

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук

Отделение теоретической физики им.И.Е.Тамма

На правах рукописи

ГУБЕРНОВ ВЛАДИМИР ВЛАДИМИРОВИЧ

Исследование диффузионно-тепловой устойчивости волн горения в моделях перемешанного пламени с двухступенчатым цепным механизмом реакции

Специальность 01.04.02 – Теоретическая физика.

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических

МОСКВА - 2013

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Литература	25
§ 1.1 Устойчивость бегущих волн горения в одноступенчатых моделях	25
1.1.1 Диффузионно-тепловая и гидродинамическая устойчивость пламени	25
1.1.2 Диффузионно-тепловая устойчивость пламени	27
1.1.3 Ячеистое пламя	36
1.1.4 Пульсирующие волны горения	39
§ 1.2 Устойчивость бегущих волн горения в двухступенчатых моделях	47
1.2.1 Модели с параллельными реакциями	47
1.2.2 Модели с последовательными реакциями	53
Глава 2. Модель Зельдовича-Баренблатта с линейной реакцией рекомбинации	59
§ 2.1 Введение	59
§ 2.2 Формулировка модели Зельдовича-Баренблатта. Модельные уравнения	63
§ 2.3 Решение в виде бегущей волны	66
§ 2.4 Бегущие волны в случае чисел Льюиса равных единице в адиабатическом приближении	67
2.4.1 Условия существования решения	68
2.4.2 Решение в виде бегущей волны	71
2.4.3 Сценарий затухания	76
2.4.4 Устойчивость бегущих волн горения и их затухание за пределом воспламеняемости	86
§ 2.5 Бегущие волны горения в случае произвольных чисел Льюиса .	91
2.5.1 Число Льюиса для топлива меньше единицы, $L_A < 1$. . .	91

2.5.2	Число Льюиса для топлива равно единице, $L_A = 1$	93
2.5.3	Число Льюиса для топлива больше единицы, $L_A > 1$	95
§ 2.6	Влияние тепловых потерь и внешней температуры на скорость пламени	98
§ 2.7	Одномерная устойчивость, пульсирующие волны, удвоение пери- ода и переходный хаос	103
2.7.1	Бифуркация Андронова-Хопфа и пульсирующие решения	110
2.7.2	Удвоение периода пульсаций	119
2.7.3	Переходный хаос	127
§ 2.8	Двухмерная устойчивость пламени и стоячие волны горения	130
2.8.1	Анализ дисперсионных соотношений	131
2.8.2	Диаграмма устойчивости и пространственно-временные ха- рактеристики неустойчивости	136
2.8.3	Двухмерные пульсирующие решения	144
§ 2.9	Выводы	149
Глава 3. Модель Зельдовича-Линяна с квадратичной реакцией рекомбинации		160
§ 3.1	Введение	160
§ 3.2	Формулировка модели Зельдовича-Линяна. Модельные уравнения	163
§ 3.3	Решение в виде бегущей волны. Выбор параметризации	165
3.3.1	Асимптотика решения при $\xi \rightarrow -\infty$	167
3.3.2	Свойства решений в виде бегущей волны	169
3.3.3	Коррекция параметризации	175
§ 3.4	Линейный анализ устойчивости	177
§ 3.5	Пульсирующие, стоячие и ячеистые волны	186
3.5.1	Пульсирующие волны	186
3.5.2	Волновая неустойчивость и стоячие волны	190
3.5.3	Ячеистые неустойчивость и волны	195
§ 3.6	Выводы	199
Глава 4. Исследование устойчивости пламени в предварительно перемешанной богатой водород-воздушной смеси вбли-		

зи предела воспламенения	205
§ 4.1 Введение	205
§ 4.2 Математическая формулировка задачи	210
§ 4.3 Решение в виде бегущих волн	216
4.3.1 Модель Зельдовича-Линяна	216
4.3.2 Модель Зельдовича-Баренблатта	221
4.3.3 Модель Клавина-Линяна	224
§ 4.4 Анализ устойчивости	226
§ 4.5 Выводы	233
Глава 5. Исследование устойчивости бегущих волн горения ме-	
тодом функции Эванса	236
§ 5.1 Введение	236
§ 5.2 Решение в виде бегущей волны	237
§ 5.3 Задача линейной устойчивости и ее непрерывный спектр	239
§ 5.4 Дискретный спектр и функция Эванса	241
§ 5.5 Свойства функции Эванса	244
§ 5.6 Численный метод расчета функции Эванса	248
§ 5.7 Метод составной матрицы	251
§ 5.8 Функция Эванса, метод составной матрицы и внешняя алгебра	254
5.8.1 Вторая внешняя степень C^4 . Индуцированная система. Раз-	
ложимость	256
5.8.2 Функция Эванса и оператор звезда Ходжа	258
5.8.3 Третья внешняя степень C^6 . Индуцированная система. Раз-	
ложимость	260
§ 5.9 Выводы	264
Заключение	265
Литература	269

Введение

Актуальность темы диссертации.

Модели типа реакция-диффузия описывают широкий спектр явлений в физике, химии и биофизике, связанных с образованием сложных пространственно-временных структур. В горении так же наблюдаются самые разнообразные формы пространственно-временной самоорганизации (см. работы Я. Б. Зельдовича, А. Г. Мержанова, Г. И. Сивашинского, П. Клавина и др. [1–4]). Многообразие различных видов нелинейных волн включает в себя бегущие волны горения, пульсирующие волны горения, ячеистое пламя, радиальные и спиральные волны, образование локализованных очагов горения – горячих точек, которые обладают богатым динамическим поведением, вращающиеся волны, стоячие (или симметричные) волны, сферическое пламя, квазистационарные режимы горения, пространственно-временной хаос и т.д.

Изучение нелинейно-волновых процессов в системах типа реакция-диффузия насчитывает не один десяток лет. В целом достигнуто понимание механизмов формообразования для сравнительно простых моделей, описываемых системами двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Увеличение степеней свободы может приводить к появлению других, более сложных сценариев и механизмов образования пространственно-временных структур, которые не изучены по настоящий момент. Исследование систем, описываемых тремя и более уравнениями в частных производных, является актуальной проблемой физики нелинейно-волновых процессов. Похожая ситуация наблюдается и в теории процессов горения.

Формирование различных сложных динамических структур тесно связано с пространственно-временными неустойчивостями нелинейных волн горения, это подчеркивает необходимость развития фундаментального понимания природы и механизмов возникновения неустойчивости. В об-

ласти теории горения подобные исследования ведутся довольно давно и одним из наиболее важных результатов данных исследований явилось понимание того, что во многих случаях для описания возникновения неустойчивостей при горении газов, аэрозолей, твердых тел достаточно учитывать два основных процесса: диффузию, участвующих в реакции веществ, и теплопроводность с одной стороны, и выделение энергии в ходе химических реакций с другой. В данном приближении другие процессы, связанные, например, с тепловым расширением веществ при нагревании качественно не влияют на картину возникновения неустойчивости. Модели, полученные в данном приближении, обычно носят название диффузионно-тепловых.

К настоящему моменту свойства и устойчивость процессов горения в одноступенчатых диффузионно-тепловых моделях подробно исследованы как аналитически, так и численно. Математически данные модели описываются системой двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Было показано, что как в горючих смесях, так и в диффузионном пламени существует фундаментальное автоволновое решение в виде плоской бегущей или стоячей волны соответственно. При изменении параметров данные решения могут терять устойчивость таким образом, что решение либо затухает, либо возникают более сложные режимы горения такие, как пульсирующие волны или ячеистое пламя. Данные эффекты были аналитически исследованы на основе приближения высокой энергии активации. Помимо этого существует целый ряд работ, где авторы проводят численный анализ устойчивости пламени в рамках одноступенчатой модели. Эти работы в частности показали, что существуют и более сложные пространственно-временные решения типа горячих точек, спиральных волн и т.д. Механизмы возникновения таких решений до конца не изучены.

Одноступенчатые модели позволяют качественно объяснить многие экспериментально наблюдаемые эффекты, однако, не позволяют получить удовлетворительное количественное описание наблюдаемых в эксперименте явлений. Помимо этого, некоторые экспериментально наблюдаемые явления не могут быть описаны в рамках моделей с одноступенчатой кинетикой. Это связано с тем, что в реальности любой процесс горения включает

в себя множество шагов каждый со своими промежуточными химическими соединениями, которые должны быть учтены, если мы хотим получить реалистическое описание кинетики пламени. Таким образом, для понимания механизмов генерации пространственно-временных структур в данных системах необходимо увеличение степеней свободы. В частности, необходимо рассмотрение более сложных кинетических схем реакции горения. Механизмы возникновения неустойчивостей в более сложных системах - моделях с двухступенчатыми реакциями до конца не изучены по настоящий момент. Данные вопросы носят фундаментальный характер и их прояснение необходимо для понимания, как динамики процессов горения, так и общих закономерностей структурообразования в моделях типа реакция-диффузия.

Несмотря на то, что есть некоторый задел [5] в исследовании устойчивости волн горения для моделей ламинарного перемешанного пламени с двухступенчатой кинетикой реакции, существует целый класс задач, связанный с моделями пламени с двухступенчатым цепным механизмом реакции, для которых данный вопрос практически не был затронут ранее. Пламена с цепным разветвленным механизмом реакции принципиально не могут быть описаны в рамках одноступенчатого приближения и для своего описания требуют как минимум две реакции в кинетической схеме. Таким образом, модели с двухступенчатым цепным механизмом являются минимальным фундаментальным представлением данного класса задач. Другим не менее важным обстоятельством является то, что большинство практически важных углеводородных пламен идут по схеме с цепным механизмом реакции [1]. Это еще раз подчеркивает важность и актуальность исследования устойчивости и формирования сложных пространственно-временных режимов горения в моделях с двухступенчатым цепным кинетическим механизмом. В этой связи отметим ряд аспектов, имеющих как фундаментальное, так и прикладное значение.

В ближайшие десятилетия использование процессов горения углеводородного топлива в качестве одного из основных источников энергии неизбежно. На сегодняшний день на первый план выходят вопросы повышения эффективности и снижения выбросов при сгорании различных видов топ-

лива, что в частности связано с переходом в режимы горения, близкие к пределам воспламенения, например, при горении обедненных смесей и в микрогорении [6–8]. С приближением к границам гашения пламени первостепенными становятся вопросы устойчивости и формирования сложных пространственно временных режимов горения. Исследование устойчивости распространения ламинарных волн горения в заранее перемешанных смесях является одной из фундаментальных задач, лежащих в этом русле, которой посвящена работа.

Возникновение и развитие неустойчивостей с одной стороны приводит к утечке топлива, неполному выгоранию и динамическому гашению волн горения [9, 10], что связано с вопросами энергоэффективности, экологической и технологической безопасности и носит нежелательный характер. С другой стороны сложные пространственно временные режимы горения чрезвычайно чувствительны к параметрам процесса и могут быть использованы для задач диагностики, так же пульсирующие режимы горения предполагается использовать в области микрогенерации, где по прежнему нет альтернативы углеводородам по плотности энергии, при создании источников питания переменного тока в связке с термоэлектрическим эффектом [11].

В последние годы наблюдается возросший интерес к моделированию горения водорода, вызванный перспективами развития водородной энергетики, двигателей на водороде и вопросам безопасности использования водорода. Все это требует дальнейшего развития понимания процессов горения водорода и фундаментальных проблем, связанных с этим: воспламенения, дефлаграции водород-воздушной смеси, диффузионного горения водорода и т. д. Исследование скорости, структуры, устойчивости волн горения, возникновения сложных динамических режимов распространения пламени и пределов воспламенения безусловно является одной из фундаментальных задач в этом ряду. Существует ряд моделей, как феноменологических, так и редуцированных с двухступенчатым цепным механизмом реакции, описывающих распространение волн горения в водород-воздушных смесях, которые могут быть применены для решения указанных задач.

Целью диссертационной работы является: Систематическое исследование скорости, структуры, устойчивости волн горения, возникновения сложных пространственно-временных режимов распространения пламени, роли подобных динамических структур в гашении дефлаграции, пределов воспламенения в моделях распространения ламинарного пламени в заранее перемешанных смесях в рамках моделей с двухступенчатым цепным кинетическим механизмом реакции.

В соответствии с общей целью исследования были поставлены и реализованы следующие основные задачи:

1. Разработка методов и численных алгоритмов исследования устойчивости решений в виде бегущих волн для моделей, описываемых тремя и более уравнениями в частных производных второго порядка, в одно-, двух- и трехмерной пространственной геометрии путем обобщения метода функции Эванса с целью получения методики, которая может быть использована для анализа устойчивости волновых решений широкого класса физических, химических и биологических моделей, описываемых уравнениями типа реакция-диффузия со сложной кинетикой.
2. Исследовать свойства, структуру и устойчивость решений в виде бегущих волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта, описывающей распространение ламинарного пламени в заранее перемешанной смеси с цепным двухступенчатым кинетическим механизмом и реакцией рекомбинации первого порядка по концентрации радикалов, как в адиабатическом случае, так и с учетом тепловых потерь. В пространстве параметров установить область существования, границы воспламенения и устойчивости бегущих волн горения, а так же типы и свойства бифуркаций, приводящих к затуханию волны горения и потере устойчивости.
3. В рамках модели Зельдовича-Баренблатта исследовать свойства и структуру решений, возникающих при потере устойчивости бегущих

волн горения в одномерной и двухмерной пространственной геометрии. Используя одномерную формулировку задачи, детально исследовать свойства пульсирующих волн горения таких, как последовательность бифуркаций удвоения периода, переход к хаосу и свойства хаотических режимов, установить влияние и роль пульсаций на сценарий динамического гашения пламени, а так же изучить механизм, приводящий к динамическому гашению.

4. Исследовать свойства, структуру и устойчивость решений в виде бегущих волн горения в модели Зельдовича-Линяна, описывающей распространение ламинарного пламени в заранее перемешанной смеси с цепным двухступенчатым кинетическим механизмом и реакцией рекомбинации второго порядка по концентрации радикалов. В пространстве параметров установить область существования, границы воспламенения и устойчивости бегущих волн горения, а так же типы и свойства бифуркаций, приводящих к затуханию волны горения и потере устойчивости, и исследовать свойства и структуру решений, возникающих при потере устойчивости бегущих волн горения в одномерной и двухмерной пространственной геометрии.
5. На основе проведенного рассмотрения установить каким образом кинетика реакции рекомбинации радикалов влияет на сценарии затухания и потери устойчивости бегущих волн горения в рамках моделей с цепным механизмом реакции.
6. Используя рассмотренные модели типа Зельдовича-Баренблатта и Зельдовича-Линяна, а так же модели с редуцированной двухступенчатой кинетикой такие, как модель Клавина-Линяна, исследовать скорость распространения, структуру и устойчивость волн горения в богатой смеси водорода и воздуха вблизи предела воспламенения.

Научная новизна:

В результате проведенных исследований впервые были получены следующие результаты:

- Впервые детально исследована структура волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта и установлено, что в адиабатическом пределе в зависимости от числа Льюиса для топлива возможно два сценария затухания пламени: либо скорость волны горения стремиться к нулю при конечных значениях параметров, либо затухание происходит в результате бифуркации складки при конечной скорости волны горения. Показано, что вблизи предела затухания волны горения ее структура носит характер режима быстрой, а вдали от предела затухания, режима медленной рекомбинации. В пространстве параметров найдена граница затухания и исследовано каким образом параметры модели влияют на ее расположение.
- Исследована устойчивость волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта, установлены типы бифуркаций, приводящих к потере устойчивости, в пространстве параметров найдена нейтральная граница устойчивости и изучены сложные пространственно-временные режимы распространения пламени, возникающие в результате потери устойчивости бегущих волн горения.
- Методами нелинейной динамики исследовано возникновение хаотических режимов распространения волн горения в результате каскада бифуркаций удвоения периода по сценарию Фейгенбаума, что характеризуется непрерывным Фурье спектром наблюдаемых динамических переменных, случайным нерегулярным распределением изображающих точек на сечении Пуанкаре и положительным максимальным показателем Ляпунова. Так же было продемонстрировано, что область с хаотическим режимом имеет конечную ширину в пространстве параметров и сменяется затуханием при дальнейшем увеличении параметра критичности.
- Впервые теоретически найден и исследован сценарий динамического затухания волн горения, приводящий к исчезновению хаотического режима распространения пламени. Установлено, что возникновение затухания происходит по сценарию переходного хаоса за счет кризиса хаотического аттрактора, исследованы статистические свойства

данного процесса, а так же показано, что полученные результаты качественно согласуются с результатами экспериментов.

- На основе бифуркационного анализа и исходя из расположения в пространстве параметров областей существования различных динамических режимов показано, что при приближении числа Льюиса для топлива к единице, система становится чрезвычайно чувствительна к малому изменению параметров. Это объясняет то, что удвоение периода осцилляций свободно распространяющегося волнового фронта практически не фиксируется в экспериментах с газовыми смесями с числами Льюиса, близкими к единице.
- Впервые исследована устойчивость волн горения в моделях Зельдовича-Линяна, установлены типы бифуркаций, приводящих к потере устойчивости, и изучены сложные пространственно-временные режимы распространения пламени, возникающие в результате потери устойчивости бегущих волн горения.
- В рамках диффузионно-тепловых моделей с двухступенчатой кинетикой исследована устойчивость волн горения в богатых водород-воздушных смесях при нормальных внешних условиях и впервые показано, что данный подход позволяет получить адекватное описание как скорости и структуры, так и устойчивости пламени и возникновения пульсаций, что подтверждается сравнением с данными экспериментов и прямого численного счета на основании моделей с детальной кинетикой.

Научная и практическая ценность

В настоящей работе исследуется распространение волн горения в смесях в рамках моделей с двухступенчатым цепным кинетическим механизмом. Исследования в этой области важны как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения, поскольку горение большинства практически важных углеводородов идет по схеме с цепным механизмом реакции. Результаты, полученные в работе, позволяют понять, прогнозировать и использовать возникновение и развитие неустойчивостей в данных процессах,

что связано с вопросами энергоэффективности и безопасности использования углеводородного топлива с экологической и технологической точек зрения, а так же важно в области диагностики и микрогенерации.

В работе предложен подход, позволяющий получить адекватное описание скорости, структуры и устойчивости волн горения в богатых водород-воздушных смесях, что имеет непосредственное практическое применение.

Разработаны методы и численные алгоритмы исследования устойчивости решений в виде бегущих волн для моделей, описываемых тремя и более уравнениями в частных производных второго порядка в одно-, двух- и трехмерной пространственной геометрии, которые могут быть использованы для анализа устойчивости волновых решений широкого класса физических, химических и биологических моделей.

Положения, выносимые на защиту:

1. Разработаны методы и численные алгоритмы исследования устойчивости решений в виде бегущих волн для моделей, описываемых тремя и более нелинейными уравнениями в частных производных второго порядка в одно-, двух- и трехмерной пространственной геометрии.
2. Установлено, что порядок реакции рекомбинации радикалов существенно влияет на динамику пламени, на свойства и устойчивость бегущих волн горения в моделях с цепным кинетическим механизмом реакции.
3. Впервые систематически исследована устойчивость волн горения в моделях с двухступенчатым цепным механизмом реакции: Зельдовича-Баренблатта, Зельдовича-Линяна, Клавина-Линяна и диффузионно-тепловая устойчивость волн горения в богатых водород-воздушных смесях вблизи предела воспламенения, в результате чего установлены и изучены типы бифуркаций, приводящих к потере устойчивости, найдены и изучены сложные пространственно-временные режимы распространения пламени, возникающие в результате потери устойчивости бегущих волн горения.
4. Обнаружен и исследован сценарий перехода к хаотическому режиму распространения волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта

через каскад бифуркаций удвоения периода временных осцилляций пульсирующих волн горения; впервые прямым расчетом показателей Ляпунова, анализом спектральных и фазовых характеристик пульсирующих волн показано существование хаотического режима распространения волн горения.

5. Впервые теоретически найден и исследован сценарий динамического затухания волн горения при возникновении пульсаций, в рамках рассматриваемых моделей выяснена природа данного явления и показано, что затухание пламени происходит по сценарию переходного хаоса за счет кризиса хаотического аттрактора.
6. На основе полученных данных о расположении в пространстве параметров критических значений для различных типов бифуркаций качественно объяснено, что экспериментальное наблюдение пульсирующих плоских волн горения для газовых смесей с числами Льюиса близкими к единице практически не реализуемо.

Обоснованность и достоверность результатов

Результаты, представленные в диссертации, получены на основе численных вычислений с использованием тщательно протестированных программ. Достоверность обеспечивается корректностью постановки задачи и адекватностью применяемых математических моделей. Полученные вычислительные результаты сравнивались с аналитическими в различных предельных случаях, а так же с данными известных из литературы экспериментальных работ. Они неоднократно обсуждались на семинарах и докладывались на специализированных конференциях, большая часть результатов опубликована в международных и российских научных журналах. Это позволяет считать все полученные результаты обоснованными и достоверными, а также полностью отвечающими современному мировому уровню исследований. Большинство представленных результатов являются новыми и получены впервые.

Личный вклад автора

Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором лично, либо при его непосредственном участии.

Структура и объем диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет **298** страниц, включая **79** рисунков. Список литературы содержит **288** наименований.

Во введении дается общая характеристика диссертации: обоснована актуальность темы; сформулированы цели работы, научная новизна и практическая ценность полученных результатов; перечислены основные положения, выносимые на защиту; приведены сведения об апробации результатов, основных публикациях, объеме и структуре работы.

В главе 1 дается обзор современного состояния исследований в области изучения диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени в рамках моделей с одно и двухстадийной кинетикой реакции горения.

Глава 2 посвящена описанию результатов численного и асимптотического анализа свойств, структуры и устойчивости волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта, описывающей распространение ламинарного пламени в заранее перемешанной смеси с цепным двухступенчатым кинетическим механизмом и реакцией рекомбинации первого порядка по концентрации радикалов. Во введении к главе дан обзор литературы, посвященной исследованиям волн горения в рамках данной модели. В следующем параграфе формулируется математическая модель, записываются уравнения в частных производных, описывающие процесс распространения волн горения, вводятся безразмерные переменные и безразмерный вид модельных уравнений в частных производных и граничных условий. Далее сформулирована задача о распространении плоских волн горения в сопутствующей системе отсчета в бесконечной среде в виде связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованы свойства и структура решений в виде бегущих волн в одномерном адиабатическом и неадиабатическом случае. Формулируется задача линейной устойчивости, как проблема поиска собственных значений и собственных функций краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. С ее помощью исследуется устойчивость волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта, установлены типы бифуркаций, приводящих к потере устойчивости, в пространстве параметров найдена нейтральная

граница устойчивости и изучены сложные пространственно-временные режимы распространения пламени, возникающие в результате потери устойчивости бегущих волн горения. Методами нелинейной динамики исследовано возникновение хаотических режимов распространения волн горения в результате каскада бифуркаций удвоения периода по сценарию Фейгенбаума. Изучен сценарий динамического затухания волн горения, приводящий к исчезновению хаотического режима распространения пламени.

Анализ устойчивости волн горения и механизмов появления пульсаций обобщен на двухмерных случай для чисел Льюиса для топлива больших единицы. Рассмотрены как адиабатическая, так и неадиабатическая модель. Исследованы свойства волновой неустойчивости. Показано, что при пересечении в пространстве параметров критических значений для появления волновой неустойчивости рождаются двухмерные пульсирующие решения, для которых распределение концентрации радикалов имеет вид солитонно-подобных уединенных пиков, распространяющихся по определенным траекториям. В конце главы подводятся основные итоги и приводятся выводы.

Глава 3 посвящена исследованию свойств, структуры и устойчивости решений в виде бегущих волн горения в модели Зельдовича-Линяна, описывающей распространение ламинарного пламени в заранее перемешанной смеси с цепным двухступенчатым кинетическим механизмом и реакцией рекомбинации второго порядка по концентрации радикалов. Во введении к главе дан обзор литературы, посвященной исследованиям волн горения в рамках данной модели. В следующем параграфе формулируется математическая модель, записываются уравнения в частных производных, описывающие процесс распространения волн горения, вводятся безразмерные переменные и безразмерный вид модельных уравнений в частных производных и граничных условий.

Далее проводится редукция модельных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих решения в виде бегущих волн. Находится асимптотика решений в области продуктов и рекомбинации, формулируются граничные условия и численно исследуются свойства и структура бегущих волн горения. Резуль-

таты сравниваются с данными асимптотического анализа. Устойчивость волн горения в модели Зельдовича-Линяна исследовалась методом функции Эванса и прямым интегрированием модельных уравнений в частных производных. В пространстве параметров находятся область существования, границы воспламенения и устойчивости бегущих волн горения, а также типы и свойства бифуркаций, приводящих к затуханию волны горения и потере устойчивости. Исследуются свойства и структура решений, возникающих при потере устойчивости бегущих волн горения в одномерной и двухмерной пространственной геометрии. В конце главы подводятся основные итоги и приводятся выводы.

В главе 4 на основе двухступенчатых моделей с цепным механизмом реакции исследуется устойчивость волн горения, свободно распространяющихся в богатой предварительно перемешанной смеси водорода и воздуха при нормальных внешних условиях. Во вводной части главы дан обзор численных и экспериментальных исследований скорости, затухания и пульсаций пламени в водород-воздушных смесях с большим коэффициентом избытка топлива. Во втором параграфе дана математическая формулировка рассматриваемой диффузионно-тепловой задачи о распространении пламени в богатой водород-воздушной смеси в адиабатическом пределе в одномерной пространственной конфигурации. Вводятся безразмерные параметры, переменные и безразмерная форма модельных уравнений и граничных условий. С помощью известных из литературы кинетических и термо-физических данных дается оценка контрольных параметров задачи. Производится редукция уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для решений в виде бегущих волн. Формулируется задача линейной устойчивости бегущих волн горения. Исследованы скорость, структура и устойчивости пламени, а также бифуркация Андронова-Хопфа, ответственная за потерю устойчивости бегущих волн горения. Показано, что устойчивые пульсирующие волны горения появляются при пересечении нейтральной границы устойчивости в результате этой бифуркации. Изучены свойства пульсирующих режимов горения. В конце главы подводятся основные итоги и приводятся выводы.

В главе 5 рассмотрена задача линейной устойчивости для моделей

типа реакция-диффузия описываемых системами двух, трех и более уравнений в частных производных. Исследованы свойства операторов, которые появляются в формулировке задачи на линейную устойчивость. Показано, что непрерывный спектр лежит в левой комплексной полуплоскости и что устойчивость решений полностью определяется дискретным спектром этих операторов. Расположение дискретного спектра на комплексной плоскости связывается с нулями функции Эванса, которая определяется двумя разными способами: через Вронскиан, построенный на решениях задачи на линейную устойчивость, и в терминах внешней алгебры. Показано, как эти определения связаны друг с другом, продемонстрированы основные свойства функции Эванса. Описаны сложности, связанные с ее численным расчетом, и продемонстрированы пути их преодоления с помощью метода составной матрицы. В конце главы подводятся основные итоги и приводятся выводы.

Апробация работы. По теме диссертации опубликовано **40** научных работ, из которых **25** - статей в ведущих российских и зарубежных рецензируемых научных журналах из перечня ВАК. Результаты работы неоднократно докладывались и обсуждались на российских и международных конференциях:

- Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Conference, Австралия 2001, 2002;
- Computational Techniques and Applications Conference, Австралия, Брисбен 2001;
- Ежегодная встреча Австралийского Математического Общества, Канберра, Австралия 2001;
- Australasian workshop on Mathematics in Combustion, Magnetic Island, Queensland, 2003;
- 5-ая (Аделаида, Австралия, 2005) и 9-ая (Кёнджу, Корея, 2013) Азиатско-Тихоокеанская Конференция по Горению;
- Конференция молодых ученых "Фундаментальные и Прикладные Задачи Нелинейной Физики Нижний Новгород, 2008, 2010, 2012;
- 36-ая и 38-ая Австралийская Конференция Хим. Инженеров, СЧЕМЕСА 2008, 2010;

- 18-ый и 19-ый Международный Конгресс IMACS и MODSIM 2009, 2011;
- 16-ая и 20-ая Международная конференция "Математика, компьютер, образование Пущино, 2009, 2013;
- 13-ая Международная конференция по численным методам в горении, Корфу, Греция 2011;
- Гинзбурговская конференция по физике, ФИАН, Москва, 2012;
- 34-ый Международный симпозиум по горению, Польша, Варшава, 2012

а так же на научных семинарах:

- Семинар Департамента математики Университета Хериот-Ватт, Шотландия, Эдинбург 2002;
- Семинар Отделения теоретической физики им. И.Е.Тамма (руководитель — Л.В.Келдыш) ФИАН, Москва, 2009, 2010, 2012;
- Семинар Отделения теоретической физики им. И.Е.Тамма по теории твёрдого тела (руководитель - П.И.Арсеев) ФИАН, Москва, 2007, 2008, 2011, 2012;
- Семинар Кафедры Квантовой Электроники МГУ им. М.В. Ломоносова Москва, 2010;
- Семинар Школы Физики, Экологии и Математики, Университет Нового Южного Уэльса, Канберра, Австралия 2007, 2009;
- Семинар Центра Энергетических и Экологических Исследований и Технологий, Мадрид, Испания 2012;
- Семинар по Динамике и структуре волн горения, Давльневосточный Федеральный Университет, Владивосток 2013;
- Семинар Синергетика. Самоорганизация и неравновесные процессы в физике, химии и биологии, МГУ им. М.В. Ломоносова Москва, 2013.

Основные результаты опубликованы в следующих работах:

1. *Gubernov, V.* On the Evans function calculation of the stability of combustion waves, *Australian Mathematical Society Gazette*. — 2002. — Vol. 29 no. 3. — Pp. 155–163.

2. Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N., Weber R. O. Numerical methods for the travelling wave solutions in reaction-diffusion equations // *ANZIAM Journal*. — 2003. — Vol. 44. — Pp. C271–C289.
3. Gubernov V., Mercer G., Sidhu H., Weber R. Evans function stability of combustion waves // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 2003. — Vol. 63, no. 4. — Pp. 1259–1275.
4. Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N., Weber R. O. Evans function stability of nonadiabatic combustion waves // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2004. — Vol. 460. — Pp. 1259–1275.
5. Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N. The effect of ambient temperature on the propagation of nonadiabatic combustion waves // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2005. — Vol. 37, no. 2. — Pp. 149–162.
6. Kim J. S., Gubernov V. On the fast-time cellular instabilities of linan's diffusion-flame regime // *Combustion Science and technology*. — 2005. — Vol. 177, no. 5-6. — Pp. 991–1022.
7. Kim J. S., Gubernov V. On Oscillatory Fast-Time Instability of Diffusion Flames // *5th Asia-Pacific Conference on Combustion, ASPACC 2005: Celebrating Prof. Bob Bilger's 70th Birthday*. — 2005. — Pp. 377-380.
8. Gubernov V. V., Mercer G. N., Sidhu H. S. Combustion waves in a model with chain branching reaction // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2006. — Vol. 39. — Pp. 1–14.
9. Gubernov V. V., Kim J. S. On the fast-time oscillatory instabilities of linan's diffusion-flame regime // *Combustion Theory and Modelling*. — 2006. — Vol. 10. — Pp. 749–770.
10. Gubernov V., Sidhu H., Mercer G. Detecting Bogdanov-Takens bifurcation of traveling waves in reaction-diffusion systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2006. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 749–755.

11. Gubernov V. V., Mercer G. N., Sidhu H. S. Generalized compound matrix method // *Applied Mathematics Letters*—2006.— Vol. 19.— Pp. 458–463.
12. Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N. Analysing combustion waves in a model with chain branching // *ANZIAM Journal*.—2007.— Vol. 49.— Pp. C100–C115.
13. Gubernov V., Sidhu H., Mercer G. Combustion waves in a model with chain branching reaction and their stability // *Combustion Theory and Modelling*.—2008.— Vol. 12, no. 3.— Pp. 407–431.
14. Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N., Kolobov A. V., Polezhaev A. A. The effect of lewis number variation on combustion waves in a model with chain-branching reaction // *Journal of Mathematical Chemistry*.—2008.— Vol. 44, no. 3.— Pp. 816–830.
15. Губернов В. В. Исследование появления пульсирующих неустойчивостей в модели распространения волн горения с цепным механизмом реакции // *Тезисы конференции молодых ученых “Фундаментальные и Прикладные Задачи Нелинейной Физики”, Нижний Новгород*.—2008.— С. 37.
16. Sidhu H. S., Gubernov V. V., Mercer G. N., Kolobov A. V., Polezhaev A. A. Investigation of a Non-adiabatic Two-step Chain Branching Reaction. // *In: Chemeca 2008: Towards a Sustainable Australasia. [Barton, ACT]: Engineers Australia*.—2008.— Pp. 1958–1967.
17. Губернов В. В., Колобов А. В., Полежаев А. А. Исследование пульсирующих режимов распространения волн в модели горения с цепным механизмом реакции. // *Тезисы 16-той международной конференции “Математика, компьютер, образование”, Пушкино*.—2009.— С. 95.
18. Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S., Mercer G. N. Pulsating instabilities of combustion waves in a chain-branching reaction model // *International Journal of Bifurcation and Chaos*.—2009.— Vol. 19, no. 3.— Pp. 873–887.

19. Sidhu H. S., Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Mercer G. N., Sharples J. J. Oscillatory combustion waves in a chain branching model // *ANZIAM Journal*. — 2009. — Vol. 50. — Pp. C1017–C1032.
20. Sidhu H. S., Gubernov V. V., Mercer G. N., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sharples J. J. Travelling Waves in a Two-Step Chain Branching Model with Heat Loss // *Chemical Product and Process Modeling*. — 2009. — Vol. 4. — no. 3.
21. Губернов В. В., Колобов А. В., Полежаев А. А. Исследование пульсирующих режимов распространения волн в модели горения с цепным механизмом реакции // *Компьютерные Исследования и Моделирование*. — 2009. — Т. 1. — №. 3. — С. 273–280.
22. Sharples J. J., Gubernov V. V., Sidhu H. S., Towers I. N., Kolobov A. V., Polezhaev A. A. Behaviour of combustion waves in one-step and two-step models // *18th World IMACS Congress and MODSIM09 International Congress on Modelling and Simulation: Interfacing Modelling and Simulation with Mathematical and Computational Sciences, Proceedings*. — 2009. — Pp. 4453-4459.
23. Губернов В. В., Колобов А. В., Полежаев А. А. Удвоение периода и переходный хаос в модели распространения волн горения с цепным механизмом реакции // *Тезисы конференции молодых ученых “Фундаментальные и Прикладные Задачи Нелинейной Физики”*, Нижний Новгород. — 2010. — С. 28.
24. Gubernov V., Kolobov A., Polezhaev A., Sidhu H., Mercer G. Period doubling and chaotic transient in a model of chain-branching combustion wave propagation // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2010. — Vol. 466, no. 2121. — Pp. 2747–2769.
25. Sharples J. J., Sidhu H. S., Gubernov V. V. Properties of Nonadiabatic Premixed Combustion Fronts Arising in Single-step Reaction Schemes. // In: *Chemeca 2010: Engineering at the Edge; 26-29 September 2010, Hilton Adelaide, South Australia. Barton, A.C.T.: Engineers Australia*. — 2010. — Pp. 1618–1627.

26. *Sharples J. J., Sidhu H. S., Gubernov V. V.* Analysing instability of combustion waves using the Evans function // *ANZIAM Journal*. — 2010. — Vol. 52. — Pp. C773–C791.
27. *Sidhu H. S., Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S.* Oscillatory instability in the Zeldovich-Linan model // *Abstracts of the 13th International Conference on Numerical Combustion*. — 2011. — Pp. 76.
28. *Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S.* Pulsating instabilities in the zeldovich-linãñ model // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2011. — Vol. 49, no. 5. — Pp. 1054–1070.
29. *Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S.* Oscillatory thermal-diffusive instability of combustion waves in a model with chain-branching reaction and heat loss // *Combustion Theory and Modelling*. — 2011. — Vol. 15, no. 3. — Pp. 385–407.
30. *Sharples J. J., Gubernov V. V., Sidhu H. S., McIntosh A. C., Brindley J.* Analysis of a competitive exothermic-endothermic reaction scheme // 19th International congress on modelling and simulation (MODSIM2011) / Ed. by Chan, F and Marinova, D and Anderssen, RS. — 2011. — Pp. 345–351.
31. *Qian C., Sidhu H. S., Sharples J. J., Towers I. N., Gubernov V. V.* Combustion waves from a sequential exothermic and endothermic reaction // // 19th International congress on modelling and simulation (MODSIM2011) / Ed. by Chan, F and Marinova, D and Anderssen, RS. — 2011. — Pp. 725-732.
32. *Губернов В. В., Колобов А. В., Полежаев А. А.* Исследование устойчивости волн горения в модели Зельдовича-Линьяна // *Тезисы конференции молодых ученых “Фундаментальные и Прикладные Задачи Нелинейной Физики”*, Нижний Новгород. — 2012. — С. 35.
33. *Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A.* Investigation of combustion wave stability in chain-branching models// *Abstracts of Ginzburg conference on physics*. — 2012. — Pp. 185.

34. *Sharples J. J., Sidhu H. S., McIntosh A. C., Brindley J., Gubernov V. V.* Analysis of combustion waves arising in the presence of a competitive endothermic reaction // *IMA Journal of applied mathematics*. — 2012. — Vol. 77, no. 1, SI. — Pp. 18–31.
35. *Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S.* Stability of combustion waves in the Zeldovich-Linãñ model // *Combustion and Flame*. — 2012. — Vol. 159, no. 3. — Pp. 1185–1196.
36. *Gubernov V. V., Sharples J. J., Sidhu H. S., McIntosh A. C., Brindley J.* Properties of combustion waves in the model with competitive exo- and endothermic reactions // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2012. — Vol. 50, no. 8. — Pp. 2130–2140.
37. *Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S.* Analysing the stability of premixed rich hydrogen-air flame with the use of two-step models // *Combustion and Flame*. — 2013. — Vol. 160, no. 6. — Pp. 1060–1069.
38. *Gubernov V. V., Sidhu H. S., Kolobov A. V., Polezhaev A. A.* Pulsating Behaviour in Combustion Waves // *In: Wave Propagation, Edited by Prof. Luiz Rocha and Dr. Matues Gomes, AcademyPublish*. — 2013. — Pp. 509–535.
39. *Towers I. N., Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S.* Bistability of flame propagation in a model with competing exothermic reactions // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*. — 2013. — Vol. 469, no. 2158. — 20130315
40. *Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S.* Stability of hydrogen-air deflagration near rich flammability limit // *Proceedings of the 9-th Asia-Pacific Conference on Combustion. Gyeongju, Korea*. — 2013. — Pp. 265.

ГЛАВА 1

Литература

§ 1.1. Устойчивость бегущих волн горения в одноступенчатых моделях

1.1.1. Диффузионно-тепловая и гидродинамическая устойчивость пламени

Исследования устойчивости свободного распространения пламени началось с рассмотрения газовых смесей. В известных работах Ландау и Дарье [12–14] анализировалась задача об устойчивости плоского фронта горения, где пламя рассматривалось как гидродинамическая поверхность разрыва, на которой локализована вся реакция и происходит скачкообразное изменение физических величин, характеризующих газовую смесь, таких как температура и плотность. Результаты, известные как неустойчивость Дарье-Ландау, показали, что пламя является абсолютно неустойчивым по отношению к возмущениям с любой конечной длиной волны в направлении, поперечном направлению распространения фронта горения. Инкремент возрастания возмущения оказался линейно пропорциональным волновому числу так, что чем меньше длина волны возмущения, тем быстрее оно должно нарастать. Подобные выводы противоречат наблюдениям стационарно распространяющегося пламени и связаны с тем, что в модели учитываются только гидродинамические эффекты теплового расширения газа, а область, где протекает реакция горения, считается бесконечно малой. В результате не учитываются транспортные эффекты, стабилизирующие пламя. Таким образом подобный подход оказывается применим только в длинноволновом по отношению к длине Михельсона приближении [15]. Феноменологически данная проблема была рассмотрена Маркштейном в [16], где учитывалось влияние возмущения фронта, а точнее его искривления, на скорость распространения пламени. Это позволяет качественно объяснить

стабилизацию волны горения по отношению к коротковолновым возмущениям при константах Маркштейна больше нуля.

Процессы переноса тепла и диффузии стабилизируют пламя в длинноволновом диапазоне возмущений, однако, могут и сами являться источником неустойчивости [15]. Таким образом, существует два основных дестабилизирующих эффекта: тепловое расширение при прохождении через зону реакции, в этом случае мы говорим о гидродинамической неустойчивости, и диффузионно-тепловая неустойчивость, связанная с процессами тепломассопереноса в самом фронте горения. Это продемонстрировано, например, в работе [15], где в частности исследуется устойчивость волны горения, свободно распространяющейся в газовой смеси, в рамках квази-изобарической модели с одноступенчатой реакцией горения. В приближении асимптотической малости толщины зоны реакции, числа Маха, теплового расширения газа получено дисперсионное соотношение, в которое в качестве отдельных слагаемых входят члены, ответственные за диффузионно-тепловую и гидродинамическую неустойчивость. В случае подобия полей температуры и концентрации лимитирующей компоненты топлива, когда пламя устойчиво по отношению к диффузионно-тепловым возмущениям (см. следующий пункт) и присутствует только гидродинамическая неустойчивость, из дисперсионного соотношения следует, что гидродинамическая неустойчивость возникает только в интервале длин волн, превышающих длину Михельсона на величину порядка 20. В приближении асимптотически больших длин волн анализ совпадает с результатами для неустойчивости Дарье-Ландау. В случае, когда коэффициент диффузии лимитирующей компоненты смеси больше температуропроводности и в пределе асимптотически слабого температурного расширения возникает неустойчивость определяемая диффузионно-тепловыми эффектами с характерной длиной волны для максимального инкремента роста, имеющим порядок длины Михельсона. Таким образом в [15] было показано, что два типа неустойчивости пламени проявляют себя на разных пространственных масштабах [16], что подтверждается экспериментами [1, 17–20].

В работах [21, 22] получены дисперсионные соотношения в более общем случае, чем в [15], для произвольного теплового расширения газа с

учетом эффектов вязкости и гравитации. При этом, как и в [15], принято квази-изобарическое приближение, считается, что реакция проходит в одну необратимую ступень с высокой энергией активации, число Льюиса для лимитирующей компоненты смеси близко к единице и коэффициенты диффузии не зависят от температуры. В более поздней публикации [23] рассмотрено появление как диффузионно-тепловой, так и гидродинамической неустойчивостей в случае произвольных волновых чисел возмущения и транспортных коэффициентов, зависящих от температуры. Показано, что для больших волновых чисел неустойчивость определяется главным образом диффузионно-тепловыми факторами и нейтральная граница устойчивости близка к предсказанию диффузионно-тепловой модели. При малых волновых числах (в длинноволновом приближении), неустойчивость носит характер Даррье-Ландау и определяется гидродинамическим дисперсионным соотношением из работы [24]. В [25] рассмотрен случай конечной энергии активации. Более детально вопросы гидродинамической устойчивости пламени освещены в обзорах, посвященных данной тематике [3, 4, 26].

1.1.2. Диффузионно-тепловая устойчивость пламени

Впервые задача о диффузионно-тепловой устойчивости пламени была рассмотрена в серии работ [27–29], где было предположено, что стационарный режим горения может терять устойчивость по отношению к локализованным возмущениям распределения температуры. Например, в результате моментального выделения тепла в некоторой малой области пламени. В [27] рассмотрено одномерное плоское пламя и предложено для анализа его устойчивости линеаризовать систему нелинейных уравнений в частных производных, описывающих процесс горения, около решений, соответствующих стационарному режиму горения в системе отсчета, в которой пламя покоится. Предложен следующий критерий линейной устойчивости: стационарное решение является устойчивым или неустойчивым, если решение линеаризованной задачи с начальным точечным (или локализованным в пространстве) источником тепла затухает или неограниченно растет, соответственно. Была высказана гипотеза, что неустойчивость пламени может приводить либо к его затуханию, и, следовательно, обуслав-

ливать предел воспламенения; либо к существенному росту температуры и к переходу от дефлаграции к детонации; либо к появлению пульсаций характеристик пламени с ограниченной амплитудой около стационарных решений, что то же связывалось с приближением к пределу воспламенения. Более детально в [27] была рассмотрена одноступенчатая адиабатическая модель горения твердого топлива и была сделана попытка вывести аналитический критерий устойчивости пламени. В [28] задача линейной устойчивости для данной модели решалась численно и было установлено, что при определенных условиях возмущение температуры может возрастать и пламя теряет устойчивость. В [29] рассмотрено типовое линеаризованное параболическое уравнение только для температуры, которое было переформулировано в задачу на собственные значения вида уравнения Шрёдингера для инкремента роста возмущения. Показано, что инкремент затухания может менять знак и пламя может терять устойчивость.

Задача линейной устойчивости пламени в современной форме, как задача на собственные значения линейного дифференциального оператора, сформулирована в [30], где рассмотрена устойчивость распространения одномерной волны горения в одноступенчатой адиабатической модели с равными коэффициентами диффузии топлива и температуропроводности. Задача на собственные значения соответствующего оператора сведена к уравнению Шрёдингера для нахождения уровней в одномерной потенциальной яме. Нижний уровень или основное состояние соответствующей квантовой системы имеет энергию равную нулю и совпадает с нулевой собственной модой задачи линейной устойчивости, связанной с трансляционной симметрией. Таким образом, было показано, что все остальные собственные значения положительны, что соответствует в формулировке [30] устойчивым собственным значениям. Следовательно, для случая числа Льюиса равного единице волна горения устойчива. Этот же результат был получен в работе [31], где рассмотрена устойчивость волн горения в одноступенчатой адиабатической модели. Система феноменологически описывается одним уравнением в частных производных для некоторой обобщенной переменной состояния. Подобный подход фактически эквивалентен случаю числа Льюиса равного единице, рассмотренного [30], где система модельных урав-

нений так же сводится к одному уравнению для температуры.

В работе [32] рассматривается неадиабатический случай с одноступенчатой реакцией при числе Льюиса, равном единице. Установлено, что для заданных параметров существует два решения, соответствующих разным скоростям пламени. Сделана попытка качественного анализа устойчивости волны горения, однако, лишенная математической строгости, и утверждается, что медленное решение не устойчиво, а быстрое устойчиво.

Устойчивость горения твердого топлива аналитически исследована в [33,34]. Фронт горения рассматривается как бесконечно тонкая поверхность разрыва, на границе которой температура непрерывна, а ее производная испытывает скачок, связанный с тепловыделением в ходе реакции. Предполагается, что изменение локальной скорости пламени, вызванное осцилляциями и искривлением фронта пламени, однозначно определяется температурой в зоне горения через коэффициент, прямо пропорциональный числу Зельдовича. На этой основе формулируется и решается задача линейной устойчивости с поверхностью разрыва, что позволяет получить дисперсионное соотношение для двумерной адиабатической и одномерной неадиабатической модели. В частности, в первом случае получается явное выражение для критического значения числа Зельдовича, $Z = 4 + 2\sqrt{5} \approx 8.48$, для появления пульсаций пламени. В [35] проведен похожий анализ для газовых смесей, однако, рассмотрение ограничивается только длинноволновым (по сравнению с шириной зоны прогрева) приближением. Получающиеся результаты, говорят о том, что для чисел Льюиса меньше единицы, фронт горения неустойчив, а при числах Льюиса меньших или равных единице пламя устойчиво. В [36] зона реакции рассматривается не как поверхность разрыва, а как область конечной толщины, внутри которой функция выделения тепла имеет постоянное значение, а снаружи тождественно обращается в ноль. Значение тепловыделения в зоне реакции берется равным максимальному, а ее толщина определяется из решения стационарной задачи распространения пламени [37]. Задача линейной устойчивости формулируется как кусочно-разрывная, решается отдельно в трех зонах волны горения (прогрева, реакции и продуктов), что позволяет получить трансцендентное уравнение, решая которое авторы получают оценку

числа Зельдовича для потери устойчивости, $Z \approx 0.096^{-1} = 10.42$. В [38] данный подход используется для выяснения влияния изменения плотности на возникновение пульсаций пламени. В [39, 40] проводится численное исследование горения твердого топлива к рамках адиабатической модели и в пространстве параметров находится нейтральная граница устойчивости. Показано, что при ее пересечении стационарный режим горения теряет устойчивость и в одномерном случае, рассмотренном в данных работах, возникают пульсирующие режимы горения. Результаты численного счета хорошо согласуются с аналитическими оценками, описанными выше. В работе [41] исследуется устойчивость волн горения в двухмерной модели с произвольным числом Льюиса, нулевым порядком реакции и бесконечно узкой зоной реакции. Скорость химической реакции представляется в виде дельта-функции от разности температуры и температуры в зоне реакции, нормированной на функцию температуры горения, представляющую собой характерную скорость тепловыделения в зоне реакции. При формулировке задачи линейной устойчивости, данная функция раскладывается в ряд до членов первого порядка. В результате удается получить дисперсионное соотношение. Таким образом, установлено, что для чисел Льюиса для топлива больше единицы возникает волновая неустойчивость, которая наступает раньше, чем одномерная пульсирующая. В случае твердого топлива критическое значение числа Зельдовича составляет порядка 8. Для чисел Льюиса меньших единицы возникает ячеистая неустойчивость преимущественно с определенной длиной волны. В [42] данная модель рассмотрена с учетом тепловых потерь и результаты качественно согласуются с [41], за исключением случая чисел Льюиса больших единицы. Так, для горения твердого топлива, установлено, что в зависимости от параметров возможна либо ситуация, когда верхняя ветвь решений устойчива вплоть до границы затухания, либо теряет устойчивость по отношению к волновой неустойчивости.

