы основные свойства функции Эванса. Далее описаны основные сложности, связанные с численным расчетом функции Эванса, и пути их преодоления с помощью метода составной матрицы. Мы описали метод составной матрицы и показали, как он может быть обобщен в рамках внешней алгебры. В последнем параграфе главы формулируются подходы, с помощью которых возможно рассчитывать функцию Эванса для систем трех и более уравнений в частных производных второго порядка. В конце главы подводятся основные итоги и приводятся выводы.

Основные результаты и выводы

Впервые систематически исследованы свойства, структура и устойчивость решений в виде бегущих волн горения в моделях, описывающих распространение ламинарного пламени в смеси с цепным двухступенчатым кинетическим механизмом реакции. В пространстве параметров найдены область существования, границы устойчивости бегущих волн горения, а так же типы и свойства бифуркаций, приводящих к гашению волны горения и потере устойчивости. Обнаружены и исследованы сложные пространственно-временные режимы горения, возникающие в результате потери устойчивости бегущих волн в одномерной и двухмерной пространственной геометрии, в частности, пульсирующие одномерные периодические и хаотические, двухмерные ячеистые и пульсирующие волны горения. Данный подход был апробирован на двухступенчатых диффузионно-тепловых моделях горения богатых водород-воздушных смесей и позволил получить адекватное описание скорости, структуры и устойчивости пламе-

ни, что подтверждается сравнением с данными экспериментов и прямого численного счета на основании моделей с детальной кинетикой.

Дано качественное объяснение следующих экспериментально наблюдаемых эффектов: (а) обнаружен и исследован хаотический режим распространения волн горения и явление динамического затухания волн горения по сценарию переходного хаоса за счет кризиса хаотического аттрактора, получены статистические характеристики данного процесса; (б) Показано, что при приближении числа Льюиса для топлива к единице, система становится чрезвычайно чувствительна к малому изменению параметров, что делает наблюдение удвоение периода осцилляций волнового фронта практически затруднительным.

Сравнение результатов, полученных для различных моделей, позволяет сделать вывод о том, что кинетика реакции рекомбинации, в частности порядок реакции, существенным образом влияет на динамику распространения пламени, на свойства и устойчивость бегущих волн горения.

Разработана методика и численные алгоритмы исследования устойчивости решений в виде бегущих волн для моделей, описываемых тремя и более уравнениями в частных производных второго порядка в одно-, двух- и трехмерной пространственной геометрии, путем обобщения метода функции Эванса. Полученный подход применим для анализа устойчивости нелинейно-волновых процессов для широкого класса физических, физико-химических и биофизических моделей.

Основные результаты опубликованы в следующих работах:

1. *Gubernov, V.* On the Evans function calculation of the stability of combustion waves, *Australian Mathematical Society Gazette*. — 2002. — Vol. 29 no. 3. — Pp. 155–163.
2. *Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N., Weber R. O.* Numerical methods for the travelling wave solutions in reaction-diffusion equations // *ANZIAM Journal*. — 2003. — Vol. 44. — Pp. C271–C289.
3. *Gubernov V., Mercer G., Sidhu H., Weber R.* Evans function stability of combustion waves // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 2003. — Vol. 63, no. 4. — Pp. 1259–1275.
4. *Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N., Weber R. O.* Evans function stability of nonadiabatic combustion waves // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2004. — Vol. 460. — Pp. 1259–1275.
5. *Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N.* The effect of ambient temperature on the propagation of nonadiabatic combustion waves // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2005. — Vol. 37, no. 2. — Pp. 149–162.
6. *Kim J. S., Gubernov V.* On the fast-time cellular instabilities of lean's diffusion-flame regime // *Combustion Science and technology*. — 2005. — Vol. 177, no. 5-6. — Pp. 991–1022.