Дальнейшее развитие исследований устойчивости волн горения связано с использованием приближения высокой энергии активации, которое в прикладной математике и механике обычно известно как метод сшивки асимптотических разложений [43, 44]. Данный подход был впервые приме-

нен для анализа стационарных задач горения [45], где находится скорость распространения и структура адиабатического пламени во втором порядке по асимптотически малому параметру, обратной энергии активации, для случая произвольного числа Льюиса порядка единицы. Похожий анализ был проведен в [46] для случая твердого топлива. Однако в отличие от [45], в этой работе считается, что плотность и теплопроводность материала не константы, а функции температуры. Скорость пламени найдена во втором порядке асимптотического разложения. Неадиабатический случай исследован в [47], где во втором порядке асимптотического разложения получено уравнение, определяющее скорость пламени в зависимости от параметров модели, включая число Льюиса и коэффициент тепловых потерь. Задача о распространении волны горения рассматривается в третьем порядке в [48], что позволяет получить выражения, хорошо количественно описывающие зависимость скорости пламени от параметров, в частности числа Льюиса. Однако, получаемые аналитические выражения чрезвычайно громоздки. В целом следует отметить, что метод сшивки асимптотик позволяет математически строго исследовать свойства пламени в различных одноступенчатых моделях горения, последовательно формулируя и решая задачи в каждом порядке асимптотического разложения.

Аналитическое изучение устойчивости волн горения с использованием метода сшивки асимптотических разложений приводит к так называемой проблеме замыкания [49–51]. В отличие от стационарно бегущих волн в этом случае уравнения главного порядка зависят от поправок второго порядка; уравнения второго порядка включают члены третьего порядка асимптотического разложения и т.д. Формально, для того чтобы найти решение задачи главного порядка, необходимо решить бесконечное число уравнений. Одним из путей обойти эту проблему является усечение асимптотического разложения [49, 51–55]. Это приводит к замкнутой задаче с заменой коэффициента реакции аррениусовского типа на члены с дельта функцией, зависящие от температуры фронта реакции. Усеченная модель широко используется для изучения устойчивости волн горения [52–55], а также более сложных решений, возникающих при потере устойчивости плоского фронта, таких как пульсирующие волны [49, 54, 55], спиновые вол-

ны [49, 56–58], радиальные и стоячие волны [5, 49, 57, 59], квазипериодические и хаотические волны [49, 59]. Однако, модель с дельта функцией страдает от непоследовательности, как замечено [49, 51]. Наиболее заметным является то, что величина, обратная малому параметру асимптотического разложения, входит явным образом в экспоненциальные члены, описывающие интенсивность хода реакции.

Условия разрыва производных через зону реакции в первом порядке разложения для возмущенного фронта горения были выведены в работе [52]. В частности было показано, что для нестационарного решения возникает проблема замыкания. В последующей работе [53] на основе этого условия формулируется усеченная модель с дельта функцией, где фактически разложение температуры обрывается на первом члене по малому параметру. Такой подход аналогичен [34, 35], однако анализ дисперсионных соотношений был проведен более тщательно, что позволило получить классическое выражение для нейтральной границы появления ячеистой неустойчивости, $(L - 1)Z = -2$, где L - это число Льюиса лимитирующей компоненты смеси. Более того, для чисел Льюиса больше единицы было предсказано появление пульсирующей неустойчивости. В пределе твердого топлива был получен известный [33, 34] результат для критического значения числа Зельдовича, $Z = 4 + 2\sqrt{5}$, а для газовой смеси еще одно классическое выражение $(L - 1)Z \approx 4 + 4\sqrt{3}$. В работе [54] так же рассматривается распространение волны горения в твердотопливной смеси в адиабатическом случае в рамках усеченной модели. Найдены скорость и структура пламени, дисперсионное соотношение, а так же проведен бифуркационный анализ пульсирующих решений, возникающих при пересечении нейтральной границы устойчивости в результате бифуркации Хопфа, исследованы свойства данных решений, частота и амплитуда пульсаций в зависимости от параметра закритичности.

Асимптотически согласованный подход был одновременно предложен в двух работах [60] для адиабатической и [47] для неадиабатической моделей. Результаты так же обсуждаются в [49–51]. Для систем с числом Льюиса порядка единицы, когда ситуация близка к случаю подобия полей температуры и концентрации топлива, энтальпия не изменяется в главном

порядке разложения. Это позволяет записать замкнутую задачу для температуры в главном порядке и энтальпии в первом порядке разложения. В работе [47] для неадиабатической модели горения таким образом удается получить дисперсионное соотношение и найти области параметров, где пламя устойчиво или возникают различные типы неустойчивости. В частности, показано, что медленная ветвь решений всегда неустойчива, а быстрая либо устойчива вплоть до точки поворота, либо теряет устойчивость по отношению к ячеистым возмущениям при числах Льюиса меньше единицы. Для чисел Льюиса больше единицы пламя может терять устойчивость по отношению к волновой неустойчивости с определенными долинами волн в двухмерном случае и по отношению к пульсирующей неустойчивости в одномерном случае. Причем пламя более неустойчиво по отношению к двухмерным, чем к одномерным возмущениям. В более поздней работе [61] авторы приходят к таким же выводам.

Используя приближение системы близкой к подобию, в [55] проводится исследование сходное с [54] для случая газовой смеси. Следует отметить работу [62], где получены результаты, согласующиеся с предсказаниями, основанными на методе сшивки асимптотических разложений [49]. С этой целью асимптотическая форма функции Эванса для задачи распространения волн горения была выведена в [62] в пределе бесконечной энергии активации и числа Льюиса, близкого к единице.

До последнего времени [51], не существовало согласованного подхода для анализа систем с произвольным числом Льюиса. В этой работе делается обобщение метода сшивки асимптотических разложений. Для этого коэффициенты асимптотического разложения берутся зависимыми от параметра разложения. Это позволяет добиться правильного шкалирования вариаций температуры до и после зоны реакции, а именно: накладывается ограничение, связывающее главный порядок в зоне прогрева и первые два члена в зоне продуктов асимптотического разложения температуры. Это ограничение отражает тот факт, что малые вариации температуры за фронтом приводят к изменениям в главных членах разложения температуры в зоне прогрева. Результирующая модель включает в себя уравнения для главного порядка в разложении переменных впереди зоны реакции

и первого порядка в разложении температуры в зоне продуктов вместе с условиями сшивки и граничными условиями. При данном подходе нет ограничений на изменение числа Льюиса.

Результаты, сходные с тем, что обсуждаются выше, были получены с помощью метода сшивки асимптотик и в более поздних работах, например, в [49, 63–68]. Дальнейшие исследования устойчивости пламени в рамках одноступенчатых диффузионно-тепловых моделей проводились главным образом численно. Как уже обсуждалось выше, одними из первых работ в данном направлении были [39, 40] для горения твердого топлива. Горение газовых смесей исследовалось впервые в [69], где было рассмотрено появление пульсаций при числах Льюиса больше единицы. Для этого решались одномерные нестационарные модельные уравнения в частных производных, что позволило найти нейтральную границу устойчивости на плоскости число Льюиса - энергия активации в широком диапазоне значений энергии активации от 8 до 50. Зависимость числа Льюиса от энергии активации выглядит как монотонно убывающая функция до значений меньше 30. Затем, при дальнейшем увеличении энергии активации наблюдается рост критического значения числа Льюиса. Это не согласуется с выводами, полученными с помощью метода сшивки асимптотических разложений, и скорее всего вызвано ошибками численного счета. Так же в работе показано, что при пересечении нейтральной границы устойчивости возникает пульсирующая волна горения. В работе [63] исследованы два предельных случая. Когда число Льюиса стремится к бесконечности, то было показано, что при энергиях активации выше 6.5 возникают пульсирующие волны горения. В случае равных коэффициентов диффузии и температуропроводности волна горения устойчива в исследованном интервале энергии активации от 1 до 10. Результаты работы обобщены на случай горения твердого топлива с учетом тепловых потерь в [70]. На плоскости коэффициент тепловых потерь - энергия активации найдена нейтральная граница устойчивости и установлено, что ростом коэффициента отдачи тепла граница устойчивости существенно смещается в сторону меньших энергий активации.

В [71, 72] задача линейной устойчивости для адиабатической модели решается методом составной матрицы для безразмерной энергии актива-

ции от 10 до 60-80. На плоскости число Льюиса-энергия активации найдена нейтральная граница устойчивости. Сравняются результаты численного счета и асимптотического анализа и показано, что качественно они хорошо согласуются, хотя для удовлетворительного количественного согласия необходимо брать энергии активации превышающие 50. Исследованию диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени в случае чисел Льюиса больше единицы посвящен цикл работ [66, 67, 73, 74]. В [66] впервые применен метод функции Эванса для анализа устойчивости волн горения в одноступенчатой адиабатической модели распространения пламени в горючей смеси в одномерной пространственной конфигурации. Для чисел Льюиса больших единицы найдены критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа и частота Хопфа для энергий активации от единиц до 20. Установлено, что при увеличении числа Льюиса до значений порядка 10^2 , критическое значений энергии активации стремиться к предельному значению $6.58 \dots$. Подобные расчеты так же можно найти в [75]. Численные результаты сравниваются с асимптотическими и показано, что наилучшее количественное соответствие дает приближение, полученное в [51]. Результаты обобщены на неадиабатический случай в [67], а в [74] учтено влияние температуры окружающей среды на устойчивость волн горения. В работе [67] так же установлено, что распространяющаяся волна горения теряет устойчивость при изменении параметров либо в результате седло-узловой бифуркации, что приводит к ее затуханию, либо в результате бифуркации Андронова-Хопфа, что приводит к появлению пульсаций. Было показано, что переключение между данными режимами потери устойчивости происходит в результате бифуркации коразмерности два - бифуркации Богданова-Тakensа [76], которая была подробно исследована в работе [77], где вводится новое аналитическое условие ее существования. Сходные результаты по устойчивости неадиабатического пламени были также получены в [78]. Результаты обобщены на случай чисел Льюиса меньших единицы в [79], где найдены критические значения параметров для появления ячеистой неустойчивости на плоскости коэффициент тепловых потерь - число Льюиса при энергия активации 10. Показано, что численные результаты качественно согласуются с асимптотическими [47].

1.1.3. Ячеистое пламя

Как было показано Маркштейном искривление фронта горения может приводить к его стабилизации. Для исследования структуры пламени, возникающей при потере устойчивости плоской волны, в работе [15] было введено уравнение, впоследствии названное уравнением Курамото-Сивашинского, описывающее нелинейную эволюцию искривленного фронта горения. При этом предполагалось, что процесс горения проходит квазиизобарически по одноступенчатому кинетическому механизму, тепловое расширение и величина, обратная энергии активации, считались асимптотически малыми. Решения полученного уравнения исследовались численно [15, 80]. Показано, что в зависимости от безразмерного параметра за критичности, указывающего на степень отклонения параметров от нейтральной границы устойчивости, возможны две ситуации. Если критичность ниже некоторого порогового значения, то плоский фронт трансформируется в стационарную волнистую структуру с отдельными ячейками аркообразной формы. Структурные особенности ячеистого фронта зависят от начальных условий. В случае превышения критичности порогового значения фронт принимает вид случайных нестационарных ячеек, которые разваливаются и рекомбинируют нерегулярным образом [81]. Более детальное обсуждение свойств решений уравнения Курамото-Сивашинского можно найти в работах [82, 83], где показано, что динамика системы асимптотически стремится к конечно размерной динамической системе на так называемом инерционном многообразии. В ходе детального численного анализа было установлено, что в параметрическом пространстве существуют чередующиеся окна устойчивых решений с конечным числом ячеек и осциллирующих и/или хаотических режимов. По мере увеличения параметра критичности окна, соответствующие решениям с все возрастающим числом ячеек, быстро сужаются.

В [84] численно исследуется ячеистые диффузионно-тепловые неустойчивости в одноступенчатой адиабатической модели горения. Рассматриваются два случая, когда энергия активации равна 10 и 20, а числа Льюиса несколько меньше, чем пороговые значения для потери устойчиво-

сти плоского фронта. Область интегрирования в поперечном направлении взята так, что она вмещает одну длину волны неустойчивой моды линейной задачи. Показано, что плоская волна горения после некоторого переходного периода времени сходится к ячеистой волне горения, распространяющейся стационарно с постоянной скоростью. Устойчивость волн горения по отношению к ячеистым возмущениям численно исследовалась в [85], где так же решаются двухмерные модельные уравнения в частных производных при числах Льюиса меньших единицы. Данные показали, что несмотря на хорошее качественное согласие асимптотических результатов с численными, количественные отличия могут превышать 100% даже для сравнительно больших чисел Зельдовича порядка десяти. При пересечении нейтральной границы устойчивости появляются ячеистые волновые структуры, которые были исследованы для конечных размеров области интегрирования в направлении поперечном направлению распространения фронта. Установлено, что для достаточно больших критичностей возникают две качественно разные ситуации для узких и широких каналов. В случае узких каналов, когда в поперечном сечении укладывается небольшое количество неустойчивых мод и одна из них явно доминирует, то развивается структура с соответствующим числом ячеек, которая стационарно распространяется без изменения своей формы. В широком канале количество неустойчивых мод линейной задачи существенно больше и существует некоторое число мод с приблизительно равными инкрементами экспоненциального роста во времени. В результате, если начальные условия для возмущения плоского фронта подобраны достаточно хорошо, то решение сходится к стационарной гофрированной структуре с соответствующим числом ячеек. Иными словами такие решения с конечным числом ячеек имеют некоторый бассейн притяжения. С другой стороны, если начальное возмущение плоского фронта выбрано случайным образом, то возмущается сразу несколько конкурирующих мод, соответствующих различному числу ячеек, и вместо стационарного решения возникает динамический нерегулярный режим, при котором ячейки постоянно рождаются и аннигилируют по мере распространения волны. Исследования в этой области развиты в работе [86], где изучено влияние радиационных тепловых потерь на ячеистые структу-

ры. Было установлено, что при малых значениях коэффициента тепловых потерь за границей устойчивости возникают нерегулярные нестационарные ячеистые структуры аналогичные полученным в [85]. При усилении тепловых потерь сначала происходит укрупнение ячеек, затем появление локального затухания на некоторых гребнях гофрированной структуры, сопровождаемое утечкой топлива, затем фронт разваливается на отдельные очаги, совершающие зигзагообразные движения, наконец, при очень больших потерях, формируются сферические очаги горения и при более высоких коэффициентах потерь пламя затухает. Важно, что ячеистое пламя существует далеко за пределом затухания плоской волны горения. Подобные ячеистые структуры наблюдались и в экспериментах [19, 87–89]. В работах [89, 90] наряду со существованием упорядоченных стационарных ячеистых пламен с количеством ячеек до нескольких десятков, так же показан переход к нерегулярному нестационарному хаотическому режиму, при котором ячейки эволюционируют нерегулярным образом, что детектируется по спектру мощности интенсивности излучения. Впервые показано, что спектр мощности экспоненциально затухает с частотой, что характерно для детерминированного хаоса.

Нельзя не упомянуть о работах, в которых показано существование коллективных динамических режимов групп ячеек пламени. В [16, 91, 92] наблюдалось вращение как целого ячеистого пламени бунзеновской горелки и пламени, свободно распространяющегося в трубе. В серии блестящих экспериментов Гормана и соавторов [93] с пламенем пористой горелки был продемонстрирован ряд сложных динамических режимов таких, как кольца, состоящие из ячеек, вращающиеся вокруг единственной центральной ячейки; вращающееся внутренне кольцо из пары ячеек внутри неподвижного внешнего кольца; вложенные кольца, вращающиеся в одном или в противоположных направлениях; вращающиеся кольца с модуляцией геометрических свойств на другой частоте; вращающиеся трехмерные спирали внутри неподвижных внешних колец.

1.1.4. Пульсирующие волны горения

Пульсирующие режимы горения экспериментально наблюдались еще в 1950 [94] при распространении пламени в хромово-магниевого термитах. В данной работе исследовалось влияние давления инертного газа в бомбе постоянного давления на скорость волн горения в различных термитах. Было установлено, что для смеси оксида хрома и магния увеличение давления выше некоторого критического значения приводит к пульсирующему поведению распространения пламени с чередующимися интервалами быстрого горения и длительными стадиями депрессии, когда пламя практически останавливается. Отмечено, что подобные остановки распространения пламени иногда сопровождаются его затуханием. Вместе с тем, объяснение этого явления не было дано и оно рассматривалось как некоторый необычный режим распространения пламени. Систематическое описание пульсирующих волн горения было дано в работе [95], где экспериментально исследовалось горение нитроглицериновых порохов. Было установлено, что пульсации имеют автоколебательную природу, т. е. определяются только внутренними механизмами распространения пламени. В работе давление инертного газа использовалось как бифуркационный параметр и было показано, что увеличение этого параметра может приводить к сложным режимам осцилляций пламени с нерегулярными временными интервалами между последовательными пиками температуры. В работе [96] по горению твердых смесей тантала с углеродом экспериментально наблюдалось удвоение периода колебаний пламени. Разбавление смеси инертной добавкой приводило к появлению пульсаций, которые наблюдались как малые почти гармонические осцилляции скорости пламени. По мере увеличения количества инертной компоненты в смеси осцилляции приобретали релаксационный характер и при дальнейшем увеличении разбавления появлялось решение периода два. Помимо этого были продемонстрированы и более сложные колебательные режимы. Пульсации часто наблюдаются в экспериментах по высокотемпературному само-распространяющемуся синтезу [2, 97–99], что было впервые показано в работе [100, 101]. В [101] в частности было продемонстрировано, что пульсирующие режимы распространения пламени мо-

гут приводить к ламинированной структуре продуктов синтеза, состоящих из отдельных дисков толщиной порядка длины, которую пульсирующая волна проходит за период колебаний. На примере горения смеси гафния и бора, где в качестве бифуркационного параметра была взята степень разведения смеси инертной компонентной, было установлено, что с увеличением закритичности частота пульсаций и средняя скорость распространения пламени в колебательном режиме убывают. Этот же результат был так же продемонстрирован позднее в [96].

В отличие от этого пульсирующие волны довольно редко наблюдаются в экспериментах с горючими газовыми смесями. В одной из первых работ на эту тему [102] исследовалось распространения пламени при диссоциации богатых смесей ацетилена и инертных газов при приближении к границе существования дефлаграции. Пульсирующие радиальные волны, происхождение которых приписывалось исключительно диффузионно-тепловой неустойчивости, наблюдались в близких к пределу воспламенения бедных смесях пропана, гептана, октана с кислородом [103, 104]. Помимо свободно распространяющихся волн горения, пульсации плоского пламени, возникающие в результате продольной диффузионно-тепловой неустойчивости, наблюдались в экспериментах с пламенем на горелках [105, 106]. В работе [105] исследовалось пламя смеси аммиака с кислородом на плоско-пламенной горелке и было установлено, что с уменьшением расхода кислорода возникают аксиальные пульсации с частотой порядка 16 Гц, которые с дальнейшим изменением данного параметра приводят к снижению частоты осцилляций и затуханию. В экспериментах [106] с пористой плоско-пламенной горелкой и богатой метан-воздушной и бедной пропан-воздушной смесями было так же установлено появление пульсаций на частотах от 15 до 65 Гц с изменением скорости потока смеси, сопровождаемое снижением частоты колебаний и затуханием при уменьшении расхода смеси ниже некоторых критических значений.

В [107] продолжены исследования пламени богатых метан-воздушных смесей вблизи предела воспламенения над плоской пористой горелкой. С изменением параметров было обнаружено существование четырех устойчивых пульсирующих режимов горения: аксиальная мода, при которой пламя

испытывает равномерные пульсации вдоль оси горелки; радиальная мода, характеризуемая периодическим изменением радиальных размеров пламени; спиральная мода, наблюдаемая как горячая точка, движущаяся по спиральной траектории; и непланарная мода, напоминающая колебания мембраны. Каждая мода характеризуется определенной частотой и областью существования в пространстве параметров. В дальнейшем [9] детально исследовался морфогенез радиальных пульсирующих волн при приближении в пространстве параметров к границе затухания пламени. Было показано, что с изменением бифуркационных параметров, коэффициента избытка топлива и расхода потока, радиальная мода испытывает сначала переход к ангармоническому релаксационному режиму осцилляций, затем бифуркацию удвоения периода, которая проявляется в изменении пространственной симметрии решения и появлении в спектре мощности интенсивности излучения субгармоник 3 Гц на половинной частоте колебаний от основной частоты в 6 Гц. При дальнейшем увеличении закритичности осцилляции на удвоенной частоте сменяются хаотическим пульсирующим режимом, который детектируется по экспоненциальному спаданию спектра мощности измеряемой интенсивности излучения пламени. На основании серии проведенных экспериментальных наблюдений делается общий вывод о том, что любые периодические режимы сменяются хаотическими при приближении к границе затухания. Само затухание определяется как динамический процесс кризиса хаотических колебаний и высказывается гипотеза, что в основе затухания лежит переходный хаос. В нашей работе данное предположение непосредственно доказывается в рамках рассмотренной математической модели.

Аналитическое описание появления автоколебаний плоской волны горения при потере устойчивости решения в виде бегущей волны было дано в рамках одноступенчатых диффузионно-тепловых моделей. Впервые возможность существования автоколебательных режимов горения обсуждалась в [108], где фронт волны горения в порохе рассматривался как поверхность раздела областей прогрева и продуктов. Линейное уравнение теплопроводности в зоне продуктов дополнялось феноменологическими нелинейными зависимостями скорости и температуры пламени от градиента

температуры на поверхности фронта и внешнего давления. Затем полученная система редуцировалась к точечной динамической системе, описываемой нелинейными обыкновенным дифференциальным уравнениям для возмущения скорости и температуры горения пороха около значений, соответствующих решению в виде бегущей волны. Проведенный в работе качественный анализ полученной системы показал, что в ней возможно возбуждение автоколебаний. В работах [109, 110] рассмотрена модель распространения пульсирующей волны горения в конденсированном веществе в приближении бесконечной узкой зоны реакции. Считается, что после сгорания порции топлива в течении некоторого времени происходит его прогрев и до тех пор пока не достигнуто условие воспламенения фронт не распространяется. После воспламенения он быстро скачкообразно продвигается на определенную длину, оценка которой и составляет основной результат [109, 110]. Длина пробега волны за один период колебаний фронта выражается как функция температуры воспламенения смеси. Это позволяет установить ряд закономерностей распространения пульсирующих волн, а именно, с ростом энергии активации период и амплитуда колебаний скорости волны растут в то время как средняя за период скорость распространения падает.

Численные исследования безгазового горения конденсированного топлива [40] показали, что в модели с одноступенчатой кинетикой реакции возможно существование пульсирующих режимов горения. На основании численных данных в [40] была построена феноменологическая аппроксимация нейтральной границы устойчивости и установлено, что при увеличении параметра критичности динамика пульсаций становится все более и более сложной. В работе [39] проводится численное исследование безгазового горения конденсированной смеси с различными видами кинетики реакции аррениусовского типа, которые моделируют влияние неоднородности твердотопливной среды на режимы распространения пламени. Авторами было продемонстрировано существование бифуркации удвоения периода в динамике пульсаций пламени. Было показано, что с увеличением критичности рождаются решения с последовательно удвоенным периодом, которые сменяются более сложными режимами осцилляций пламени, плохо поддававшимся численному анализу. Установлено, что количество последователь-

ных бифуркаций удвоения периода, наблюдаемых до того, как устанавливается режим со сложной пространственно-временной динамикой, зависит от принятой в модели кинетики реакции: для случаев с сильным влиянием гетерогенности наблюдались только решения периода два, в то время как для случая слабой неоднородности, были найдены решения с более высоким периодом.

Дальнейшие успехи в исследованиях пульсирующих волн горения связаны с использованием асимптотических методов, а именно, приближения высокой энергии активации. Основываясь на этом подходе, были детально изучены пульсирующие волны в конденсированных средах [54] и газообразных смесях [55] в рамках диффузионно-тепловых моделей с одноступенчатым кинетическим механизмом и аррениусовской температурной зависимостью скорости реакции. Была исследована задача линейной устойчивости бегущих волн горения и продемонстрировано, что при пересечении нейтральной границы устойчивости в пространстве параметров системы, в результате бифуркации Андронова-Хопфа появляются пульсирующие волны горения. В [54, 55] методами бифуркационного анализа изучены свойства пульсирующих волн и показано, что бифуркации Андронова-Хопфа носит сверхкритический характер. Проведены расчеты, оценивающие амплитуду, частоту и скорость пульсирующих волн горения вблизи точки бифуркации в пространстве параметров системы. Продемонстрировано, что средняя скорость пульсирующих волн горения меньше, чем соответствующая скорость неустойчивых решений в виде бегущих волн. Обзор основных результатов в данной области можно так же найти в [49]. Несмотря на то, что приближение высокой энергии активации оказался очень успешным методом для анализа первичной бифуркации, приводящей к появлению пульсирующих волн в результате потери устойчивости решений в виде бегущих волн, исследование бифуркаций удвоения периода обычно может быть проведено только методами численного анализа.

В [63] численно исследуется распространение волн горения в конденсированных и газообразных смесях в рамках адиабатической одноступенчатой модели. Было продемонстрировано, что для газовых смесей при числах Льюиса равных единице пульсирующие волны не возникают, а для твердо-

топливной смеси были найдены решения периода один и два, а так же решения со сложной динамикой. В [70] и [68] рассматривается неадиабатическая модель распространения пламени в твердотопливной смеси. Найдены пульсирующие волны, возникающие в результате бифуркации Андронова-Хопфа, а так же последовательные бифуркации удвоения периода, приводящие к появлению пульсирующих решений с периодами два и четыре. В пространстве параметров найдены критические значения параметров для этих бифуркаций [70], так же авторы обсуждают возможность существования каскада бифуркаций удвоения периода и появления хаотического режима. Однако, с увеличением бифуркационного параметра пламя затухало и вопрос о том, происходит ли затухание через рождение хаотического режима или нет, остался открытым. Тот факт, что пульсации наблюдаются в твердотопливных смесях и не появляются, по крайней мере в случае подобию, в газовых смесях может быть объяснен на основании работ [66,67], где показано, что пульсирующие неустойчивости и связанная с ними бифуркация Андронова-Хопфа вызвана бифуркацией Богданова-Такенса. При заданном параметре тепловых потерь точка бифуркации Богданова-Такенса расположена в пространстве параметров при определенном числе Льюиса больше единицы. Следовательно, пульсации появляются только при числах Льюиса, превышающих данное критическое значение, а для меньших значений числа Льюиса пульсации невозможны. Этот же сценарий был продемонстрирован и для диффузионного пламени [111].

В [112] численно изучены две одноступенчатые модели адиабатического горения твердого топлива. В одной из моделей рассматривается плавление компонент топлива, а в другой нет. В обоих случаях увеличение энергии активации приводит к пульсациям пламени из-за бифуркации Андронова-Хопфа. Для модели без плавления с увеличением этого бифуркационного параметра найдена последовательность бифуркаций удвоения периода и продемонстрировано существование решений периода два, четыре и восемь. Предположено, что с дальнейшим изменением энергии активации возникает сценарий перехода к хаосу через удвоение периода. Однако в модели с плавлением наблюдалась только бифуркация решений периода два. С увеличением бифуркационного параметра решения периода один

и два последовательно сменяют друг друга и высказано предположение о том, что в данном случае происходит переход к хаосу через перемежаемость при дальнейшем увеличении закритичности.

В ряде работ [113–115] для исследования диффузионно-тепловых неустойчивостей горения твердотопливных смесей рассматривались модели со свободной границей. В зависимости от кинетических функций, использованных в этих моделях, было найдено два сценария потери устойчивости по отношению к пульсирующим возмущениям. Решения в виде бегущей волны либо теряли устойчивость в результате бифуркации Андронова-Хопфа с последующим каскадом бифуркаций удвоения периода, приводящим к хаотическому режиму распространения пламени, либо потеря устойчивости происходила из-за бифуркации бесконечного периода типа шильниковской. В [115] были найдены как над-, так и сверхкритические бифуркации Андронова-Хопфа и множественные каскады удвоения периода.

Таким образом, даже в рамках одноступенчатых моделей горения в зависимости от принятых к рассмотрению деталей зависимости скорости реакции от температуры и концентрации реагентов динамика пульсирующих одномерных решений, сценарии генерации и взаимного преобразования различных автоколебательных режимов распространения, возникающих при потере устойчивости бегущей волны горения, может существенным образом отличаться.

Как это уже обсуждалось выше, развитие диффузионно-тепловых неустойчивостей волнового типа может приводить к формированию режимов распространения волн горения с более сложной пространственно-временной динамикой. Так в задачах с цилиндрической симметрией возможно формирование спиновых мод горения, которые являются нестационарными трехмерными волнами. Спиновые режимы горения характеризуются движением одной или нескольких светящихся (горячих) точек вдоль поверхности цилиндра по спиральным траекториям. Такие моды горения наблюдались экспериментально и исследовались аналитически [2, 56, 59, 99, 100, 116–118]. Помимо спинового горения волновые неустойчивости могут также приводить к появлению радиальных и стоячих волн. Радиальные волны – это непланарное обобщение пульсирующих волн [5, 59];

эта мода включает в себя зависимость от радиальной координаты, но не зависит от угловой координаты (аксиальная симметрия). Радиальные волны исследовались экспериментально и аналитически в целом ряде работ, в частности [2, 5, 59, 103, 107]. Стоячая (или симметричная) мода зависит как от радиальной, так и от угловой координаты и выглядит как движение одной или нескольких горячих точек вдоль поверхности цилиндра по бегущим осциллирующим траекториям без спирального движения. Этот режим распространения пламени исследовался аналитически, численно и экспериментально в работах [49, 59, 117, 119]. Следует так же отметить, что в экспериментах наблюдаются и другие типы периодических волновых структур таких, как спиральные волны и целевые волны, напоминающие колебательные моды мембраны [20, 103, 107].

При распространении волн горения в смесях возможно формирование непериодических режимов распространения пламени, таких как хаотические и квазипериодические волны. Один из основных сценариев возникновения хаоса через каскад бифуркаций удвоения периода уже описан выше и связан с ситуацией, когда существует только единственная одномерная неустойчивая пульсирующая мода. Обычно это достигается выбором характерной длины поперечного сечения цилиндра достаточно малой [49, 59].

В случае, если параметры системы допускают существование двух и более неустойчивых мод в линейном спектре возмущений стационарной плоской волны, то, как показал С. Марголис [59], появление хаоса может быть связано с трехмерным механизмом и происходит в результате бифуркации вблизи нейтральной границы устойчивости. Наличие двух или более неустойчивых мод также приводит к появлению квазипериодических волн. Это связано с тем, что каждая мода в линейном спектре возмущений соответствует определенной частоте, характеризующей временные осцилляции, связанные с этой модой. В случае, когда две (или более) моды имеют несоизмеримые частоты, нелинейное взаимодействие между ними приводит к формированию квазипериодического пламени, которое было исследовано аналитически и численно в работах [49, 59, 119, 120]. В случае, когда две (или более) моды имеют одинаковые частоты (резонансный случай), нелинейное взаимодействие между ними может привести к появлению хаотическо-

го пламени. Более детальное описание может быть найдено в [59, 121]. Как квазипериодические, так и хаотические волны распространяются сложным и непериодическим образом, при котором несколько горячих точек появляются и исчезают или формируют более сложные структуры. Такие волны наблюдались в экспериментах [117, 122], однако, до сих пор неясно имели ли наблюдаемые режимы распространения пламени хаотическую или квазипериодическую динамику.

§ 1.2. Устойчивость бегущих волн горения в двухступенчатых моделях

Существует ряд систем, например, реакции с несколькими видами топлива, с ингибиторами или катализаторами, реакции с разветвлением цепи, пламена, протекающие с образованием нескольких зон реакции, для которых приближение глобальной одностадийной реакции плохо применимо. Следующим естественным шагом в исследовании устойчивости волн горения является переход от одноступенчатых к более сложным моделям с двухступенчатой кинетикой реакции. Различные виды двухступенчатых схем описаны и классифицированы в работах [1, 5, 123] и включают три большие группы: модели с цепными, последовательными и параллельными реакциями. Следующие два параграфа посвящены последним двум группам моделей. Распространение волн горения в системах с цепным механизмом обсуждается в соответствующих главах данной работы.

1.2.1. Модели с параллельными реакциями

Обсуждение моделей распространения волн горения в предварительно перемешанной смеси с параллельным механизмом химической реакции начнем со случая конкурирующих экзотермических реакций: $A \rightarrow B$ и $A \rightarrow C$. Данная система исследовалась экспериментально [124, 125], аналитически [123, 126–129] и численно [128]. В работах [124, 125] экспериментально наблюдалась бистабильность распространения пламени при горении $Me-C-H_2$, где Me - это либо Ti , либо Zr . Здесь и далее под термином бистабильность понимается со-существование двух устойчивых бегущих волн

горения. В этой системе реакция может идти по двум конкурирующим путям с образованием различных конечных продуктов: либо металл-карбид-гидридов, либо металл-гидридов. Первый канал реакции характеризуется высокой скоростью и температурой пламени, а второй низкой скоростью и температурой волны горения. В зависимости от экспериментальных параметров, давления водорода, состава смеси и т.д., существуют условия, при которых могут быть реализованы оба режима распространения пламени. Выбор режима определяется температурой источника воспламенения. В работах так же было показано, что с изменением контрольных параметров бистабильность может исчезать.

Первая работа по аналитическому исследованию волн горения в двухступенчатой экзотермической модели датируется 1975 годом [126]. В ней рассматривается диффузионно-тепловая модель распространения плоского фронта пламени, которая решается методом сшивки асимптотических разложений. Найдены скорость и температура пламени для случаев твердого и газообразного топлива. Несмотря на то, что это не сформулировано в статье в явном виде и не выявлено в последующих публикациях [1, 127, 128], из аналитических расчетов [126] следует, что как скорость, так и температура волны горения может принимать вид многозначной 'S'-образной функции параметров задачи. При этом существуют либо три решения, распространяющихся с различными скоростями, либо единственное решение в зависимости от параметров.

Неоднозначность решений в виде бегущих волн в данной модели обсуждается в работах [123, 127–129]. В [128] проводится асимптотический анализ в приближении высокой энергии активации для твердого и газообразного топлива с реакциями нулевого и первого порядка. Расчеты ясно показывают, что возможно сосуществование трех решений в виде бегущей волны с различными скоростями и температурами горения. В [128] так же дается краткий обзор результатов численного счета, которые были получены авторами ранее и не были опубликованы. В частности говорится, что режим распространения пламени, соответствующий промежуточной скорости, всегда неустойчив, в то время, как ветви решений с быстрым и медленным распространением могут быть устойчивы или теряют устойчивость по

отношению к пульсациям. В [129] в модель включена дополнительная стадия, $B \rightarrow C$, и результирующая схема является комбинацией двухступенчатого последовательного и параллельного конкурирующего механизмов. Утверждается, что подобная модель может быть использована для описания горения угля и смесей переходных металлов с бором. Исследуются свойства волн горения и показано, что возможны режимы с многозначными решениями. В [123] рассмотрены различные модели с двухступенчатыми реакциями и, в частности, исследуется модель с параллельной конкурирующей схемой. С помощью понятия температуры перекрытия, баланса скоростей реакции и тепловыделения дается качественное механистическое объяснение возможности существования двух различных типов кривых отклика: однозначной монотонной и 'S'-образной с одним или тремя решениями в виде бегущей волны. Асимптотический анализ в пределе высокой энергии активации проводится таким образом, что в наиболее интересном случае, когда скорости двух реакций сравнимы, авторы раскладывают решение в асимптотический ряд вблизи температуры перекрытия и получают в главном порядке разложения уравнения для температуры и концентрации топлива в зоне реакции. Однако, в работе данная система уравнений не решена ни численно, ни аналитически и авторы не делают оценок скорости и температуры для волны горения. В случае, когда одна из реакций доминирует, задача редуцируется к стандартной одноступенчатой. Подобные же выводы были сделаны в работах [1, 126–129].

Анализ линейной устойчивости решений в виде бегущей волны в модели с двухступенчатыми параллельными конкурирующими реакциями был проведен в [130]. Рассматривался только нулевой порядок реакции в приближении бесконечно узкой зоны реакции (в качестве источников в уравнениях рассматривались дельта функции), что позволило получить дисперсионные соотношения в явном виде. Было установлено, что промежуточная ветвь неустойчива, в то время, как быстрая и медленные ветви решений либо устойчивы, либо теряют устойчивость по отношению к пульсациям, что согласуется с результатами, приведенными в [128]. В работе [131] продолжено исследование диффузионно-тепловой устойчивости волн горения в данной модели. Был предложен критерий, использующий температуру

перекрытия, для качественного определения областей в пространстве параметров, где возможно сосуществование трех решений в виде бегущей волны. Этот критерий был подтвержден численными расчетами, которые показали, что при определенных условиях зависимость скорости пламени является 'S'-образной функцией параметров. Быстрая ветвь решений либо полностью устойчива, либо теряет устойчивость в результате бифуркации Андронова-Хопфа до того, как достигается бифуркация складки. Промежуточная ветвь полностью неустойчива, а медленная ветвь либо неустойчива, либо частично устойчива, что связано с существованием одной или двух бифуркации Андронова-Хопфа. Было показано, что бифуркации Андронова-Хопфа сверхкритические и в результате них рождаются пульсирующие решения. В работе так же установлено существование таких явлений как бистабильность и гистерезис решений в виде бегущей волны.

Выше была рассмотрена схема, в которой обе реакции являются экзотермическими. Однако, в ряде случаев конкурирующая реакция может идти в две стадии так, что на первой происходит потребление, а на второй стадии - выделение тепла. Так при горении нитрат аммония выделяют две gross реакции разложения NH_4NO_3 , проходящие с выделением и поглощением тепла [132]. Таким образом возникают задачи с конкурирующими экзо-и эндотермическими реакциями. В работе [133] установлено, что в модели с двухступенчатыми конкурирующими экзо- и эндотермическими реакциями возможно распространение волн горения. В [134–136] было показано, что в зависимости от параметров модели скорость волны горения может быть либо однозначной, либо двухзначной 'C'-образной функцией параметров. Существует два режима затухания волны горения. Для случая однозначной зависимости найдены два режима распространения с доминированием экзо- или эндотермической реакции. Волны горения устойчивы, если тепловыделение в ходе экзотермической реакции достаточно велико, в противном случае возникают пульсации пламени. В случае двухзначной зависимости скорости волны горения от параметров, медленная ветвь решений всегда неустойчива, а быстрая либо устойчива, либо теряет устойчивость в результате бифуркации Андронова-Хопфа.

Помимо рассмотренных выше двухстадийных конкурирующих реак-

ций, возможны ситуации, когда две стадии идут независимо параллельно, например, в случае двух разных видов топлива в бедной смеси, и связаны только через баланс тепловыделения. Подобные схемы вида $A \rightarrow C$ и $B \rightarrow D$ носят название параллельных независимых двухстадийных реакций. В одной из первых работ по исследованию волн горения в подобных системах аналитически рассмотрен адиабатический одномерный случай в приближении бесконечно узких зон экзотермических реакций с нулевым порядком [137]. В режиме управления найдены решения в виде бегущей волны, а так же их скорость распространения и температура горения в зависимости от параметров. В этом же приближении исследована устойчивость волн горения по отношению к одномерным возмущениям [138]. Показано, что, когда расстояние между зонами реакции становится существенно больше, чем длина зоны прогрева, то устойчивость волны горения определяется условиями устойчивости одноступенчатых моделей, связанных с каждой из реакций, взятых по отдельности. С уменьшением расстояния между зонами реакций начинают играть роль два фактора: поток тепла из зоны второй реакции, находящейся ближе к области продуктов, стабилизирует первую реакцию, находящуюся впереди; с другой стороны искажение профиля области прогрева второй реакции носит для нее дестабилизирующий характер. В результате с уменьшением расстояния между зонами реакций область устойчивости уменьшается по параметрам второй и увеличивается по параметрам первой стадии. Аналитические выкладки подтверждаются проведенными численными расчетами для модели с реакциями первого порядка. Более строгое математическое рассмотрение системы было проведено в [139], где во втором порядке малости методом сшивки асимптотик получены явные выражения для скорости и расстояния между зонами реакций в режиме слияния. При этом энергии активации двух стадий считались асимптотически большими, а их отношение, так же как и отношение взвешенных скоростей реакций, нормированных на числа Льюиса, считались в первом порядке равными единице.

В более поздних работах рассматривался случай параллельных независимых эндо-экзотермических стадий [140–142] в контексте разработки эффективных способов тушения пламени через введение ингибитора. В

[140] асимптотически и численно исследуются свойства волн горения в модели с экзотермической реакцией второго порядка и эндотермической реакцией первого порядка в случае, когда последняя обладает существенно меньшей энергией активации, теплотой и скоростью реакции. Показано, что определяющими являются два параметра: отношение тепловых эффектов и скоростей реакций, которые считаются асимптотически малыми. В случае, когда эти параметры соразмерны, наблюдается затухание при конечной скорости волны горения в результате бифуркации складки т.е. ситуация напоминает одноступенчатую неадиабатическую модель. Если относительное потребление ингибитора происходит существенно быстрее, чем относительное поглощение тепла в ходе эндотермической стадии, то затухания не наблюдается и волна горения является однозначной функцией параметров. Аналогичная модель, но с экзотермической реакцией первого порядка, рассматривается в [141], где показано, что изменение порядка реакции существенно отражается на свойствах решений в виде бегущих волн. В случае, когда эндотермическая стадия не активирована т.е. ее энергия активации превышает энергию активации реакции, идущей с тепловыделением, всегда существует единственное решение и затухание не наблюдается. Если отношение энергии активации эндо- к экзотермической стадии меньше единицы, то затухание волн горения всегда присутствует при достаточно больших значениях теплового эффекта ингибирующей стадии. При этом в зависимости от значений параметров либо скорость пламени однозначна и монотонно стремится к нулю, либо скорость является 'S'-образной трехзначной функцией параметров. Устойчивость волн горения по отношению к продольным пульсирующим возмущениям численно исследована в [142]. Показано, что в случае, когда скорость пламени является 'S'-образной функцией параметров быстрая и медленные ветви решений либо полностью устойчивы, либо теряют устойчивость в результате бифуркаций Андронова-Хопфа до того, как достигаются бифуркация складки, а промежуточная ветвь полностью неустойчива. Установлено, что при определенных значениях параметров возможна бистабильность решений в виде бегущей волны. Показано, что бифуркации Андронова-Хопфа сверхкритические и в результате них рождаются пульсирующие решения.

1.2.2. Модели с последовательными реакциями

Из всех двухстадийных моделей горения, системы с последовательным механизмом реакции вида $A \xrightarrow{k_1(T)} B \xrightarrow{k_2(T)} C$ получили наибольший интерес. Подобные модели отражают протекающие в пламени процессы, например, газификации исходного топлива с последующей реакцией промежуточных газовых продуктов, горение определенных порохов и газовых смесей, содержащих NO_2 , метил нитрат, нитрогликоль, горение углеводородного топлива, горение керосин-воздушной смеси т.д. [1, 143–146].

В основополагающей работе [144] численно исследуются волны горения в диффузионно-тепловой модели с двумя последовательными экзотермическими реакциями первого порядка в приближении равных коэффициентов диффузии реагентов и тепла. Было установлено, что существует три режима распространения пламени: режим слияния, управления и отрыва, определяемые соответствующими одностадийными реакциями. Эта терминология была предложена в работе [147] и позднее стала общепринятой [1, 5].

В режиме слияния первая реакция протекает гораздо медленней, чем вторая, например, когда ее энергия активации заметно превышает энергию активации второй стадии. В этом случае существует только одна зона реакции и тепловыделения, концентрация промежуточных продуктов B мала, поскольку они сразу расходуются в ходе второй реакции, а скорость волны горения определяется первой стадией и хорошо описывается формулой Зельдовича-Франк-Каменецкого для одностадийной реакции '1', протекающей при температуре горения двухстадийного процесса.

В противоположном случае, когда энергия активации первой реакции меньше, чем второй наблюдается режим отрыва. Вторая реакция протекает гораздо медленнее первой в индукционном режиме, наблюдается две зоны тепловыделения, разделенные температурным плато, при этом в первой стадии тепловыделение существенно выше, чем во второй. Скорость пламени определяется скоростью одностадийной волны первой реакции, проходящей при температуре горения, соответствующей только одной реакции '1'.

Если как и в режиме отрыва, первая стадия протекает быстрее второй, но ее тепловой эффект существенно ниже, то наблюдается режим управления. В этом случае так же существуют два максимума тепловыделения при этом первый меньше, чем второй. Температурное плато отсутствует, а скорость волны определяется второй стадией и описывается формулой Зельдовича-Франк-Каменецкого для одностадийной реакции '2', протекающей при температуре горения двухстадийного процесса. Распространение волны горения определяется кинетикой второй реакции, однако, первая реакция контролирует поток тепла из зоны второй реакции. Анализ аналитических формул для скоростей одностадийных реакций, определяющих различные режимы пламени, позволил установить основные закономерности появления и перехода различных режимов при изменении параметров системы. В частности было показано, что переход из режима отрыва в режим слияния возможен только через прохождение стадии управления.

В работе [147] рассмотрен случай, когда исходный реагент является твердым топливом, получены результаты качественно аналогичные [144]. Вводится основная терминология для режимов распространения пламени. Помимо этого в [147] указывается, что если первая реакция является эндотермической, то возможны только режимы слияния и управления, а если вторая реакция идет с поглощением тепла, то наблюдается только режим слияния.

Математически строго задача рассмотрена в работах [148, 149] с использованием метода сшивки асимптотик для случаев конденсированной среды и газа. Во втором порядке асимптотического разложения по малому параметру, отношению адиабатической температуры горения двухстадийной реакции к сумме температур активации, получены выражения для скорости волны горения. Для газовой смеси эти выражения совпадают в главном порядке с оценками [144] во всех трех режимах распространения пламени. В пространстве параметров найдены условия существования различных типов волн горения. Режим слияния наблюдается, когда энергия активации первой реакции больше энергии активации второй. В противном случае, если отношение энергий активации первой и второй стадий

меньше единицы, но больше отношения адиабатических температур горения первой и двухстадийной реакций, пламя распространяется в режиме управления. Наконец, если нарушается последнее условие, то устанавливается режим отрыва. Аналогичные асимптотические результаты были получены позднее [150–152]. В [150] рассмотрен случай, когда первая стадия обладает нулевой теплотой реакции и существуют только два режима: слияния и управления. Показано, что результаты асимптотического анализа так же согласуются с данными численного счета. В [151] акцент делается на изучение влияния чисел Дамкелера для отдельных стадий на скорость и режимы распространения волн горения. Анализ [151] так же переосмысливается и дополняется в [152]. Метод сшивки асимптотик использовался в [153], где для бедных газовых смесей получены явные выражения для скорости и расстояния между зонами реакций в промежуточном случае на стыке режима слияния и управления. При этом энергии активации двух стадий считались асимптотически большими, а их отношение, так же как и отношение взвешенных скоростей реакций, нормированных на числа Льюиса считались в первом порядке равными единице. Скорость волн горения в первом порядке описывалась выражением для одностадийной реакции '1', протекающей при температуре горения двухстадийного процесса и модифицированным на отношение приведенных чисел Дамкелера. Расстояние между зонами реакций было связано с максимумом концентрации промежуточных продуктов и показано, что обе величины асимптотически малы в данном приближении.

Диффузионно-тепловая устойчивость волн горения численно исследовалась в [154] для случая адиабатического без газового последовательного двухстадийного горения твердотопливной смеси с реакциями первого порядка. Рассмотрены два режима, управления и слияния, для которых на плоскости, число Зельдовича - отношение энергий активации, найдена нейтральная граница устойчивости и установлено, что при ее пересечении возникают пульсирующие решения. Дано качественное описание влияния остальных параметров на границу устойчивости. В работе [155] продолжены асимптотические исследования устойчивости волн горения, начатые в [153] с использованием тех же приближений. Задача рассматривается с

учетом теплового расширения газа и чисел Льюиса для реагентов асимптотически близких к единице. Получено условие потери устойчивости пламени, которое совпадает с выражением для одноступенчатой модели для первой реакции. Методами бифуркационного анализа исследовано поведение пульсирующих решений, возникающих при потере устойчивости бегущих волн горения. В частности установлено, что пульсирующие волны распространяются в среднем медленнее, чем бегущие волны горения, а расстояние между зонами реакции в среднем становится больше. Асимптотический анализ устойчивости [153] волн горения в режиме слияния был продолжен в [156] для случая диффузионно-тепловой модели и непланарных возмущений при произвольных значениях теплоты реакций и чисел Льюиса. В [157] рассмотрение распространено на случай режима управления, были установлены структура, скорость и удаление зон реакции, как функции параметров: чисел Льюиса и отношения скоростей реакций. Получено дисперсионное соотношение, которое в пределе, когда расстояние между зонами реакций стремится к нулю переходит в выражение [156], полученное для режима слияния. Анализ дисперсионного соотношения позволил установить границы устойчивости и характер возникающих неустойчивостей ячеистого, волнового и пульсирующего типа. Показано, что в режиме слияния устойчивость определяется близостью числа Льюиса для исходного реагента к единице, а в случае управления для устойчивости решений в виде бегущей волны оба числа Льюиса должны быть близки к единице.

Структура, скорость и устойчивость волн горения в режиме слияния исследуется в [158] в твердых смесях с акцентом на моделирование самораспространяющегося высокотемпературного синтеза с учетом процесса плавления реагентов при определенной температуре, близкой к адиабатической температуре горения системы. Плавление приводит с одной стороны к ускорению реакции в жидкой фазе, а с другой к отводу тепла за счет процессов плавления. Эти эффекты имеют противоположное влияние на скорость волны горения, однако в целом плавление приводит к увеличению скорости пламени. С увеличением энергии активации реакций волны горения теряют устойчивость в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Показано, что критическое значение энергии активации в зависимости от

температуры плавления реагентов может иметь локальный минимум, что не наблюдается в рамках одноступенчатой модели с плавлением реагентов.

Модели с одной эндотермической, а другой экзотермической стадией рассматривались в [159–162] с использованием метода сшивки асимптотик и численных расчетов. Показано, что в случае, когда первая стадия является эндотермической, то существуют только режимы слияния и управления. Профиль температуры является монотонной функцией координаты в сопутствующей системе отсчета. Зависимость структуры и скорости пламени от параметров качественно согласуется со случаем экзотермических последовательных реакций. В противоположном случае, когда вторая реакция идет с поглощением тепла, возможны режимы слияния и отрыва. Первый наблюдается, если характерное время экзотермической стадии существенно больше, чем время эндотермической стадии. Профиль температуры имеет вид монотонной зависимости от координаты в сопутствующей волне системе отсчета, максимум и минимум тепловыделения локализованы в одной зоне реакции, при достаточно большом значении теплового эффекта эндотермической реакции волны горения затухают. Вторым режимом наблюдается в противоположном случае, когда характерное время экзотермической стадии существенно меньше времени эндотермической реакции, а тепловые эффекты реакций сбалансированы в сторону тепловыделения. В этом случае, профиль температуры принимает импульсный вид с единственным локальным максимумом, зоны эндо- и экзотермических реакций разнесены в пространстве. С уменьшением отношения теплоты первой реакции ко второй наблюдается переход от режима отрыва к режиму слияния, если при этом отношение характерных времен реакций смещено сильно в сторону второй стадии, то возможно появление трех решений в виде бегущей волны т.е. 'S'-образной зависимости скорости пламени от параметров системы.

Линейная устойчивость для случая, когда вторая стадия является эндотермической, исследуется в [163] численно и аналитически. Считается, что числа Льюиса для топлива и промежуточного продукта первой реакции равны либо единице, либо нулю. В первом случае возможно возникновение монотонной неустойчивости для промежуточной ветви при наличии

трехзначных решений в виде бегущей волны, что делает распространение пламени с промежуточной скоростью абсолютно неустойчивым. Во втором случае для средней ветви решений наблюдается та же картина, а крайние ветви решений теряют устойчивость колебательным образом.

ГЛАВА 2

Модель Зельдовича-Баренблатта с линейной реакцией рекомбинации

§ 2.1. Введение

Модели распространения волн горения в смесях с цепным механизмом реакции особенно интересны потому, что горение углеводородного топлива в воздухе проходит по цепному кинетическому механизму. Как правило при горении углеводородов в результате реакции разветвления цепи производится некоторый бассейн радикалов, которые рекомбинируют с выделением тепла и образованием продуктов [1]. В наиболее простом случае модель с цепным кинетическим механизмом включает как минимум две реакции. Одной из наиболее известных моделей такого типа является модель Зельдовича-Линяна, которая была предложена в 1948 Я.Б. Зельдовичем [164] и позднее была рассмотрена А. Линяном в 1971 в приближении высокой энергии активации [165]. Модель включает реакцию разветвления цепи $A + B \rightarrow 2B$, и реакцию обрыва цепи (или рекомбинации) $B + B + M \rightarrow 2P + M$, где A – это топливо, B – радикалы, P – продукты, а M – это третье тело. Похожая модель, включающая реакцию инициации, была рассмотрена в [166]. Более подробно данная модель рассматривается в следующей главе.

Несмотря на то, что модель Зельдовича-Линяна была предложена более чем полувека назад, устойчивость волн горения в ней не исследовалась до сих пор и является объектом нашего рассмотрения в главе 3. По-видимому, это связано со сложностями в исследовании устойчивости волн горения в приближении высокой энергии активации для данной конкретной модели, которые существенно возрастают с увеличением числа реакций в кинетической схеме по сравнению с моделями с одноступенчатой кинетическим механизмом. Еще одной отличительной особенностью модели

Зельдовича-Линяна является нелинейная зависимость реакционных членов от концентрации реагентов, что обычно обходится в одноступенчатой формулировке задачи.

Для того, чтобы исследовать устойчивость пламени с цепным механизмом реакции, Д.В. Долдом недавно было предложено [167] обратиться к упрощенной версии модели Зельдовича-Линяна, которая была введена в 1959 Я.Б. Зельдовичем и Г.И. Баренблаттом [30]. В этой модели, которую для определенности будем называть моделью Зельдовича-Баренблатта, порядок реакции рекомбинации был понижен на единицу так, что результирующая кинетическая схема записывается как $A + B \rightarrow 2B$, $B + M \rightarrow P + M$. Понижение порядка реакции разрыва цепи приводит к тому, что зависимость реакционных членов от концентрации радикалов в уравнениях становится линейной, что позволяет исследовать задачу с использованием приближения высокой энергии активации. Таким образом найдена скорость волны горения [168, 169] и показано, что в неадиабатическом случае она является S-образной двузначной функцией параметров. В адиабатическом случае, выражение для скорости, выведенное в [169], предполагает однозначность скорости пламени. При числах Льюиса для топлива меньших единицы анализ в [169] предсказывает, что волны горения могут терять устойчивость из-за появления ячеистой неустойчивости. В работе [170] модель расширена и включает в себя гидродинамические эффекты, вызванные тепловым расширением. В более поздней работе [171] авторы исследуют появление и динамику ячеистого пламени на основе данного подхода. Модельные уравнения типа реакция-диффузия, на которых основывается анализ в [167–169], дополняются квази-изобарическими уравнениями Навье-Стокса для газовой динамики. В приближения высокой энергии активации показано, что пламя всегда неустойчиво по отношению к гидродинамическим модам с большими длинами волн в направлении, поперечном направлению распространения волны горения. При числах Льюиса для топлива меньше единицы диапазон длин волн неустойчивых возмущений возрастает из-за появления диффузионно-тепловой неустойчивости, накладывающийся на гидродинамическую. При числах Льюиса для топлива больших единицы есть область параметров, где существует только гид-

родинамическая неустойчивость с малыми волновыми числами, а для достаточно больших чисел Льюиса появляется пульсирующая диффузионно-тепловая неустойчивость.

В нашей работе [172] исследуются свойства модели Зельдовича-Баренблатта [167] в адиабатическом случае в пределе равных коэффициентов диффузии топлива, радикалов и тепла. В отличие от [169] энергия активации берется порядка $O(1)$ (не асимптотически бесконечно большая). Как указывается в [173] это разумное допущение для пламени, например, для горения кислород-водородной смеси. В [172] показано, что скорость пламени как функция параметров является однозначной, и за фронтом горения остается не сгоревшее в ходе реакции топливо. При некоторых значениях параметров волна горения затухает. Это происходит при падении скорости распространения пламени до нуля. Сценарий затухания волны горения детально исследуется в [174], где продемонстрировано, что скорость пламени как функция энергии активации стремится к нулю по линейному закону. В случае равных коэффициентов диффузии пламя устойчиво в широком диапазоне изменения параметров, что согласуется с результатами в [169]. В работах [175,176] приближение равных коэффициентов диффузии отброшено и модель Зельдовича-Баренблатта рассматривается в одномерном адиабатическом случае. Показано, что число Льюиса для топлива имеет существенное влияние на свойства и устойчивость волн горения в то время, как вариация числа Льюиса для радикалов сказывается только количественно (но не качественно) на поведении автомодельного решения. Установлено, что для чисел Льюиса для топлива меньше единицы скорость распространения пламени является монотонно убывающей функцией безразмерной энергии активации. Волна горения распространяется устойчиво и затухает при конечных значениях энергии активации при стремлении скорости волны к нулю. Для чисел Льюиса для топлива больших единицы скорость автомодельного решения является двухзначной функцией. Похожие результаты были получены в более поздней работе [177]. Показано, что медленная ветка решений всегда неустойчива, а быстрая ветка либо устойчива, либо теряет устойчивость по отношению к пульсирующим модам возмущения в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Недавно

похожая модель была рассмотрена в [178] в адиабатическом пределе и пульсирующие неустойчивости не были найдены для чисел Льюиса для топлива больше единицы. Данный результат связан с особенностями параметризации, использованной в работе [178].

В [176] детально изучены механизмы возникновения пульсирующих неустойчивостей в модели Зельдовича-Баренблатта. В пространстве параметров установлены: граница нейтральной устойчивости автомодельного решения и типы бифуркаций, приводящих к потере устойчивости. В частности показано, что при стремлении числа Льюиса для топлива к единице частота Хопфа стремится к нулю, а граница нейтральной устойчивости в пространстве параметров пересекается с критическими значениями параметров седло-узловой бифуркации, связанной с затуханием автомодельного решения. Данная точка в пространстве параметров соответствует бифуркации ко-размерности два – бифуркации Богданова-Тakensа, которая таким образом отвечает за появление пульсирующих неустойчивостей. Свойства бифуркации Андронова-Хопфа детально исследованы. Показано, что при пересечении нейтральной границы устойчивости в пространстве параметров бифуркация Хопфа приводит к мягкому возбуждению осциллирующих решений, представляющих собой периодически изменяющиеся во времени бегущие волны. Установлено, что увеличение параметра за критичности приводит к появлению каскада Фейгенбаума бифуркаций удвоения периода.

В [179] анализ обобщен на двухмерный неадиабатический случай. Продемонстрировано, что скорость пламени является двухзначной S-образной функцией параметров в не зависимости от чисел Льюиса т.е. для фиксированного набора параметров существуют либо два решения, быстрое и медленное, либо решений в виде бегущей волны не существует. Затухание наблюдается при конечном значении скорости. Установлено, что медленная ветвь решений всегда неустойчива. При числах Льюиса для топлива больше единицы быстрая ветвь либо устойчива, либо теряет устойчивость по отношению к волновым или равномерным возмущениям. Переключение между двумя типами неустойчивости происходит в точке бифуркации ко-размерности два. В [179, 180] исследовались сложные режимы распро-

странения пламени такие, как пульсирующие, хаотические, и стоячие волны. Установлено, что эти типы решений появляются в результате потери устойчивости бегущей волны горения по отношению к пульсирующим возмущениям.

Модель Зельдовича-Баренблатта использовалась и в целом ряде других работ для исследования сферического пламени [167,181], задач воспламенения [182,183] и горения аэрозолей [184].

§ 2.2. Формулировка модели Зельдовича-Баренблатта. Модельные уравнения

Мы рассматриваем диффузионно-тепловую модель распространения пламени в предварительно перемешанной смеси в среде бесконечной вдоль направления распространения пламени, которая включает две ступени: разветвление цепи $A + B \rightarrow 2B$ и рекомбинацию $B + M \rightarrow C + M$, где A - это топливо, B - радикалы, C - продукты, а M - это третье тело, любые молекулы, необходимые для инициации реакции обрыва цепи, но не участвующие в ней т.е. остающиеся инертными по отношению к данной элементарной реакции. В этой модели различные радикалы рассматриваются как бассейн однотипных химических радикалов и представляются единственным промежуточным соединением B . Более подробно данное предположение обсуждается в работах Д.В.Долда [167–169]. Считается, что все тепло, выделяемое реакцией, производится в ходе стадии рекомбинации, скорость которой не зависит от температуры. В то же время на стадии разветвления цепи не производится и не поглощается тепло, однако, она имеет определенный порог (энергию) активации. Как отмечено в [1] в данной модели стадия рекомбинации служит как ингибитором, который обрывает разветвление цепи, так и активатором, который производит тепло. Подобные предположения часто принимаются для различных реакций, идущих по цепному механизму [1,169], таких, как горение углеводородов, водорода и т.д.

Следуя работам [30,167], модельные уравнения, описывающие данный

процесс, могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= k \nabla^2 T + \rho Q A_r Y_B - H(T), \\ \frac{\partial Y_A}{\partial t} &= D_A \nabla^2 Y_A - A_B Y_A Y_B e^{-E/RT}, \\ \frac{\partial Y_B}{\partial t} &= D_B \nabla^2 Y_B + A_B Y_A Y_B e^{-E/RT} - A_r Y_B \rho / M, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где T - это температура; Y_A и Y_B представляют концентрации топлива и радикалов соответственно; ρ - это плотность смеси; c_p - это удельная теплоёмкость при постоянном давлении; M - средний молекулярный вес; D_A и D_B представляют коэффициенты диффузии топлива и радикалов в смесь, соответственно; A_r и A_B константы реакций рекомбинации и разветвления цепи, соответственно; Q - это теплота реакции рекомбинации; E - это энергия активации реакции разветвления цепи; R - универсальная газовая постоянная. Функция $H(T)$ описывает тепловые потери из единицы объема. В адиабатическом приближении $H(T)$ стремится к нулю. В случае ограниченного по сечению объема (например, трубы) и остывания за счет теплоотвода к стенкам $H = K(T - T_a)$, где K - это постоянный коэффициент, связанный с теплоотдачей, T_a - температура окружающей среды (стенок трубы) [185, 186]. Для радиационных потерь зависимость носит кватеричный характер, $H(T) = L(T^4 - T_a^4)$, где постоянная L в случае оптически тонкой среды пропорциональна произведению постоянной Стефана-Больцмана на коэффициент поглощения [185]. В дальнейшем мы будем рассматривать только кондуктивные потери. Подобное описание объемных тепловых потерь является феноменологическим и обсуждается в целом ряде работ [32, 47, 185–187]. В [47] отмечено, что сценарий затухания волны горения качественно не зависит от точного закона зависимости объемных тепловых потерь от температуры. Численные исследования [187] показывают, что в случае относительно небольшого коэффициента теплоотдачи на границе топливо-внешняя среда и/или достаточно большого размера горючей смеси в поперечном направлении описание линейной зависимости объемных тепловых потерь от температуры применимо.

Далее мы вводим безразмерные переменные – время, координаты,

температуру, концентрацию топлива и радикалов:

$$t' = \frac{\rho Q A_B R}{c_p M E} t, \quad \mathbf{r}' = \sqrt{\frac{\rho^2 Q A_B R}{k M E}} \mathbf{r}, \quad u = \frac{RT}{E}, \quad v = \frac{Y_A M}{\rho}, \quad (2.2)$$

$$w = \frac{Y_B M}{\rho},$$

и переписываем (2.1) в безразмерном виде

$$u_t = \nabla^2 u + r w - h(u - u_a),$$

$$v_t = L_A^{-1} \nabla^2 v - \beta v w e^{-1/u}, \quad (2.3)$$

$$w_t = L_B^{-1} \nabla^2 w + \beta v w e^{-1/u} - r \beta w.$$

В уравнениях мы отбросили штрихи над новыми переменными и определили следующие безразмерные параметры

$$\beta = \frac{c_p E}{QR}, \quad r = \frac{A_r}{A_B}, \quad L_{A,B} = \frac{\rho c_p D_{A,B}}{k}, \quad h = \frac{K M E}{\rho^2 Q A_B R}, \quad (2.4)$$

где β - это энергия активации; r - отношение характерных времен реакций разветвления и рекомбинации; L_A и L_B - это числа Льюиса для топлива и радикалов, соответственно; h - безразмерный коэффициент тепловых потерь; u_a - безразмерная внешняя температура. Определение энергии активации, числа Льюиса для топлива и коэффициента тепловых потерь соответствует одноступенчатой модели [67] в то время, как параметры r , L_B не могут быть воспроизведены в рамках одноступенчатой формулировки.

Уравнения (2.3) рассматриваются с граничными условиями, соответствующими волне горения, распространяющейся вдоль оси X в положительном направлении,

$$u = u_a, \quad v = 1, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

$$u_x = 0, \quad v_x = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

На правой холодной границе температура равна окружающей, $u = u_a$, топливо и радикалы еще не начали реагировать и соответствующие концентрации имеют максимальное и нулевое значение, $v = 1$ и $w = 0$. В отличие от одноступенчатой модели 'проблема холодной границы' [27, 81, 185],

как показано в [169], не существует для модели Зельдовича-Баренблатта и температура окружающей среды может принимать любые значения, до тех пор пока реакция разветвления цепи не активирована. Формально это означает, что реакционный член в правой части уравнения для радикалов в (2.3) отрицателен или, $r > e^{-1/u_a}$, т.е. температура должна быть ниже $u_i \equiv -1/\ln(r)$ - температуры, при которой свежая смесь становится самовоспламеняющейся. На левой границе ($x \rightarrow -\infty$) мы требуем отсутствие протекания реакций так, что решение достигает стационарного состояния (2.3). Производные u , v берутся равными нулю так же, как и концентрация радикалов, $w = 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Температура достигает постоянного значения, которое определяется по разному для адиабатического ($h = 0$) и неадиабатического случая ($h > 0$). Следует отметить, что подобные граничные условия отличаются от рассмотренных в [30], где считается, что в зоне продуктов может оставаться некоторое количество радикалов. Как следует из системы уравнений (2.3), подобное допущение означало бы, что реакции не останавливаются за фронтом пламени и следовательно конечное состояние смеси не является стационарным и равновесным.

§ 2.3. Решение в виде бегущей волны

В этом параграфе исследуются свойства бегущих плоских волн горения. Решение краевой задачи (2.3, 2.5) ищется в виде $u(\mathbf{r}, t) = u(\xi)$, $v(\mathbf{r}, t) = v(\xi)$, и $w(\mathbf{r}, t) = w(\xi)$, где мы ввели координату, $\xi = x - ct$, в системе отсчета, движущейся с волной со скоростью c . Подставляя решение в данной форме в модельные уравнения (2.3), получаем

$$u_{\xi\xi} + cu_{\xi} + rw - h(u - u_a) = 0,$$

$$L_A^{-1}v_{\xi\xi} + cv_{\xi} - \beta v w e^{-1/u} = 0, \quad (2.6)$$

$$L_B^{-1}w_{\xi\xi} + cw_{\xi} + \beta v w e^{-1/u} - r\beta w = 0.$$

В адиабатическом случае ($h = 0$) граничные условия (2.5) могут быть модифицированы. Для этого мы умножим первое уравнение в (2.6) на β , добавим его к второму и третьему уравнениям системы (2.6) и проинтегри-

руем по ξ от $-\infty$ до $+\infty$. Это дает условие $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} S = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} S$, где $S = \beta u + v + w$. Комбинируя его с (2.5) и вводя параметр $\sigma = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} v$, получим следующее выражение для адиабатической температуры горения $u_b \equiv \lim_{\xi \rightarrow -\infty} u(\xi) = u_a + \beta^{-1}(1 - \sigma)$. Для неадиабатического случая ($h > 0$) мы требуем, чтобы температура за волной горения асимптотически приближалась к температуре окружающей среды. Объединяя эти выражения, граничные условия могут быть записаны в виде

$$u = u_a, \quad v = 1, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty,$$

$$u = \begin{cases} u_a & \text{для } h > 0, \\ u_a + \beta^{-1}(1 - \sigma) & \text{для } h = 0 \end{cases}, \quad v = \sigma, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow -\infty,$$
(2.7)

где σ обозначает концентрацию топлива, оставшегося за волной и не израсходованного в ходе реакции. Значение этого параметра заранее неизвестно и должно быть найдено вместе с решением (2.3).

§ 2.4. Бегущие волны в случае чисел Льюиса равных единице в адиабатическом приближении

В данном параграфе мы рассмотрим распространение волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта в адиабатическом одномерном приближении в случае, когда коэффициенты диффузии радикалов и топлива равны коэффициенту температуропроводности, иными словами, числа Льюиса, $L_{A,B}$ равны единице [30]. Для простоты мы так же положим температуру окружающей среды равной нулю, $u_a = 0$. Принятые предположения существенно упрощают анализ системы и в то же время позволяют исследовать общие свойства краевой задачи (2.6,2.7).

В случае $L_A = L_B = 1$ система уравнений (2.6) имеет интеграл $S = \beta u + v + w$ [30]. Используя S и первое граничное условие в (2.7), уравнения (2.6) могут быть сведены к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для температуры и концентрации

топлива

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} + cu_{\xi} + r(1 - \beta u - v) &= 0, \\ v_{\xi\xi} + cv_{\xi} - \beta v(1 - \beta u - v)e^{-1/u} &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $w = 1 - \beta u - v$. На правой границе мы требуем, чтобы $u = 0$ и $v = 1$, а на левой границе ($\xi \rightarrow -\infty$) мы преобразуем граничные условия к виду

$$u = \beta^{-1}(1 - \sigma), \quad v = \sigma. \quad (2.9)$$

На первый взгляд система уравнений (2.8) похожа на уравнения, описывающие одноступенчатую адиабатическую модель, рассмотренную в [30, 63]. Однако, в отличие от одноступенчатой модели, система (2.8) не имеет еще одного интеграла (энтальпии [30]), который позволяет дальнейшие упрощения. Более того, граничные условия (2.9) допускают наличие утечки топлива из зоны реакции, что не возможно в случае адиабатической модели с одноступенчатой реакцией.

2.4.1. Условия существования решения

Основные свойства решений системы (2.8) могут быть найдены из анализа устойчивости точек покоя при $\xi \rightarrow \pm\infty$. На правой границе, $\xi \rightarrow \infty$, координаты точки покоя (или асимптотические значения u и v) задаются как $u = 0$ и $v = 1$. Мы будем называть эту стационарную точку конечной точкой траектории системы (2.8) в фазовом пространстве. Линеаризация уравнений (2.8) около этих значений указывает на то, что конечная точка является село-узловой для всех физических значений параметров, что соответствует собственным значениям $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -c$, $\mu_{3,4} = (-c \pm \sqrt{c^2 + 4r\beta})/2$.

На противоположной границе, $\xi \rightarrow -\infty$, точка покоя, которую мы будем называть начальной точкой, имеет координаты (2.9), т.е. любая точка, лежащая на прямой $v = 1 - \beta u$ на плоскости (u, v) , может быть стационарной точкой. Другими словами, асимптотические значения температуры, u , и концентрации топлива, v , принадлежат этой прямой на плоскости (u, v) при $\xi \rightarrow -\infty$. Линеаризация системы (2.8) около этих значений (2.9) показывает, что начальная точка является либо седло-узловой,

либо устойчивым узлом в зависимости от параметров. Собственные значения линеаризованной задачи могут быть записаны в этом случае, как $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -c$, $\mu_{3,4} = (-c \pm \sqrt{c^2 + 4\beta(r - \sigma e^{-\beta/(1-\sigma)})})/2$. Начальная точка – это седло-узловая точка при $r > \sigma e^{-\beta/(1-\sigma)}$ и устойчивый узел при $r < \sigma e^{-\beta/(1-\sigma)}$. В последнем случае в фазовом пространстве невозможно соединить начальную точку с конечной точкой фазовой траекторией и не существует физических решений, экспоненциально сходящихся к асимптотическим значениям (2.9). Условие

$$r = \sigma \exp \frac{-\beta}{1-\sigma} \quad (2.10)$$

определяет поверхность в пространстве параметров (r, β, σ) , которая представляет собой границу между областями, где решение существует и не существует. Если какая-либо ветвь решений пересекает в пространстве параметров эту поверхность, то решение затухает. Следовательно, мы можем считать уравнение (2.10) условием затухания. На наличие подобного условия указано так же в [30]. На рис. 2.1 показана граница между областью параметров, где решение в виде бегущей волны существует (над поверхностью) и не существует (под поверхностью). Физический смысл этого условия может трактоваться следующим образом. Если мы вернемся к уравнению (2.3) и отбросим диффузионные члены, то за волной горения должно быть устойчивое состояние, определяемое (2.9) и $w = 0$. Концентрация радикалов не должна нарастать, если возникает некоторое малое возмущение распределения радикалов. Другими словами, производство радикалов должно подавляться их потреблением, которые определяются вторым и третьим членами в правой части последнего уравнения системы (2.3). Как видно из (2.3), данное условие удовлетворено, если $r > \sigma \exp \frac{-\beta}{1-\sigma}$ и правая часть последнего уравнения в системе (2.3) не положительна.

Рассмотрим несколько сечений (2.10) плоскостями $r = const$, поскольку далее мы будем исследовать свойства решений (2.8) при фиксированных значениях r . Как видно на рис. 2.1 зависимость β от σ имеет единственный максимум, β_m , при фиксированном значении r . Обозначим значение остаточного количества топлива, соответствующее максимуму $\beta(\sigma)$, как σ_m , т.е. $\beta_m = \beta(\sigma_m)$. Это значение является решением уравнения $\partial\beta_e/\partial\sigma = 0$, кото-

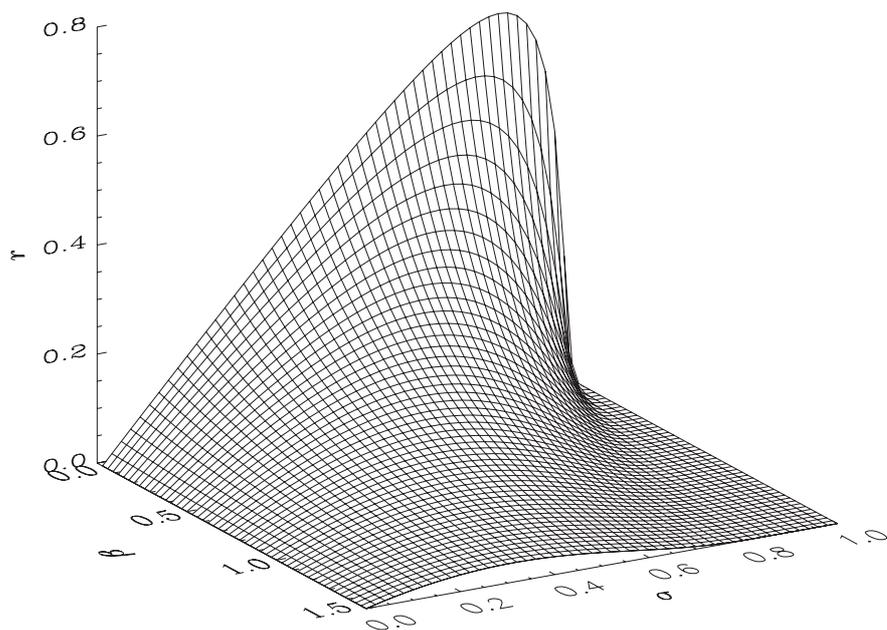


Рис. 2.1. Условие затухания (2.10), построенное как поверхность в пространстве параметров (r, β, σ) .

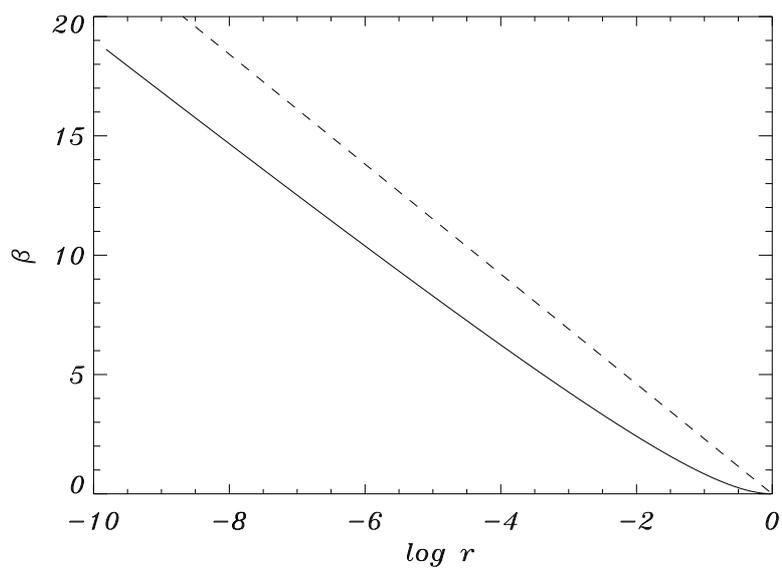


Рис. 2.2. Зависимость β_m от r .

рое может быть записано с помощью (2.10), как $(1 - \sigma_m)/\sigma_m - \ln \sigma_m/r = 0$. Решение данного уравнения позволяет найти зависимость β_m от r , которая построена на рис. 2.2. Интересно сравнить данную кривую с условием затухания, полученным в [168], которое может быть выражено в наших переменных как $\beta \sim -\ln r$. Эта зависимость показана на рис. 2.2 пунктирной кривой. В соответствии с [168] решение в виде бегущей волны существует для значений параметров, находящихся под пунктирной кривой. Следовательно, волны горения могут существовать для любых значений энергии активации при условии, что параметр рекомбинации, r , меньше, чем некоторое число порядка $O(e^{-\beta})$ (см. так же [30]).

2.4.2. Решение в виде бегущей волны

Решение краевой задачи (2.6, 2.7) ищется численно с помощью методов стрельбы и релаксации. Типичные профили температуры и топлива, $u(\xi)$ и $v(\xi)$, показаны на рис. 2.3 и 2.4 для $r = 10^{-3}$, $\beta = 1.0$ и $\beta = 4.0$, соответственно. На обоих рисунках температура шкалирована на энергию активации для того, чтобы области изменения построенных зависимостей были сравнимы. На рис. 2.3 безразмерная энергия активации, β , существенно меньше значения, $\beta \approx 4.26$, соответствующего затуханию при $r = 10^{-3}$. В этом случае концентрация радикалов, которая показана точечной кривой, может достигать значений порядка $O(1)$. Параметр σ становится пренебрежимо малым и утечка топлива не наблюдается на рисунке. Характерная длина, на которой концентрация топлива существенно изменяется, соответствует масштабу длины зоны реакции распада топлива. Эта область в несколько раз тоньше, чем ширина профиля концентрации радикалов. Структура пламени состоит из тонкой и быстрой зоны реакции разветвления и широкой и медленной зоны реакции рекомбинации. Следовательно, для значений параметров, находящихся в стороне от предела воспламенения структура волны горения соответствует медленному или промежуточному режиму рекомбинации.

По мере приближения к пределу затухания структура пламени меняется. На рис. 2.4 профили температуры, концентрации топлива и радикалов показаны для $\beta = 4.0$, что близко к $\beta \approx 4.26$, соответствующему

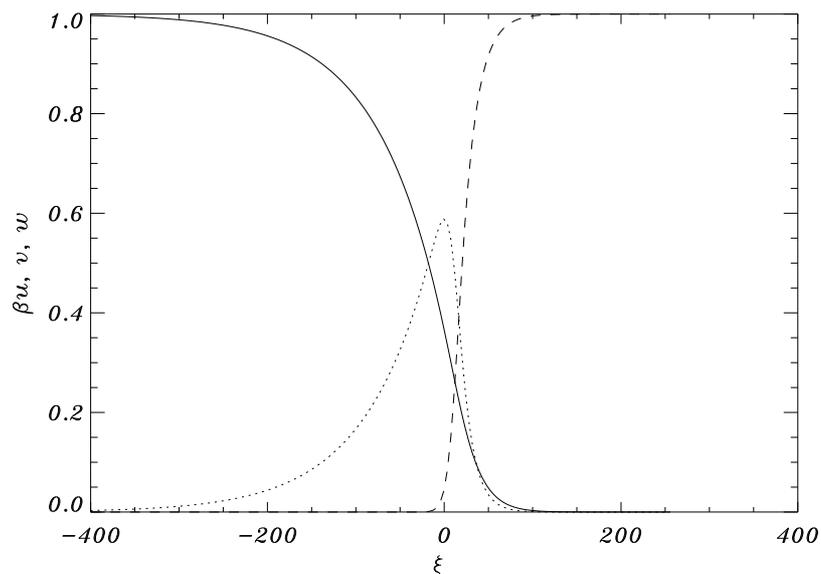


Рис. 2.3. Решение в виде бегущей волны, профили $\beta u(\xi)$, $v(\xi)$ и $w(\xi)$ для $\beta = 1.0$ и $r = 10^{-3}$. Сплошная линия показывает температуру, пунктирная линия соответствует концентрации топлива, а концентрация радикалов построена точечной кривой.

предельному значению для затухания волны горения при $r = 10^{-3}$. По сравнению со случаем, показанным на рис. 2.3, максимальное значение $w(\xi)$ падает почти на два порядка. В связи с этим концентрация радикалов умножена на 10 на рис. 2.4 для того, чтобы сделать профиль $w(\xi)$ сравнимым с изменением температуры и концентрации радикалов. Остаточное количество топлива, σ , становится существенным, указывая на то, что превращение топлива в продукты происходит не полным образом и появляется утечка топлива. Зона реакции распада топлива имеет ту же ширину, что и зона рекомбинации. Это означает, что по мере приближения к пределу воспламенения структура пламени соответствует режиму похожему на режим быстрой рекомбинации в модели Зельдовича-Линяна [165]. На рис. 2.4 $u(\xi)$ и $v(\xi)$ не достигают предельных значений на правой границе при $\xi = 400$. Это связано с тем, что в иллюстративных целях решение строится на конечном интервале (так чтобы рисунки 2.3 и 2.4 были сравнимы). В расчетах решения находятся на более широких интервалах так, чтобы граничные условия удовлетворялись с хорошей точностью.

Следует отметить, что характерное значение температуры активации для реакции разветвления в углеводородном или водородном пламени может быть оценена примерно как 8500 К. Типичные температуры горения

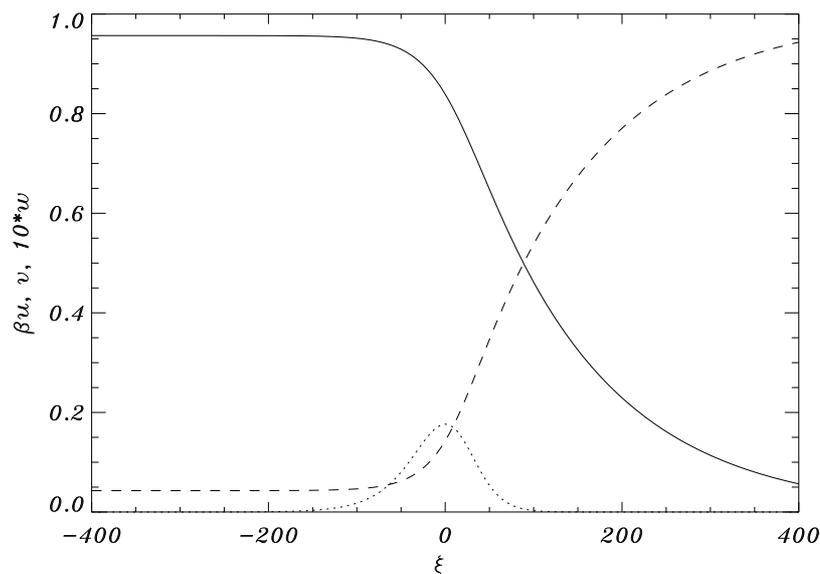


Рис. 2.4. Решение в виде бегущей волны, профили $\beta u(\xi)$, $v(\xi)$ и $w(\xi)$ для $\beta = 4.0$ и $r = 10^{-3}$. Сплошная линия показывает температуру, пунктирная линия соответствует концентрации топлива, а концентрация радикалов построена точечной кривой.

варьируются от 1500 до 2300 К. В соответствии с этими предположениями характерная величина безразмерной энергии активации варьируется от 3.7 до 5.7. Если брать в расчет оценки, сделанные в предыдущем пункте, характерные значения r могут быть оценены сверху как величины порядка $e^{-\beta}$, что составляет примерно 0.003 – 0.025 для $\beta \in [3.7, 5.7]$. Эти оценки подтверждают правильность выбора величин безразмерных параметров и согласуются с [169, 173].

Свойства решений в виде бегущей волны обобщены на рис. 2.5 и 2.6, где скорость пламени, s , и остаточное количество топлива, σ , показаны как функции β для нескольких значений r . На первый взгляд, зависимость s от β на рис. 2.5 напоминает поведение скорости фронта горения в модели с одноступенчатой реакцией, которая рассматривается в [66]. А именно, s имеет один максимум для некоторого значения β и монотонно убывает (возрастает) по мере увеличения (уменьшения) β от значения, соответствующего максимуму скорости. Однако, более детальное рассмотрение показывает, что есть существенное отличие между расчетами с одно- и двухступенчатыми моделями. В частности, в модели с одноступенчатой кинетикой скорость волны горения существует для любых значений β и экспоненциально уменьшается с ростом β . В модели с двухступенчатым цепным

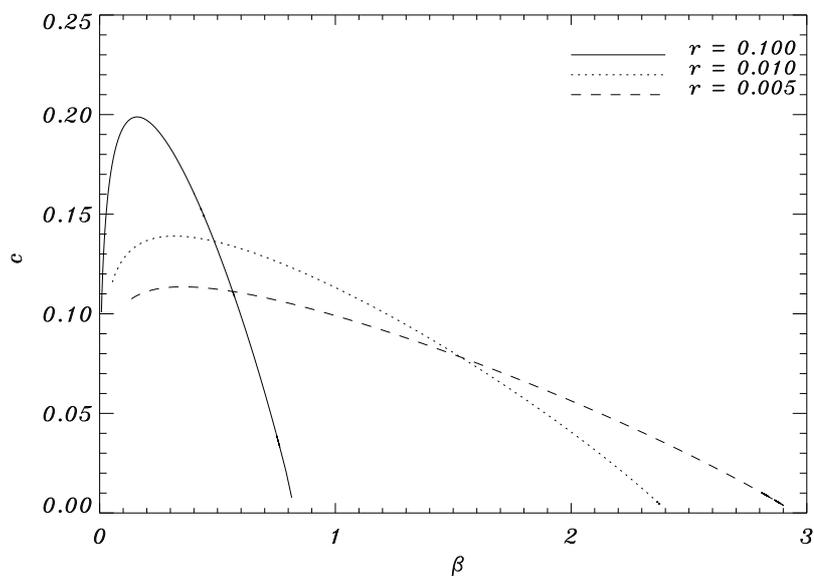


Рис. 2.5. Скорость волны горения как функция β для различных значений r .

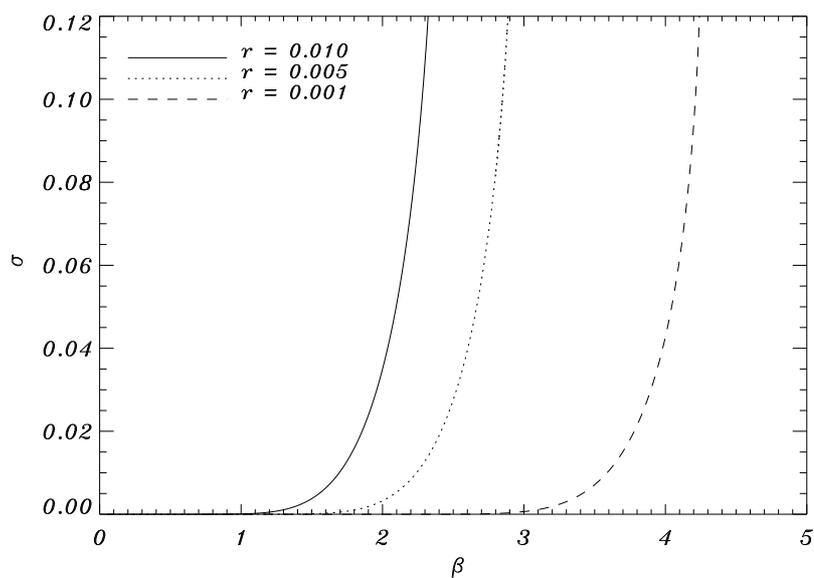


Рис. 2.6. Зависимость σ от β для различных значений r .

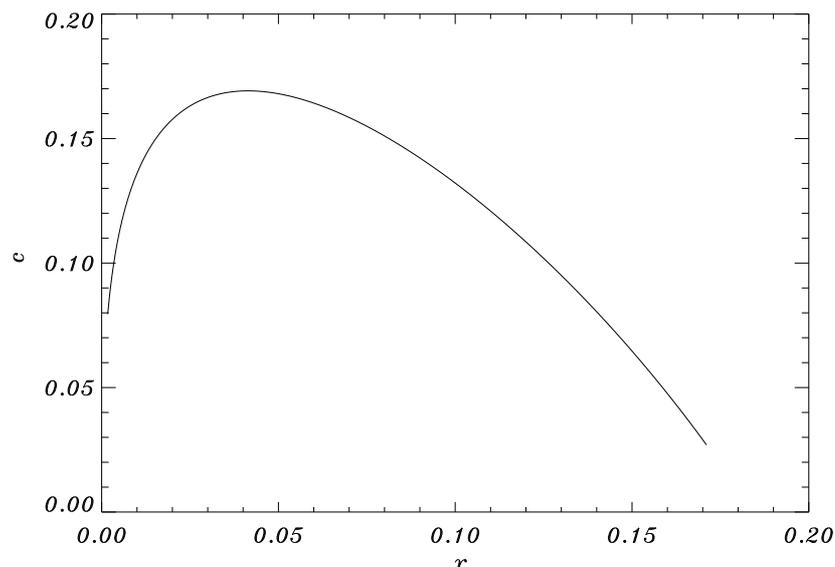


Рис. 2.7. Скорость волны горения как функция r для $\beta = 0.5$.

механизмом реакции, рассматриваемым здесь, увеличение β для фиксированного r до некоторого критического значения β_c приводит к быстрому уменьшению скорости и затуханию решения при $\beta > \beta_c$. Более того, есть некоторое остаточное количество топлива, не сгоревшего в ходе реакции в случае модели Зельдовича-Баренблатта, что принципиально не возможно в одноступенчатой адиабатической модели, для которой $\sigma = 0$. Свойства модели Зельдовича-Баренблатта до некоторой степени сходны со свойствами одноступенчатой неадиабатической модели [67]. Это отчасти может быть объяснено тем, что реакция рекомбинации, которая является ингибитором реакции разветвления, играет роль сходную с теплопотерей в окружающую среду в одноступенчатой модели. В обоих случаях существует не равное нулю остаточное количество топлива и решение испытывает затухание при приближении энергии активации к некоторому критическому значению, β_c . Вместе с тем, сценарий затухания в этих моделях разный. В случае одноступенчатой неадиабатической модели для заданных значений параметров существует либо два решения с различными скоростями, либо решений нет [32, 188]. Затухание происходит, когда две ветви решений совпадают, что так же называется бифуркацией складки. Для двухступенчатой модели, рассматриваемой в данной главе, затухание наступает, когда скорость волны горения достигает нуля при конечном значении энергии активации.

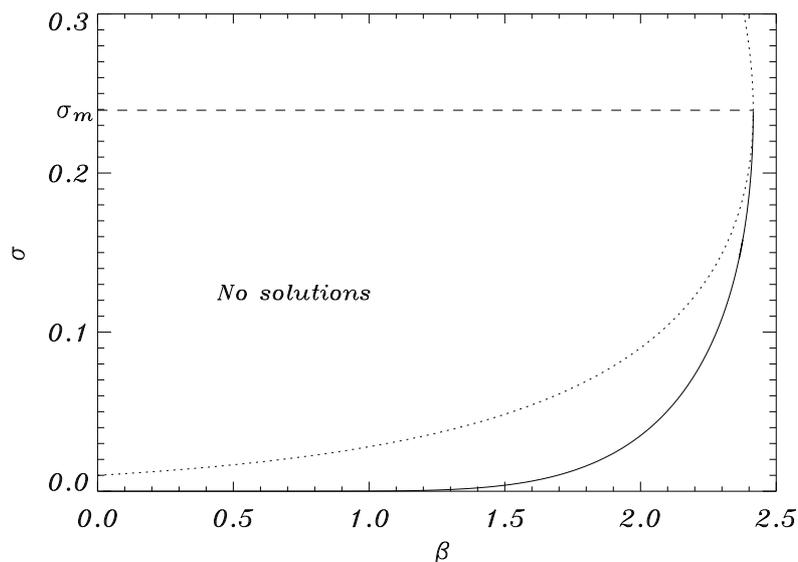


Рис. 2.8. Зависимость σ от β для бегущей волны горения при $r = 0.01$. Толстая сплошная линия показывает численное решение. Точечная кривая представляет кривую затухания или изолинию поверхности (2.10) для $r = 0.01$. Пунктирная линия указывает на значение σ_m , при котором кривая затухания достигает максимального значения β .

На рис. 2.7 построена зависимость скорости волны горения от параметра r при $\beta = 0.5$. Качественно поведение функции $c(r)$ описано в [1]. При $r \rightarrow 0$ реакция разветвления не идет, поэтому нет выделения тепла и скорость волны горения стремиться к нулю. При малых, но конечных значениях r реакция рекомбинации играет роль ускорителя реакции разветвления и скорость пламени начинает расти с увеличением параметра r . При больших значениях r реакция рекомбинации начинает работать ингибитором, уводя химически активные радикалы из зоны реакции, что приводит к уменьшению скорости.

2.4.3. Сценарий затухания

Очевидно, что сценарий затухания отличает модель Зельдовича-Баренблатта от одноступенчатых моделей горения. В данном пункте мы более детально исследуем это явление. В пункте 2.4.1 было указано, что затухание наступает, когда параметры достигают границы существования (2.10). Обширные данные, полученные численным анализом, показывают, что для фиксированного r бегущая волна горения испытывает затухание при стремлении σ и β к σ_m и β_m (значениям параметров, при которых

изолиния $\beta_e(\sigma)$ имеет локальный максимум) соответственно. Это проиллюстрировано на рис. 2.8, где сплошной линией построена зависимость σ от β для численного решения краевой задачи (2.6, 2.7) в виде бегущей волны при $r = 0.01$. Критические значения параметров для затухания также показаны на графике точечной кривой. Как видно на рисунке, бегущая волна горения перестает существовать при $\beta \rightarrow \beta_m \approx 2.4153239$ и $\sigma \rightarrow \sigma_m \approx 0.23947057$.

Далее мы исследуем поведение волны горения при значениях параметров близких к точке затухания. Сначала мы отметим, что с приближением к точке затухания вдоль ветви решений в виде бегущей волны $\beta \rightarrow \beta_m$, $\sigma \rightarrow \sigma_m$, $c \rightarrow 0$, $\sigma e^{-\beta/(1-\sigma)} \rightarrow r$. Имея это ввиду, мы предполагаем, что справедливо следующее разложение

$$\begin{aligned} c &= c_2 \Delta^2 + \dots, \\ \sigma &= \sigma_m + \Delta, \\ \beta &= \beta_m + \beta_2 \Delta^2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где Δ – это асимптотически малый параметр, показывающий отличие σ от значения, соответствующего затуханию. Далее мы разбиваем профили решений на несколько зон, исходя из физических процессов, доминирующих в них. В области впереди бегущей волны, которая обычно называется зоной прогрева, температура слишком мала для производства радикалов и реакции можно считать замороженными. Эта область характеризуется двумя процессами: диффузией и конвекцией. Для того, чтобы учесть характерный масштаб координаты она шкалирована как $\eta = \xi/\Delta^2$ в этой области. Температура и концентрации топлива раскладывается в асимптотический ряд по Δ как

$$\begin{aligned} u^+(\eta) &= u_0^+(\eta) + u_1^+(\eta)\Delta + u_2^+(\eta)\Delta^2 + \dots, \\ v^+(\eta) &= v_0^+(\eta) + v_1^+(\eta)\Delta + v_2^+(\eta)\Delta^2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где верхний индекс ‘+’ используется для обозначения решения в области прогрева, а нижний индекс показывает порядок асимптотического разложения. Соответственно, концентрация радикалов рассчитывается по формуле $w^+ = 1 - \beta u^+ - v^+$. Подставляя (2.12) в (2.8), учитывая шкалировку

координаты, в главном порядке разложения получаем уравнения

$$\begin{aligned} u_{0\eta\eta}^+ + c_2 u_{0\eta}^+ &= 0, \\ v_{0\eta\eta}^+ + c_2 v_{0\eta}^+ &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

и граничные условия

$$u_0^+ = 0, \quad v_0^+ = 1, \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Так же из разложения мы получаем, что w_i^+ равно нулю по крайней мере до порядка $i = 4$. Решение (2.13) с условием (2.14) может быть записано в явном виде как

$$u_0^+(\eta) = u_0^+(0)e^{-c_2\eta}, \quad v_0^+(\eta) = 1 - (1 - v_0^+(0))e^{-c_2\eta}, \quad (2.15)$$

где $u_0^+(0)$ и $v_0^+(0)$ должны быть найдены из условий сшивки с решением в зоне реакции и продуктов.