7. Kim J. S., Gubernov V. On Oscillatory Fast-Time Instability of Diffusion Flames // *5th Asia-Pacific Conference on Combustion, ASPACC 2005: Celebrating Prof. Bob Bilger's 70th Birthday*. — 2005. — Pp. 377-380.
8. Gubernov V. V., Mercer G. N., Sidhu H. S. Combustion waves in a model with chain branching reaction // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2006. — Vol. 39. — Pp. 1-14.
9. Gubernov V. V., Kim J. S. On the fast-time oscillatory instabilities of linãñ's diffusion-flame regime // *Combustion Theory and Modelling*— 2006. — Vol. 10. — Pp. 749-770.
10. Gubernov V., Sidhu H., Mercer G. Detecting Bogdanov-Takens bifurcation of traveling waves in reaction-diffusion systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2006. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 749-755.
11. Gubernov V. V., Mercer G. N., Sidhu H. S. Generalized compound matrix method // *Applied Mathematics Letters* — 2006. — Vol. 19. — Pp. 458-463.
12. Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N. Analysing combustion waves in a model with chain branching // *ANZIAM Journal*. — 2007. — Vol. 49. — Pp. C100-C115.
13. Gubernov V., Sidhu H., Mercer G. Combustion waves in a model with chain branching reaction and their stability // *Combustion Theory and Modelling*. — 2008. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 407-431.
14. Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N., Kolobov A. V., Polezhaev A. A. The effect of lewis number variation on combustion waves in a model with chain-branching reaction // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2008. — Vol. 44, no. 3. — Pp. 816-830.
15. Губернов В. В. Исследование появления пульсирующих неустойчивостей в модели распространения волн горения с цепным механизмом реакции // *Тезисы конференции молодых ученых "Фундаментальные и Прикладные Задачи Нелинейной Физики"*, Нижний Новгород. — 2008. — С. 37.
16. Sidhu H. S., Gubernov V. V., Mercer G. N., Kolobov A. V., Polezhaev A. A. Investigation of a Non-adiabatic Two-step Chain Branching Reaction. // *In: Chemeca 2008: Towards a Sustainable Australasia. [Barton, ACT]: Engineers Australia*. — 2008. — Pp. 1958-1967.
17. Губернов В. В., Колобов А. В., Полежаев А. А. Исследование пульсирующих режимов распространения волн в модели горения с цепным механизмом реакции. // *Тезисы 16-той международной конференции "Математика, компьютер, образование"*, Пуццино. — 2009. — С. 95.
18. Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S., Mercer G. N. Pulsating instabilities of combustion waves in a chain-branching reaction model // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2009. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 873-887.

19. Sidhu H. S., Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Mercer G. N., Sharples J. J. Oscillatory combustion waves in a chain branching model // *ANZIAM Journal*. — 2009. — Vol. 50. — Pp. C1017–C1032.
20. Sidhu H. S., Gubernov V. V., Mercer G. N., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sharples J. J. Travelling Waves in a Two-Step Chain Branching Model with Heat Loss // *Chemical Product and Process Modeling*. — 2009. — Vol. 4. — no. 3.
21. Губернов В. В., Колобов А. В., Полежаев А. А. Исследование пульсирующих режимов распространения волн в модели горения с цепным механизмом реакции // *Компьютерные Исследования и Моделирование*. — 2009. — Т. 1. — №. 3. — С. 273–280.
22. Sharples J. J., Gubernov V. V., Sidhu H. S., Towers I. N., Kolobov A. V., Polezhaev A. A. Behaviour of combustion waves in one-step and two-step models // *18th World IMACS Congress and MODSIM09 International Congress on Modelling and Simulation: Interfacing Modelling and Simulation with Mathematical and Computational Sciences, Proceedings*. — 2009. — Pp. 4453–4459.
23. Губернов В. В., Колобов А. В., Полежаев А. А. Удвоение периода и переходный хаос в модели распространения волн горения с цепным механизмом реакции // *Тезисы конференции молодых ученых “Фундаментальные и Прикладные Задачи Нелинейной Физики”*, Нижний Новгород. — 2010. — С. 28.
24. Gubernov V., Kolobov A., Polezhaev A., Sidhu H., Mercer G. Period doubling and chaotic transient in a model of chain-branching combustion wave propagation // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2010. — Vol. 466, no. 2121. — Pp. 2747–2769.
25. Sharples J. J., Sidhu H. S., Gubernov V. V. Properties of Nonadiabatic Premixed Combustion Fronts Arising in Single-step Reaction Schemes. // In: *Chemeca 2010: Engineering at the Edge; 26-29 September 2010, Hilton Adelaide, South Australia. Barton, A.C.T.: Engineers Australia*. — 2010. — Pp. 1618–1627.
26. Sharples J. J., Sidhu H. S., Gubernov V. V. Analysing instability of combustion waves using the Evans function // *ANZIAM Journal*. — 2010. — Vol. 52. — Pp. C773–C791.
27. Sidhu H. S., Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S. Oscillatory instability in the Zeldovich-Linan model // *Abstracts of the 13th International Conference on Numerical Combustion*. — 2011. — Pp. 76.
28. Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S. Pulsating instabilities in the zeldovich-linãñ model // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2011. — Vol. 49, no. 5. — Pp. 1054–1070.

29. Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S. Oscillatory thermal-diffusive instability of combustion waves in a model with chain-branching reaction and heat loss // *Combustion Theory and Modelling*. — 2011. — Vol. 15, no. 3. — Pp. 385–407.
30. Sharples J. J., Gubernov V. V., Sidhu H. S., McIntosh A. C., Brindley J. Analysis of a competitive exothermic-endothermic reaction scheme // 19th International congress on modelling and simulation (MODSIM2011) / Ed. by Chan, F and Marinova, D and Anderssen, RS. — 2011. — Pp. 345–351.
31. Qian C., Sidhu H. S., Sharples J. J., Towers I. N., Gubernov V. V. Combustion waves from a sequential exothermic and endothermic reaction // // 19th International congress on modelling and simulation (MODSIM2011) / Ed. by Chan, F and Marinova, D and Anderssen, RS. — 2011. — Pp. 725–732.
32. Губернов В. В., Колобов А. В., Полежаев А. А. Исследование устойчивости волн горения в модели Зельдовича-Линьяна // *Тезисы конференции молодых ученых “Фундаментальные и Прикладные Задачи Нелинейной Физики”*, Нижний Новгород. — 2012. — С. 35.
33. Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A. Investigation of combustion wave stability in chain-branching models // *Abstracts of Ginzburg conference on physics*. — 2012. — Pp. 185.
34. Sharples J. J., Sidhu H. S., McIntosh A. C., Brindley J., Gubernov V. V. Analysis of combustion waves arising in the presence of a competitive endothermic reaction // *IMA Journal of applied mathematics*. — 2012. — Vol. 77, no. 1, SI. — Pp. 18–31.
35. Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S. Stability of combustion waves in the Zeldovich-Linñ model // *Combustion and Flame*. — 2012. — Vol. 159, no. 3. — Pp. 1185–1196.
36. Gubernov V. V., Sharples J. J., Sidhu H. S., McIntosh A. C., Brindley J. Properties of combustion waves in the model with competitive exo- and endothermic reactions // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2012. — Vol. 50, no. 8. — Pp. 2130–2140.
37. Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S. Analysing the stability of premixed rich hydrogen-air flame with the use of two-step models // *Combustion and Flame*. — 2013. — Vol. 160, no. 6. — Pp. 1060–1069.
38. Gubernov V. V., Sidhu H. S., Kolobov A. V., Polezhaev A. A. Pulsating Behaviour in Combustion Waves // *In: Wave Propagation, Edited by Prof. Luiz Rocha and Dr. Matues Gomes, AcademyPublish*. — 2013. — Pp. 509–535.
39. Towers I. N., Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S. Bistability of flame propagation in a model with competing exothermic reactions // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*. — 2013. — Vol. 469, no. 2158. — 20130315

40. Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S. Stability of hydrogen-air deflagration near rich flammability limit // *Proceedings of the 9-th Asia-Pacific Conference on Combustion. Gyeongju, Korea.* — 2013. — Pp. 265.

Список цитируемой литературы

- [1] Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.
- [2] Merzhanov A., Rumanov E. Physics of reaction waves // *Reviews of Modern Physics.* — 1999. — Vol. 71, no. 4. — P. 1173.
- [3] Sivashinsky G. I. Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames // *Annual Review of Fluid Mechanics.* — 1983. — Vol. 15, no. 1. — Pp. 179–199.
- [4] Clavin P. Dynamic behavior of premixed flame fronts in laminar and turbulent flows // *Progress in Energy and Combustion Science.* — 1985. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 1–59.
- [5] Volpert A. I., Volpert V. A., Volpert V. A. Traveling wave solutions of parabolic systems. — Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1991.
- [6] Zamashchikov V., Minaev S. Limits of flame propagation in a narrow channel with gas filtration // *Combustion, Explosion and Shock Waves.* — 2001. — Vol. 37, no. 1. — Pp. 21–29.
- [7] Fursenko R., Minaev S., Babkin V. Thermal interaction of two flame fronts propagating in channels with opposing gas flows // *Combustion, Explosion and Shock Waves.* — 2001. — Vol. 37, no. 5. — Pp. 493–500.
- [8] Ju Y., Maruta K. Microscale combustion: Technology development and fundamental research // *Prog. Energy Combust. Sci.* — 2011. — Vol. 37, no. 6. — Pp. 669–715.
- [9] Gorman M., El-Hamdi M., Robbins K. A. Chaotic dynamics near the extinction limit of a premixed flame on a porous plug burner // *Combustion science and technology.* — 1994. — Vol. 98, no. 1-3. — Pp. 47–56.
- [10] Sankaran R., Im H. G. Dynamic flammability limits of methane/air premixed flames with mixture composition fluctuations // *Proceedings of the Combustion Institute.* — 2002. — Vol. 29, no. 1. — Pp. 77–84.
- [11] Choi W., Hong S., Abrahamson J. T., Han J.-H., Song C., Nair N., Baik S., Strano M. S. Chemically driven carbon-nanotube-guided thermopower waves // *Nat. Mater.* — 2010. — Vol. 9, no. 5. — Pp. 423–429.
- [12] Saxena P., Williams F. A. Testing a small detailed chemical-kinetic mechanism for the combustion of hydrogen and carbon monoxide // *Combustion and Flame.* — 2006. — Vol. 145, no. 1-2. — Pp. 316–323.
- [13] Conaire M. O., Curran H. J., Simmie J. M., Pitz W. J., Westbrook C. K. A comprehensive modeling study of hydrogen oxidation // *International Journal of Chemical Kinetics.* — 2004. — Vol. 36, no. 11. — Pp. 603–622.