В зоне продуктов реакции полностью завершены и система находится в химическом равновесии. Следовательно, мы предполагаем, что концентрация радикалов равна нулю, $w^- = 0$. Здесь и далее верхний индекс ‘-’ означает, что рассматривается решение в зоне продуктов. Как и ранее, в данной области основными физическими процессами являются диффузия и конвекция. Координата шкалируется как $\eta = \xi/\Delta^2$ и решение ищется в виде

$$\begin{aligned} u^-(\eta) &= u_0^-(\eta) + u_1^-(\eta)\Delta + u_2^-(\eta)\Delta^2 + \dots, \\ v^-(\eta) &= v_0^-(\eta) + v_1^-(\eta)\Delta + v_2^-(\eta)\Delta^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

В главном порядке асимптотического разложения уравнения для температуры и топлива могут быть получены подстановкой η и разложения (2.16) в (2.8), что дает

$$\begin{aligned} u_{0\eta\eta}^- + c_2 u_{0\eta}^- &= 0, \\ v_{0\eta\eta}^- + c_2 v_{0\eta}^- &= 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

и граничные условия

$$u_0^- = (1 - \sigma)/\beta, \quad v_0^- = \sigma, \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow -\infty. \quad (2.18)$$

Решение (2.17) и (2.18) может быть найдено в явном виде как

$$u_0^-(\eta) = (1 - \sigma)/\beta, \quad v_0^-(\eta) = \sigma. \quad (2.19)$$

Во внутренней зоне основными процессами являются реакция и диффузия и, поэтому, она часто называется зоной реакции-диффузии. Ниже показано, что конвекция не существенна и может не учитываться в уравнениях (по крайней мере в первом порядке). Для того, чтобы учесть характерный масштаб длины во внутренней зоне, мы определяем внутреннюю координату $z \rightarrow \sqrt{\beta r} \xi / \Delta$. Температура и концентрация топлива записываются как $u = \beta^{-1}(1 + \sigma U)$ и $v = \sigma V$, где U и V это внутренние переменные. Используя U , V и подставляя $r = \sigma_m e^{-\beta_m/(1-\sigma_m)}$ уравнения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} U_{zz} - U - V &= 0, \\ V_{zz} + \frac{\sigma}{\sigma_m} V(U + V) \exp[\beta_m/(1 - \sigma_m) - \beta/(1 - \sigma U)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Решение системы (2.20) ищем в виде асимптотического ряда

$$\begin{aligned} U(z) &= -1 + \Delta U_1(z) + \Delta^2 U_2(z) + \dots, \\ V(z) &= 1 + \Delta V_1(z) + \Delta^2 V_2(z) + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

с Δ в качестве малого параметра. Сшивая решения в зоне прогрева (2.15) и продуктов (2.19), получаем в первом порядке $u^+(0) = u^-(0) = (1 - \sigma)/\beta$ и $v^+(0) = v^-(0) = \sigma$. Требование $w_i^\pm = 0$ при $i = 0, \dots, 3$ приводит к тому, что $U_i + V_i = 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$ и $i < 4$.

Дальше, мы раскладываем экспоненциальный множитель, зависящий от температуры, в ряд Тэйлора около $U = -1$:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\beta}{1 + \sigma U}\right) &= \exp\left(-\frac{\beta}{1 - \sigma}\right) \times \\ &\times \left(1 + \Lambda(U + 1) + \Lambda\left(\Lambda - 2\frac{\sigma}{1 - \sigma}\right) \frac{(U + 1)^2}{2} + \dots\right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где вводится обозначение $\Lambda = \sigma\beta/(1 - \sigma)^2$ и отброшены члены более высокие, чем квадратичные по $U + 1 \sim O(\Delta)$. Подставляя данное разложение в (2.20), получаем

$$\begin{aligned} U_{zz} - U - V &= 0, \\ V_{zz} + KV(U + V) \left(1 + \Lambda(V + 1) + \Lambda\left(\Lambda - 2\frac{\sigma}{1 - \sigma}\right) \frac{(U + 1)^2}{2}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $K = \sigma/\sigma_m \exp[\beta_m/(1 - \sigma_m) - \beta/(1 - \sigma)]$.

Далее, мы устанавливаем зависимость K и Λ от Δ . Дифференцируя (2.10) по σ при фиксированном r , можно показать, что $\sigma\beta_e(\sigma)/(1 - \sigma)^2 \rightarrow 1$ при $\sigma \rightarrow \sigma_m$. Следовательно, можно записать $\Lambda \approx 1 + \Lambda_1\Delta + O(\Delta^2)$, где $\Lambda_1 = \beta_m(1 + \sigma_m)/(1 - \sigma_m)^3$. С другой стороны, используя разложение для $\beta(\sigma)$ и Λ можно показать, что $K \approx 1 - K_2\Delta^2$, где $K_2 = (1 + \sigma_m + 2\beta_2\sigma_m^2)/(2\sigma_m^2(1 + \sigma_m)^4)$. Удобно переопределить малый параметр как $\delta = K_2^{1/2}\Delta$ вместо Δ . В этом случае запишем следующее асимптотическое разложение для параметров вблизи точки затухания

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_m + K_2^{-1/2}\delta, \\ \beta &= \beta_m + \beta_2K_2^{-1}\delta^2 + \dots, \\ c &= c_2\delta^2 + \dots, \\ K &= 1 - \delta^2 + \dots, \\ \Lambda &= 1 + \lambda_1\delta + \dots,\end{aligned}\tag{2.24}$$

где $\lambda_1 = \Lambda_1/K_2^{1/2}$. Подставляя (2.21) и (2.24) в (2.23), получаем в каждом порядке разложения по малому параметру δ следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned}O(\delta) : \quad & U_1 + V_1 = 0, \\ \\ O(\delta^2) : \quad & U_2 + V_2 = 0, \\ \\ O(\delta^3) : \quad & U_{1zz} = U_3 + V_3, \\ & V_{1zz} = -U_3 - V_3, \\ \\ O(\delta^4) : \quad & U_{2zz} + c_2U_{1z} = U_4 + V_4, \\ & V_{2zz} + c_2V_{1z} = -U_4 - V_4, \\ \\ O(\delta^5) : \quad & U_{3zz} + c_2U_{2z} = U_5 + V_5, \\ & V_{3zz} + c_2V_{2z} = -U_5 - V_5 - (U_3 + V_3)(1 + \lambda_1V_1 + \kappa V_1^2),\end{aligned}\tag{2.25}$$

где $O(\delta^i)$ обозначает уравнения, полученные в i -ом порядке асимптотического разложения и введен новый параметр $\kappa = (1 + \sigma_m)/2(1 - \sigma_m)$. Определим новую переменную $S = U + V$, которая равна $-\sigma W$, где W

– это концентрация радикалов во внутренней области. Тогда из первых двух уравнений (2.25) следует, что $S_{1,2} = 0$ т.е. во внутренней области концентрация радикалов имеет порядок малости $O(\delta^3)$. Второе уравнение в (2.25) перепишем как $U_2 = -V_2$. Подставим это выражение в первое уравнение системы уравнений пятого порядка в (2.25) и сложим первое и второе уравнение в системе пятого порядка, что вместе со вторым уравнением из системы второго порядка для V_2 дает замкнутую систему уравнений

$$\begin{aligned} V_{1zz} + S_3 &= 0, \\ S_{3zz} - S_3(1 + \lambda_1 V_1 + \kappa V_1^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Граничные условия для (2.26) ищутся из условий сшивки с решениями во внешних зонах (2.15), (2.19) и имеют вид

$$\begin{aligned} V_{1z} &= 0, & S_3 &= 0, & \text{при } z &\rightarrow -\infty, \\ \sigma_m \sqrt{\beta_m r} V_{1z} &= dv_0^+ / d\eta|_{\eta=0}, & S_3 &= 0, & \text{при } z &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Краевая задача (2.26–2.27) включает два параметра λ_1 и κ . Последний является заданной функцией параметра r , а первый – это собственное значение, которое необходимо найти совместно с неизвестными функциями $V_1(z)$ и $S_3(z)$. Как только найдено решение (2.26–2.27) для заданного r , параметры Λ_1 , K_2 и β_2 могут быть посчитаны исходя из соответствующих определений, приведенных выше. Скорость фронта, c_2 , получается из (2.15) и (2.27) как

$$c_2 = \frac{\sigma_m \sqrt{\beta_m r} P}{1 - \sigma_m}, \quad (2.28)$$

где введено обозначение $P = \lim_{z \rightarrow \infty} V_{1z}$. В начальных определениях безразмерных параметров модели мы имеем

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_m - \beta_2(\sigma - \sigma_m)^2, \\ c &= \sqrt{\beta_m r} \frac{\sigma_m}{1 - \sigma_m} P K_2 (\sigma - \sigma_m)^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для оценки $\beta(\sigma)$ и $c(\sigma)$ по формулам (2.29) мы решаем систему (2.26) численно для того, чтобы получить значения P , K_2 , и β_2 при заданном r . На рис. 2.9 и 2.10 построены зависимости c и β от $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_m$ для значений σ близких к значению, соответствующему затуханию, σ_m при $r = 0.1$.

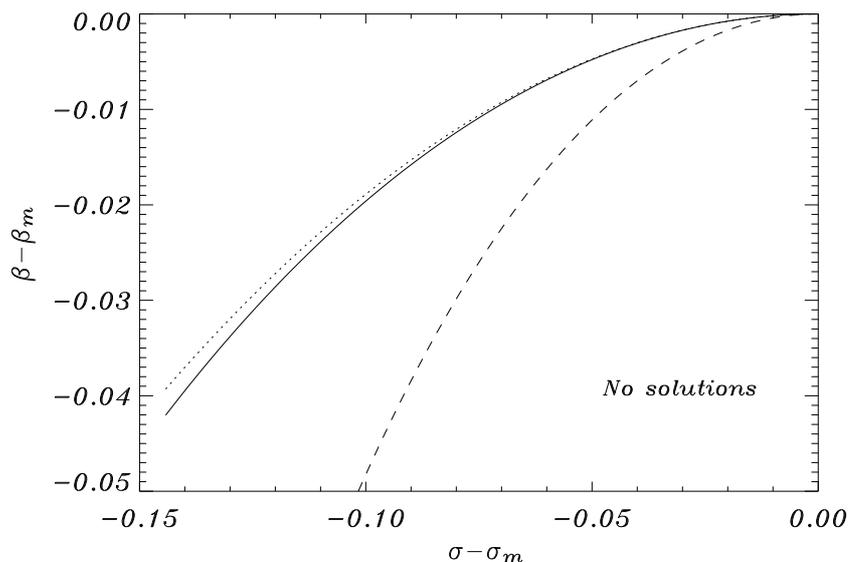


Рис. 2.9. Зависимость β от σ для $r = 0.1$. Сплошная линия построена на основе результатов численного интегрирования (2.8). Точечная кривая представляет данные асимптотических расчетов по формуле (2.29). Пунктирная линия показывает кривую затухания $\beta_e(\sigma)$ для $r = 0.1$.

На обоих рисунках сплошной линией показаны результаты, полученные численным решением (2.8), в то время как предсказание асимптотического анализа по формуле (2.29) показано точечной кривой. Как видно на рисунках, соответствие между численными и асимптотическими результатами очень хорошее при $\sigma \rightarrow \sigma_m$. По мере увеличения $|\Delta\sigma|$ до величины порядка 0.1, более высокие члены асимптотического разложения начинают играть существенную роль и появляется видимое на графиках различие между численными и асимптотическими результатами.

Мы так же сравниваем результаты, полученные с помощью обоих подходов, для разных значений r . На рис. 2.11 и 2.12 построены зависимости β_2 и c_2 от r , соответственно. Кресты, соединенные пунктирной линией, показывают результаты решения асимптотической задачи (2.26). Квадраты обозначают данные, полученные численным решением системы (2.8) и расчета предела производной $2d^2\beta/d\sigma^2$ при $\sigma \rightarrow \sigma_m$ для рис. 2.11 и производной $2d^2c/d\sigma^2$ при $\sigma \rightarrow \sigma_m$ для рис. 2.12. Как видно на графиках результаты численного и асимптотического анализа прекрасно согласуются при изменении r на несколько порядков. Для обоих случаев различие было найдено только в третьей значащей цифре.

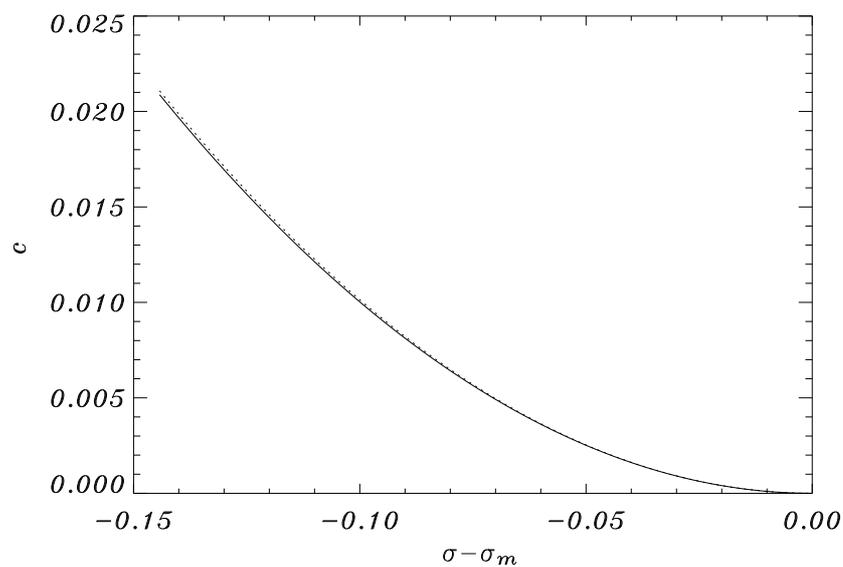


Рис. 2.10. Зависимость c от σ для $r = 0.1$. Сплошная линия построена на основе результатов численного интегрирования (2.8). Точечная кривая представляет данные асимптотических расчетов по формуле (2.29).

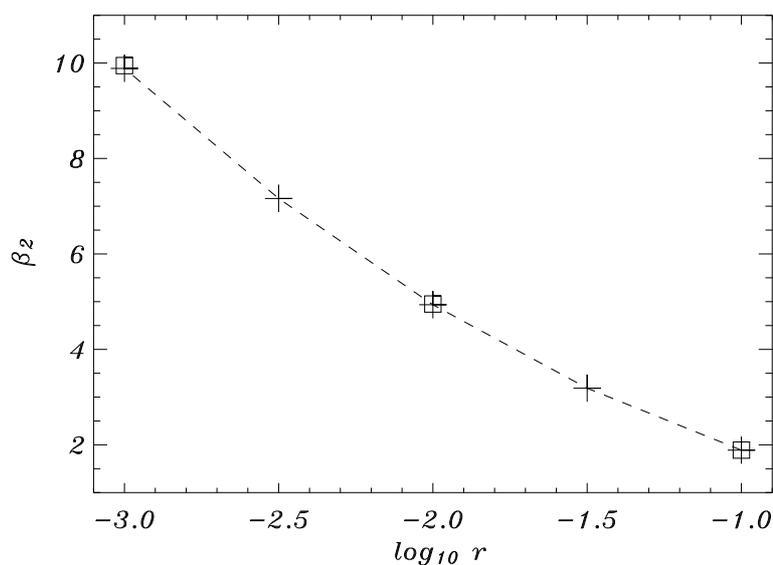


Рис. 2.11. Зависимость β_2 от r . Кресты, соединенные пунктирной линией, показывают результаты решения асимптотической задачи. Квадраты представляют оценку β_2 , сделанную на основе результатов численного интегрирования (2.8).

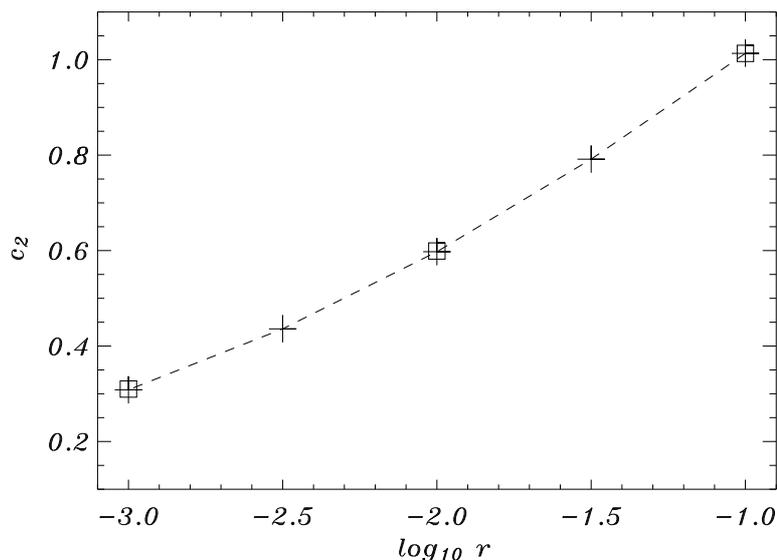


Рис. 2.12. Зависимость c_2 от r . Кресты, соединенные пунктирной линией, показывают результаты решения асимптотической задачи. Квадраты представляют оценку β_2 , сделанную на основе результатов численного интегрирования (2.8).

Резюмируя результаты данного пункта, где исследовалось поведение решения в виде бегущей волны вблизи предела воспламенения, следует отметить, что свойства решения сходны с режимом быстрой рекомбинации пламени в модели Зельдовича-Линяна в том, что концентрация радикалов асимптотически мала и реакции рекомбинации и разветвления протекают в одном и том же асимптотически тонком слое. Вместе с тем, есть и существенное отличие. В модели Зельдовича-Линяна режим быстрой рекомбинации наступает, когда скорость реакции рекомбинации превосходит скорость реакции разветвления. Производство радикалов пропорционально w^2 , а их потребление пропорционально w . Влияние быстрой рекомбинации сбалансировано за счет уменьшения концентрации радикалов, w , которое имеет большее влияние на рекомбинацию радикалов, чем на разветвление цепи. В результате концентрация радикалов становится асимптотически малой, кинетика контролируется распадом топлива и обе реакции разветвления и рекомбинации протекают в одной области – зоне разветвления цепи.

В модели Зельдовича-Баренблатта, скорость реакции разветвления убывает с увеличением β и при каком-то значении энергии активации становится сравнимой со скоростью реакции рекомбинации. Изменение кон-

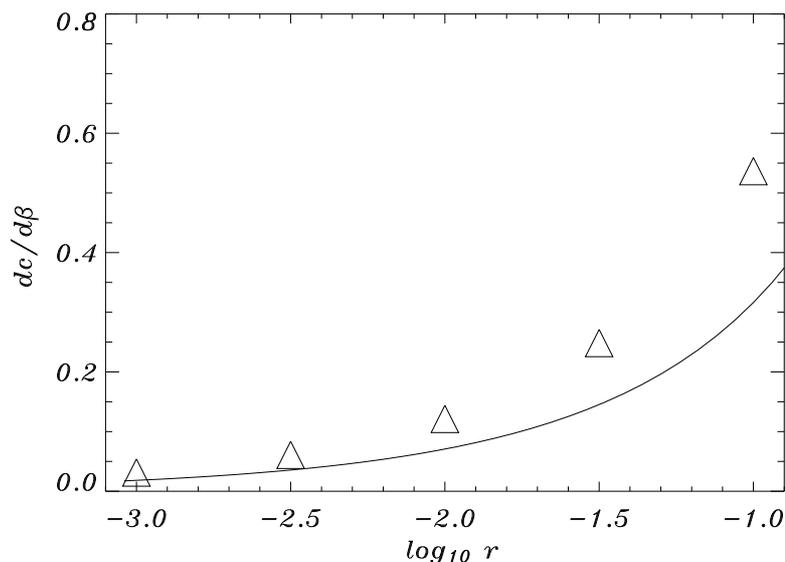


Рис. 2.13. Зависимость $dc/d\beta$ от r . Треугольники показывают результаты, полученные по асимптотической формуле (2.29). Сплошная линия представляет оценку сделанную на основе работы [168].

центрации радикалов влияет на скорости обеих реакций одинаково и ее убывание не может изменить баланс скоростей протекания реакций. В следствие этого при дальнейшем увеличении β рекомбинация радикалов начинает доминировать над их производством в ходе шага разветвления, радикалы не могут производиться и пламя затухает.

Было установлено, что затухание волны горения наступает, когда β и σ достигают критических значений β_m и σ_m , соответствующих максимуму функции $\beta_e(\sigma)$, являющейся изолинией (2.10) при постоянном r . Анализ поведения решений около критических условий β_m и σ_m показал, что ветвь решений в виде бегущей волны следует квадратичной зависимости β от σ . То же имеет место для зависимости скорости волны от σ (см. (2.29)). Зависимость скорости от энергии активации является линейной функцией вблизи β_m . Следует отметить, что из работы [168] можно получить похожую оценку для скорости, несмотря на то, что в [168] энергия активации асимптотически велика и утечка топлива не учитывается. В безразмерных параметрах принятых в данной работе, результат [168] можно записать как $c \approx \sqrt{r/\ln(1/r)}(\beta_m - \beta)$. На рис. 2.13 показана производная скорости c по β при $\beta = \beta_m$, полученная с помощью этой формулы (сплошная кривая) и рассчитанная по асимптотической формуле (2.29) (треугольники). Как

следует из рисунка результаты хорошо качественно согласуются.

2.4.4. Устойчивость бегущих волн горения и их затухание за пределом воспламеняемости

Мы исследуем устойчивость бегущих волн горения численно с помощью двух методов: прямого интегрирования модельных уравнений в частных производных и методом функции Эванса. Перепишем (2.3) для случая равных коэффициентов диффузии топлива, радикалов и температуропроводности ($L_A = L_B = 1$) и интеграла $S = \beta u + v + w = 1$, который используется для понижения порядка системы, в виде

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + r(1 - \beta u - v), \\ v_t &= v_{xx} - \beta v(1 - \beta u - v)e^{-1/u}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

граничные условия выпишем как

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= 1 & \text{при } x &\rightarrow \infty, \\ u_x &= 0, & v_x &= 0 & \text{при } x &\rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для того, чтобы исследовать линейную устойчивость решения в виде бегущей волны $u(\xi)$, $v(\xi)$ методом функции Эванса, линеаризуем уравнения (2.30) около этого решения, т.е. ищем решение вида $u(x, t) = u(\xi) + \varepsilon\varphi(\xi, t)e^{\lambda t}$ и $v(x, t) = v(\xi) + \varepsilon\chi(\xi)e^{\lambda t}$. Здесь $\varphi(\xi)$ и $\chi(\xi)$ - это линейное возмущение, ε - это асимптотически малый параметр, а λ , которое является комплексным числом, будем называть спектральным параметром. Подставляя решение в этом виде в (2.30) и оставляя члены линейные по ε , получаем

$$\hat{L} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

где

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \partial_\xi^2 + c\partial_\xi - r\beta & -r \\ \frac{\beta v}{u^2}(\beta u^2 + \beta u + v - 1)e^{-1/u} & \partial_\xi^2 + c\partial_\xi + \beta(2v + \beta u - 1)e^{-1/u} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Устойчивость бегущей волны определяется спектром \hat{L} . Следуя [189], можно показать, что непрерывный спектр этого дифференциального оператора лежит в левой полуплоскости. Рассмотрим предельные операторы

$\hat{L}^\pm = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \hat{L}$. несложно показать, что непрерывный спектр \hat{L}^\pm состоит из алгебраических кривых

$$\begin{aligned}\lambda_1(k) &= -k^2 + ick, & \lambda_2(k) &= -k^2 - \beta(r - \sigma e^{-\beta/(1-\sigma)}) + ick, \\ \lambda_3(k) &= -k^2 - \beta r + ick,\end{aligned}\tag{2.34}$$

где $k \in (-\infty, +\infty)$, которые находятся в левой полуплоскости и симметричны относительно действительной оси. Первая кривая в (2.34) так же включает ноль. Предположим, что K это объединение областей внутри этих кривых так, что $\mathbf{C} \setminus K$ содержит правую полуплоскость. Следуя [189], можно утверждать, что непрерывный спектр оператора \hat{L} принадлежит K и, в частности, содержит (2.34). Следовательно, только дискретный спектр \hat{L} ответственен за устойчивость бегущей волны. Напомним, что решение в виде бегущей волны считается линейно неустойчивым, если при некотором λ (собственном значении) с $Re(\lambda) > 0$, существует решение (собственная мода) (2.32) экспоненциально затухающее при $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Мы находим дискретный спектр \hat{L} с помощью метода функции Эванса, которая является аналитической в $\mathbf{C} \setminus K$. Это позволяет воспользоваться принципом аргумента и его следствием, методом Найквиста [190] и посчитать число N нулей функции Эванса в правой полуплоскости [66]. Мы посчитали N вдоль ветви решений в виде бегущей волны системы (2.30) при различных значениях $r = 0.1, 0.01$ и 0.001 . Параметр β варьировался в интервале от значений меньших 0.01 до β_m для каждого значения r . Для всех случаев было установлено, что $N = 0$, что означает устойчивость бегущей волны горения. Это согласуется с выводами [168], полученными в приближении высокой энергии активации, а так же с анализом устойчивости в одноступенчатых моделях [1, 47].

Устойчивость бегущей волны горения так же исследуется прямым интегрированием уравнений в частных производных (2.30) с помощью адаптивного по времени и координате конечно-элементного пакета [191]. Начальные условия берутся в форме, согласующейся с граничными условиями (2.31),

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= (2\beta)^{-1}(1 - \sigma)(1 - \tanh[l(x - x_0)]), \\ v(x, 0) &= (1 + \sigma + (1 - \sigma) \tanh[l(x - x_0)])/2,\end{aligned}\tag{2.35}$$

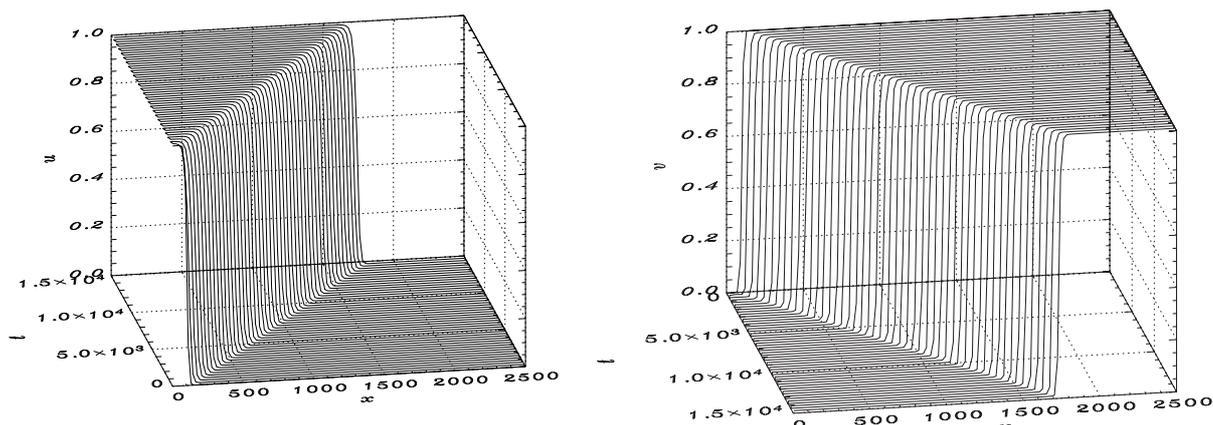


Рис. 2.14. Профили температуры, $u(x, t)$, (левый график) и концентрации топлива, $v(x, t)$, (правый график), полученные численным интегрированием (2.30) при $\beta = 1$ и $r = 0.01$.

где l и x_0 подгоночные параметры, определяющие ширину фронта и его положение, соответственно. На рис. 2.14 приведены характерные распределения температуры и топлива $u(x, t)$ and $v(x, t)$, полученные численным решением системы (2.8). Начальные профили быстро сходятся к решению в виде бегущей волны, распространяющемуся с постоянной скоростью. Следует отметить, что для наглядности временная ось инвертирована на правом графике для концентрации топлива.

Так же были найдены решения (2.30) для различных значений β и $r = 0.01$. На рис. 2.15 построена зависимость скорости решения в виде бегущей волны как функция β . Численные результаты, полученные прямым интегрированием системы (2.8) и (2.30) показаны сплошной линией и квадратами, соответственно. Как видно на рисунке оба подхода дают прекрасно согласующиеся результаты, которые отличаются только в четвертой значащей цифре. Для всей выборки параметров решения в виде бегущей волны оказались устойчивыми.

Представляет интерес исследование поведения решений модельных уравнений (2.30) для значений β , превышающих порог воспламенения β_m . С этой целью мы интегрируем (2.30) при $r = 0.01$ и $\beta = 2.5 > \beta_m$. Было установлено, что решения затухают к равновесному состоянию $u(x, t) = 0$ and $v(x, t) = 1$, как это показано на рис. 2.16. Это согласуется с результатами численного счета в [30]. Максимальная температура $u(0, t)$ быстро падает к нулю, с остыванием смеси реакция разветвления останавливается и нелинейные реакционные члены в (2.30) затухают. Это отчетливо видно

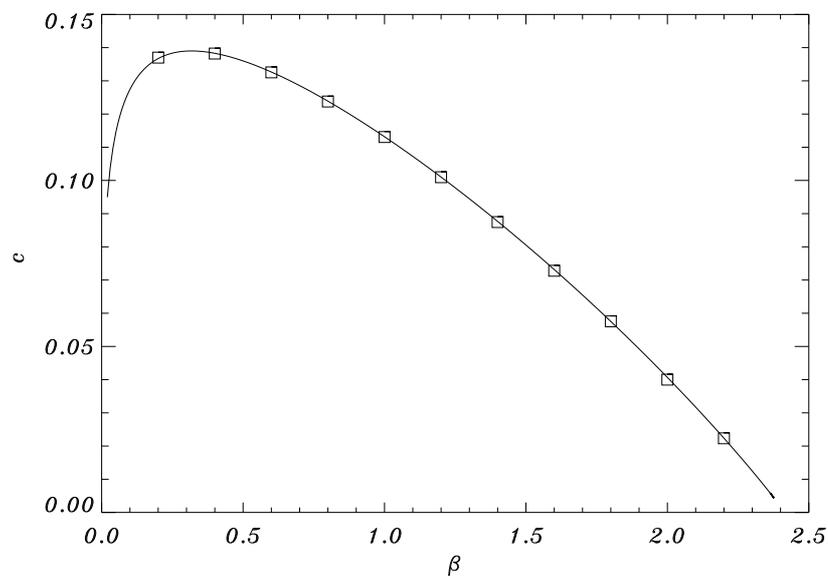


Рис. 2.15. Скорость решения в виде бегущей волны как функция β при $r = 0.01$. Сплошная линия представляет собой результаты численного интегрирования (2.8), а квадраты соответствуют результатам, полученным численным интегрированием модельных уравнений (2.30).

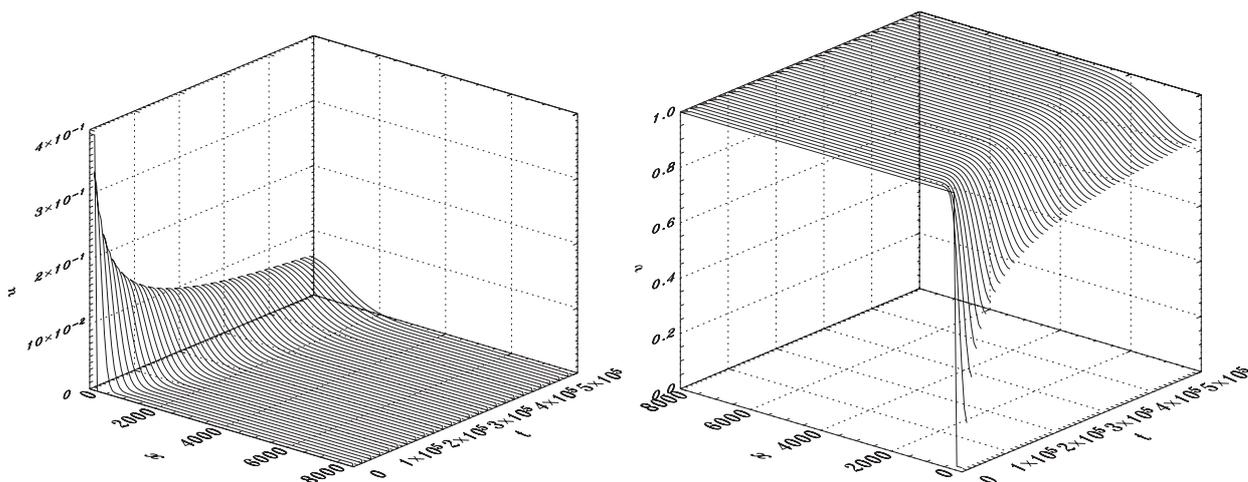


Рис. 2.16. Профили температуры, $u(x,t)$, (левый график) и концентрации топлива, $v(x,t)$, (правый график), полученные численным интегрированием (2.30) при $\beta = 2.5$ и $r = 0.01$.

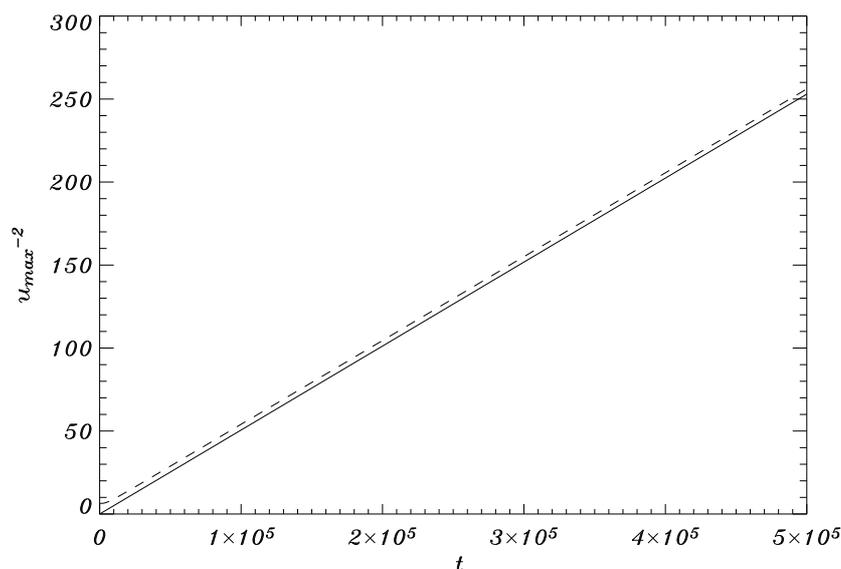


Рис. 2.17. Затухание максимальной температуры, $u(0, t)$, решения (2.30) со временем при $\beta = 2.5$ и $r = 0.01$. Пунктирная линия представляет численные результаты, а сплошная линия показывает аналитическую оценку скорости затухания.

на рис. 2.17, где показана зависимость квадрата обратной максимальной температуры от времени. Численные результаты, полученные интегрированием модельных уравнений (2.30) (пунктирная линия), сравниваются с аналитической оценкой (сплошная линия), которая получена при рассмотрении уравнений (2.30) без членов, ответственных за реакции разветвления и рекомбинации, т.е. с учетом только диффузии. В таком случае можно показать, что в пределе $t \rightarrow \infty$ асимптотическое поведение максимума температуры удовлетворяет $u(0, t)^{-2} = \pi\beta^2 t / x_0^2 (1 - \sigma)^2$ (коэффициент пропорциональности зависит от начальных условий), что показано на рис. 2.17 сплошной линией. Численные результаты сдвинуты относительно асимптотической оценки, в особенности вблизи начальной точки $t = 0$. Однако по мере того, как t становится больше, численные результаты следуют закону диффузионного расплывания, полученного из линейных уравнений диффузии.

§ 2.5. Бегущие волны горения в случае произвольных чисел Льюиса

В предыдущем параграфе мы исследовали свойства волн горения в случае равных коэффициентов диффузии топлива, радикалов и температуропроводности. Было установлено, что скорость волны горения является однозначной функцией параметров. При конечной энергии активации существует остаточное количество топлива, не израсходованного в ходе реакции, и при некотором конечном β волна горения затухает, что сопровождается обращением скорости пламени в ноль по линейному закону.

Приближение единичных чисел Льюиса существенно упрощает анализ системы. Однако подобный выбор параметров сильно снижает применимость результатов к реальным пламенам с цепным механизмом реакции, которые могут характеризоваться различными значениями чисел Льюиса как для радикалов, L_B , так и для топлива, L_A . Влияние чисел Льюиса особенно важно для анализа устойчивости, поскольку исходя из одноступенчатых моделей можно ожидать, что она существенно зависит от $L_{A,B}$. Цель данного параграфа состоит в исследовании влияния чисел Льюиса на свойства волн горения.

Вернемся к рассмотрению краевой задачи (2.6, 2.7) для решения в виде бегущей волны. Анализ начнем с адиабатического случая с нулевой температурой окружающей среды, т.е. в (2.7) положим $h = 0$ и $u_a = 0$. Система уравнений решается численно с помощью методов стрельбы и релаксации.

2.5.1. Число Льюиса для топлива меньше единицы, $L_A < 1$

На рис. 2.18 мы обобщили результаты расчетов свойств решений (2.6) в виде бегущей волны при малых значениях числа Льюиса для топлива ($L_A = 0.1$) и $r = 10^{-3}$. На рис. 2.18 (а) показана скорость пламени как функция безразмерной энергии активации. Для параметра L_B варьируемого от 0.1 до 10 скорость волны $s(\beta)$ является монотонно убывающей функцией, обращающейся в ноль при $\beta = \beta_e$ порядка 3.2, что соответствует затуханию волны горения. Скорость стремится к нулю по квадратичному

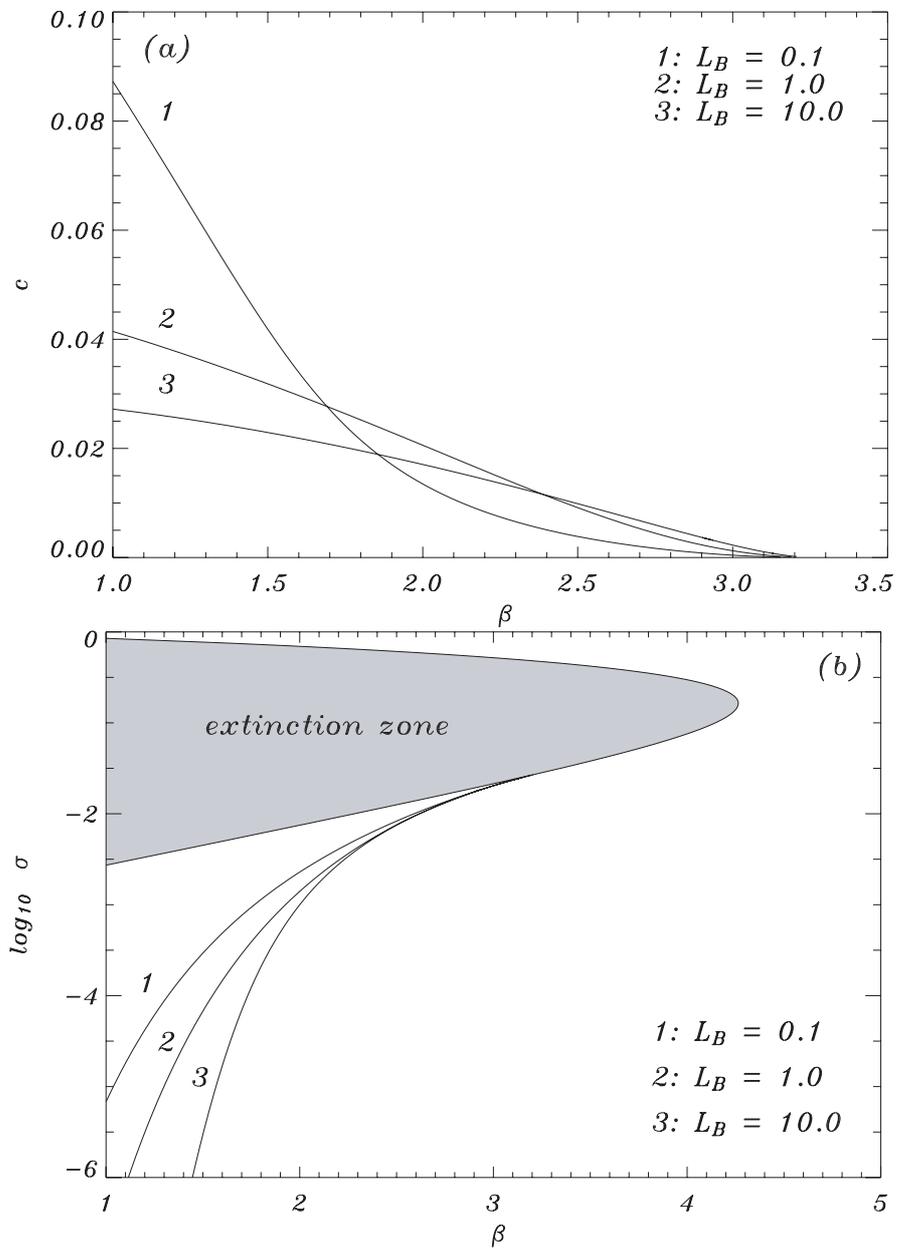


Рис. 2.18. Зависимость (а) скорости пламени и (б) остаточного количества топлива от энергии активации, β , при $L_A = 0.1$ и различных значениях числа Льюиса для радикалов, L_B .

закону, т.е. $c \sim (\beta - \beta_e)^2$ при приближении энергии активации к критическому значению для затухания, β_e . Кривые, построенные для различных $L_B = 0.1, 1.0$ и 10 , качественно ведут себя схожим образом, хотя количественно скорость и меняется с варьированием L_B . Интересно отметить, что положение точки затухания в пространстве параметров практически не зависит от числа Льюиса для радикалов. На рис. **2.18** (б) построено остаточное количество топлива σ (в логарифмическом масштабе) как функция β . Зависимость σ от β так же является однозначной функцией. Заштрихованная область показывает значения параметров, где условие существования решения (2.10) нарушается и бегущие волны не существуют. Для значений параметров, достаточно удаленных от условия затухания, утечка топлива, σ , пренебрежимо мала и почти все топливо превращается в радикалы. С увеличением β и приближением к точке затухания, σ становится существенным. В точке затухания остаточное количество топлива достигает максимального значения, лежащего на границе заштрихованной области, т.е. удовлетворяет уравнению (2.10). Вне зависимости от L_B функции $c(\beta)$ и $\sigma(\beta)$ показывают качественно идентичное поведение при $L_A < 1$. Более того, кривые $\sigma(\beta)$ всегда лежат ниже заштрихованной области, а критическое значение энергии активации для затухания, меньше максимального значения β_m , которое соответствует наибольшему значению β для заштрихованной области. С увеличением L_A критическое значение энергии активации для затухания, β_e , сдвигается ближе к максимальному значению β_m и совпадает с ним при $L_A = 1$.

2.5.2. Число Льюиса для топлива равно единице, $L_A = 1$

В случае числа Льюиса для топлива, равного единице, $L_A = 1$, структура ветви решений в виде бегущей волны в пространстве параметров меняется. На рис. **2.19** (а) построена зависимость скорости пламени, c , от β при $L_B = 0.1, 1.0$, и 10 . Параметр рекомбинации r не меняется и равен 10^{-3} . Несмотря на то, что $c(\beta)$ по-прежнему является монотонной функцией, стремящейся к нулю при приближении β к критическому значению $\beta_e = 4.2\dots$, соответствующему затуханию, характер этой зависимости вблизи точки затухания отличается от случая $L_A < 1$. А именно, скорость

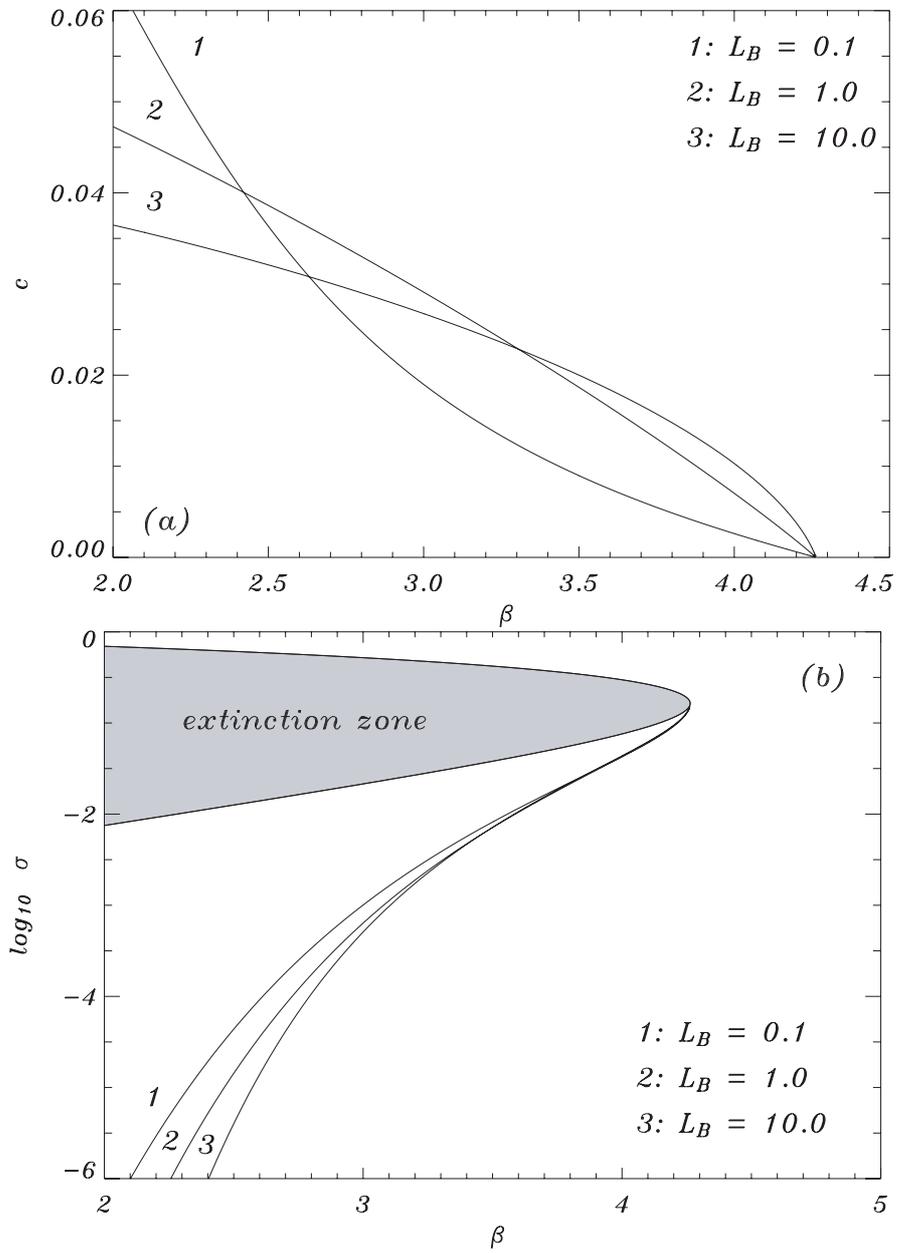


Рис. 2.19. Зависимость (а) скорости пламени и (б) остаточного количества топлива от энергии активации, β , при $L_A = 1.0$ и различных значениях числа Льюиса для радикалов, L_B .

уменьшается к нулю линейным образом: s пропорционально $(\beta - \beta_e)$ при значениях β , близких к β_e , что отличается от квадратичной зависимости для $L_A < 1$. Данный результат согласуется с выводами, полученными в пункте 2.4.3. Зависимость $s(\beta)$ качественно не меняется для числа Льюиса для радикалов, варьирующегося на два порядка от 0.1 до 10. Затухание наступает, когда энергия активации приближается к β_m , соответствующему максимальному значению β для заштрихованной области затухания. Условие затухания не зависит от L_B . Зависимость σ от β построена на рис. 2.19 (б) при $L_B = 0.1, 1.0$ и 10 . Остаточное количество топлива является монотонной функцией β . Кривая $\sigma(\beta)$ лежит ниже заштрихованной области при всех $\beta < \beta_m$. Для энергий активации существенно меньших, чем β_m значение σ пренебрежимо мало, утечки топлива из зоны реакции нет и оно полностью превращается в радикалы в ходе реакции разветвления. По мере приближения к точке затухания, когда $\beta \approx \beta_m$, остаточное количество топлива становится существенным и появляется утечка топлива. В точке затухания, когда $\beta = \beta_m$, кривая $\sigma(\beta)$ становится касательной к границе области затухания, что предвещает более кардинальное изменение поведения ветви решений при $L_A > 1$.

2.5.3. Число Льюиса для топлива больше единицы, $L_A > 1$

Результаты численных расчетов для случая $L_A > 1$ представлены в данном пункте. На рис. 2.20 (а) показана зависимость скорости волны горения, s , от β при $L_A = 10$, $r = 10^{-3}$ и различных значений L_B . Зависимость остаточного количества топлива от β представлена на рис. 2.20 (б) для тех же значений параметров. Как видно из графиков, как $s(\beta)$, так и $\log_{10} \sigma(\beta)$ становятся S-образными двухзначными функциями энергии активации в случае $L_A > 1$. Для заданных значений параметров существует либо два решения, распространяющихся с разными скоростями, либо решений в виде бегущей волны не существует. Для малых значений энергии активации быстрая ветвь характеризуется пренебрежимо малой утечкой топлива, σ . С ростом энергии активации, остаточное количество топлива увеличивается и становится существенным при достижении точки поворота $s(\beta)$ и $\sigma(\beta)$. Очевидно, что для обеих ветвей точка поворота или

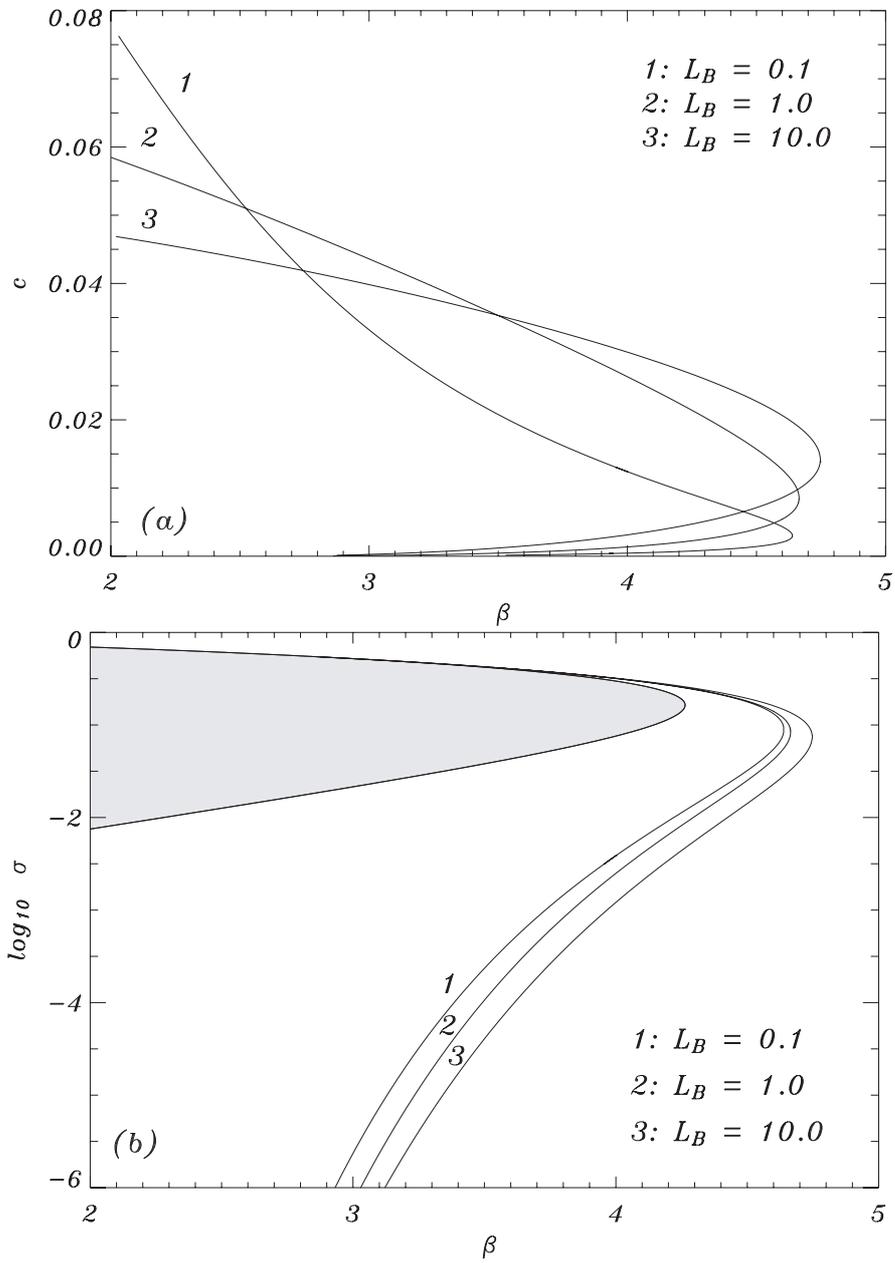


Рис. 2.20. Зависимость (а) скорости пламени и (б) остаточного количества топлива от энергии активации, β , при $L_A = 10$ и различных значениях числа Льюиса для радикалов, L_B .

бифуркация складки возникает одновременно. Важно отметить, что в случае $L_A > 1$ условие затухания пламени достигается для значений энергии активации больших, чем β_m – максимального значения для заштрихованной области. Медленная (нижняя) ветвь всегда имеет значительную утечку топлива так, что кривая $\sigma(\beta)$ лежит над заштрихованной областью для всех возможных значений β . Если мы следуем по медленной ветви решений, снижая β от значения, соответствующего точке поворота для функции $c(\beta)$, то скорость волны горения убывает и при некотором критическом значении β_e обращается в ноль. Зависимость $c(\beta)$ носит квадратичный характер, т.е. $c \sim (\beta - \beta_e)^2$ при приближении энергии активации к значению, соответствующему затуханию β_e . В то же время на рис. 2.20 (б) кривая $\sigma(\beta)$ стремится к границе заштрихованной области и совпадает с ней при $\beta \rightarrow \beta_e$. С уменьшением L_A критическое значение энергии активации для затухания, β_e , сдвигается ближе к максимальному значению β_m и совпадает с ним при $L_A = 1$. Изменение L_B не влияет на качественное поведение зависимости скорости бегущей волны горения и количества не сгоревшего топлива от энергии активации.

Суммируя результаты данного параграфа, отметим, что было показано, что число Льюиса для топлива имеет существенное влияние на свойства волн горения, в то время, как вариация числа Льюиса для радикалов сказывается только количественно (но не качественно) на поведении автоволнового решения. Установлено, что для чисел Льюиса для топлива меньше единицы скорость распространения пламени является монотонно убывающей функцией безразмерной энергии активации. Волна горения существует вплоть до значений параметров, соответствующих затуханию автоволнового решения. Эффект затухания наблюдается при конечных значениях энергии активации. Приближение к границе затухания в пространстве параметров модели сопровождается падением скорости распространения волны до нуля. За границей затухания волновых решений не было найдено.

Случай чисел Льюиса равных единице допускает аналитическое исследование с помощью асимптотических методов и рассматривается отдельно. Особое внимание уделяется изучению явления затухания автоволнового решения. Установлены закономерности изменения параметров си-

системы при приближении к критическим значениям, соответствующим границе затухания в пространстве параметров.

Для чисел Льюиса для топлива больших единицы скорость автоволнового решения является двухзначной функцией энергии активации и носит характер s -образной кривой. Для фиксированных значений параметров одновременно либо существует два решения, быстрое и медленное, либо решений не существует. Затухание волны горения происходит при конечном значении энергии активации и скорости волны не равной нулю в результате бифуркации складки при значениях параметров, когда быстрая ветвь решений встречается с медленной.

§ 2.6. Влияние тепловых потерь и внешней температуры на скорость пламени

В данном параграфе будет оценено влияние двух важных экспериментально контролируемых факторов, внешней температуры и тепловых потерь, на структуру и скорость бегущей волны горения. Сначала рассмотрим адиабатический случай с не равной нулю температурой окружающей среды. В краевой задаче (2.6, 2.7) положим $u_a > 0$ и $h = 0$. Из условия на правой границе (2.7) следует, что адиабатическая температура пламени $u_b \equiv \lim_{\xi \rightarrow -\infty} u(\xi) = u_a + \beta^{-1}(1 - \sigma)$ линейным образом зависит от температуры окружающей среды. Следовательно увеличение u_a должно интенсифицировать реакцию разветвления и сдвигать баланс скоростей реакций разветвления и рекомбинации в сторону первой.

Условия существования решения системы (2.6) не меняются. Впереди фронта горения температура свежей смеси не должна превышать u_i , как это обсуждалось выше. В зоне продуктов, реакция должна завершиться и в последнем уравнении (2.6) член, ответственный за реакцию разветвления, должен превышать член, ответственный за рекомбинацию, или $r > \sigma \exp(-1/u_b)$.

Зависимость скорости бегущей волны горения, s , от безразмерной энергии активации, β , построена на рис. 2.21 для двух значений числа Льюиса для топлива $L_A = 1$ и $L_A = 10$. Значение числа Льюиса для ра-

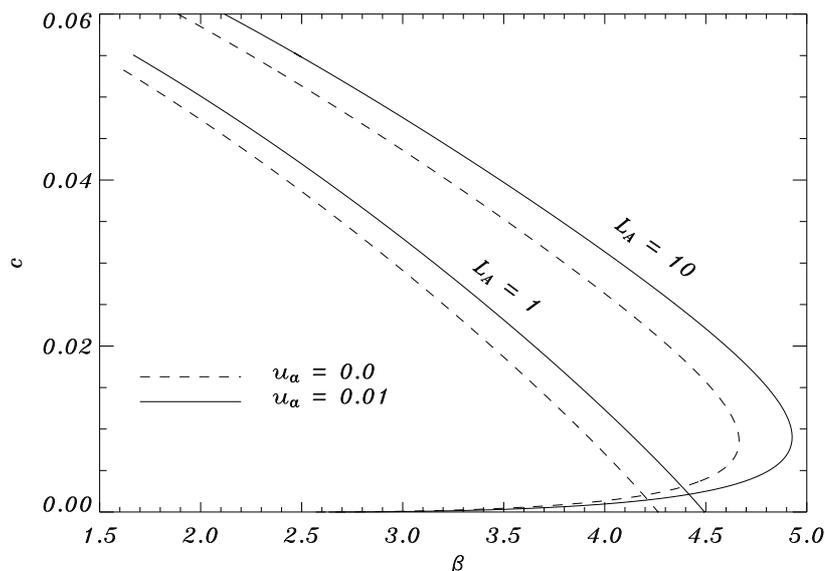


Рис. 2.21. Зависимость скорости пламени, c , от энергии активации, β , при $L_A = 1$ и $L_A = 10$. Пунктирная линия представляет собой решение с $u_a = 0$, в то время как сплошная линия соответствует случаю $u_a = 0.01$.

дикалов фиксировано $L_B = 1$, а параметр r взят равным 10^{-3} . В случае $L_A = 1$ зависимость c от β является монотонно убывающей функцией. Для L_A превышающих единицу, скорость пламени c становится двухзначной функцией β . Влияние температуры окружающей среды так же рассмотрено. На рис. 2.21 пунктирная линия представляет решения, полученные при $u_a = 0$, а сплошная линия показывает $c(\beta)$ при $u_a = 0.01$. Как и в случае с одноступенчатой кинетикой, рассмотренном в [74], подогрев свежей смеси до более высоких начальных температур увеличивает область существования решения в виде бегущей волны и скорость пламени. С одной стороны, рост температуры окружающей среды ускоряет реакции и приводит к более быстрому распространению пламени, что согласуется с выводами анализа для одноступенчатой модели [74]. С другой стороны, это приводит к росту производства радикалов в зоне реакции разветвления и эффективно модифицирует режим горения в сторону медленной рекомбинации, что сдвигает границу затухания в сторону больших энергий активации (см. рис. 2.5). В то же время, как видно из рисунка, изменение u_a не влияет на качественный характер зависимости c от β .

Рассмотрим влияние тепловых потерь на скорость и структуру пламени. На рис. 2.22 (а) и (б) представлены результаты численного анализа

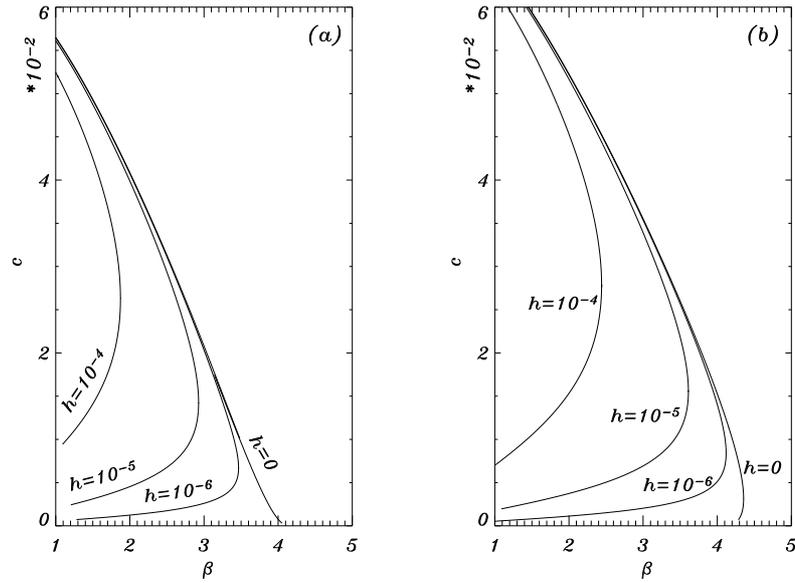


Рис. 2.22. Зависимость скорости пламени, c , от энергии активации, β , для различных значений коэффициента тепловых потерь, h , при $L_A = 0.5$ (а) и $L_A = 2$ (б). Остальные значения параметров взяты как $L_b = 1$, $u_a = 0$ и $r = 0.001$.

зависимости скорости бегущей волны горения, c , от энергии активации, β , для чисел Льюиса для топлива равных $L_A = 0.5$ и $L_A = 2$, соответственно. Для адиабатического случая, $h = 0$, результаты повторяют, полученные в параграфе § 2.5: (а) для $L_A < 1$ скорость пламени однозначная монотонная функция энергии активации, (б) для $L_A > 1$ зависимость скорости пламени от энергии активации является двухзначной С-образной кривой. В неадиабатическом случае ($h > 0$) ситуация меняется, как видно на рис. 2.22. Зависимость $c(\beta)$ становится двухзначной, независимо от значения L_A , т.е. как при $L_A < 1$ (рис. 2.22 (а)), так и при $L_A > 1$ (рис. 2.22 (б)). В результате для неадиабатической модели существует либо два решения, распространяющихся с разной скоростью, либо, если β превышает критическое значение для бифуркации складки, решений в виде бегущей волны не существует. Затухание наступает при конечных значениях скорости волны и энергии активации. Данный сценарий качественно сходен с поведением волн горения в одноступенчатой неадиабатической модели [30, 32, 47, 67, 188]. Как видно на рис. 2.22, увеличение параметра тепловых потерь приводит к сдвигу точки поворота кривой $c(\beta)$ в сторону меньших значений энергии активации.

Решения в виде бегущей волны в сопутствующей системе отсчета,

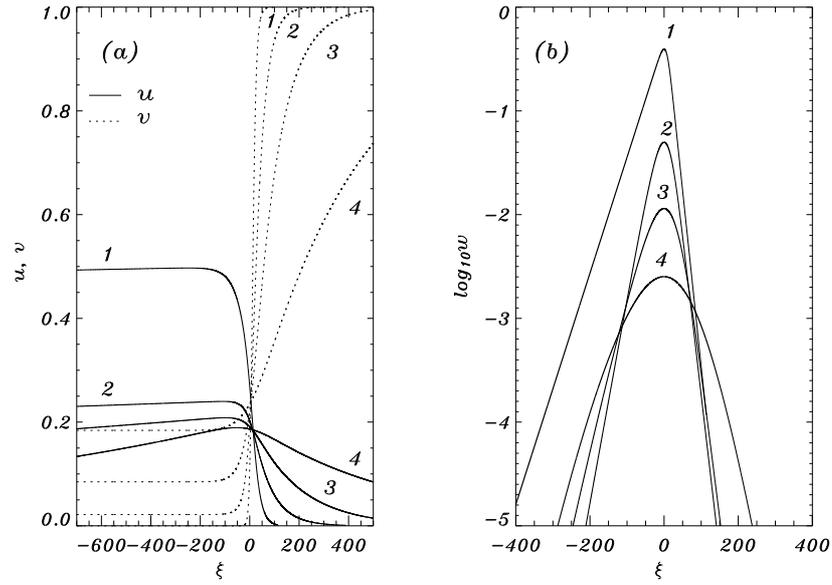


Рис. 2.23. Профили (а) температуры, $u(\xi)$, концентрации топлива, $v(\xi)$, и (б) концентрации радикалов, $w(\xi)$, для решения в виде бегущей волны горения в сопутствующей системе отсчета при $L_A = 2.0$, $L_B = 1.0$, $r = 10^{-3}$, $h = 10^{-6}$. Кривые 1 и 2 соответствуют быстрой ветви для $\beta = 2$ и $\beta = 4$, соответственно. Кривые 3 и 4 представляют медленную ветвь решений для тех же значений β , соответственно.

$\xi = x - ct$, продемонстрированы на рис. 2.23 для $L_A = 2.0$, $L_B = 1.0$, $h = 10^{-6}$, где построены как быстрые, так и медленные ветви решений, как это объяснено в подписи к рисунку. Значения параметров меняются вдоль кривой отмеченной $h = 10^{-6}$ на рис. 2.22 (б). Профили расположены таким образом, чтобы максимальное значение концентрации радикалов, $w(\xi)$, достигалось при $\xi = 0$, что всегда возможно ввиду трансляционной инвариантности задачи для бегущих волн [5]. Распределения концентрации топлива и температуры проиллюстрированы на рис. 2.23 (а), в то время как профили распределения радикалов показаны в логарифмической шкале на рис. 2.23 (б). Логарифмическое масштабирование позволяет построить все профили на одном графике, а так же ясно демонстрирует различные характерные области пламени. Когда решение приближается к асимптотическому поведению в зоне прогрева или продуктов, наклон зависимости $\ln w(\xi)$ становится линейным, а зависящая от температуры нелинейная реакция разветвления пренебрежимо мала. Между зоной прогрева и продуктов находится область, где температура смеси достаточно велика для активации реакции разветвления. В этой области производится основное количество радикалов, а функция $\ln w(\xi)$ достигает максимума.

Распределение температуры для $\beta = 2$ показано на рис. **2.23** (а) сплошной линией, отмеченной '1'. Это типичный профиль температуры для быстрой ветви решений вдалеке от бифуркации складки. Распределение температуры имеет плавную зону прогрева и очень медленное затухание температуры в зоне продуктов, вызванное теплообменом с окружающей средой. Следует отметить, что это затухание слабо выражено на рисунке из-за ограниченного интервала, на котором строится график. Профиль распределения топлива показан на том же рисунке с помощью пунктирной кривой '1' и имеет вид фронта переключения от максимального значения, $v = 1$, в зоне прогрева, до минимального в зоне продуктов, $v = \sigma$. Остаточное количество топлива мало в для этого случая и слабо заметно на рисунке. Соответствующее распределение концентрации радикалов построено на рис. **2.23** (б). Максимальное значение $w(\xi)$ достаточно велико и имеет порядок $O(1)$. Реакция разветвления протекает в узкой области около $\xi = 0$, окруженной областями с линейным затуханием $\ln w(\xi)$ с обеих сторон зоны разветвления.

Структура пламени для быстрой ветви и $\beta = 2$ имеет четыре различные области. Впереди волны находится зона прогрева, где температура плавно растет. Когда она достигает примерно половины от максимального значения, активируется реакция разветвления, которая производит бассейн радикалов. Процесс производства радикалов более интенсивен, чем их потребление в ходе реакции рекомбинации и диффузии из зоны реакции, что приводит к существенному росту их концентрации $w(0) \sim O(1)$ и потреблению практически всего топлива так, что v становится пренебрежимо малой практически сразу за тем, как w достигает максимума. Как только топливо израсходовано реакция разветвления останавливается и доминирующим становится более медленный процесс разрыва цепи, что характеризует область рекомбинации, где радикалы превращаются в продукты с выделением тепла. В этой области температура продолжает расти и достигает максимума, а концентрация радикалов убывает. В какой-то момент w становится слишком малой для поддержания роста температуры и потеря тепла в окружающую среду начинает доминировать, приводя к очень плавному спаданию температуры в зоне продуктов. Таким обра-

зом в случае быстрой ветви решений вдалеке от границы затухания волна горения имеет структуру медленного режима рекомбинации.

По мере увеличения энергии активации вдоль быстрой ветви решений и приближения к условию затухания ($\beta \approx 4.119702$) структура пламени меняется. При $\beta = 4$ профили u , v и w показаны на рис. 2.23 кривыми '2'. В отличие от случая, когда $\beta = 2$, максимальное значение концентрации радикалов меньше на порядок. Так же ширина зоны реакции разветвления увеличивается и приближается к ширине зоны рекомбинации, указывая на то, что максимальные скорости реакций разветвления и рекомбинации становятся сравнимыми. Поскольку радикалы производятся и потребляются в одной области за зоной прогрева, то нет избытка радикалов и зона рекомбинации исчезает. Рост температуры в зоне реакции становится малым по сравнению со случаем $\beta = 2$. Более того при $\beta = 4$, появляется заметная невооруженным глазом утечка топлива и σ существенно отличается от нуля. На медленной ветви решений при $\beta = 4$ (кривая 3) и $\beta = 2$ (кривая 4) эти отличия проявляются в еще большей степени, т.е. $w(0)$ убывает еще на несколько порядков, зона разветвления расширяется, а зона рекомбинации исчезает, максимум температуры сдвигается к $\xi = 0$ и значение существенно увеличивается. Таким образом, мы видим, что для решений, близких к условию затухания, а в особенности для медленной ветви решений, пламя имеет структуру, характерную для режима быстрой рекомбинации.

§ 2.7. Одномерная устойчивость, пульсирующие волны, удвоение периода и переходный хаос

Анализ устойчивости волн горения начнем с адиабатического случая. Как и прежде, линеаризуем модельные уравнения (2.3) около решения в виде бегущей волны, т.е. ищем решение в виде $u(\xi, t) = U(\xi) + \epsilon\phi(\xi) \exp(\lambda t)$, $v(\xi, t) = V(\xi) + \epsilon\psi(\xi) \exp(\lambda t)$ и $w(\xi, t) = W(\xi) + \epsilon\chi(\xi) \exp(\lambda t)$, где $[U(\xi), V(\xi), W(\xi)]$ представляет решение в виде бегущей волны горения, а члены, пропорциональные ϵ , - это линейное возмущение. Подставляя это решение в (2.3), оставляя только члены первого порядка по ϵ и вводя вектор функцию

с элементами $\mathbf{v}(\xi) = [\phi, \psi, \chi, \phi_\xi, \psi_\xi, \chi_\xi]^T$, получаем

$$\mathbf{v}_\xi = \hat{A}(\xi, \lambda)\mathbf{v}, \quad (2.36)$$

где

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{I} \\ \hat{H}(\xi, \lambda) & \hat{C} \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -r \\ \beta L_A \frac{VW}{U^2} e^{-1/U} & \beta L_A W e^{-1/U} + L_A \lambda & \beta L_A V e^{-1/U} \\ -\beta L_B \frac{VW}{U^2} e^{-1/U} & -\beta L_B W e^{-1/U} & -L_B(\beta V e^{-1/U} - \lambda - \beta r) \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & -cL_A & 0 \\ 0 & 0 & -cL_B \end{bmatrix}, \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Задача линейной устойчивости решается методом функции Эванса, что позволяет найти расположение точек дискретного спектра на комплексной плоскости и таким образом дает детальную информацию о пульсирующих неустойчивостях, появляющихся при потере устойчивости бегущей волны горения. Расчеты показывают, что при $L_A \leq 1$ и изменении L_B на несколько порядков от 0.1 до 10.0, не существует точек дискретного спектра, находящихся в правой полуплоскости (т.е. $Re\lambda > 0$) и следовательно бегущая волна устойчива по отношению к пульсирующим возмущениям. Для $L_A > 1$ волна горения либо устойчива, либо теряет устойчивость по отношению к пульсациям фронта из-за бифуркации Андронова-Хопфа. Это проиллюстрировано на рис. 2.24(а), где построена зависимость скорости пламени, c , от безразмерной энергии активации, β , для $L_A = 10.0$ и $L_B = 1.0$. Устойчивые решения представлены сплошной линией, а неустойчивые решения построены пунктирной линией. Установлено, что быстрая ветвь решений устойчива для малых значений энергии активации. По мере

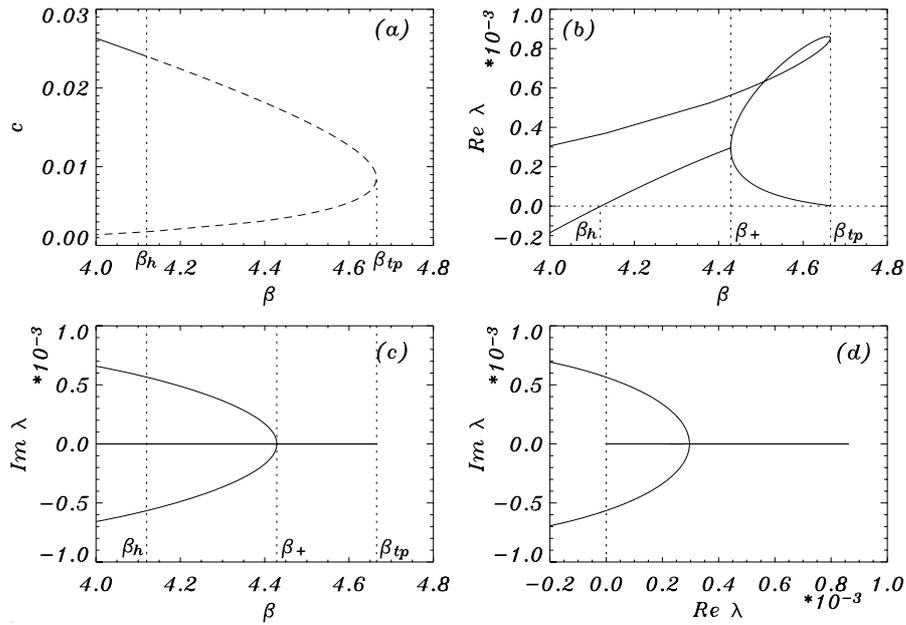


Рис. 2.24. Бифуркационная диаграмма для $L_A = 10.0$ и $L_B = 1.0$. Зависимость $c(\beta)$ построена на Рис. (а), где сплошная линия представляет устойчивое, а пунктирная неустойчивое решение. Действительная и мнимая части λ как функции β даны на Рис. (b) и (c), соответственно. На Рис. (d) показано расположение точек дискретного спектра на комплексной плоскости при изменении параметра β . На рисунках β_h и β_{tp} представляют значения β , при которых происходят бифуркации Андронова-Хопфа и складки, соответственно, а β_+ обозначает энергию активации при которой точки дискретного спектра становятся действительными.

увеличения β в сторону точки перегиба, пара комплексно сопряженных точек дискретного спектра переходит из левой ($Re\lambda < 0$) в правую ($Re\lambda > 0$) половину комплексной плоскости, пересекая мнимую ось при некотором $\beta = \beta_h$ так, что $Im\lambda \neq 0$. Это продемонстрировано с помощью точечной линии, подписанной как ' β_h ', на рис. 2.24 (b), (c) и (d), где построены зависимости $Re\lambda(\beta)$, $Im\lambda(\beta)$ и $Im\lambda(Re\lambda)$, соответственно. Критическое значение $\beta_h \approx 4.120$ - это точка потери устойчивости решения в виде бегущей волны в результате бифуркации Андронова-Хопфа. На рис. 2.24 (b) бифуркация происходит, когда график $Re\lambda(\beta)$ пересекает горизонтальную точечную линию $Re\lambda = 0$. Дальнейшее увеличение β за критическое значение β_h приводит к росту действительной части пары комплексных точек дискретного спектра, как видно на рис. 2.24 (b). В тоже время мнимые части $\lambda \in \Sigma_{disc}$ уменьшаются, как показано на рис. 2.24 (c), и при некотором значении $\beta_+ \approx 4.429$ точки дискретного спектра сливаются и становятся чисто действительными, что соответствует изменению типа неустойчивости с пульсирующей к равномерной. При приближении β к точке складки

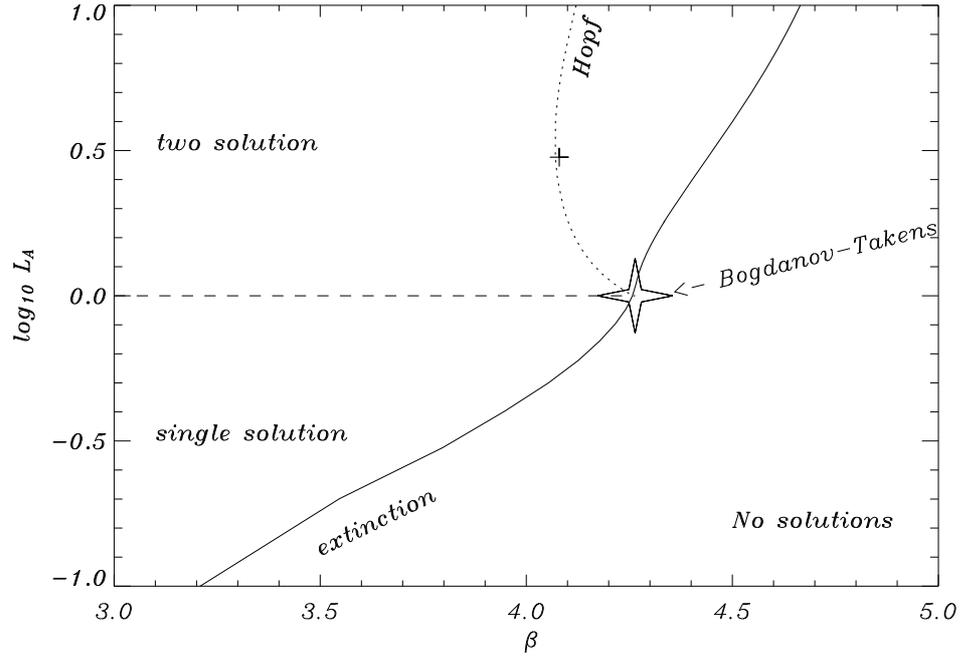


Рис. 2.25. Диаграмма устойчивости на плоскости параметров $(\beta, \log_{10} L_A)$ при $L_B = 1$. Сплошная и точечная линии представляют критические значения параметров для затухания и бифуркации Андронова-Хопфа, соответственно. Знак '+' обозначает значение параметров β и L_A использованных для расчетов, представленных на рис. 2.28.

$\beta_{tp} \approx 4.6648$ вдоль быстрой ветви решений ($c > c_{tp} \approx 8.585 \cdot 10^{-3}$), одна из точек дискретного спектра движется к нулю и совпадает с ним при $\beta = \beta_{tp}$, в то время как другая остается в правой полуплоскости, обуславливая неустойчивость бегущей волны. Первая точка показана на рис. 2.24 (b) с помощью кривой, заканчивающейся в точке $(\text{Re}\lambda = 0, \beta_{tp})$, а вторая соответствует петле зависимости $\text{Re}\lambda(\beta)$, касающейся точечной линии $\beta = \beta_{tp}$. При переходе через точку поворота с быстрой на медленную ветвь $c(\beta)$ одна из точек Σ_{disc} остается на положительной части действительной оси, что обуславливает неустойчивость медленной ветви. Этот сценарий наблюдался и для других L_B в интервале от 0.1 до 10.0. Следует отметить, что качественно сходная картина была найдена для одноступенчатого перемешанного и диффузионного пламени в [67] и [111].

Дальше мы исследуем устойчивость решения в виде бегущей волны по отношению к пульсирующим возмущениям для разных значений числа Льюиса для топлива, L_A , с целью получить детальную картину устойчивости и определить характер бифуркаций, приводящих к появлению пульсаций пламени. Мы фиксируем значение L_B равным единице и варьируем L_A

от 0.1 до 10.0. Для каждого значения L_A исследуется устойчивость бегущей волны горения в широком интервале значений β и находится расположение Σ_{disc} на комплексной плоскости. Результаты этого анализа суммированы на рис. **2.25**, где на плоскости L_A от β сплошной и точечной линиями построены критические значения параметров для затухания и бифуркаций Андронова-Хопфа, соответственно, при $L_B = 1$. Число Льюиса для топлива строится в логарифмическом масштабе в иллюстративных целях. Термин затухания здесь требует дополнительного разъяснения. По мере изменения контрольных параметров (т.е. L_A , L_B , β) бегущая волна горения либо перестает существовать при обращении скорости пламени в ноль в случае $L_A \leq 1$, либо достигается точка поворота кривой $c(\beta)$ при $L_A > 1$. Затухание наступает при условии $c = 0$ для $L_A < 1$ или $[dc/d\beta]^{-1} = 0$ при $L_A > 1$. На рис. **2.25** область ниже сплошной кривой, отмеченной ‘extinction’, соответствует значениям параметров, где решение в виде бегущей волны не существует, поэтому данная область обозначена ‘no solutions’. Параметры выше кривой затухания соответствуют области, где существует единственное решение в виде бегущей волны, при $L_A \leq 1$ или области, где могут сосуществовать два решения в виде бегущей волны, при $L_A > 1$. Эти области параметров обозначены ‘single solution’ и ‘two solution’ и разделены пунктирной кривой $\log_{10} L_A = 0$ на рис. **2.25**. Анализ устойчивости показывает, что для параметров из области под пунктирной кривой $\log_{10} L_A = 0$ и над кривой затухания (область существования единственного решения) бегущие волны горения устойчивы. В отличие от этого для области параметров, где могут сосуществовать два решения, медленная ветвь всегда неустойчива, а быстрая ветвь решений либо устойчива, либо испытывает появление пульсаций в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Точечная линия соответствует критическим значениям параметров для бифуркации Андронова-Хопфа. Между точечной и сплошной кривыми находится область параметров, где быстрая ветвь неустойчива. При пересечении в пространстве параметров точечной кривой, например, при увеличении β для фиксированного L_A , быстрая ветвь решений теряет устойчивость. Дальнейшее увеличение β и приближение к кривой затухания приводит к изменению характера неустойчивости с пульсирующей к равномерной, как

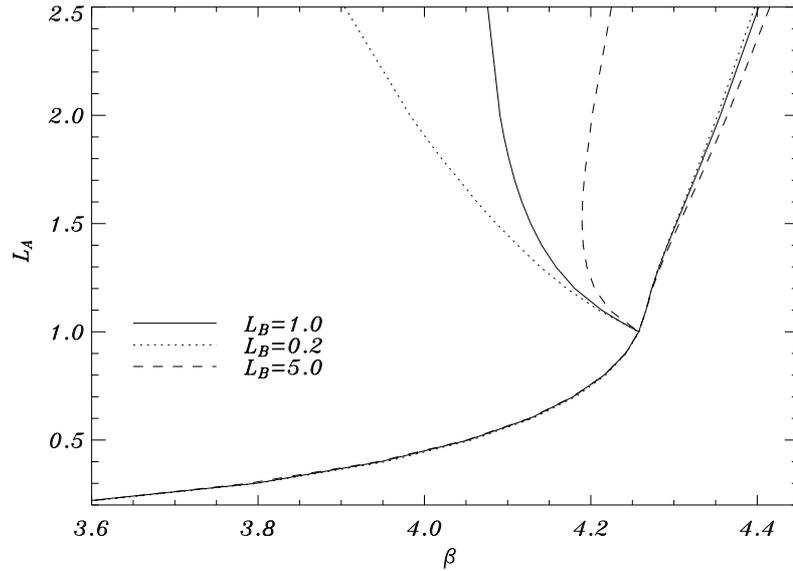


Рис. 2.26. Критические значения параметров для затухания и бифуркации Андронова-Хопфа на плоскости параметров (β, L_A) при $L_B = 1, 0.2$ и 5 с характерными областями устойчивости, определенным как на рис. 2.25.

это показано на рис. 2.24 для случая $L_A = 10.0$.

Звездочкой на рис. 2.25 отмечены значения параметров, при которых встречаются точечная и сплошная кривые. Эта ситуация соответствует бифуркации Богданова-Тakens ко-размерности два. Она является точкой, из которой исходит кривая критических значений параметров для бифуркации Андронова-Хопфа, и, следовательно, непосредственно отвечает за появление пульсаций пламени в данной модели. В отличие от результатов [67, 111] для одноступенчатой модели, где бифуркация Богданова-Тakens была найдена для чисел Льюиса больших единицы, в нашем случае она расположена при $L_A = 1$.

Диаграмма устойчивости на плоскости параметров (β, L_A) для различных значений $L_B = 0.2, 1.0$, и 5.0 построена на рис. 2.26. Как видно на графиках изменение L_B качественно не влияет на особенности диаграммы устойчивости, хотя критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа существенно сдвигаются в сторону больших значений β с увеличением L_B . Кривая затухания очень слабо изменяется при варьировании L_B , а именно, она вращается против часовой стрелки около точки бифуркации Богданова-Тakens с увеличением L_B . Следует отметить, что положение бифуркации Богданова-Тakens не меняется с варьированием

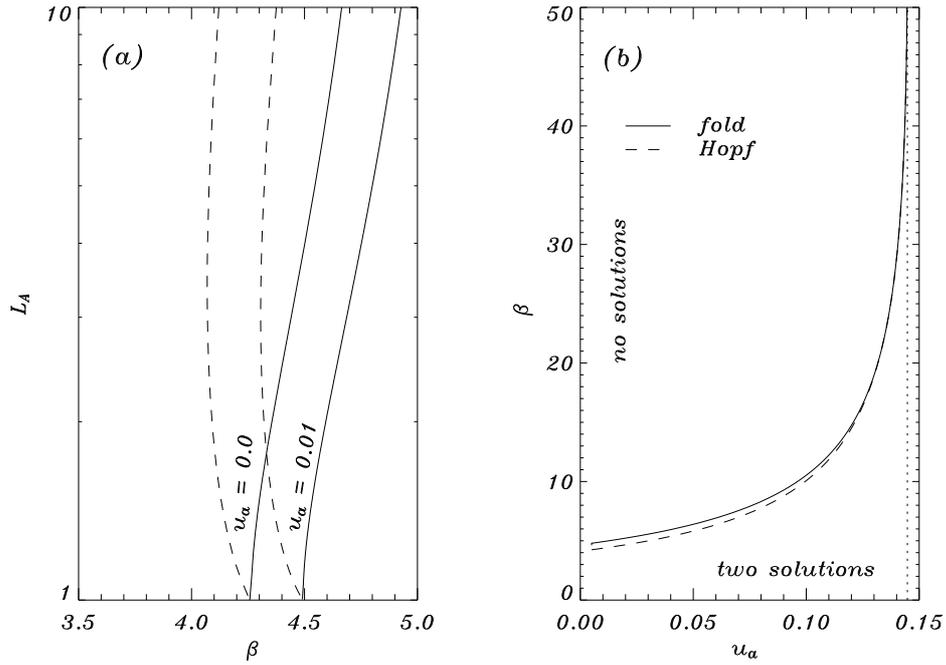


Рис. 2.27. Диаграммы устойчивости для $L_B = 1$ и $r = 10^{-3}$. На рис. (а) диаграмма показана на плоскости параметров (β, L_A) при $u_a = 0.0$ и $u_a = 0.01$. На рис. (б) диаграмма построена на плоскости (u_a, β) при $L_A = 10.0$. Сплошная и пунктирная линии представляют критические значения параметров для затухания и бифуркации Андронова-Хопфа, соответственно.

L_B .

Влияние внешней температуры на устойчивость пламени так же исследовалось. Результаты этой работы продемонстрированы на рис. 2.27, где критические значения параметров для затухания и бифуркации Андронова-Хопфа построены сплошной и пунктирной линиями, соответственно, на рис. 2.27(а) на плоскости параметров (β, L_A) при $L_B = 1$, а на рис. 2.27(б) на плоскости (u_a, β) при $L_A = 10.0$. Ввиду того, что пульсирующие неустойчивости возникают при $L_A > 1$, на рис. 2.27 показан только этот случай. На рис. 2.27(а) число Льюиса для топлива построено в логарифмическом масштабе в иллюстративных целях. Диаграмма устойчивости показана для двух значений температуры окружающей среды $u_a = 0.0$ и $u_a = 0.01$. Для каждого значения u_a параметры правее от сплошной кривой соответствуют области параметров, где решение в виде бегущей волны не существует, а правее от сплошной кривой - области параметров, где могут сосуществовать два решения в виде бегущей волны, причем медленная ветвь всегда неустойчива. Как видно на 2.27(а) увели-

чение u_a сдвигает как границу существования бегущих волн горения, так и критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа в сторону более высоких значений безразмерной энергии активации. Другими словами прогрев свежей смеси имеет сильный стабилизирующий эффект на распространение волн горения, что качественно согласуется с результатами для одноступенчатой модели [74]. Это особенно хорошо видно на рис. 2.27(b), где критические значения параметров для затухания и бифуркации Андронова-Хопфа построены на плоскости β от u_a при $L_A = 10$ и $L_B = 1$. Область над сплошной кривой обозначенная 'no solutions' соответствует параметрам, при которых не существует бегущих волн горения, а область ниже сплошной кривой - параметрам, при которых существует два решения. Медленная ветвь неустойчива, а быстрая ветвь устойчива ниже пунктирной кривой и испытывает пульсирующие неустойчивости при значениях параметров выше нее.

2.7.1. Бифуркация Андронова-Хопфа и пульсирующие решения

Пульсирующие волны горения, возникающие в результате бифуркации Андронова-Хопфа при пересечении нейтральной границы устойчивости в пространстве параметров, исследуются численно. Система (2.3) решается на достаточно большом интервале координаты для того, чтобы граничные условия (2.5) удовлетворялись с хорошей точностью. Для решения системы (2.3) был использован метод расщепления по физическим процессам. Вначале решалась система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы изменения температуры, концентрации топлива и радикалов, за счет реакций разветвления и рекомбинации. Для этого использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка. На втором этапе решались уравнения переноса. В этом случае использовалась безусловно устойчивая схема Кранка-Николсона, обладающая вторым порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству. Начальные условия берутся в виде бегущих волн - решений системы (2.6).

Результаты исследования представлены на рис. 2.28, где проиллюстрировано поведение пульсирующих волн горения для $L_A = 3.0$, $L_B = 1.0$ и $\beta = 4.08$. Значение β взято за пороговым значением энергии активации

для бифуркации Андронова-Хопфа, $\beta_h = 4.0703\dots$. Этот набор параметров показан на рис. **2.25** крестом, расположенным сразу за нейтральной границей устойчивости (точечная кривая). Начальный профиль в виде бегущей волны горения неустойчив по отношению к пульсирующим возмущениям. Эта неустойчивость искажает решение на начальных стадиях эволюции во времени. Появляются локальные переходные пики в распределении температуры по координате и осцилляции формы и максимального значения концентрации радикалов, w_{max} . Профиль концентрации топлива главным образом подвержен изменениям кривизны фронта, хотя некоторые малые осцилляции концентрации наблюдаются и в зоне продуктов. Значение w_{max} и положение максимума распределения радикалов ξ_{max} являются удобными параметрами для описания пульсирующей природы решений. Здесь $\xi = x - c_{drift}t$ - это координата в системе отсчета движущейся со скоростью c_{drift} , которая представляет собой среднее значение скорости распространения пламени $c_{drift} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_{max}/t$, где x_{max} - это координата максимума концентрации радикалов в лабораторной системе отсчета.

По мере развития пульсирующей неустойчивости, значения w_{max} и ξ_{max} испытывают осцилляции с экспоненциально нарастающей по времени амплитудой. Этот тип поведения так же описан в [175], где показано, что частота осцилляций задается мнимой частью $Im\lambda$ пары точек дискретного спектра Σ_{disc} , ответственных за появление неустойчивости. На временах порядка $(Re\lambda)^{-1}$ амплитуды осцилляций, $w_{max}(t)$ и $\xi_{max}(t)$, достигают насыщения и стабилизируются на определенных значениях. Поведение профилей $u(\xi, t)$, $v(\xi, t)$ и $w(\xi, t)$ становится периодическим во времени и скорость волны, определенная как dx_{max}/dt , усредненная по периоду пульсаций, становится постоянной и равной c_{drift} , таким образом формируется пульсирующая волна горения.

На рис. **2.28** (a), (b) и (c) построены профили температуры, концентрации радикалов и топлива для пульсирующих волн горения. Профили взяты для трех моментов времени $t_1 = 0$, $t_2 = 8750$, и $t_3 = 17500$. Поскольку решение является периодическим, время отсчитывается от 0 до T , где $T \approx 30492.5$ - это период колебаний. Координата $\xi = x - c_{drift}t$ берется в сопутствующей системе отсчета, движущейся со скоростью c_{drift} . На

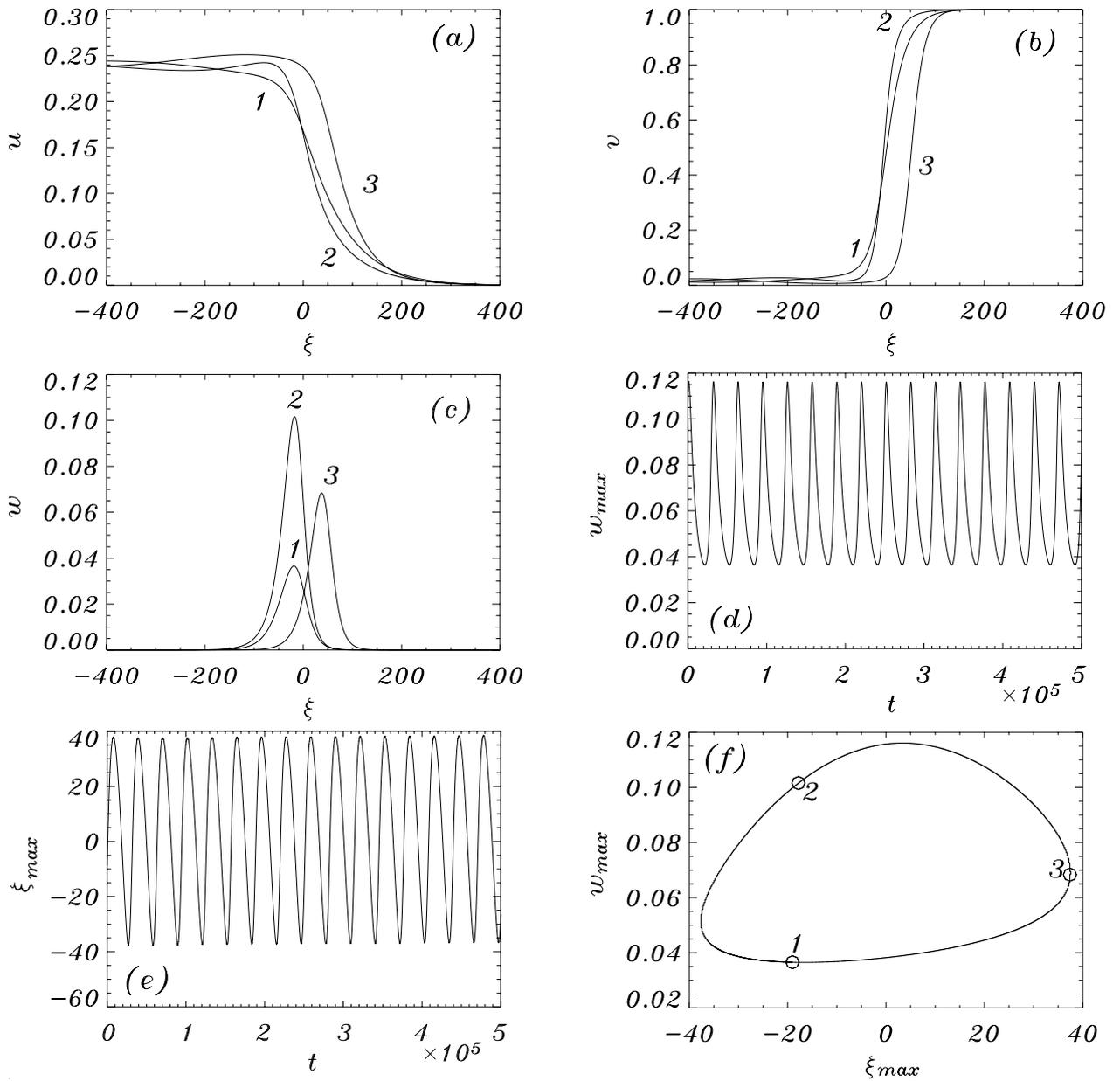


Рис. 2.28. Пульсирующие волны горения при $L_A = 3$, $L_B = 1$, и $\beta = 4.08$. На рисунках (a), (b) и (c) построены профили температуры, $u(\xi)$, концентрации топлива, $v(\xi)$, и концентрации радикалов, $w(\xi)$, соответственно. Профили взяты в моменты времени $t_1 = 0$, $t_2 = 8750$ и $t_3 = 17500$, помеченные как 1, 2 и 3, соответственно. Зависимости значений w_{max} и ξ_{max} от времени представлены на рис. (d) и (e). На рис. (f) построен максимум концентрации радикалов, w_{max} , от координаты этого максимума, ξ_{max} .

рис. 2.28 (а) видно, что профиль температуры как функция ξ меняет свое поведение за период осцилляций с монотонного, при $t = t_1$, к решению с одним локальным максимумом, как показано кривыми 2 и 3. При $t = t_2$ пик температуры относительно узок, а при $t = t_3 > t_2$ он расплывется и температурный профиль постепенно возвращается к монотонному по отношению к координате ξ . Следует отметить, что моментальная координата максимального градиента $u(\xi)$ так же колеблется около точки $\xi = 0$. Профиль концентрации топлива, $v(\xi, t)$, построен на рис. 2.28 (b) для трех последовательных моментов времени. Видно, что максимальный наклон функции $v(\xi)$ в момент времени t изменяется с ходом времени. Координата точки максимального градиента так же испытывает периодические осцилляции около $\xi = 0$. Поскольку в зоне продуктов существует остаточное количество не сгоревшего топлива, то за фронтом горения наблюдаются малые осцилляции его концентрации. Наиболее интересна динамика профиля радикалов $w(\xi, t)$, изображенная на рис. 2.28 (c). Распределение концентрации радикалов все время остается колокол-образной функцией координаты ξ с единственным локальным максимумом $w(\xi)$, достигаемым при $\xi = \xi_{max}$. Как w_{max} , так и ξ_{max} являются периодическими функциями времени, что продемонстрировано на рис. 2.28 (d) и (e), где приведена временная зависимость $w_{max}(t)$ и $\xi_{max}(t)$, соответственно. Распределение радикалов испытывает периодические колебания около среднего положения $\xi = 0$. На рис. 2.28 (f) $w_{max}(t)$ построена как функция $\xi_{max}(t)$. Видно, что на плоскости (ξ_{max}, w_{max}) формируется предельный цикл, которому соответствует пульсирующая волна горения. Резюмируя, пульсирующие волны горения в среднем распространяются с определенной скоростью, c_{drift} , однако, профили u , v и w испытывают периодические осцилляции таким образом, что пламя то ускоряется, то останавливается в определенные моменты времени.

Для того, чтобы изучить свойства бифуркации Андронова-Хопфа, исследуются пульсирующие решения, возникающие при потере устойчивости бегущей волны горения. Результаты численного анализа приведены на рис. 2.29, где все расчеты были проведены для случая $L_A = 3.0$ и $L_B = 1.0$. Параметр β варьируется от значений сразу за критическим зна-

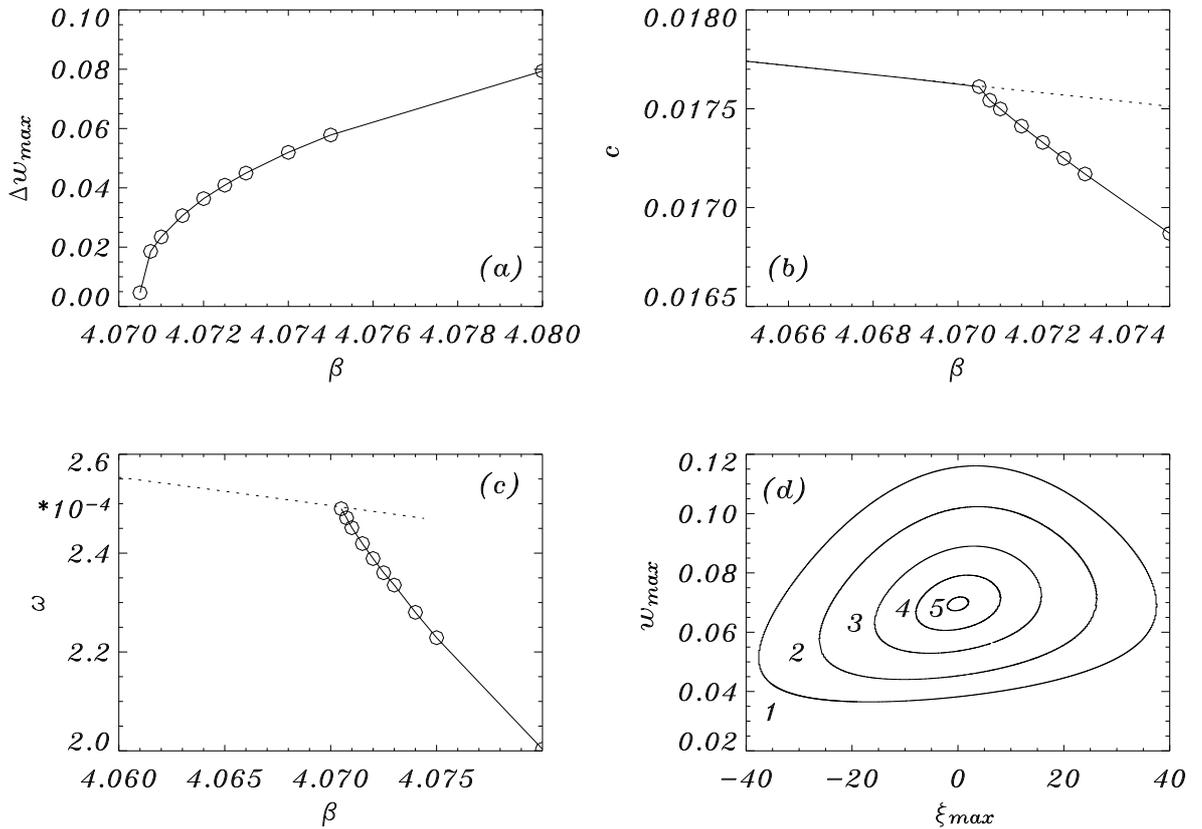


Рис. 2.29. Бифуркация Андронова-Хопфа и характеристики пульсирующих решений для $L_A = 3$ и $L_B = 1$. Зависимость Δw_{max} амплитуды осцилляций w_{max} от β построена на рис. (a). На рис. (b) показана скорость бегущей волны горения с помощью сплошной и пунктирной линии для устойчивого и неустойчивого решения, соответственно. Средняя скорость пульсирующей волны построена кружками, соединенными сплошной линией. На рис. (c) сплошной линией представлена частота осцилляций, ω , как функция β , а пунктирная линия показывает мнимую часть точек дискретного спектра, $Im\lambda$. На рис. (d) $w_{max}(t)$ построена как функция $\xi_{max}(t)$ для различных значений β (как описано в тексте).

чением для бифуркации Андронова-Хопфа $\beta_h = 4.0703\dots$ до $\beta = 4.08$, а пульсирующая волна находится решением (2.3) для каждого β . На рис. **2.29** (a), (b) и (c) кружки, соединенные сплошной линией, соответствуют данным численным результатам. На рис. **2.29** (a) построена зависимость амплитуды пульсаций максимального значения концентрации радикалов, $\Delta w_{max} = \max\{w_{max}(t)\} - \min\{w_{max}(t)\}$ от β . Зависимость $\Delta w_{max}(\beta)$ имеет корневой вид, характерный для периодических решений, возникающих в результате надкритической бифуркации Андронова-Хопфа. На рис. **2.29** (b) построена зависимость скорости бегущей волны горения с помощью сплошной и пунктирной линии для устойчивого и неустойчивого случая, соответственно, и средней скорости пульсирующего решения с помощью кружков, соединенных сплошной линией. Как видно на рисунке пульсирующая волна горения в среднем распространяется медленней, чем бегущая волна, и разность скоростей, $c - c_{drift}$, растет почти по линейному закону с увеличением β . Частота пульсаций волны представлена на рис. **2.29** (c) кружками, соединенными сплошной линией. Она так же сравнивается с мнимой частью пары точек дискретного спектра, ответственных за потерю устойчивости бегущей волны горения, которая показана на рисунке пунктирной линией. Видно, что как скорость, так и частота осцилляций пульсирующих волн горения меньше, чем соответствующие значения для бегущей волны. На рис. **2.29** (d) построена зависимость максимального значения концентрации радикалов, $w_{max}(t)$, от координаты этого максимума, $\xi_{max}(t)$, для нескольких значений β : кривая 1 соответствует $\beta = 4.08$, кривая 2 - $\beta = 4.075$, кривая 3 - $\beta = 4.072$, кривая 4 - $\beta = 4.07075$ и кривая 5 - $\beta = 4.0705$. Видно, что на плоскости $w_{max}(t)$ от $\xi_{max}(t)$ формируются предельные циклы. Амплитуда осцилляций растет с увеличением β . При $\beta = 4.0705$, сразу за нейтральной границей устойчивости, предельный цикл имеет практически эллиптическую форму, а $w_{max}(t)$ и $\xi_{max}(t)$ близки к гармоническим осцилляциям. По мере увеличения β предельный цикл деформируется и принимает треугольную форму при $\beta = 4.08$, что указывает на то, что функции $w_{max}(t)$ и $\xi_{max}(t)$ содержат более высокие гармоники в Фурье спектре.

Исследуем свойства бифуркации Андронова-Хопфа более детально с

помощью стандартной теории возмущения, описание которой можно найти в целом ряде монографий, например [5]. Здесь мы только кратко опишем полученные результаты. Пульсирующее решение, рождающееся в результате бифуркации Андронова-Хопфа, из решения в виде бегущей волны ищется в виде асимптотического ряда

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\xi, t) &= \mathbf{U}(\xi) + A\mathbf{v}_1(\xi, t) + A^2\mathbf{v}_2(\xi, t) + \dots, \\ c &= c + Ac_1 + A^2c_2 + \dots\end{aligned}\quad (2.40)$$

$$\beta = \beta_h + A\beta_1 + A^2\beta_2 + \dots,$$

где $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ - это решение (2.3) в векторном виде; $\mathbf{U}(\xi) = [U(\xi), V(\xi), W(\xi)]^T$ представляет собой решение в виде бегущей волны; малым параметром разложения является амплитуда пульсаций, A ; c - это скорость бегущей волны горения; β_h - это энергия активации, а индекс 'h' здесь и далее означает, что параметры взяты в точке бифуркации Андронова-Хопфа. Другие значения параметров фиксированы, а именно, $u_a = 0$, $r = 0.001$, $L_B = 1$, а значение L_A определяется ниже. Как показано в [5] в первом порядке асимптотического разложения $\mathbf{v}_1(\xi, t)$ можно искать в виде $\mathbf{v}_1(\xi, t) = \mathbf{v}_1(\xi) \exp(\lambda t)$, где $\mathbf{v}_1(\xi)$ удовлетворяет задаче линейной устойчивости, которую перепишем, как задачу на собственные значения

$$\hat{\mathbf{L}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad (2.41)$$

для линейного дифференциального оператора

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{D}} + c\partial/\partial\xi\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{M}}(\xi), \quad (2.42)$$

где мы вводим обозначения $\hat{\mathbf{I}}$ - это единичная матрица 3×3 ,

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \partial^2/\partial\xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_A^{-1}\partial^2/\partial\xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & L_B^{-1}\partial^2/\partial\xi^2 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

оператор дифференцирования в матричном виде,

$$\hat{\mathbf{M}}(\xi) = \partial\hat{\mathbf{N}}/\partial\mathbf{u} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{U}(\xi)} \quad (2.44)$$

это якобиан вектор функции членов реакции, определенной как $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{u}) = [rw, -\beta vwe^{-1/u}, \beta vwe^{-1/u} - \beta rw]^T$. В (2.43) якобиан берется на решении в виде бегущей волны, $\mathbf{u}(\xi, t) = \mathbf{U}(\xi)$. В случае бифуркации Андронова-Хопфа, рассматриваемом здесь, (2.41) имеет три решения: $\mathbf{v}_1^{(0)}(\xi)$, $\mathbf{v}_1^{(1)}(\xi)$ и $\mathbf{v}_1^{(2)}(\xi) = \mathbf{v}_1^{(1)}(\xi)^*$, которые соответствуют $\lambda = 0$, $i\omega_h$ и $-i\omega_h$. Вместе с задачей (2.41) необходимо решать проблему на собственные значения

$$\hat{\mathbf{L}}^+ \mathbf{z}(\xi) = \lambda \mathbf{z}(\xi), \quad (2.45)$$

для сопряженного оператора

$$\hat{\mathbf{L}}^+ = \hat{\mathbf{D}} - c\partial/\partial\xi \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{M}}(\xi)^T. \quad (2.46)$$

Сопряженная задача (2.45) так же имеет три решения $\mathbf{z}^{(0,1,2)}$ соответствующие собственным значениям $\lambda = 0$, $i\omega_h$ и $-i\omega_h$. В первом порядке теории возмущения можно показать, что $c_1 = 0$ и $\beta_1 = 0$, а во втором порядке разрешимость требует выполнения следующего условия

$$c_2 = \frac{[\langle \mathbf{z}^{(0)}, \mathbf{N}^{(2)} \rangle]_T}{\langle \mathbf{z}^{(0)}, \mathbf{v}_1^{(0)} \rangle}, \quad (2.47)$$

где $\mathbf{N}^{(2)}$ обозначает вектор-функцию, которая может быть получена разложением $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ с подстановкой (2.40) в ряд по малому параметру A , взяв члены второго порядка $O(A^2)$, содержащие \mathbf{v}_1 . В формуле (2.47) используется стандартное внутреннее произведение

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \mathbf{f}(\xi) \mathbf{g}(\xi), \quad (2.48)$$

а $[\cdot, \cdot]_T$ обозначает усреднение по времени по периоду пульсаций, T .

Вектор-функции, входящие в выражение (2.47), рассчитываются численно, а затем используются для оценки c_2 по формуле (2.47). На рис. **2.30** (а) построена зависимость $\Delta c = c_{drift} - c$, разности скоростей пульсирующей и бегущей волны горения, как функция амплитуды A пульсаций w_{max} для $L_A = 3.0$, $L_B = 1$, $r = 0.001$, $u_a = 0.0$. Энергия активации изменяется от $\beta_h \approx 4.0703$ до $\beta = 4.075$. Сплошная линия показывает параболу $\Delta c = c_2 A^2$, где c_2 рассчитывается по формуле (2.47). Результаты, полученные прямым численным интегрированием уравнений (2.3), показаны

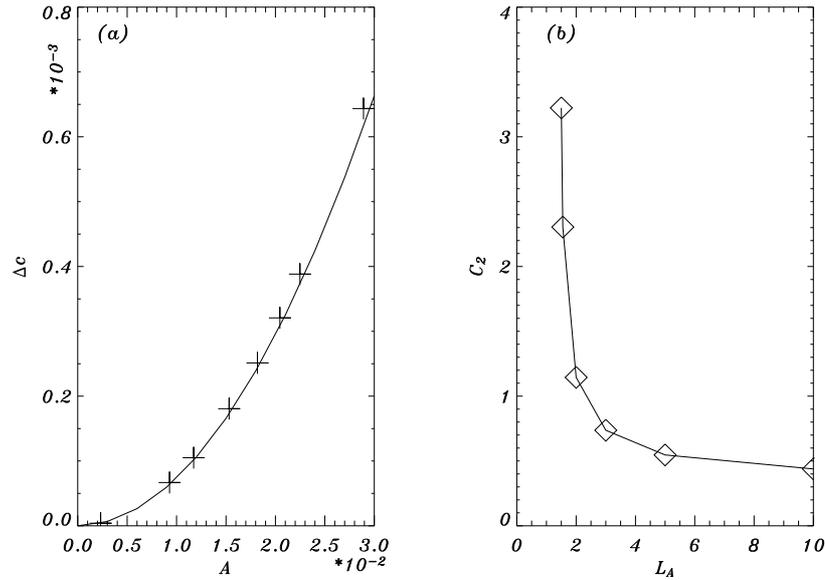


Рис. 2.30. Свойства бифуркации Андронова-Хопфа. На рисунке (а) построена зависимость Δc от A при $L_A = 3.0$, $L_B = 1.0$ и различных значениях $\beta \in [4.0703, 4.075]$. Сплошная линия представляет результаты, полученные с помощью теории возмущения, а кресты данные прямого численного интегрирования модельных уравнений. На рисунке (b) показана зависимость c_2 от L_A при $L_B = 1.0$. Квадраты, соединенные сплошной линией, представляют результаты расчетов по теории возмущения.

крестами. При увеличении β от значений, соответствующих бифуркации Андронова-Хопфа, наблюдается появление пульсаций. Изначально амплитуда A мала и данные, полученные с помощью обоих подходов, хорошо согласуются. По мере увеличения β до значений порядка 4.075 разница между результатами, полученными интегрированием (2.3) и с помощью формулы (2.47), становится заметной. Следует отметить, что при $\beta \approx 4.075$ амплитуда пульсаций, A , достигает порядка 50% от значения w_{max} для бегущей волны горения при тех же значениях параметров. Следовательно (2.47) достаточно хорошо описывает свойства пульсирующих решений. На рис. 2.30 (b) построена зависимость c_2 от L_A для тех же значений параметров, что и на рис. 2.30 (a). Видно, что для больших значений числа Льюиса для топлива c_2 стремится к постоянному значению. В противоположном пределе, $L_A \rightarrow 1$, значение c_2 резко возрастает. Это означает, что в этом случае система становится очень чувствительна к малым изменениям параметров.

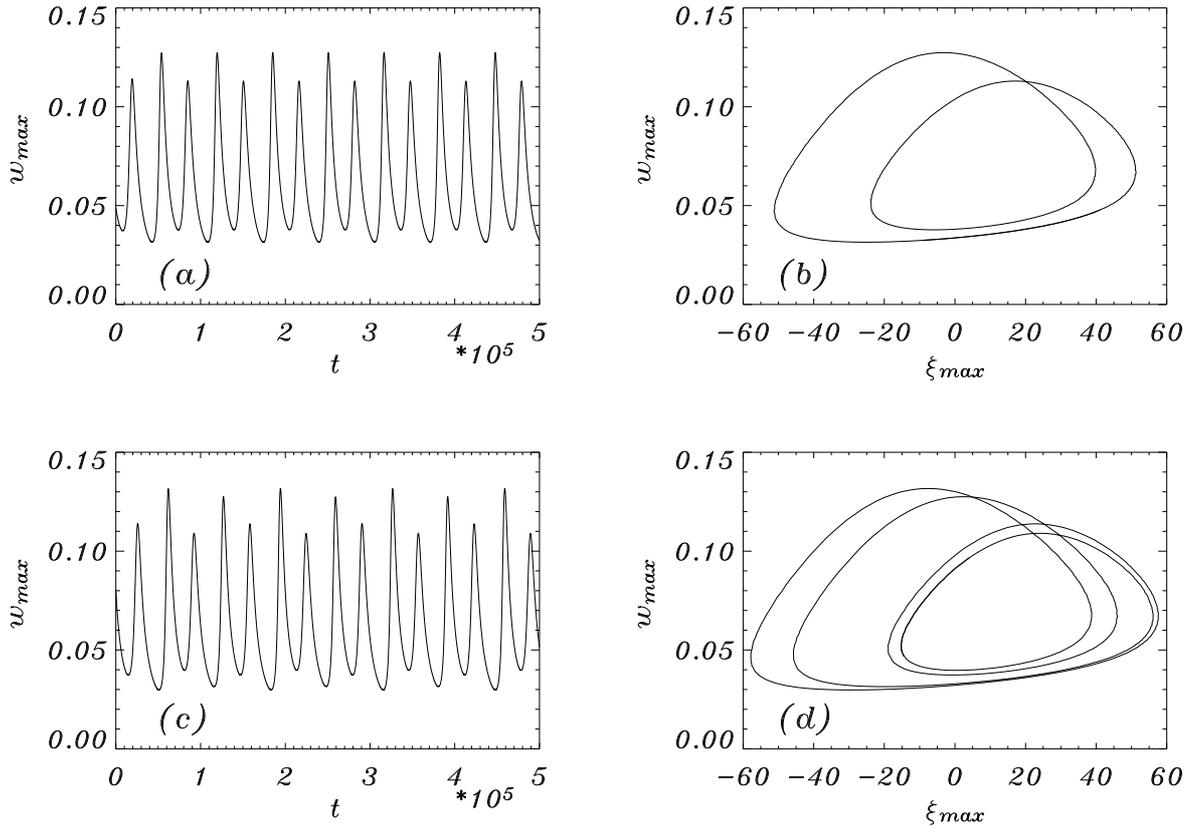


Рис. 2.31. Пульсирующие решения периода два и четыре для $L_A = 3.0$, $L_B = 1.0$, $\beta = 4.0823$ и $\beta = 4.0827$ на рис. (a-b) и (c-d), соответственно. На рис. (a) и (c) показана зависимость $w_{max}(t)$, а на рис. (b) и (d) построено максимальное значение концентрации радикалов от ξ_{max} .

2.7.2. Удвоение периода пульсаций

Как и в случае моделей с одноступенчатой кинетикой, дальнейшее увеличение параметра за критичности, в нашем случае β , приводит к удвоению периода пульсаций. На рис. **2.31** показаны решения периода два и четыре, с помощью графиков зависимостей $w_{max}(t)$ (a, c) и $w_{max}(\xi_{max})$ (b, d). Решение периода два показано на рис. **2.31** (a) и (b) при $\beta = 4.0823$. Предельный цикл при $\beta = 4.08$, показанный на рисунке **2.29** (d) состоит из одной замкнутой петли, которая распадается на две при $\beta = 4.0823$, указывая на появление решения периода два. Дальнейшее увеличение β приводит ко второй бифуркации удвоения периода и появлению решений периода четыре. Эти решения проиллюстрированы на рис. **2.31** (c, d) для $\beta = 4.0827$. Предельный цикл состоит уже из четырех петель.

Далее мы более детально исследуем последовательность бифуркаций удвоения периода и решения, возникающие в результате данных бифуркаций. На рис. **2.32** построены Фурье спектры $w_{max}(t)$ и отображения Пуанкаре для $L_A = 3$, $L_B = 1$, $r = 0.001$ и нескольких значений энергии активации, как детализировано в подписи к рисунку. Фурье амплитуды W_{ω}^{max} построены в логарифмическом масштабе, а частоты отсчитываются в обратных периодах осцилляций $T \approx 3.05 \times 10^5$ так, что $\omega = 1$ на рис. **2.32** эквивалентно T^{-1} в нормальных единицах. На рис. **2.32** 1 (a) и (b) $\beta = 4.08$, что находится близко к бифуркации Андронова-Хопфа, для которой $\beta_h = 4.0703\dots$ Осцилляции $w_{max}(t)$ носят явно периодический характер как видно на рисунке **2.32** 1 (a). Спектр W_{ω}^{max} состоит из дискретных эквидистантных линий так, что для каждой линии $\omega_i = i$, где индекс i это натуральное число, нумерующее спектральную линию. Первая линия в спектре с $i = 1$ отмечена на графике буквой T для того, чтобы подчеркнуть, что она соответствует периоду T . Амплитуды более высоких гармоник с $i > 2$ в Фурье спектре $w_{max}(t)$ так же существенны, однако экспоненциально затухают с увеличением i . Это приводит к деформации предельного цикла к треугольной форме при $\beta = 4.08$, как показано на рис. **2.29** (d). На рис. **2.32** 1 (b) построено отображение Пуанкаре на плоскости w_{max} от ξ_{max} . Точки для отображения берутся в моменты времени t^* , когда $w_{max}(t)$ достигает локального максимума. Соответствующие значения $\xi_{max}(t^*)$ и $w_{max}(t^*)$ затем строятся на плоскости. На рис. **2.32** 1 (b) все данные локализованы вблизи одной точки с координатами $(0.0, 0.117)$, указывая на то, что динамика системы происходит на предельном цикле.

На рис. **2.32** 2 (a) и (b) параметры сдвинуты дальше от границы устойчивости и $\beta = 4.0818$. В этом случае Фурье спектр содержит как гармоники $\omega = i$ основной частоты 1, так и гармоники 0.5 т.е. $\omega = 0.5i$. Спектральные линии, соответствующие $\omega = 0.5$ и $\omega = 1.0$, отмечены как $2T$ и T . Появление частот кратных 0.5 связано с рождением цикла с периодом $2T$. На отображении Пуанкаре **2.32** 2(b) этот тип решения соответствует диаграмме с двумя различными точками или двум петлям предельного цикла на плоскости параметров (ξ_{max}, w_{max}) , как показано на рис. **2.31** (d).

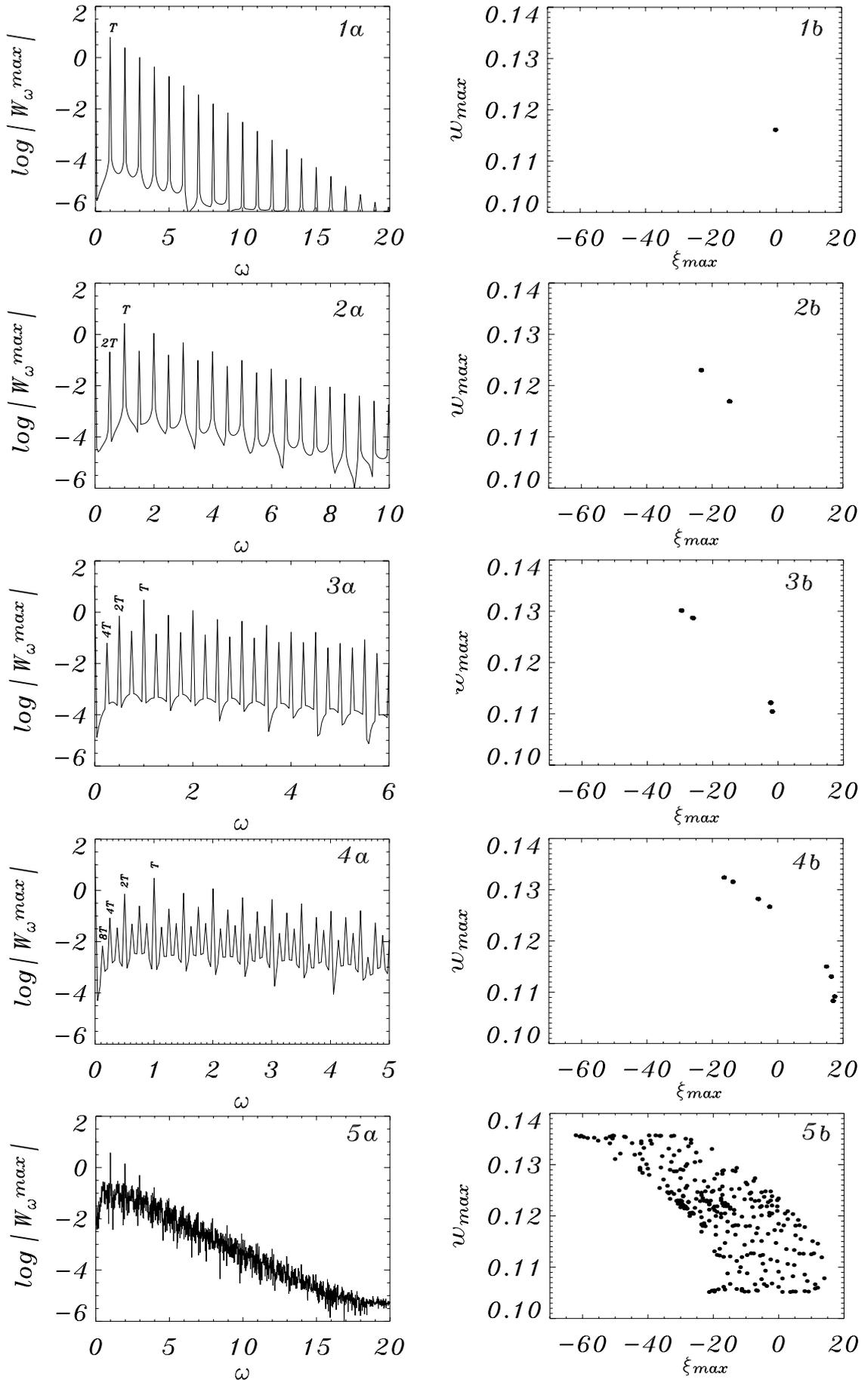


Рис. 2.32. На графиках слева, отмеченных буквой 'а', представлены Фурье спектры $w_{max}(t)$, а на графиках справа, отмеченных буквой 'б', показаны отображения Пуанкаре для $L_A = 3$, $L_B = 1$, $r = 0.001$ и нескольких значений β : 4.08, 4.0818, 4.0826, 4.08274, 4.0829 на рис. 1, 2, 3, 4, 5, соответственно.

Небольшое изменение энергии активации до значений $\beta = 4.0826$ и $\beta = 4.08274$ приводит к последовательности бифуркаций удвоения периода и появлению решения с периодом $4T$, показанного на рис. **2.32** 3 (а, б) и периода $8T$, показанного на рис. **2.32** 4 (а, б), соответственно. Фурье спектр этих решений содержит дополнительные множества линий, кратных частотам 0.25, отмеченные как $4T$, и 0.125, отмеченные как $8T$, на рис. **2.32** 3 (а), 4 (а). Отображения Пуанкаре решений $4T$ и $8T$ представлены на рис. **2.32** 3 (б) и 4 (б), соответственно, где видно, что отображение для цикла с периодом $4T$ состоит из четырех точек, а отображение для решения с периодом $8T$ – из восьми отдельных точек.

Наиболее существенно изменение динамики системы от регулярной к хаотической наблюдается при изменении энергии активации до $\beta = 4.0829$, как показано на рис. **2.32** 5 (а) и 5(б). В этом случае Фурье спектр $w_{max}(t)$ становится непрерывным с точностью до спектрального разрешения, которое составляло 0.003 в единицах обратного периода, принятых на рис. **2.32**. На нерегулярном фоне частот по-прежнему можно различить линии с относительно более высокой амплитудой и частотами $\omega = i$, что указывает на то, что динамика системы содержит след осцилляций на фундаментальной частоте колебаний с периодом T . Отображение Пуанкаре на рис. **2.32** 5 (б) имеет вид, характерный для хаотической динамики. Последовательные точки отображения случайным образом заполняют определенную область на плоскости параметров w_{max} от ξ_{max} . Распределение точек отображения не выявляет определенной регулярной структуры и равномерно распределено по доступной области, что свидетельствует о нерегулярности колебаний в этом случае.

На рис. **2.33** на плоскости $(\beta, \log_{10} L_A)$ с помощью крестиков, соединенных сплошной линией, построены критические значения параметров для первых трех последовательных бифуркаций удвоения периода при других параметрах взятых равными $L_B = 1$, $r = 0.001$. Крестики представляют результаты, полученные численным интегрированием модельных уравнений в частных производных (2.3) для $L_A = 1.5, 2, 3$ и 10, а сплошные линии – это интерполяция численных данных. Используя критические значения для бифуркаций удвоения периода, β_i , мы можем сделать оценку

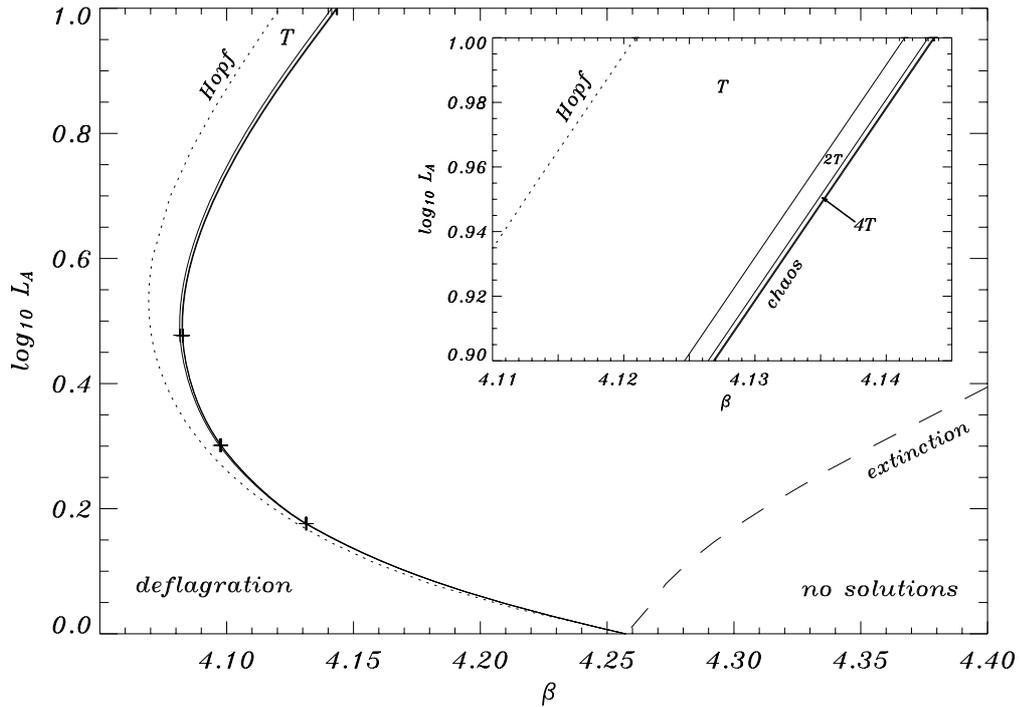


Рис. 2.33. Диаграмма бифуркаций удвоения периода на плоскости параметров (β , $\log_{10} L_A$) при $L_B = 1$. Пунктирная и точечная линии представляют критические значения параметров для затухания бегущей волны и бифуркации Андронова-Хопфа, соответственно. Кресты, соединенные сплошной линией показывают критические значения параметров для бифуркаций удвоения периода. Вложенный рисунок демонстрирует увеличение отдельной области диаграммы.

границы появления хаотического режима, β_∞ , исходя из критерия универсальности Фейгенбаума для каскада бифуркаций удвоения периода [192]. Затем, полученные таким образом оценки, проверялись численным интегрированием. Эти данные так же нанесены на график **2.33** в виде крестиков, соединенных сплошной линией. Точечная и пунктирная кривые показывают критические значения параметров для бифуркаций Андронова-Хопфа и складки, соответственно. Область параметров, расположенная на плоскости слева от точечной кривой, соответствует значениям параметров, при которых существует устойчивая быстрая ветвь решений в виде бегущей волны. В области параметров между точечной и пунктирной кривой бегущие волны горения линейно неустойчивы и наблюдаются различные пульсирующие решения. Наконец, для параметров, находящихся ниже пунктирной кривой, решений в виде бегущей волны не существует.

На рис. **2.33** видно, что пульсирующие волны с различными периодами расположены в узких областях параметров вдоль нейтральной границы устойчивости, связанной с бифуркацией Андронова-Хопфа. Из всех

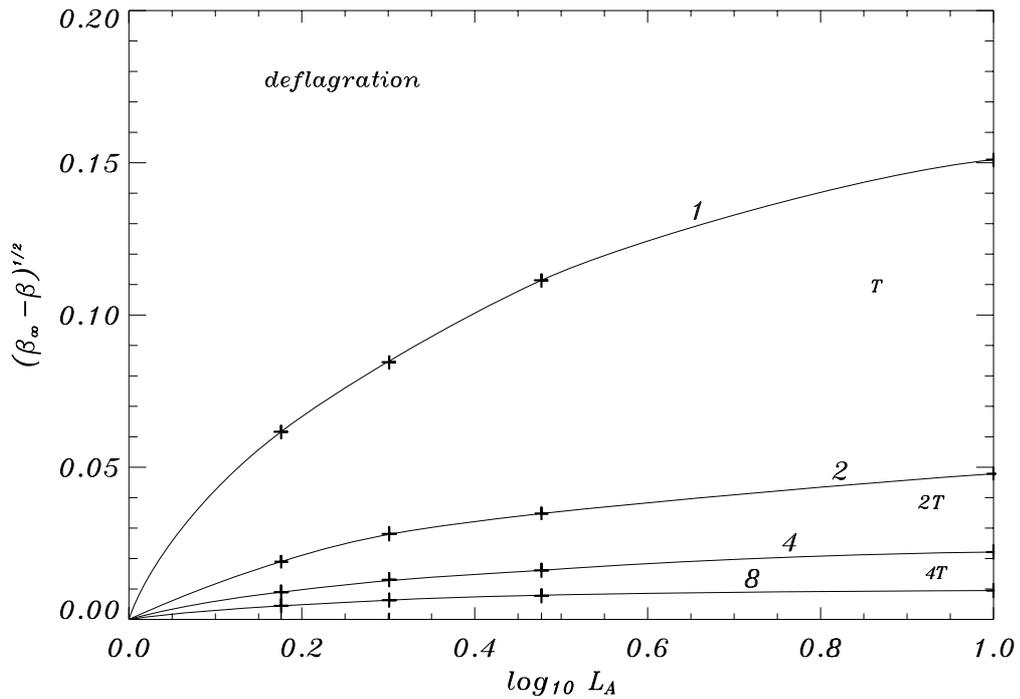


Рис. 2.34. Тонкая структура критических значений параметров для бифуркаций удвоения периода, показанных крестиками, соединенными сплошной линией, на плоскости параметров $(\log_{10} L_A, \sqrt{\beta_\infty - \beta})$ при $L_B = 1$.

периодических решений полоса в пространстве параметров, где существуют устойчивые решения периода T , имеет наибольшую ширину. Она отмечена символом ‘ T ’. Область параметров, где найдены устойчивые решения периода $2T$, едва видна на полномасштабном графике. Критические значения параметров, $\beta_1(L_A)$, $\beta_2(L_A)$ и $\beta_3(L_A)$, соответствующие бифуркациям решений периода $2T$, $4T$ и $8T$, находятся настолько близко, что их тяжело отличить друг от друга, поэтому мы так же строим увеличение области около точки $L_A = 10$ и $\beta = 4.125$ на вложенном рисунке.

На рис. 2.34 построены критические значения параметров для бифуркаций Андронова-Хопфа и удвоения периода, $\beta_{1,2,3}(L_A)$, на плоскости $(\log_{10} L_A, (\beta_\infty - \beta_i)^{1/2})$ с помощью крестиков, соединенных интерполяционными линиями, отмеченными как 1, 2, 4 и 8, соответственно. Координаты на графиках шкалированы таким образом, чтобы разрешить тонкую структуру каскада бифуркаций для различных значений L_A . Области параметров, где существуют решения периода T , $2T$, $4T$ и $8T$ (отмеченные соответственно на рис. 2.34) экспоненциально стягиваются по β . Расстояние между соседними бифуркациями, $\beta_{i+1} - \beta_i$, убывает по закону универсальности Фейгенбаума [192] с константой, которую мы оцениваем по

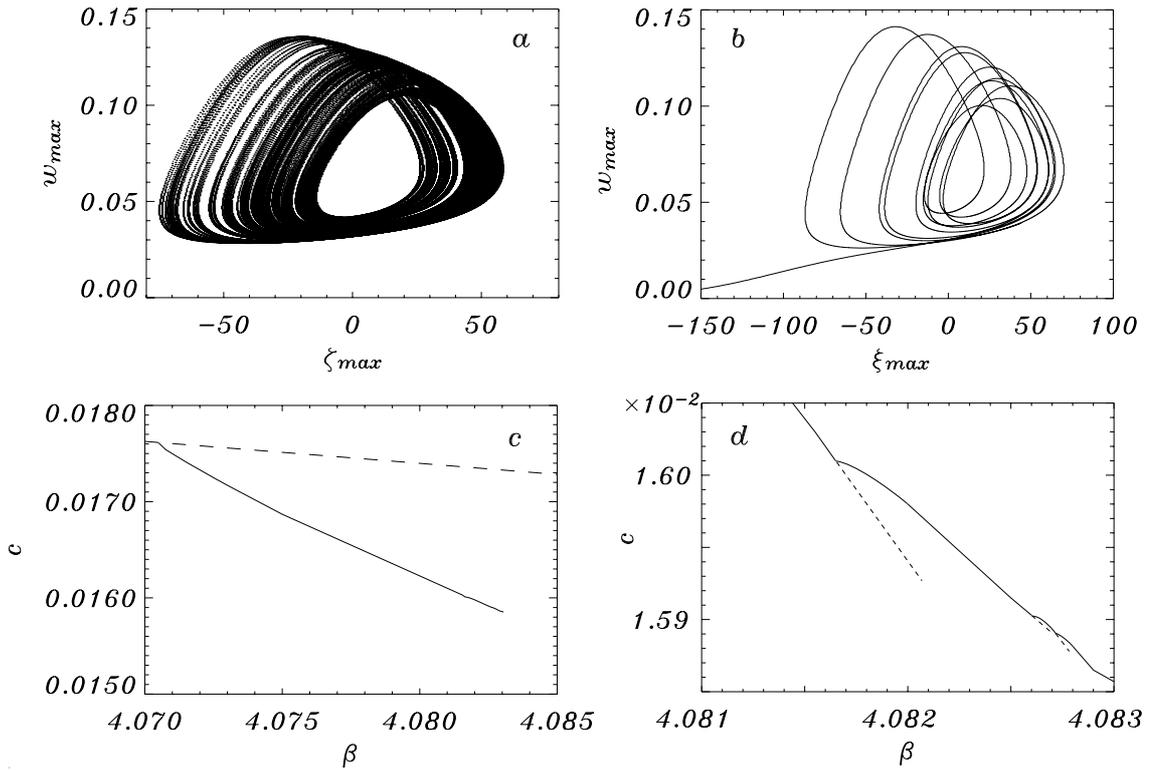


Рис. 2.35. Проекция странного аттрактора и сценарий затухания построенные на плоскости параметров w_{max} от ξ_{max} при $L_A = 3$, $L_B = 1$, $r = 0.001$, $\beta = 4.0829$ на рисунке (а) и $\beta = 4.0831$ на рисунке (b), соответственно. Зависимость c от β при $L_A = 3$, $L_B = 1$, $r = 0.001$ на рисунках (c) и (d). Рисунок (d) - это увеличенная версия рисунка (c).

численным данным как $\delta = 4.7 \pm 0.1$. Важно отметить, что разность между β_{i+1} и β_i является монотонной функцией L_A : для больших чисел Льюиса для топлива ширина областей, где существуют различные пульсирующие решения, возрастает и, наоборот, $\beta_{i+1} - \beta_i$ стремится к нулю при L_A приближающемся к 1.

После пересечения в пространстве параметров границы областей с периодическими и хаотическими решениями, формируется странный аттрактор. На рис. 2.35 (а) проиллюстрирована проекция странного аттрактора на плоскость (ξ_{max}, w_{max}) . Точнее говоря, на этом графике построены первые 200 петель траектории, приближающейся к странному аттрактору для значений параметров $L_A = 3$, $L_B = 1$, $r = 0.001$ и $\beta = 4.0829$. Как видно на рисунке временные осцилляции максимального значения концентрации радикалов и координаты максимума растут с увеличением β от 4.08 для рис. 2.32 до 4.0829 для рис. 2.35. Эти осцилляции сопровождаются снижением средней скорости пламени, \bar{c} , и ростом осцилляций моментальной скорости волны в бегущей системе отсчета, $\tilde{c} = d\xi_{max}/dt$. Например, для

значений параметров, соответствующих хаотическому режиму, изображенному на рис. **2.35** (а), средняя скорость пламени $\bar{c} = 0.01587$, в то время как скорость бегущей волны горения для тех же значений параметров $c = 0.01733$. Это так же видно на рис. **2.35** (с) и его увеличенной версии, рис. **2.35** (d), где построена зависимость c от β . На рис. **2.35** (с) устойчивая ветвь показана с помощью сплошной линии, а пунктирная линия представляет неустойчивое решение в виде бегущей волны. На рис. **2.35** (d) сплошная линия соответствует численным результатам, а пунктирная показывает воображаемое изображение ветвей, которые теряют устойчивость в результате бифуркации удвоения периода. На увеличенном рисунке **2.35** (d) отчетливо видна последовательность бифуркаций удвоения периода.

Следует отметить, что для ситуации, отображенной на рис. **2.35** (а), моментальная скорость вдоль направления распространения волны горения достигает значений $\tilde{c}_{max} = 0.016$, а в обратном направлении минимум скорости равен $\tilde{c}_{min} = -0.007$. Подобные изменения в скорости распространения волны горения, происходят при изменении контрольного параметра β от величины равной 4.0703 для бифуркации Андронова-Хопфа, до 4.0829, соответствующей хаотическому режиму, т.е. на примерно 0.3% своего значения.

При дальнейшем увеличении энергии активации наблюдается резкое изменение динамики системы, как это продемонстрировано на рис. **2.35** (b) для $\beta = 4.0831$. После того, как проекция траектории на плоскость w_{max} от ξ_{max} описывает несколько витков в области, где ожидается расположение странного аттрактора, она уходит к точке с $w_{max} = 0$. Другими словами, решение уравнений (2.3) приближается к стационарному распределению $u(x, t) = 0$, $v(x, t) = 1$, $w(x, t) = 0$, соответствующему затуханию. Тот же сценарий наблюдается при $L_A \in (1, 10]$. Для всех чисел Льюиса для топлива, L_A , затухание происходит вблизи значений параметров, при которых рождается хаотический режим горения, так, что его ширина может быть оценена по порядку величины равной $\beta_\infty - \beta_3$.

2.7.3. Переходный хаос

Как показано в предыдущем пункте, при пересечении границы хаотической области в пространстве параметров в фазовом пространстве системы рождается странный аттрактор. Для того, чтобы исследовать его свойства мы численно рассчитываем значение максимального показателя Ляпунова, σ [193, 194]. На рис. **2.36** построена зависимость σ от β при $L_A = 10.0$, $L_B = 1$, $r = 0.001$ и $u_a = 0.0$. На графике показана численная ошибка, соответствующая стандартному отклонению расчета σ . Значение числа Льюиса для топлива фиксировано равным $L_A = 10.0$ в иллюстративных целях, поскольку расстояние между последовательными бифуркациями удвоения периода, границ хаоса и затухания в пространстве параметров является наибольшим из рассмотренных в данном случае. Можно сделать оценку критического значения энергии активации по критерию универсальности Фейгенбаума, как это обсуждается в предыдущем пункте, что дает $\beta_\infty = 4.14369$. Эта оценка очень близка к результатам численного счета на рис. **2.36**, где видно, что появление хаотического режима происходит между $\beta = 4.144371$, для которого $\sigma = 0$, и $\beta = 4.144372$, для которого σ положительно. Следовательно, оценка критических значений параметров для появления хаоса по критерию Фейгенбаума очень точна для исследуемой модели. При энергиях активации, превышающих критическое значение, σ становится положительным и растет с дальнейшим увеличением β , что доказывает хаотический характер пульсаций волн горения и динамики системы.

Дальнейшее увеличение β до приблизительно 4.1444 приводит к резкому изменению динамики системы, т.е. к затуханию распространения пламени, как описано выше. В пространстве параметров системы всегда существует регулярный аттрактор, связанный с состоянием не прореагировавшей смеси, при котором реакция находится в замороженном состоянии и температура равна температуре окружающей среды. Это состояние имеет в фазовом пространстве свой бассейн притяжения и при некоторых значениях параметров он становится связанным с бассейном притяжения странного аттрактора. В результате пространственно-временной хаос коллапси-

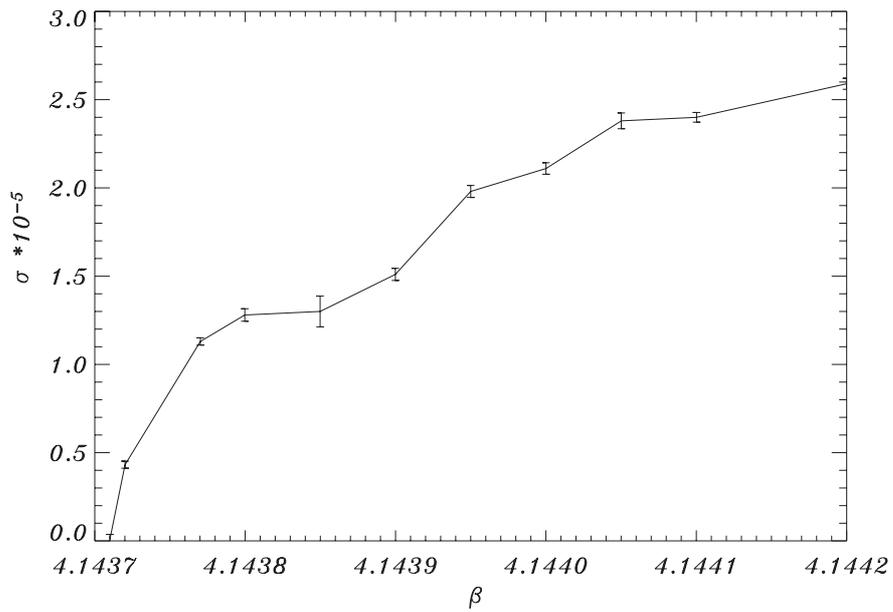


Рис. 2.36. Максимальный показатель Ляпунова, σ , как функция β при $L_A = 10.0$, $L_B = 1$, $r = 0.001$ и $u_a = 0.0$.

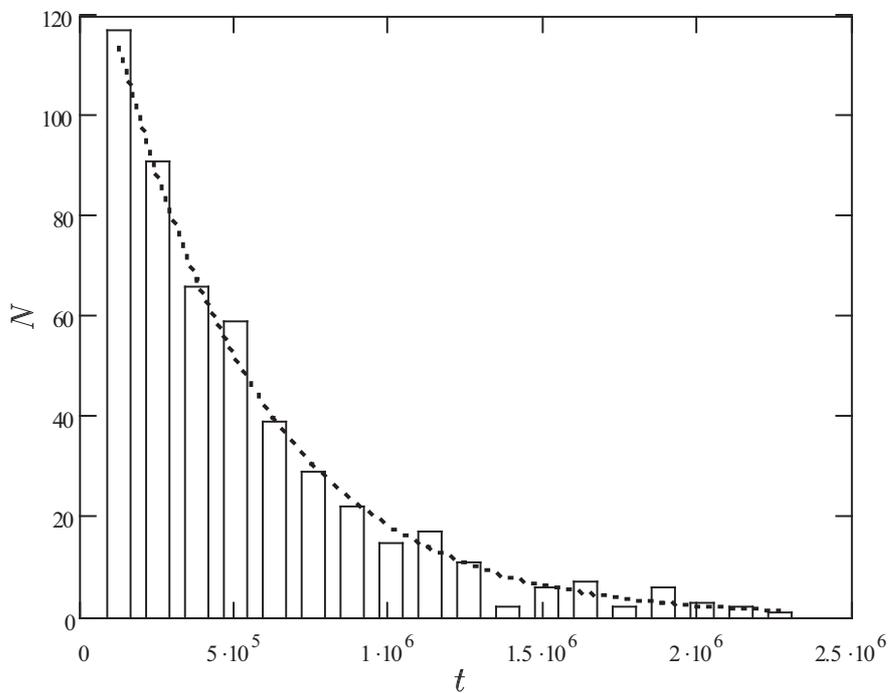


Рис. 2.37. Зависимость N от времени t при $L_A = 10$, $L_B = 1$, $\beta = 4.14435$, $r = 0.001$ и $u_a = 0.0$. Гистограмма представляет данные, полученные прямым интегрированием (2.3), а пунктирная линия - это результат численной аппроксимации.

рует и траектории, делая некоторое количество витков в области, занимаемой ранее странным аттрактором, выходят в бассейн притяжения регулярного аттрактора и стремятся к состоянию покоя, связанному со свежей смесью. Такой тип поведения известен как переходный хаос и встречается в различных динамических системах, включая системы типа реакция-диффузия [195, 196].

Кризис хаотических осцилляций происходит скачкообразным и случайным образом. Мы исследовали статистические свойства этого процесса. Для заданных фиксированных значений параметров решаются уравнения (2.3) при различных начальных условиях, взятых внутри бассейна притяжения странного аттрактора, и оценивается время жизни пульсирующих решений до наступления затухания. На рис. **2.37** построена зависимость числа событий (затуханий) от времени интегрирования в виде гистограммы, т.е. ось времени разбивается на равные отрезки продолжительностью $\Delta T = 1.26 \times 10^5$ и считается число событий, произошедших за этот интервал времени. Параметры берутся равными $L_A = 10$, $L_B = 1$, $\beta = 4.14435$, $r = 0.001$ и $u_a = 0.0$. Полное число попыток превосходит 500 для результатов, показанных на рис. **2.37**. Зависимость $N(t)$ имеет характер экспоненциального распределения, которое описывает время между событиями в случайном Пуассоновском процессе. Линейная регрессия позволяет получить среднее время жизни, которое равно $\tau = 4.75 \times 10^5$. Соответствующий коэффициент корреляции Пирсона составляет 0.94. На рис. **2.37** так же пунктирной линией показаны результаты статистической обработки данных численного интегрирования в виде экспоненциального распределения. С увеличением β среднее время жизни распространяющегося решения быстро затухает. Даже небольшое изменение энергии активации вызывает существенный сдвиг величины τ : при $\beta = 4,14435$ значение τ равно 4.75×10^5 , при $\beta = 4,144375$ значение τ составляет $3,1 \times 10^5$, а при $\beta = 4,1444$ оно снижается до $2,35 \times 10^5$. Подобная высокая чувствительность к изменениям контрольных параметров типична для переходных и сверхпереходных процессов [196]. Однако, прояснение детальных характеристик переходного хаоса является очень трудоемкой счетной задачей и выходит за рамки данной работы.

§ 2.8. Двухмерная устойчивость пламени и стоячие волны горения

В этом пункте результаты анализа линейной устойчивости волн горения обобщены на двухмерный неадиабатический случай. Задача линейной устойчивости модифицируется соответственно [111, 197]. Решение ищем в виде $u(\xi, t) = U(\xi) + \epsilon\phi(\xi) \exp(\lambda t + iky)$, $v(\xi, t) = V(\xi) + \epsilon\psi(\xi) \exp(\lambda t + iky)$ и $w(\xi, t) = W(\xi) + \epsilon\chi(\xi) \exp(\lambda t + iky)$, где $[U(\xi), V(\xi), W(\xi)]$ представляет бегущую волну горения, члены пропорциональные малому параметру ϵ - это линейное возмущение, λ является спектральным параметром, определяющим временную эволюцию возмущения, k - это волновое число, задающее структуру возмущения в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны. Подставляя это разложение в (2.3), оставляя только члены, пропорциональные первому порядку по ϵ , и вводя вектор функцию с элементами $\mathbf{v}(\xi) = [\phi, \psi, \chi, \phi_\xi, \psi_\xi, \chi_\xi]^T$, мы получаем

$$\mathbf{v}_\xi = \hat{A}(\xi, \lambda, k)\mathbf{v}, \quad (2.49)$$

где

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{I} \\ \hat{H}(\xi, \lambda) + k^2\hat{I} & \hat{C} \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \lambda + h & 0 & -r \\ \beta L_A \frac{VW}{U^2} e^{-1/U} & \beta L_A W e^{-1/U} + L_A \lambda & \beta L_A V e^{-1/U} \\ -\beta L_B \frac{VW}{U^2} e^{-1/U} & -\beta L_B W e^{-1/U} & -L_B(\beta V e^{-1/U} - \lambda - \beta r) \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & -cL_A & 0 \\ 0 & 0 & -cL_B \end{bmatrix}, \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Задача линейной устойчивости решается нахождением дискретного спектра на комплексной плоскости с помощью метода функции Эванса

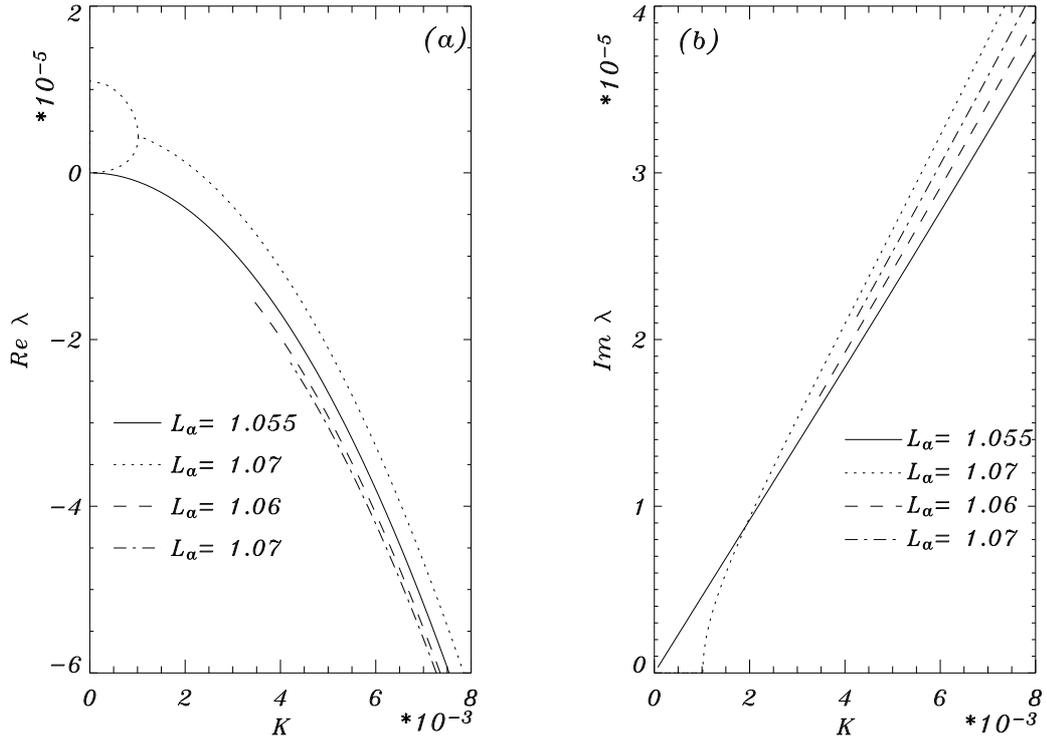


Рис. 2.38. Дисперсионное соотношение $Re\lambda(k)$ (рис. а) и $Im\lambda(k)$ (рис. б) для $L_B = 1$, $\beta = 3.85$, $r = 10^{-3}$, $h = 10^{-6}$ и различных значений L_A .

[198]. В отличие от одномерной задачи (2.36), для которой дискретный спектр состоит из множества точек при фиксированных значениях параметров, в двухмерной задаче (2.49) мы получаем зависимости $\lambda(k)$ или дисперсионные соотношения. Типичные дисперсионные соотношения приведены на рис. 2.38 – 2.40, на которых проиллюстрированы различные возможные сценарии потери устойчивости. Для большей ясности, на этих рисунках показана только часть плоскости $(Im\lambda, k)$, поскольку полное дисперсионное соотношение всегда состоит из комплексно сопряженных частей, которые могут быть получены отражением $Im\lambda(k)$ относительно оси k .

2.8.1. Анализ дисперсионных соотношений

На рис. 2.38 параметры взяты равными $L_B = 1$, $\beta = 3.85$, $r = 10^{-3}$, $h = 10^{-6}$, а L_A варьируется, как отображено в подписях к рисунку. Для быстрой ветви решений и $L_A = 1.07$ дисперсионное соотношение показано пунктирно-точечной линией. В этом случае параметры взяты достаточно

далеко от условия затухания бегущей волны. Как видно на рис. **2.38** (а) дисперсионное соотношение имеет отрицательную действительную часть для всех значений k . Это означает, что соответствующая бегущая волна горения устойчива. Следует отметить, что $\lambda(k)$ существует для всех k , превышающих некоторое значение, k_g , и, следовательно, дисперсионное соотношение имеет щель при волновых числах, меньше чем k_g , при которых дисперсионное соотношение не существует. Это связано с бифуркацией, описанной в [199], которая вызвана поглощением дискретного спектра непрерывным спектром при конечном критическом значении волнового числа k_g .

С уменьшением L_A вдоль быстрой ветви решений мы приближаемся к условию затухания, что сопровождается стягиванием щели в дискретном спектре, т.е. k_g становится меньше в то время, как действительная часть дисперсионного соотношения остается отрицательной при всех k . Это проиллюстрировано на рис. **2.38** пунктирной кривой для $L_A = 1.06$ (быстрая ветвь решений). Когда число Льюиса для топлива приближается к пределу затухания, $L_A \rightarrow L_A^{ext} \approx 1.05465$, вдоль быстрой ветви решений, щель в спектре исчезает, $k_g \rightarrow 0$, дисперсионное соотношение восстанавливается для всех значений k , как это показано на рис. **2.38** с помощью сплошной линии. Следует отметить, что зависимость $Re\lambda(k)$ становится касательной к оси k , а $Im\lambda(k) = 0$ при $k = 0$, сигнализируя о последующем изменении спектральных характеристик при дальнейшем уменьшении L_A и переходе с быстрой на медленную ветвь решений через бифуркацию складки. Поведение дисперсионного соотношения при $k = 0$ в точке бифуркации складки, указывает на то, что в этом случае существует дважды вырожденная точка дискретного спектра $\lambda(0) = 0$. При изменении L_A и переходе на медленную ветвь решений одна из действительных точек дискретного спектра при $k = 0$ сдвигается из начала координат так, что $Re\lambda(0) > 0$ и $Im\lambda(0) = 0$, в то время, как другая остается в нуле комплексной плоскости. Закрепленная на этих двух точках дискретного спектра, для малых волновых векторов появляется чисто действительная часть дисперсионного соотношения, которая состоит из двух ветвей. Эти ветви сходятся и совпадают при некотором волновом числе и при больших значениях k за-

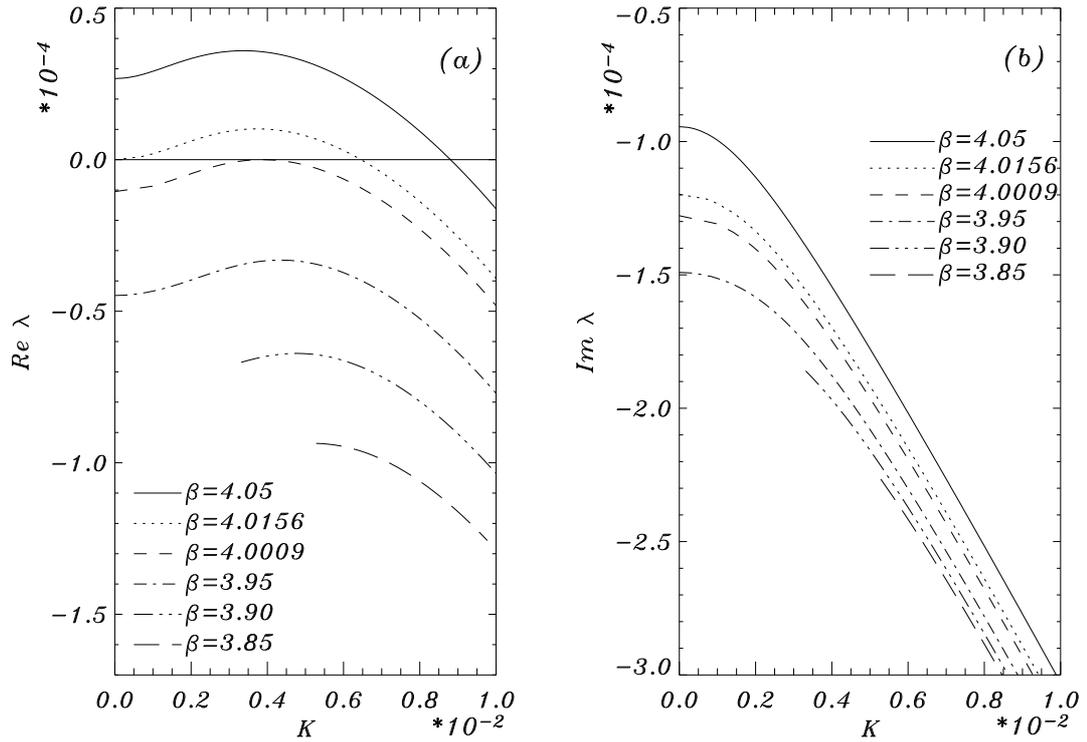


Рис. 2.39. Дисперсионное соотношение $Re\lambda(k)$ (рис. а) и $Im\lambda(k)$ (рис. б) для $L_A = 2$, $L_B = 1$, $r = 10^{-3}$, $h = 10^{-6}$ и различных значений β .

меняются парой комплексно сопряженных $\lambda(k)$ соотношений с ненулевыми мнимыми частями. Эта ситуация показана на рис. 2.38 с помощью точечной кривой для $L_A = 1.07$ на медленной ветви решений. Таким образом, переход с быстрой на медленную ветви решений сопровождается потерей устойчивости в точке бифуркации складки. При этом неустойчивость носит одномерный характер, поскольку доминирующая часть дисперсионного соотношения соответствует планарному равномерному возмущению с $k = 0$ и $Im\lambda = 0$.

Выше мы рассмотрели случай, когда значения L_A близки к единице. Однако, для достаточно больших L_A наблюдается другой сценарий потери устойчивости бегущих волн горения. На рис. 2.39 и 2.40 дисперсионные соотношения построены при числе Льюиса для топлива взятого равным $L_A = 2$, в то время, как остальные параметры фиксированы $L_B = 1$, $r = 10^{-3}$, $h = 10^{-6}$, а энергия активации, β , варьируется. На рис. 2.39 рассмотрена быстрая ветвь решений вдалеке от условия затухания. Для $\beta = 3.85$ дисперсионное соотношение показано линией с длинной штри-

ховкой и наблюдается щель в спектре для малых значений волнового числа. С увеличением β , щель в дисперсионном соотношении уменьшается и при некотором значении β она исчезает как показано на рисунке с помощью пунктирно-дважды-точечной и пунктирно-точечной линии, построенных для $\beta = 3.90$ и 3.95 , соответственно. Для $\beta = 3.95$ устанавливается непрерывное дисперсионное соотношение, существующее для всех значений k . Важно отметить, что зависимость $Re\lambda$ от k имеет один максимум при некотором значении волнового числа, k_{max} . Дальнейшее увеличение энергии активации приводит к росту максимума $Re\lambda(k)$ и при некотором критическом значении $\beta \approx 4.0009$ график касается оси k в точке $k = k_{max}$, как показано на рис. **2.39** пунктирной кривой. Это соответствует потере устойчивости бегущей волны горения по отношению к волновой неустойчивости, которая может быть охарактеризована определенными масштабами длины и времени, связанными с величинами обратными k_{max} и $Im\lambda(k_{max})$, соответственно. Дальнейший сдвиг в пространстве параметров в сторону более высоких значений β ведет к тому, что $Re\lambda(k_{max})$ становится положительным числом и появляется область значений k , включающая k_{max} , для которых бегущая волна горения теряет устойчивость по отношению к соответствующим линейным возмущениям. Важно отметить, что в то время как пламя становится неустойчивым по отношению к двумерным возмущениям с определенными волновыми числами, оно по-прежнему устойчиво по отношению к плоским продольным модам задачи (2.36) и (2.49). Говоря математически строго, $Re\lambda(0) < 0$. Такая ситуация сохраняется до тех пор, пока β не достигнет критического значения $\beta \approx 4.0156$, соответствующего бифуркации Андронова-Хопфа. Этот случай продемонстрирован на рис. **2.39** с помощью точечной линии, где отчетливо видно, что $Re\lambda(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$, в то время, как $Im\lambda(0) > 0$. После того, как мы пересекаем кривую, соответствующую критическим параметрам для бифуркации Андронова-Хопфа, действительная часть дисперсионного соотношения становится положительной при $k = 0$, что показано на рис. **2.39** сплошной кривой, построенной для $\beta = 4.05$.

На рис. **2.40** представлены результаты дальнейшего исследования спектральных свойств задачи линейной устойчивости бегущих волн горе-

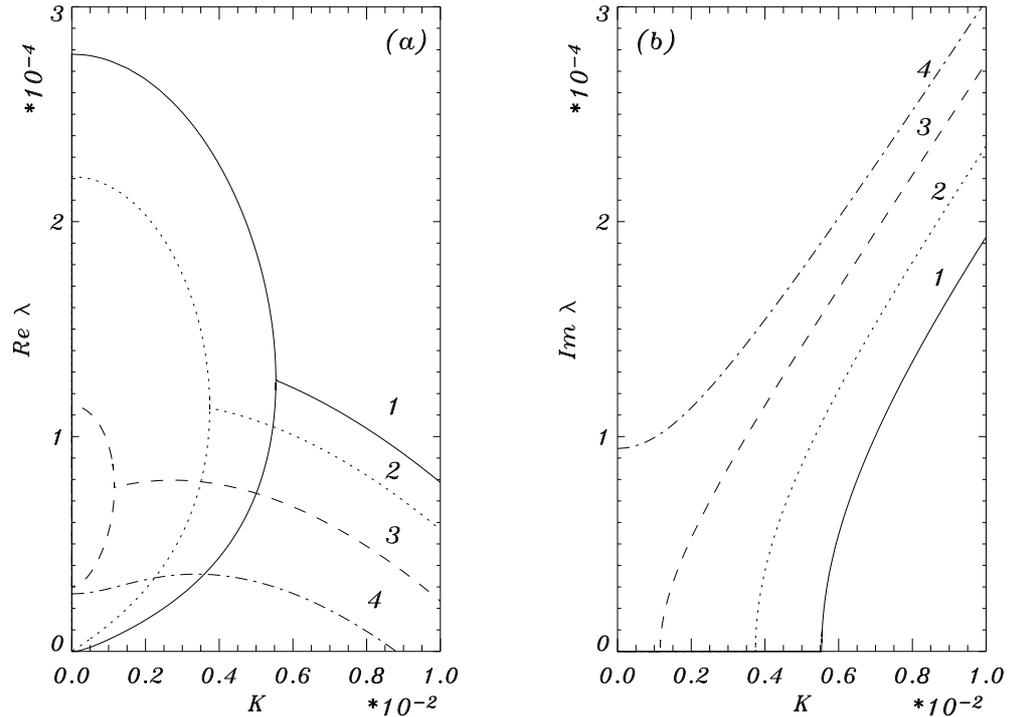


Рис. 2.40. Дисперсионное соотношение $Re\lambda(k)$ (рис. а) и $Im\lambda(k)$ (рис. б) для $L_A = 2$, $L_B = 1$, $r = 10^{-3}$, $h = 10^{-6}$ и различных значений энергии активации на быстрой ветви решений $\beta = 4.05$ (кривая 1) и 4.10 (кривая 2), в точке поворота $\beta = 4.11970$ (кривая 3) и на медленной ветви решений $\beta = 4.089$ (кривая 4).

ния. Кривая 4 на рис. 2.40 повторяет дисперсионное соотношение, построенное на рис. 2.39 сплошной линией, соответствующей неустойчивому решению на быстрой ветви. По мере продвижения в пространстве параметров в сторону точки затухания вдоль быстрой ветви решений, поведение дисперсионного соотношения меняется. Зависимость λ от k становится чисто действительной для интервала длин волн от нуля до некоторого значения, что показано на рисунках кривой 3. Это спектральное преобразование имеет в своей основе одномерный механизм и вызвано слиянием пары комплексно сопряженных точек дискретного спектра на действительной оси через бифуркацию типа седло-узловой при $k = 0$. При изменении β эти точки приближаются к действительной оси так, что $Re\lambda > 0$ и $Im\lambda \rightarrow 0$. Затем они сталкиваются и расходятся вдоль действительной оси в виде пары действительных точек дискретного спектра. С точки зрения двумерного анализа, эта бифуркация приводит к рождению пары чисто действительных ветвей дисперсионного соотношения ($Im\lambda(k) = 0$), которые выходят из этих двух точек дискретного спектра одномерной задачи при

$k = 0$ и формируют замкнутую полу-петлю на графике $Re\lambda$ от k с точкой поворота на правом конце при $k > 0$, как показано пунктирной кривой 3. В точке поворота две ветви дисперсионного соотношения входят друг в друга и при больших k это приводит к трансформации дисперсионного соотношения из действительного в пару комплексно сопряженных ветвей.

Появление чисто действительных частей дисперсионного соотношения так же имеет важные последствия: при этом тип доминирующей неустойчивости трансформируется из двухмерного волнового в равномерный плоский, который полностью описывается одномерным анализом устойчивости (2.36). Дальнейшее увеличение β в сторону точки бифуркации складки вдоль быстрой ветви решений не приводит к качественному изменению дискретного соотношения. По достижении точки поворота одна из точек дискретного спектра одномерной задачи устойчивости (2.36) совпадает с началом координат комплексной плоскости, приводя к тому, что одна из действительных ветвей дисперсионного соотношения закрепляется в нуле комплексной плоскости при $k = 0$. Это показано на рис. 2.40 с помощью кривой, отмеченной 2, построенной для точки поворота зависимости скорости бегущей волны от энергии активации. При переходе на медленную ветвь решений зависимость λ от k проиллюстрирована кривыми 1 на рис. 2.40. Видно, что для медленной ветви решений доминирующая неустойчивость носит равномерный и одномерный характер.

2.8.2. Диаграмма устойчивости и пространственно-временные характеристики неустойчивости

Результаты анализа линейной устойчивости резюмированы на рис. 2.41 (а), где на плоскости $\log_{10}L_A$ от β показаны критические значения параметров для появления волновой неустойчивости, бифуркаций Андронова-Хопфа и складки. Для каждого набора параметров, изображенных на рисунке, пунктирной линией представлены критические значения параметров для затухания (или бифуркации складки). Всюду на плоскости параметров выше данных кривых существуют быстрые и медленные ветви решений в виде бегущей волны, распространяющиеся с разной скоростью. Эти ветви входят одна в другую в точке затухания и решения в виде

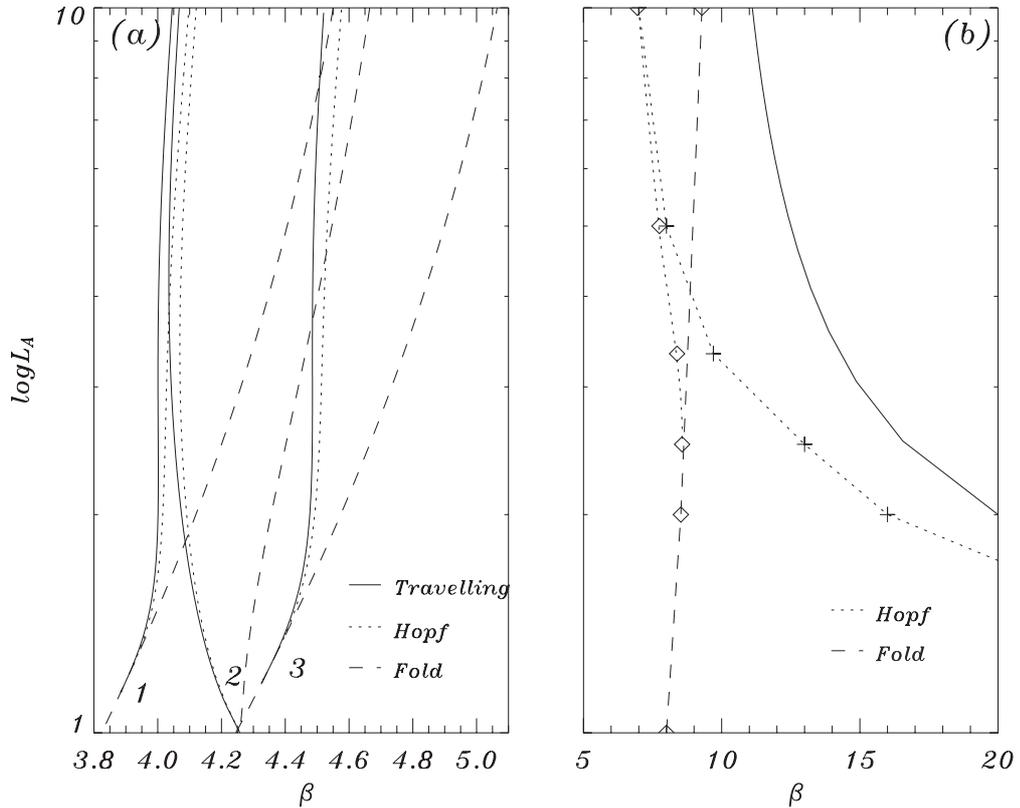


Рис. 2.41. На рисунке (а) показана диаграмма устойчивости на плоскости параметров $\log_{10} L_A$ от β при $L_B = 1$ и различных значениях h и r : $h = 10^{-6}$, $r = 10^{-3}$ кривая 1; $h = 0$, $r = 10^{-3}$ кривая 2; и $h = 10^{-6}$, $r = 5 \times 10^{-4}$ кривая 3. Сплошные, точечные и пунктирные линии представляют критические значения параметров для появления волновой неустойчивости, бифуркации Андронова-Хопфа и складки, соответственно. На рисунке (б) в тех же координатах приведена диаграмма устойчивости для одноступенчатой модели. Ромбы, соединенные точечной кривой и пунктирная линия представляют критические значения параметров для бифуркаций Андронова-Хопфа и складки для неадиабатической модели с $h = 10^{-6}$, соответственно. Кресты, соединенные точечной линией, показывают критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа, а сплошная линия изображает результаты асимптотического анализа для адиабатического случая ($h = 0.0$).

бегущей волны перестают существовать для параметров, расположенных ниже пунктирных кривых. Анализ дисперсионных кривых показывает, что медленная ветвь решений всегда неустойчива, поэтому в дальнейшем мы обсуждаем только быструю ветвь решений.

Точечные линии соответствуют значениям параметров, при которых происходит бифуркация Андронова-Хопфа в одномерном случае. Таким образом для плоских продольных возмущений быстрая ветвь устойчива для области параметров, находящейся слева от точечной кривой для бифуркации Андронова-Хопфа, а справа от этой кривой в одномерной задаче возникают пульсации волны горения. Сплошные линии отображают нейтральную границу устойчивости в двухмерной формулировке задачи. В этом случае волны горения устойчивы для параметров в области слева от сплошных кривых и испытывают волновые неустойчивости при значениях параметров расположенных справа от сплошных кривых.

В неадиабатическом случае диаграмма устойчивости построена кривыми, обозначенными номером 1, для $h = 10^{-6}$ и $r = 10^{-3}$. Как видно на рис. 2.41 (а) кривые для затухания и нейтральной границы двухмерной устойчивости пересекаются: точка пересечения этих кривых является бифуркацией ко-размерности два. Мы будем называть ее двухмерной бифуркацией Богданова-Такенса. Число Льюиса для топлива, соответствующее двухмерной бифуркации Богданова-Такенса, L_A^{BT2D} , больше единицы, как показано на рис. 2.41 (а). Это объясняет то, что возможны два различных сценария потери устойчивости, как это описано в предыдущем пункте. Если $L_A > L_A^{BT2D}$, появляющиеся неустойчивости имеют волновой характер. Дисперсионные соотношения при пересечении нейтральной границы устойчивости в этом случае имеют вид аналогичный изображенному на рис. 2.39 и 2.40. Другой сценарий потери устойчивости продемонстрирован на рис. 2.38 и реализуется при $L_A < L_A^{BT2D}$. В этом случае медленная ветвь решений устойчива, а плоская равномерная неустойчивость появляется в точке бифуркации складки при переходе с быстрой на медленную ветви решений в виде бегущей волны.

Кривые, помеченные цифрой 2, представляют адиабатический случай $h = 0$ и $r = 10^{-3}$, для которого одномерная устойчивость детально исследо-

вана ранее в этой главе, где установлено, что при пересечении в пространстве параметров критических значений для бифуркации Андронова-Хопфа бегущая волна горения теряет устойчивость по отношению к плоским пульсирующим возмущениям при любых значениях $L_A > 1$. Это показано на рис. **2.41** (а) с помощью точечной кривой, отмеченной цифрой 2. Одномерная нейтральная граница устойчивости, соответствующая бифуркации Андронова-Хопфа, встречается с кривой затухания при $L_A = 1$. Эта происходит в точке бифуркацией ко-размерности два - бифуркации Богданова-Тakens с $L_A^{BT1D} = 1$, которую мы будем называть одномерной. Здесь мы так же обобщаем результаты прошлой главы на случай двухмерной геометрии. Результаты продемонстрированы на рис. **2.41** (а) сплошной линией, отмеченной двойкой, которая соответствует нейтральной границе устойчивости. Как видно на диаграмме в адиабатическом случае доминирующим механизмом потери устойчивости является волновая двухмерная неустойчивость.

Влияние вариации параметра рекомбинации, r , на устойчивость бегущей волны горения так же исследована. Результаты представлены на рис. **2.41** (а) кривыми, отмеченными цифрой 3. Как видно на диаграмме изменение r не меняет качественно сценарий потери устойчивости решений в виде бегущей волны. Однако, уменьшение r сдвигает диаграмму устойчивости в сторону больших значений β и наоборот.

Для удобства сравнения результатов на рис. **2.41** (b) построены диаграммы устойчивости на плоскости параметров $\log_{10}L_A$ от β для одноступенчатой адиабатической и неадиабатической модели. Асимптотические результаты построены на основе анализа, проведенного в работе [55]. Следует отметить, что в литературе существуют и другие подходы для решения задачи линейной устойчивости для одноступенчатой модели в рамках приближения высокой энергии активации. Однако, для наших целей достаточно ограничиться этими результатами. Кресты, соединенные точечной кривой, и сплошная линия представляют численные и асимптотические результаты для адиабатической одноступенчатой модели, соответственно. Ромбы, соединенные точечной и пунктирной линиями показывают критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа и склад-

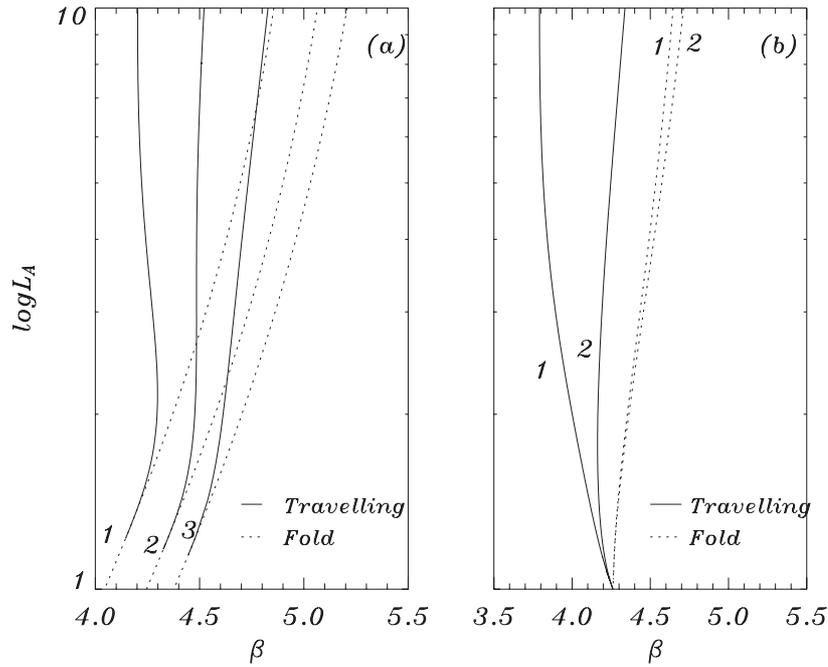


Рис. 2.42. Диаграмма устойчивости на плоскости параметров L_A от β при $L_A = 1$, $r = 5 \times 10^{-4}$, $h = 10^{-6}$ (рисунок а) и $h = 0$ (рисунок б). Нейтральная граница устойчивости показана сплошными линиями, а критические значения параметров для бифуркации складки построены точечными линиями. На рис. (а) L_A отображается в логарифмическом масштабе и представлены результаты для $L_B = 0.3, 1.0$ и 4.0 , отмеченные цифрами 1, 2 и 3, соответственно. На рис. (б) ($h = 0.0$) случай $L_B = 0.3$ показан кривой 1 и $L_B = 4.0$ кривой 2, соответственно.

ки, соответственно, при $h = 10^{-6}$. Из сравнения рис. 2.41 (а) и (б) видно, что в неадиабатическом случае результаты одноступенчатой и двухступенчатой модели Зельдовича-Баренблатта качественно согласуются, хотя количественная разница велика. В обоих случаях бифуркация Богданова-Тakensа расположена при числах Льюиса для топлива, превышающих единицу. При уменьшении параметра тепловых потерь до нуля в одноступенчатой модели бифуркация Богданова-Тakensа сдвигается к пределу $L_A = 1$ и $\beta \rightarrow \infty$, в то время как, для двухступенчатой модели, рассматриваемой здесь, $L_A^{BT1D} \rightarrow 1$, а соответствующее значение энергии активации остается конечным.

На рис. 2.42 представлены результаты анализа устойчивости для различных значений L_B для адиабатического (б) и неадиабатического (а) случаев. Диаграммы устойчивости показывают критические значения параметров для бифуркации складки и нейтральную границу устойчивости на плоскости L_A от β . В адиабатическом режиме ($h = 0$) доминирующая неустойчивость имеет волновой характер и проявляется для всего рассмат-

риваемого интервала изменения числа Льюиса для топлива $1 < L_A < 10$. При стремлении числа Льюиса для топлива к единице, кривые для появления волновой неустойчивости и бифуркации складки сходятся и пересекаются в точке бифуркации Богданова-Такенса, расположенной при $L_A = 1$. Следует отметить, что как одномерная так и двухмерная точки бифуркации Богданова-Такенса совпадают в адиабатическом случае. Для больших значений L_A нейтральная граница устойчивости сдвигается в сторону более экзотермической реакции, т.е. меньших значений безразмерной энергии активации, β . Влияние изменения L_B на диаграмму устойчивости проиллюстрировано для двух значений $L_B = 0.3$ и 4.0 . Как видно на рис. 2.42 (b) варьирование L_B существенно модифицирует положение нейтральной границы устойчивости и вместе с тем, слабо отражается на критических значениях параметров для бифуркации складки. Уменьшение L_B приводит к существенному сдвигу кривой для появления волновой неустойчивости в сторону меньших значений β , таким образом делая волны горения менее устойчивыми.

Учет в модели тепловых потерь изменяет ситуацию, как это показано на рис. 2.42 (a) для $h = 10^{-6}$. Точка пересечения кривых для появления волновой неустойчивости и бифуркации складки сдвигается в сторону чисел Льюиса для топлива больших единицы, $L_A^{BT2D} > 1$. Это означает, что для $L_A > L_A^{BT2D}$, доминирующей неустойчивостью будет волновая неустойчивость, однако при $L_A < L_A^{BT2D}$ появляется окно с доминирующей равномерной плоской неустойчивостью. Изменение L_B так же не меняет качественно эту картину потери устойчивости, вместе с тем, диаграмма устойчивости существенно сдвигается в сторону меньших значений β при снижении L_B .

Проведенный выше анализ устойчивости ясно показывает, что быстрая ветвь решений в виде бегущей волны либо устойчива, либо теряет устойчивость по отношению к волновым возмущениям. Волновая неустойчивость характеризуется волновым числом, k , которое определяет пространственную структуру возмущения в направлении, поперечном направлению распространения волны, и частотой, $\omega \equiv Im\lambda$, которая определяет временную эволюцию возмущения, а так же его структуру в продольном

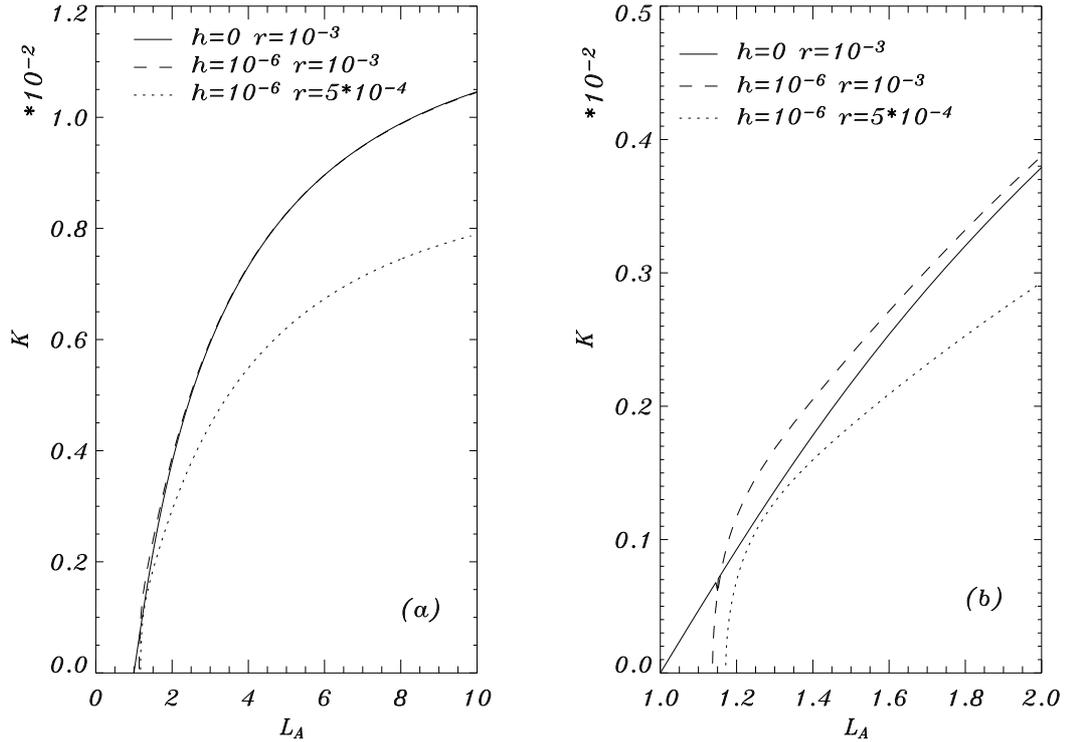


Рис. 2.43. Зависимость волнового числа доминирующей неустойчивости, k_{max} , от L_A при $L_B = 1$ и различных значениях r и h .

направлении. Возмущение с $k = k_{max}$ представляет доминирующую моду возмущения, которая имеет максимальный инкремент экспоненциального роста. На рис. 2.43 и 2.44 показано поведение k_{max} и $\omega(k_{max})$. Волновое число доминирующей моды возмущения построено на рис. 2.43 (а) как функция L_A , а на рис. 2.43 (б) показан увеличенный участок этой зависимости вблизи $L_A = 1$ для того, чтобы продемонстрировать свойства волновой неустойчивости при $L_A \sim 1$. Как видно на рис. 2.43 (а), k_{max} - монотонная функция L_A как в адиабатическом, так и в неадиабатическом случае. Для больших значений числа Льюиса для топлива характерный масштаб длины доминирующей неустойчивости в поперечном направлении, k_{max}^{-1} , по порядку величины составляет 10^2 т.е. становится сравнимой с шириной зоны прогрева, которая может быть оценена как $c^{-1} \sim 10^2$. При уменьшении L_A до величин порядка 1, значение k_{max} стремится к нулю. Это означает, что доминирующая неустойчивость стремится к плоской пульсирующей одномерной моде возмущения. Поведение доминирующей неустойчивости около $L_A = 1$ показано на рис. 2.43 (б). На этом рисунке

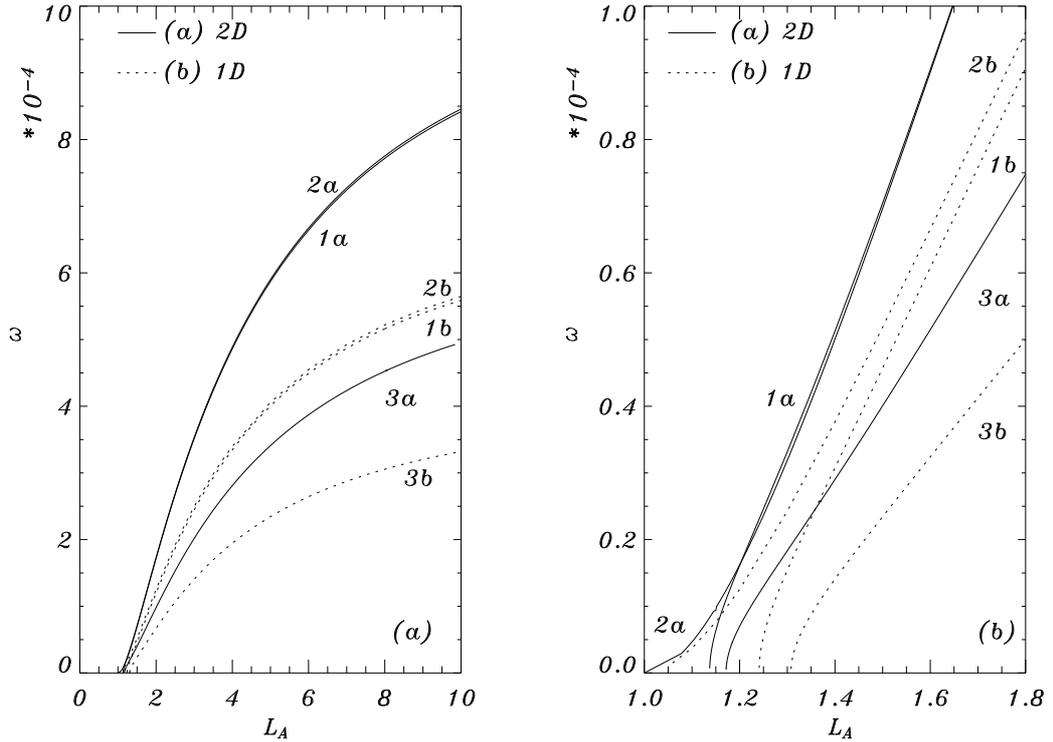


Рис. 2.44. Зависимость частоты доминирующей неустойчивости, ω , от L_A при $L_B = 1$ и различных значениях r и h : $h = 10^{-6}$, $r = 10^{-3}$ кривая 1; $h = 0$, $r = 10^{-3}$ кривая 2 и $h = 10^{-6}$, $r = 5 \times 10^{-4}$ кривая 3. Сплошная и точечная линии представляют результаты анализа двух- и одномерной устойчивости, соответственно.

видно, что в адиабатическом случае (сплошная линия) волновая неустойчивость существует и является доминирующей для всех значений L_A . При $L_A = 1$, значение k_{max} равно нулю, волновая неустойчивость исчезает и быстрая ветвь решений полностью стабилизируется. В неадиабатическом случае, показанном пунктирной линией для $h = 10^{-6}$ и $r = 10^{-3}$, ситуация меняется. При некотором $L_A = L_A^{BT2D} \approx 1.1370$, значение k_{max} обращается в ноль, что соответствует точке на рис. 2.41, где встречаются кривые критических значений для появления волновой неустойчивости и бифуркаций складки, или точке двумерной бифуркации Богданова-Тakensа. Следовательно, волновая неустойчивость существует при $L_A > L_A^{BT2D}$, а при $L_A < L_A^{BT2D}$ она исчезает. Изменение параметра r качественно не меняет данную картину, что проиллюстрировано с помощью точечной кривой, построенной для $h = 10^{-6}$ и $r = 5 \times 10^{-4}$.

Зависимость частоты осцилляций доминирующей неустойчивости, $\omega(k_{max})$, от L_A представлена на рис. 2.44 для $L_B = 1$ и различных зна-

чений h и r . Сплошная и точечная линии показывают результаты двух- и одномерного анализа устойчивости, т.е. точечная линия соответствует частоте Хопфа. На рис. 2.44 (а), графики построены для $L_A \in [1, 10]$ в то время, как на рис. 2.44 (б), показан увеличенный фрагмент рисунка (а) для того, чтобы продемонстрировать поведение кривых вблизи $L_A \sim 1$. Зависимость ω от L_A является монотонной функцией как в одномерном, так и двухмерном случае. При больших значениях L_A частота становится по порядку равной от 5×10^{-4} до 10^{-3} и за один период осцилляций волна горения проходит расстояние порядка $2\pi\omega^{-1}c \sim 100$, поэтому характерная продольная длина возмущения сравнима с шириной зоны прогрева. В противоположном пределе, $L_A \rightarrow 1$, частота доминирующей неустойчивости приближается к нулю и возмущение стремится к равномерному типу. Как видно на рис. 2.44 (б) в адиабатическом случае как частота Хопфа для одномерной модели, так и частота доминирующей волновой неустойчивости для двухмерной модели, стремятся к нулю, когда L_A становится равным единице. В отличие от этого, в неадиабатическом случае при $h = 10^{-6}$ и $r = 10^{-3}$ частота Хопфа становится равной нулю при $L_A = L_A^{BT1D} > 1$, а частота доминирующей волновой неустойчивости стремится к нулю при $L_A = L_A^{BT2D} > 1$. На рис. 2.44 видно, что $L_A^{BT2D} < L_A^{BT1D}$, поэтому двухмерная неустойчивость существует при значениях параметров, при которых бегущая волна горения устойчива по отношению к одномерным возмущениям. Изменение параметра рекомбинации, r , качественно не меняет эту картину, как это продемонстрировано на рисунке кривой 3, построенной для $h = 10^{-6}$ и $r = 5 \times 10^{-4}$.

2.8.3. Двухмерные пульсирующие решения

Далее мы исследуем свойства пульсирующих волн горения, возникающих в результате первичной бифуркации, когда мы пересекаем в пространстве параметров границу критических значений для появления волновой неустойчивости. Для этого модельные уравнения в частных производных (2.3) численно решаются на достаточно большой прямоугольной координатной области с граничными условиями (2.5), заданными на сторонах координатной сетки, ориентированных вдоль оси y и условиями нулевых

потоков для u , v , и w для длинных сторон, расположенных вдоль оси x . Длина области вдоль направления оси x выбрана достаточно большой для того, чтобы граничные условия (2.5) удовлетворялись с хорошей точностью. Размеры прямоугольной области вдоль оси y выбирались так, чтобы на нем укладывался один пространственный период поперечной структуры возмущения, который оценивается по волновому числу K , рассчитанному с помощью решения задачи линейной устойчивости, как описано в предыдущем пункте.

В качестве численного алгоритма использован метод расщепления по физическим процессам. Вначале решалась система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы изменения температуры, концентрации топлива и радикалов, за счет реакций разветвления и рекомбинации. Для этого использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка. На втором этапе решались уравнения переноса методом переменных направлений. В этом случае использовалась безусловно устойчивая схема Кранка-Николсона, обладающая вторым порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству. Начальные условия берутся в виде бегущих волн - решений системы (2.6).

Численный анализ показывает, что при пересечении в пространстве параметров критических значений для появления волновой неустойчивости, в результате первичной бифуркации рождаются пульсирующие волновые решения. Эти решения продемонстрированы на рис. **2.45**, где построено распределение концентрации радикалов, $w(x, y)$, в три последовательных момента времени $t_1 = 4000$, $t_2 = 7000$ и $t_3 = 10000$. На рис. **2.45** в иллюстративных целях показана только часть области интегрирования $x \in [200, 800]$, в то время, как полный интервал численного интегрирования составляет $x \in [0, 3000]$. Для значений параметров, $L_A = 10.0$, $L_b = 1.0$, $r = 10^{-3}$ и $h = 0$, указанных в подписи к рисунку, критическое значение энергии активации для появления волновой неустойчивости составляет $\beta = 4.068$, временной период пульсаций равен $T \approx 1.02 \times 10^4$, а пространственный период решения в направлении, поперечном направлению распространения волны, приблизительно равен 600, что хорошо согласуется с предсказанием линейного анализа устойчивости.

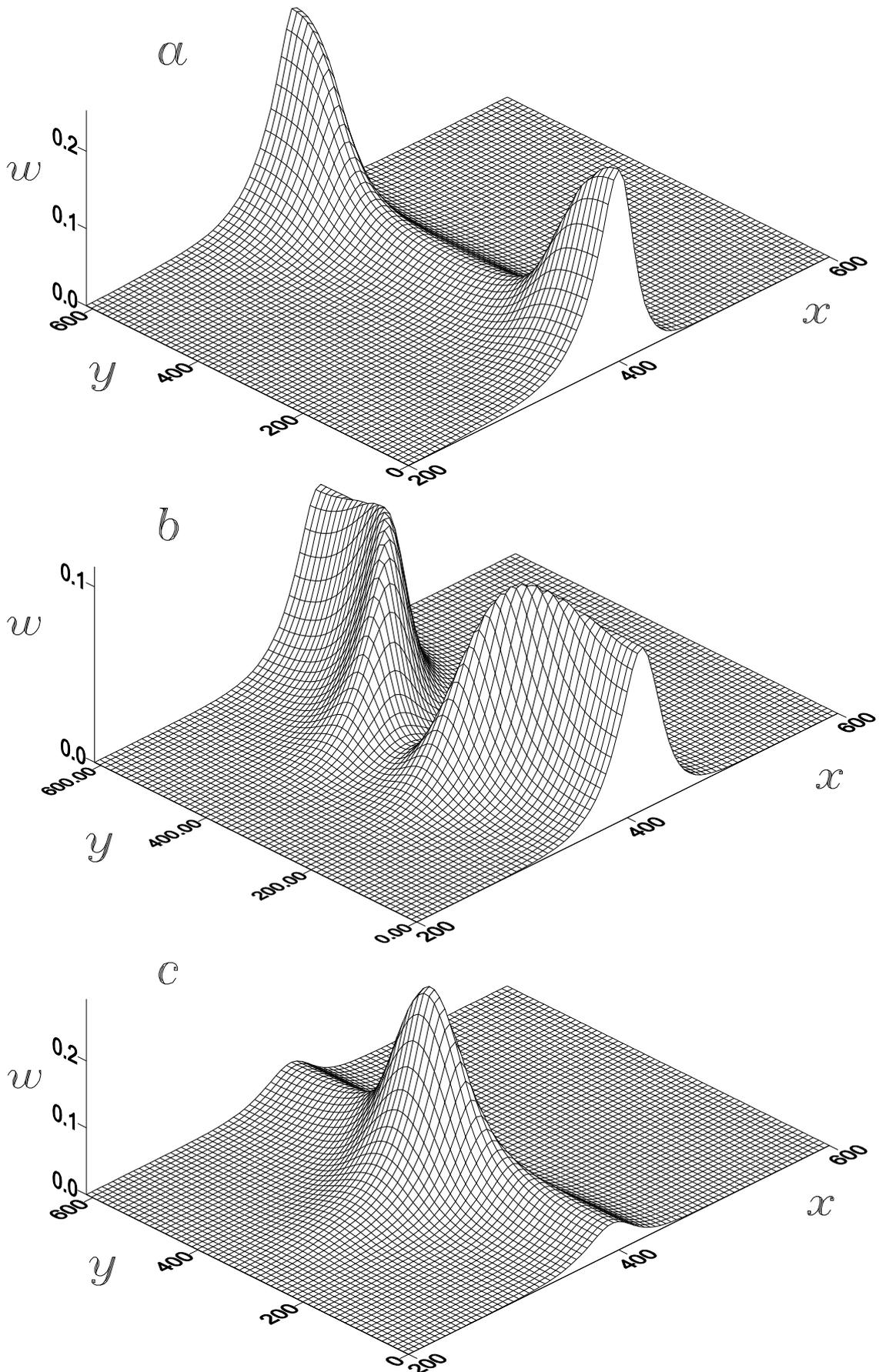


Рис. 2.45. Моментальное распределение концентрации радикалов, $w(x, y)$, взятое в три последовательных момента времени $t_1 = 4000$ на рисунке (a), $t = 7000$ на рисунке (b) и $t_3 = 10000$ на рисунке (c) при $L_A = 10.0$, $L_b = 1.0$, $\beta = 4.1$, $r = 10^{-3}$ и $h = 0$.

На рис. **2.45** по оси абсцисс координата отложена в системе отсчета, в среднем сопутствующей волне, $x - \bar{c}t$, где \bar{c} - это математическое ожидание скорости распространения пламени, т.е. усредненное за период положение волны горения не меняется со временем. Моменты времени, t_i , выбраны так, чтобы продемонстрировать характерные черты эволюции профиля радикалов за один период пульсаций. Как видно на рис. **2.45**, при пересечении нейтральной границы устойчивости в пространстве параметров, бегущая плоская волна горения претерпевает как временные осцилляции, так и фрагментацию фронта пламени в поперечном направлении. Это приводит к формированию солитонно подобных радикальных структур. На рис. **2.45(a)** эти структуры расположены на краях интервала интегрирования: $y = 0$ и $y = 600$. До тех пор, пока в этих областях есть достаточное количество топлива, концентрация радикалов в уединенных пиках растет, а максимальные значения остаются на краях области. Увеличение концентрации радикалов интенсифицирует реакцию рекомбинации и, следовательно, локальный выброс тепла, что вызывает формирование локальных максимумов температуры на краях области интегрирования. В свою очередь локальное повышение температуры ускоряет реакцию разветвления и приводит к локальному обеднению концентрации топлива. В результате рост w_{max} сменяется затуханием максимальных значений концентрации радикалов. До тех пор пока w_{max} велико рекомбинация радикалов сохраняет активность и температура продолжает расти. Это так же проиллюстрировано на рис. **2.46**, где на графике (а) ромбами, соединенными пунктирной линией, построено положение локальных максимумов w_{max} на координатной плоскости (x_{max}, y_{max}) , а на рисунке (b) показана динамика $u_{max}(t)$ и $w_{max}(t)$ при тех же значениях параметров, что и на рис. **2.45**. Следует отметить, что два пика концентрации радикалов на рис. **2.46** (b) изображают один период пульсаций. Обсуждаемая фаза в эволюции системы соответствует профилю (а) на рис. **2.45**, а на рис. **2.46** момент времени, в который взят данный профиль отмечен как t_1 . Локальное увеличение температуры сопровождается ускорением распространения пламени, что приводит к забеганию вперед положения пиков концентрации радикалов по оси x .

На некоторой стадии, когда w_{max} становится малым, тепловыделе-

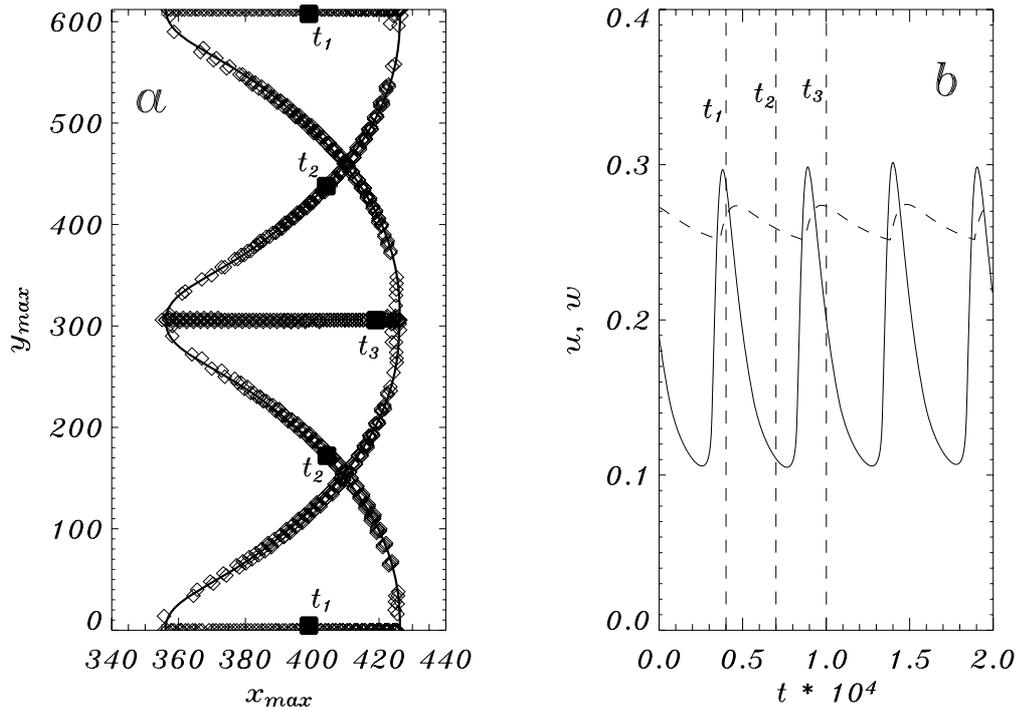


Рис. 2.46. (а) Зависимость положения локальных максимумов концентрации радикалов на плоскости y от x ; (б) Максимальное значение концентрации радикалов и температуры показаны сплошной и пунктирной линиями, соответственно. параметры взяты как на рис. 2.45. Моменты времени, в которые построены профили на рис. 2.45 отмечены большими квадратами на графиках (а) и пунктирными линиями на рисунке (б).

ние испытывает стагнацию и наблюдается затухание u_{max} . Локализованные волны радикалов больше не могут распространяться вдоль оси x , поскольку концентрация топлива существенно падает в областях максимумов w_{max} вблизи граней расчетной области $y = 0$ и $y = 600$. С другой стороны, между пиков распределения радикалов находится область вблизи линии $y = 300$, где существует избыток не сгоревшего топлива. В результате, эпицентры реакций отходят от внешних граней области интегрирования и устремляются во внутреннюю область. Эта стадия соответствует профилю концентрации радикалов, изображенному на рис. 2.45 (б), а так же части траекторий, отмеченных как ' t_2 ' на рис. 2.46 (а).

По мере перемещения пиков концентрации радикалов к центральной линии $y = 300$ вдоль этих участков траекторий величина локальных максимумов концентрации радикалов и температуры уменьшается, так же падает скорость распространения этих пиков и они начинают отставать в бегущей системе отсчета и сдвигаться в сторону меньших значений координаты x на рис. 2.46 (а). В некоторый момент времени пики концентрации

радикалов сходятся и схлопываются на линии $y = 300$. Это приводит к быстрому аддитивному эффекту увеличения локальной концентрации радикалов, что в свою очередь повышает тепловыделение и локальную температуру. В результате скорость распространения волны горения увеличивается и пик концентрации радикалов сдвигается вдоль линии $y = 300$ в сторону больших значений координаты x . Рост температуры запускает реакцию разветвления, что снова приводит к локальному потреблению топлива и падению его концентрации. Зависимость $w_{max}(t)$ достигает максимума и рост пика концентрации радикалов сменяется его падением. Эта стадия эволюции волны горения показана на рис. 2.45 (с) и отмечена как 't₃' на рис. 2.46. После одного периода осцилляций динамика повторяется периодическим образом. В наших численных расчетах за времена порядка десятков периодов пульсаций наблюдалась неизменная картина без сдвига каких-либо характеристик этих осцилляций.

§ 2.9. Выводы

В данной главе мы исследовали свойства бегущих и пульсирующих волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта с цепным двухступенчатым механизмом реакции.

Исследованы свойства автомодельных решений в одномерном адиабатическом случае. Показано, что число Льюиса для топлива имеет существенное влияние на свойства и устойчивость волн горения в то время, как вариация числа Льюиса для радикалов сказывается только количественно (но не качественно) на поведении автомодельного решения. Показано, что в зависимости от числа Льюиса для топлива скорость бегущих волн горения имеет либо суб-, либо сверхкритический характер, как функция безразмерной энергии активации. Переход между этими типами зависимости происходит при $L_A = 1$.

Установлено, что для чисел Льюиса для топлива меньше единицы скорость распространения пламени является монотонно убывающей функцией безразмерной энергии активации. Волна горения распространяется устойчиво вплоть до значений чисел Льюиса для топлива, соответствующих

щих затуханию автомодельного решения. Эффект затухания наблюдается при конечных значениях энергии активации. Приближение к границе затухания в пространстве параметров модели сопровождается падением скорости распространения волны до нуля, при этом скорость квадратично зависит от энергии активации, $c \sim (\beta - \beta_e)^2$. За границей затухания волновых решений не было найдено.

Случай числа Льюиса для топлива равного единице допускает аналитическое исследование с помощью асимптотических методов и рассматривается отдельно. Особое внимание уделяется изучению явления затухания автомодельного решения. Установлены закономерности изменения параметров системы при приближении к критическим значениям, соответствующим границе затухания в пространстве параметров. Показано, что скорость бегущей волн горения является монотонно убывающей однозначной функцией энергии активации. Скорость горения обращается в ноль при конечном значении активации $\beta = \beta_e$ при этом она приближается к нулю по линейному закону, $c \sim (\beta - \beta_e)^2$.

Для чисел Льюиса для топлива больших единицы скорость автомодельного решения является двухзначной функцией энергии активации и носит характер "С"-образной кривой. Для фиксированных значений параметров одновременно либо существует два решения - быстрое и медленное, либо решений не существует. Затухание автомодельной волны горения происходит при конечном значении энергии активации и скорости волны не равной нулю в результате бифуркации складки при значениях параметров, когда быстрая и медленная ветви решений встречаются. Медленная ветвь является монотонной возрастающей функцией β и существует в конечном интервале энергий активации. При больших значениях β медленная ветвь перестает существовать в точке бифуркации складки, а при меньших значениях β скорость пламени обращается в ноль как $c \sim (\beta - \beta_e)^2$ при приближении к критическому значению β_e . Быстрая ветвь решений является монотонно убывающей функцией энергии активации, оканчивающейся в точке бифуркации складки.

Исследована структура пламени в зависимости от изменения параметров модели. В случае, когда параметры взяты в вдальеке от точки затухания

хания (для $L_A > 1$ речь идет о быстрой ветви) реакция разветвления доминирует над реакцией рекомбинации. Фронт пламени состоит из тонкой области распада топлива с быстрой реакцией разветвления и широкой области рекомбинации с медленной реакцией обрыва цепи. В области потребления топлива максимальная концентрация радикалов достигает значения порядка $O(1)$, все топливо быстро конвертируется в радикалы и утечка топлива через зону реакции разветвления отсутствует. Реакция рекомбинации более медленная и оказывает влияние на структуру фронта горения на больших масштабах длины, приводя к формированию области рекомбинации радикалов за зоной реакции разветвления, характеризуемой плавным затуханием концентрации радикалов. Таким образом в данном случае наблюдается режим медленной рекомбинации.

Приближение в пространстве параметров к границе затухания приводит к изменению структуры пламени. Вблизи предела затухания (точки складки для $L_A > 1$ или $c = 0$ для $L_A \leq 1$) реакция рекомбинации начинает конкурировать с реакцией разветвления, концентрация радикалов становится асимптотически малой и обе реакции идут в одной области пламени. Свойства волны горения напоминают режим быстрой рекомбинации в модели Зельдовича-Линяна. Однако, в последней скорость реакции рекомбинации более чувствительна к изменению концентрации радикалов, чем скорость реакции разветвления. В результате падение концентрации радикалов приводит к тому, что скорости реакций по обоим каналам сбалансированы и в модели Зельдовича-Линяна не наблюдается затухания. Для модели Зельдовича-Баренблатта ситуация другая. Скорости двух реакций одинаково зависят от концентрации радикалов и их снижение не может изменить общий ход процесса и в результате потребление радикалов начинает доминировать над их производством и происходит затухание пламени. В случае $L_A > 1$ переход с быстрой на медленную ветвь приводит дальнейшему усилению режима быстрой рекомбинации и последующему затуханию, а при $L_A \leq 1$ затухание наступает на единственной ветви решений. Вместе со снижением концентрации радикалов, падает и количество выделяемого тепла, что отражается на не полном сгорании топлива и появлении его утечки через зону реакции.

Свойства решений в виде бегущей волны для модели Зельдовича-Баренблатта до некоторой степени напоминают свойства решений одноступенчатой неадиабатической модели горения. В частности, в обоих случаях наблюдается наличие утечки топлива через зону реакции и затухание волн горения. В этом смысле можно говорить о том, что в модели Зельдовича-Баренблатта буфер радикалов служит химическим аналогом теплообмена с окружающей средой, а реакция рекомбинации так же выступает ингибитором реакции разветвления цепи. Однако, как показывает детальное изучение сценариев затухания, поведение волн горения вблизи точки затухания коренным образом отличается для этих двух моделей, поэтому одноступенчатое приближение не может быть использовано для адекватного описания свойств пламени с цепным механизмом реакции.

Изучено влияние изменения внешней температуры на свойства бегущих волн горения. Внешняя температура является одним из наиболее легко варьируемых в эксперименте параметров. Показано, что увеличение внешней температуры приводит к росту как скорости пламени, так и области существования решений в виде бегущей волны. В то же время варьирование u_a качественно не изменяет характер зависимости s от β .

Еще одним важным параметром является отношение скоростей реакций рекомбинации и разветвления цепи, r . Анализ показывает, что увеличение r ускоряет реакцию рекомбинации радикалов и приводит к изменению структуры пламени в сторону медленного режима рекомбинации. Это в конечном итоге приводит к затуханию решения в виде бегущей волны. Верно и обратное, уменьшение r ингибирует реакцию рекомбинации, что отражается на росте концентрации радикалов и сдвигу в сторону режима медленной рекомбинации. В данном случае область существования решений в виде бегущей волны расширяется и затухание наблюдается при больших значениях энергии активации.

Изменение числа Льюиса для радикалов очень слабо влияет на положение границы затухания, в то время как увеличение числа Льюиса для топлива существенно расширяет область существования решений в виде бегущих волн и сдвигает границу затухания в сторону больших β .

Мы так же изучили влияние тепловых потерь на свойства бегущих

волн горения. В отличие от адиабатического случая, это приводит к тому, что скорость пламени становится двухзначной функцией энергии активации вне зависимости от вариации числа Льюиса для топлива и других параметров модели. Затухание наступает всегда при конечных значениях скорости волны горения и энергии активации в результате бифуркации складки. Эти результаты качественно согласуются с известными для неадиабатической одноступенчатой модели [47, 67]. Увеличение интенсивности тепловых потерь, очевидным образом, приводит к снижению скорости волны горения и сокращению области существования решений в виде бегущих волн.

Исследована устойчивость бегущих волн горения в одномерном случае. Показано, что при числах Льюиса для топлива больших единицы медленная ветвь решений всегда неустойчива, а быстрая ветвь либо устойчива, либо теряет устойчивость по отношению к пульсирующим модам возмущения в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Критические значения для бифуркации Андронова-Хопфа найдены в пространстве параметров и показано, что бифуркация Андронова-Хопфа рождается в результате бифуркации Богданова-Тakensа при $L_A = 1$, когда критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа и складки пересекаются. При L_A больше единицы нейтральная граница устойчивости сначала сдвигается в сторону меньших β , делая бегущие волны горения менее устойчивыми, а затем следует вдоль границы затухания, что имеет стабилизирующий эффект и сдвигает границу устойчивости в сторону больших β . Существенное влияние на устойчивость пламени оказывает диффузия радикалов. Исследования показали, что для более легких и подвижных радикалов (меньших L_B) волны горения менее устойчивы, а критические значения энергии активации для бифуркации Андронова-Хопфа существенно снижаются.

Увеличение u_a сдвигает как границу области существования решений в виде бегущей волны, так и нейтральную границу устойчивости в сторону больших значений безразмерной энергии активации, т.е. прогрев свежей смеси имеет стабилизирующий эффект на процесс распространения волны горения. Этот результат согласуется с выводами [74] для одноступенчатой модели. Таким образом можно заключить, что варьирование температуры окружающей среды, u_a , качественно не влияет на поведение волн горения,

хотя приводит к существенным изменениям количественных характеристик. Уменьшение параметра рекомбинации, r , и сдвиг в сторону режима медленной рекомбинации имеет такие же последствия, т.е. критические значения для затухания и бифуркации Андронова-Хопфа перемещаются в сторону больших энергий активации.

Установлено, что бифуркация Андронова-Хопфа носит закритический характер и в результате нее рождаются пульсирующие волны горения. Свойства бифуркации Андронова-Хопфа детально исследуются методами бифуркационного анализа и прямым интегрированием модельных уравнений в частных производных. Пульсирующие волны распространяются с определенной средней скоростью, \bar{c} , и в системе отсчета, бегущей с этой скоростью, температура, концентрация топлива и радикалов являются периодическими функциями времени с периодом T . Показано, что пульсирующие волны в среднем распространяются медленнее, чем соответствующие бегущие волны горения при одних и тех же значениях параметров. При $L_A \rightarrow 1$ система становится очень чувствительной к малым изменениям параметров, т.е. небольшие изменения β существенно модифицируют \bar{c} .

Удобными динамическими переменными для описания эволюции волн горения оказались максимальная концентрация радикалов, w_{max} , и координата, ξ_{max} , соответствующая данному максимуму. При этом на плоскости (ξ_{max}, w_{max}) пульсирующее решение периода T отображается предельным циклом. Вблизи бифуркации Андронова-Хопфа зависимость $\xi_{max}(t)$ и $w_{max}(t)$ от времени носит практически гармонический характер и определяется частотой осцилляций собственных мод задачи линейной устойчивости. Увеличение параметра закритичности приводит к тому, что в Фурье спектре $w_{max}(t)$ появляются более высокие гармоники основной частоты, предельный цикл на плоскости (ξ_{max}, w_{max}) начинает деформироваться и принимать треугольную форму. Дальнейшее увеличение β приводит к появлению решений периода $2T$ в результате бифуркации удвоения при $\beta = \beta_1$. На плоскости параметров (ξ_{max}, w_{max}) эти решения соответствуют траекториям с двойной петлей. В Фурье спектре появляются спектральные линии кратные как основной частоте T^{-1} , так и ее второй гармоники $(2T)^{-1}$. На отображении Пуанкаре эти решения представлены

в виде двух точек. Аналогично при более высоких энергиях активации мы находим вторую и третью бифуркации удвоения периода. При $\beta = \beta_2$ рождается решение периода $4T$, а при β_3 решение периода $8T$, которые соответствуют на отображении Пуанкаре четырем и восьми точкам.

Расстояние между соседними бифуркациями $\beta_{i+1} - \beta_i$ убывает в соответствии с универсальностью Фейгенбаума с константой $\delta = 4.7 \pm 0.1$. На основе численных данных и предположения, что бифуркации удвоения периода следуют каскаду Фейгенбаума, была оценена граница появления хаоса β_∞ . В случае, если параметры системы берутся выше границы хаотического режима, численные расчеты показали, что динамика осцилляций волн горения становится хаотической и характеризуется непрерывным Фурье спектром $w_{max}(t)$, нерегулярным распределением изображающей точки на отображении Пуанкаре и положительным максимальным показателем Ляпунова. Граница области параметров с хаотическим режимом, полученная с помощью расчета показателя Ляпунова, хорошо согласуется с оценкой на основе сценария Фейгенбаум.

Была исследована средняя скорость пульсирующих волн горения, при этом было показано, что пульсирующие волны горения распространяются медленнее, чем решения в виде бегущей волны. Зависимость скорости волны от энергии активации является монотонно убывающей функцией для каждой ветви решений с различными периодами осцилляций. Решения периода $2^i T$ возбуждаются мягким образом из решений периода $2^{(i-1)} T$, когда последние теряют устойчивость.

Ширина хаотической области по энергии активации ограничена явлением затухания пламени. Странный аттрактор формируется, когда β становится больше β_∞ . Однако, при некотором значении энергии активации, β_e , распространение хаотической волны горения прерывается затуханием, при котором распространяющееся решение переходит в тривиальное $u(\xi, t) = 0$, $v(\xi, t) = 1$ и $w(\xi, t) = 0$. При увеличении β выше β_∞ бассейн притяжения странного аттрактора изменяется и при некотором значении энергии активации, β_e , соединяется с бассейном притяжения тривиального решения. В этом случае, динамика решений с начальными условиями, близкими к распространяющемуся решению, похоже на хаотические волны,

однако, в какой-то момент времени решение попадает в бассейн притяжения тривиального решения и затухает. Коллапс хаотических осцилляций происходит резким и случайным образом. Исследования статистических свойств этого процесса говорят о том, что время существования переходного хаоса имеет экспоненциальное распределение. Среднее время жизни τ очень чувствительно к изменению контрольных параметров и расходится при приближении к точке кризиса странного аттрактора. Подчеркнем, что эти результаты качественно полностью согласуются с гипотезой Гормана и соавторов [9] и данными проведенных ими экспериментов с пламенем плоской пористой горелки.

В пространстве параметров установлено расположение областей, соответствующих пульсирующим волнам с различным периодом. Показано, что на плоскости (L_A, β) они расположены вдоль кривой критических параметров для бифуркации Андронова-Хопфа в виде тонких полос, расширяющихся с увеличением L_A и сужающихся к точке бифуркации Богданова-Тakens при $L_A \rightarrow 1$. Более формально это означает, что $\beta_{i+1} - \beta_i$ стремится к нулю при $L_A \rightarrow 1$ и монотонно возрастает при увеличении L_A . Этот вывод согласуется с тем, что в экспериментах пульсирующие волны периода $1T$, $2T$ и $4T$ хорошо наблюдаются при $L_A \gg 1$, когда ширина областей параметров, соответствующих различным режимам осцилляций относительно велика. В противоположность этому, при $L_A \sim 1$ даже решения периода T существуют в настолько узкой области параметров, что их экспериментальное наблюдение затруднительно.

Расстояние между последовательными бифуркациями удвоения периода, $\beta_{i+1} - \beta_i$, уменьшается экспоненциально с ростом индекса i . Структура области параметров с решениями периода старше $2T$ чрезвычайно сложна. Небольшое изменение параметров может приводить как к изменению типа решения, так и к затуханию. Исследование явления затухания говорит о том, что ширина области с хаотическим режимом осцилляций пламени мала по сравнению с расстоянием между критическими значениями параметров для бифуркаций складки и Андронова-Хопфа. Следовательно, распространение пламени прекращается по сценарию затухания через кризис странного аттрактора, задолго до того, как параметры дости-

гают бифуркации складки и исчезновения решений в виде бегущих волн горения.

Анализ устойчивости волн горения и механизмов появления пульсаций обобщен на двухмерных случай для чисел Льюиса для топлива больших единицы, когда ожидается возникновение неустойчивости осциллирующего типа. Рассмотрены как адиабатическая, так и неадиабатическая модель. Показано, что бегущая волна горения может терять устойчивость по отношению к двум типам возмущений: равномерной плоской неустойчивости и волновой неустойчивости. Первая имеет одномерную природу, в то время как последняя носит существенно многомерный характер и ее появление не может быть предсказано в рамках одномерной модели.

Показано, что медленная ветвь решений всегда неустойчива по отношению к равномерным возмущениям. Быстрая ветвь устойчива при значениях параметров, находящихся достаточно далеко от условий затухания решений в виде бегущей волны. По мере приближения к критическим значениям параметров для затухания, быстрая ветвь либо теряет устойчивость по отношению к возмущениям волнового типа, до того, как достигается предел затухания, либо по отношению в равномерной неустойчивости в точке бифуркации складки, определяющей условие затухания. Переключение между различными типами неустойчивости происходит в точке бифуркации ко-размерности два, которая появляется в пространстве параметров в точке пересечения критических значений параметров для волновой неустойчивости и бифуркации складки. Мы называем эту бифуркацию двухмерной бифуркацией Богданова-Такенса, по аналогии с одномерной бифуркацией Богданова-Такенса, которая находится в точке, из которой выходит кривая критических значений параметров для появления плоской пульсирующей неустойчивости (бифуркации Андронова-Хопфа).

Установлено, что в адиабатическом пределе точки одномерной и двухмерной бифуркации Богданова-Такенса совпадают и располагаются при $L_A = 1$. Однако, в неадиабатическом случае эти точки, соответствующие бифуркациям ко-размерности два расходятся в пространстве параметров от точки затухания при $L_A = 1$ и располагаются в различных точках кривой затухания так, что $1 < L_A^{BT2D} < L_A^{BT1D}$. Двухмерная волновая неустой-

чивость доминирует над плоской одномерной пульсирующей неустойчивостью. Другими словами, для любой точки пространства параметров, где существует плоская пульсирующая неустойчивость, есть волновая неустойчивость с большим инкрементом экспоненциального роста. Более того, волновая неустойчивость существует в более широкой области параметров, включающей область с одномерной пульсирующей неустойчивостью.

Сравнение результатов двухмерного анализа устойчивости с известными данными для моделей с одноступенчатой кинетикой показывает, что в неадиабатическом случае сценарии потери устойчивости для них качественно согласуются, но только частично. Так точка бифуркации Богданова-Такенса, ответственная за появление пульсирующих неустойчивостей, расположена в пространстве параметров при числах Льюиса для топлива больших единицы в обоих случаях. Однако, при стремлении параметра тепловых потерь к нулю точка бифуркации Богданова-Такенса стремится к бесконечности по энергии активации в случае одноступенчатой модели и остается при конечных значениях энергии активации в случае модели Зельдовича-Баренблатта с двухступенчатой цепной реакцией. Помимо этого в модели Зельдовича-Баренблатта есть два параметра, которые не могут принципиально быть учтены в одноступенчатом приближении, т.е. отношение скоростей реакций, r , и числа Льюиса для радикалов, L_B . Изменение r и L_B существенно влияет на устойчивость бегущих волн горения, как это обсуждалось выше в данном пункте. В двухмерной модели увеличение r или уменьшение L_B сдвигает нейтральную границу устойчивости в сторону меньших значений энергии активации, β .

Исследованы свойства волновой неустойчивости. Найдены зависимости частоты пульсаций и волнового числа в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны, для доминирующей неустойчивой моды от числа Льюиса для топлива при различных значениях остальных параметров модели. Частота пульсаций и волновое число стремятся к нулю, когда L_A приближается к точке двухмерной бифуркации Богданова-Такенса в пространстве параметров. В этом случае неустойчивость проявляется в очень медленном возмущении бегущей волны горения, а размеры возмущения в поперечном направлении существенно превышают все харак-

терные продольные размеры длины для волн горения. С другой стороны, как показано в работах [25, 170], гидродинамическая неустойчивость проявляется на масштабах на порядок больших, чем ширина зоны прогрева. В связи с этим, при стремлении $L_A \sim L_A^{BT2D} \geq 1$ в какой-то момент масштабы гидродинамической и диффузионно-тепловой неустойчивостей начнут перекрываться и для адекватного описания процессов распространения пламени в этом случае необходимо рассматривать более общую модель, включающую гидродинамические эффекты, связанные с тепловым расширением газовой смеси. В противоположном пределе при числах Льюиса для топлива порядка нескольких единиц (что справедливо для случая газовых смесей относительно тяжелых углеводородов и кислорода, разбавленных легким инертным газом, например, гелием [103]) или при $L_A \sim O(10)$ (что скорее относится к случаю твердых горючих смесей) как частота, так и волновое число доминирующей неустойчивости становятся сравнимыми с соответствующими масштабами бегущей волны горения. В этом случае применение модели с постоянной плотностью для анализа диффузионно-тепловой устойчивости пламени оправданно.

Показано, что при пересечении в пространстве параметров критических значений для появления волновой неустойчивости рождаются двумерные пульсирующие решения. При значениях параметров, близких к нейтральной границе устойчивости (небольшой закритичности) период осцилляций и поперечных пространственный период решения, появляющегося при потере устойчивости бегущей волны горения, хорошо согласуется с характеристиками доминирующей волновой неустойчивости, полученными из линейного анализа устойчивости. Первичная бифуркация в результате которой рождаются пульсирующие решения является сверхкритической. Распределение концентрации радикалов имеет вид солитонно-подобных уединенных пиков, распространяющихся по определенным траекториям.

ГЛАВА 3

Модель Зельдовича-Линяна с квадратичной реакцией рекомбинации

§ 3.1. Введение

Модель Зельдовича-Линяна была предложена Я.Б. Зельдовичем в 1948 году в работе [164]. Она явилась первой моделью с двухступенчатым разветвленным цепным механизмом реакции для описания распространения перемешанного пламени, которая включала не только исходные реагенты и продукты, но и промежуточные реагенты, т.е. радикалы. Подобные кинетические схемы особенно интересны поскольку горение смесей углеводородов с воздухом и водорода с воздухом обычно сопровождается производством целого бассейна радикалов в результате реакций разветвления. В дальнейшем радикалы рекомбинируют с производством тепла и продуктов. Подобные пламена обычно моделируются с помощью разветвленных цепных кинетических механизмов. Модель Зельдовича-Линяна впервые была исследована А.М. Линяном в работе [165] с помощью приближения высокой энергии активации. В связи с этим она обычно называется моделью Зельдовича-Линяна. Формально ее кинетическая схема содержит реакцию разветвления цепи $A + B \rightarrow 2B$ и реакцию обрыва цепи (или рекомбинации) $B + B + M \rightarrow 2P + M$, где A - это топливо, B - это промежуточные радикалы, P - это продукты, а M представляет собой третье тело, любые молекулы, необходимые для инициации реакции обрыва цепи, но не участвующие в ней, т.е. остающиеся инертными по отношению к данной элементарной реакции. Считается, что первая реакция имеет высокую энергию активации и пренебрежимо малую теплоту в то время, как реакция рекомбинации имеет нулевую энергию активации, но при этом она является экзотермической. Условие нулевого тепловыделения первой реакции было снято в [200].

В [165] было показано, что существует три режима распространения пламени в модели Зельдовича-Линяна: режим быстрой, медленной и промежуточной рекомбинации. В режиме быстрой рекомбинации производство радикалов в ходе реакции разветвления цепи протекает существенно медленнее, чем потребление радикалов в стадии рекомбинации. Это имеет следующие последствия: как разветвление, так и обрыв цепи происходят в одной узкой зоне реакции, концентрация радикалов асимптотически мала и к ней может быть применено квазистационарное приближение. В режиме медленной рекомбинации концентрация радикалов достигает величин порядка единицы и все радикалы производятся в узкой зоне реакции. Однако, потребление радикалов происходит на гораздо большем пространственном масштабе, сравнимом с шириной конвекционно-диффузионной области. В промежуточном режиме, скорости реакций разветвления и рекомбинации становятся сравнимыми. Концентрация радикалов становится по порядку равной безразмерной температуре горения и реакция рекомбинации протекает в области гораздо большей, чем зона реакции разветвления, но гораздо меньшей, чем размеры области конвекции-диффузии.

Используя подобную аргументацию, строятся различные асимптотические разложения в отдельных зонах пламени. Затем получающиеся асимптотические дифференциальные уравнения решаются либо аналитически, либо численно в зависимости от сложности системы уравнений, возникающей в ходе асимптотического анализа в каждом из порядков разложения. В модель [165, 200] не включены тепловые потери и соответствующие кривые отклика в данных работах носят вид однозначных функций. В работе [201] в приближении высокой энергии активации рассмотрена модель Зельдовича-Линяна с учетом тепловых потерь в окружающую среду. Продемонстрировано, что скорость пламени как функция параметров является S-образной и двухзначной, характеризуемой точкой поворота или бифуркацией складки, происходящей при конечной скорости аналогично тому, как это происходит в одноступенчатой неадиабатической модели [47].

В ряде работ [173, 202–204] изучается влияние растяжения пламени на распространение волн горения в модели Зельдовича-Линяна. Авторы рассматривают несколько выделенных случаев для того, чтобы иметь возмож-

ность аналитически или полу-аналитически исследовать данную задачу в приближении высокой энергии активации. Установлено, что отклик пламени на растяжение зависит от конкретного режима горения, т.е. медленного, быстрого или промежуточного режима рекомбинации.

Немного модифицированная модель с кинетической схемой: $A + B \rightarrow 3B$ and $B + B + M \rightarrow 2P + M$, была предложена Я.Б. Зельдовичем в [205] для описания пламени водород-кислородной смеси, где A - это концентрация дефицитной компоненты смеси, B представляет собой концентрацию атомов H , которые рассматриваются как единственные радикалы, участвующие в реакции. Формулы, аппроксимирующие скорость волны дефрагляции, были получены в пределе сильной и слабой рекомбинации. Недавно, в [206, 207] эти результаты были сопоставлены с данными численного интегрирования модели с детальным кинетическим механизмом и было показано, что двухступенчатая модель дает хорошее приближение для скорости распространения пламени. Как обсуждается в [206, 207] скорость глобальной реакции рекомбинации определяется двумя элементарными ступенями: одна из которых линейна, а другая квадратична по отношению к концентрации радикалов. В [205] Я. Б. Зельдович рассматривал квадратичный закон рекомбинации радикалов. Этот путь реакции может быть важен в случае богатых водородных смесей. Применимость модели Зельдовича-Линяна для описания богатых водородных смесей будет обсуждаться в следующей главе.

Линейный элементарный шаг, при котором H -радикалы рекомбинируют с молекулами кислорода, имеет более высокую скорость реакции и должен быть важен в условиях переизбытка O_2 . Этот путь реакции должен доминировать в случае бедных смесей. Модели с двухступенчатым цепным кинетическим механизмом и реакцией рекомбинации первого порядка по радикалам получили большое внимание в последние десятилетия. Это частично связано с тем, что несмотря на то, что исследование скорости пламени было довольно успешным, устойчивость волн горения в модели Зельдовича-Линяна систематически не изучалась. В моделях с реакцией рекомбинации первого порядка, как в модели Зельдовича-Баренблатта [169] как свойства, так и устойчивость решений в виде бегущей волны ис-

следовалась в рамках приближения высокой энергии активации. Более детальный обзор результатов для модели Зельдовича-Баренблатта был дан выше.

Несмотря на успехи в исследованиях волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта, устойчивость перемешанного пламени в модели Зельдовича-Линяна не исследовалась. Как обсуждалось выше даже в рамках одноступенчатого приближения изменение кинетики реакции может существенно отражаться на свойствах волн горения, поэтому результаты полученные для модели с первым порядком реакции рекомбинации не могут быть перенесены на случай модели Зельдовича-Линяна.

§ 3.2. Формулировка модели Зельдовича-Линяна. Модельные уравнения

Рассмотрим диффузионно-тепловую адиабатическую модель в двухмерной пространственной геометрии, которая включает автокаталитическую реакцию разветвления цепи $A + B \rightarrow 2B$ и реакцию рекомбинации $B + B + M \rightarrow 2P + M$. Следуя работе [164], будем считать, что все тепло выделяется в ходе шага рекомбинации, а реакция разветвления цепи не производит и не потребляет тепло. Размерные модельные уравнения для данного процесса могут быть найдены в [201] и записаны следующим образом

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \Delta T + q_F W_A A_R \left(\frac{\rho Y_B}{W_B} \right)^2 \frac{\rho Y_M}{W_M}, \\ \rho \frac{\partial Y_A}{\partial t} &= \rho D_A \Delta Y_A - A_B \frac{\rho Y_A \rho Y_B}{W_A W_B} e^{-E/RT}, \\ \rho \frac{\partial Y_B}{\partial t} &= \rho D_B \Delta Y_B + \rho Y_B \left(A_B \frac{\rho Y_A}{W_A} e^{-E/RT} - 2A_R \frac{\rho Y_B \rho Y_M}{W_B W_M} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ - это двухмерный лапласиан; T - это температура смеси; Y_A и Y_B представляют массовую долю топлива и радикалов, соответственно; ρ - это плотность, λ - теплопроводность, c_p - теплоёмкость при постоянном давлении смеси; D_A и D_B представляют коэффициенты

диффузии топлива и радикалов, соответственно, A_R и A_B - это константы реакций рекомбинации и разветвления цепи, соответственно; W_A , W_B и W_M - это молекулярный вес топлива, радикалов и третьего тела; q_F - это удельная теплота реакции рекомбинации; E - энергия активации реакции разветвления цепи; R - это универсальная газовая постоянная.

Уравнения (3.1) рассматриваются совместно с граничными условиями

$$T = T_a, \quad Y_A = Y_A^\infty, \quad Y_B = 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty, \quad (3.2)$$

$$dT/dx = 0, \quad dY_A/dx = 0, \quad Y_B = 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty,$$

которые соответствуют волне, бегущей в положительном направлении оси x . Более детально граничные условия обсуждаются ниже при описании численной схемы интегрирования модельных уравнений. На правой границе в зоне прогрева T равно внешней температуре, T_a ; топливо еще не израсходовано и Y_A равно максимальному начальному значению на холодной не прореагировавшей границе, Y_A^∞ ; производство радикалов отсутствует и $Y_B = 0$. На левой границе в зоне продуктов мы требуем, чтобы реакции не шли и решение асимптотически приближалось к стационарной точке системы уравнений (3.1), поэтому на T и Y_A , накладываются условия нулевых потоков, а для радикалов Y_B требуется равенство нулю их концентрации.

Вводим безразмерные координату, время

$$t' = \frac{\rho A_B}{\beta M^*} t, \quad \mathbf{r}' = \sqrt{\frac{\rho^2 A_B c_p}{\lambda M^* \beta}} \mathbf{r}, \quad (3.3)$$

и переменные

$$u = \frac{T}{T^* \beta}, \quad v = \frac{Y_A}{Y_A^\infty}, \quad w = \frac{Y_B W_A}{Y_A^\infty W_B}, \quad (3.4)$$

а так же безразмерные параметры

$$M^* = \frac{W_A}{Y_A^\infty}, \quad T^* = \frac{q_F Y_A^\infty}{2c_p} x, \quad \beta = \frac{2Ec_p}{Rq_F Y_A^\infty}, \quad (3.5)$$

$$L_{A,B} = \frac{\lambda}{D_{A,B} \rho c_p}, \quad r = \frac{2A_R Y_M \rho}{A_B W_M},$$

где M^* и T^* являются опорными значениями массы и температуры, β - это безразмерная энергия активации, $L_{A,B}$ - это числа Льюиса для топлива и радикалов, соответственно.

Перепишем уравнения (3.1)

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + rw^2, \\ v_t &= L_A^{-1} \Delta v - \beta v w e^{-1/u}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$w_t = L_B^{-1} \Delta w + \beta v w e^{-1/u} - r\beta w^2,$$

и граничные условия (3.2) в новых обозначениях, отбрасывая штрихи,

$$u = u_a, \quad v = 1, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

$$u_x = 0, \quad v_x = 0, \quad w_x = 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

Требование того, чтобы как в зоне реакции, так и в зоне продуктов элементарные реакции ‘замерзли’ (т.е. достигалось состояние равновесия для уравнений (3.1) в обоих пределах $x \rightarrow \pm\infty$) приводит к следующим ограничениям. Если на правой границе достигается условие равновесия, то малые возмущения концентрации радикалов должны релаксировать к состоянию $w = 0$. Это означает, что скорость реакции разветвления в уравнениях (3.1) должна быть пренебрежимо малой или $e^{-1/u_a} \rightarrow 0$. Таким образом в модели Зельдовича-Линяна снова возникает ‘проблема холодной границы’, поэтому в наших расчетах мы рассматриваем либо нулевые, либо малые внешние температуры, $u_a = 0$ или $u_a \ll 1$, так, чтобы член e^{-1/u_a} был пренебрежим. В противоположном пределе $x \rightarrow -\infty$, температура и концентрации реагентов не определены. Тем не менее, условие ‘замерзания’ реакций в области продуктов так же требует обнуления реакционных членов в системе (3.1). Данное условие может быть удовлетворено только, если $w = 0$ на правой границе.

§ 3.3. Решение в виде бегущей волны. Выбор параметризации

Решение системы уравнений (3.6) с граничными условиями (3.7) ищем в виде бегущей волны $u(x, t) = u(\xi)$, $v(x, t) = v(\xi)$ и $w(x, t) = w(\xi)$, где

$\xi = x - ct$ - это координата в движущейся системе отсчета, а c обозначает скорость бегущей волны. Подставляя решение в этой форме в модельные уравнения, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_{\xi\xi} + cu_{\xi} + rw^2 = 0,$$

$$L_A^{-1}v_{\xi\xi} + cv_{\xi} - \beta vwe^{-1/u} = 0, \quad (3.8)$$

$$L_B^{-1}w_{\xi\xi} + cw_{\xi} + \beta vwe^{-1/u} - r\beta w^2 = 0.$$

Граничные условия (3.7) перепишем, используя следующие соображения. Умножим первое уравнение в системе (3.8) на β , сложим результат со вторым и третьим уравнениями и проинтегрируем полученное выражение один раз по координате ξ в пределах от минус до плюс бесконечности. Это приводит к условию: $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} S = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} S$, где $S = \beta u + v + w$. комбинируя его с граничными условиями (3.7), получаем

$$u = 0, \quad v = 1, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (3.9)$$

$$u = \beta^{-1}(1 - \sigma), \quad v = \sigma, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow -\infty,$$

где σ обозначает остаточное количество топлива не сгоревшего в ходе реакции или утечку топлива из зоны прогрева в зону продуктов. Данная величина не известна априори и должна быть найдена вместе с решением задачи (3.8-3.9).

В фазовом пространстве динамической системы (3.8) решение в виде бегущей волны соответствует траектории, соединяющей две фиксированные точки уравнений (3.8). Если определить вектор с координатами $\mathbf{v} = (u, u_{\xi}, v, v_{\xi}, w, w_{\xi})$, то фиксированные точки запишутся как $S_1: \mathbf{v} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ и $S_2: \mathbf{v} = (\beta^{-1}(1 - \sigma), 0, \sigma, 0, 0, 0)$. Линеаризация системы уравнений (3.8) вблизи $S_{1,2}$ с помощью подстановки $\mathbf{v}(\xi) = \mathbf{k} \exp(\mu\xi)$ позволяет свести уравнения к алгебраической системе на собственные значения $\mu^{(1,2)}$ и собственные векторы $\mathbf{k}^{(1,2)}$. Для фиксированной точки, S_1 , представляющей состояние свежей смеси, спектр собственных значений принимает три отрицательных $\mu^{(1)} = -c, -cL_A, -cL_B$ и одно $\mu^{(1)} = 0$ трижды вырожденное значение. Следовательно, в линейном приближении S_1 имеет

устойчивые и нейтральные многообразия натягивающиеся на соответствующие собственные векторы. В противоположном пределе для S_2 спектр собственных значений может быть записан как $\mu^{(2)} = -c, -cL_A$, дважды вырожденный ноль, 0, и $L_B^{-1} \left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4\beta\sigma L_B^{-1} e^{-\beta/(1-\sigma)}} \right) / 2$, принимающие отрицательные значения. Таким образом, фиксированная точка S_2 тоже имеет либо устойчивые, либо нейтральные многообразия, связанные с соответствующими собственными векторами, и в линейном приближении невозможно дать заключение о том, существует ли в фазовом пространстве траектория, соединяющая S_1 с S_2 . С ростом ξ , которую можно рассматривать как эффективное время в (3.8), могут существовать траектории сходящиеся к S_1 , однако нет траекторий способных исходить из точки S_2 . Однако, наличие нейтрального многообразия в нелинейном приближении может приводить к возникновению траекторий, выходящих из S_2 вдоль соответствующих собственных векторов, и соединяющих точки S_1 и S_2 в фазовом пространстве. Следовательно, только в нелинейном приближении можно найти асимптотическое поведение решения (3.8) в пределе $\xi \rightarrow -\infty$.

3.3.1. Асимптотика решения при $\xi \rightarrow -\infty$

В первом порядке асимптотическое поведение решений (3.8), стремящихся к фиксированной точке при $\xi \rightarrow -\infty$, ищем, вводя новую переменную $z = w$ и новые динамические переменные $y \equiv u, q \equiv v, p \equiv dw/d\xi$. В этих обозначениях перепишем систему (3.8) как

$$p^2 z_{zz} + pp_z y_z c + p y_z + r z^2 = 0,$$

$$L_A^{-1} (p^2 q_{zz} + pp_z q_z) + cpq_z - \beta z q e^{-1/y} = 0, \quad (3.10)$$

$$L_B^{-1} pp_z + cp + \beta z q e^{-1/y} - r \beta z^2 = 0.$$

Будем искать ограниченное решение (3.10), удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $p(0) = 0$, поскольку производная $dw/d\xi$ стремиться к нулю при $\xi \rightarrow -\infty$ или $z \rightarrow 0$;

(ii) требуем, чтобы $w(\xi)$ также монотонно приближалось к нулю и, следовательно, $p(z) > 0$ при достаточно малых значениях z .

Решение представим в виде ряда

$$\begin{aligned} y(z) &= y_0 + y_1 z + \dots, \\ q(z) &= q_0 + q_1 z + \dots, \\ p(z) &= p_1 z + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

где z - это малый параметр асимптотического разложения. Подставляя (3.11) в (3.10), мы получаем в первом порядке $O(z)$:

$$\begin{aligned} y_1(p_1^2 + cp_1) &= 0, \\ L_A^{-1} p_1^2 q_1 + cp_1 q_1 - \beta q_0 e^{-1/y_0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$L_B^{-1} p_1^2 + cp_1 + \beta q_0 e^{-1/y_0} = 0.$$

Последнее уравнение в (3.12) имеет два решения

$$p_1 = \frac{\left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4\beta L_B^{-1} q_0 e^{-1/y_0}}\right)}{2L_B}, \quad (3.13)$$

оба из которых отрицательны, если $q_0 > 0$. Наличие отрицательных p_1 означает, что $p(z) < 0$ для некоторых достаточно малых значений z , т.е. $w(\xi)$ не является монотонной функцией. Поэтому мы берем в качестве решения $q_0 = 0$ и $p_1 = 0$. Учитывая это, мы запишем уравнения второго порядка $O(z^2)$:

$$\begin{aligned} cp_2 y_1 + r &= 0, \\ cp_2 q_1 - \beta q_1 e^{-1/y_0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$cp_2 + \beta q_1 e^{-1/y_0} - \beta r = 0,$$

которые имеют два решения

$$p_2 = \frac{\beta e^{-1/y_0}}{c}, \quad q_1 = r e^{1/y_0} - 1, \quad y_1 = -\frac{r e^{1/y_0}}{\beta} \quad (3.15)$$

и

$$p_2 = \frac{\beta r}{c}, \quad q_1 = 0, \quad y_1 = -\beta^{-1}. \quad (3.16)$$

Первое решение справедливо при $re^{-1/y_0} > 1$, а второе при $re^{-1/y_0} < 1$.

Возвращаясь к исходным переменным, получаем, что решение $q_0 = 0$ означает $\sigma = 0$ и, следовательно, $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} u = y_0 = \beta^{-1}$. Асимптотическая связь между динамическими переменными, справедливая в пределе $\xi \rightarrow -\infty$, может быть записана как

$$u = \frac{(1 - re^\beta w)}{\beta}, \quad v = (re^\beta - 1)w, \quad w_\xi = \frac{\beta e^{-\beta}}{cw^2} \quad \text{при } re^\beta > 1, \quad (3.17)$$

$$u = \frac{(1 - w)}{\beta}, \quad v = 0, \quad w_\xi = \frac{\beta r}{cw^2} \quad \text{при } re^\beta < 1.$$

Таким образом асимптотический анализ решений (3.8) в пределе $\xi \rightarrow -\infty$ показал, что в модели отсутствуют утечка топлива через зону реакции, т.е. $\sigma = 0$, и значение температуры продуктов реакции на левой границе стремиться к $u = \beta^{-1}$. Найдены соотношения между динамическими переменными (3.17), которые показывают, что существуют два режима распространения пламени в зависимости от параметра $R = re^\beta$, представляющего собой отношение скоростей реакции разветвления и рекомбинации. В случае $R \ll 1$ стадия разветвления протекает гораздо быстрее, чем реакция рекомбинации и пламя имеет характер режима медленной рекомбинации, и наоборот, если $R \gg 1$, то устанавливается режим быстрой рекомбинации.

3.3.2. Свойства решений в виде бегущей волны

Уравнения (3.8) и (3.17) вместе с граничными условиями, полученными в линейном приближении в пределе $\xi \rightarrow +\infty$, а именно, $cu + u_\xi = 0$, $c(v - 1) + L_A v_\xi = 0$, и $cw + L_B w_\xi = 0$, составляют двухточечную граничную задачу, которая решается численно методами стрельбы и релаксации [208], использующих метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности и многомерный метод Ньютона, соответственно.

На рис. 3.1 построены типичные профили решений $u(\xi)$, $v(\xi)$ и $w(\xi)$ в двух режимах распространения пламени, т.е. при быстрой рекомбинации, $r = 100$, кривые 1, и медленной рекомбинации, $r = 0.01$, кривые 2. Другие параметры взяты так, как показано в подписи к рисунку. Графики

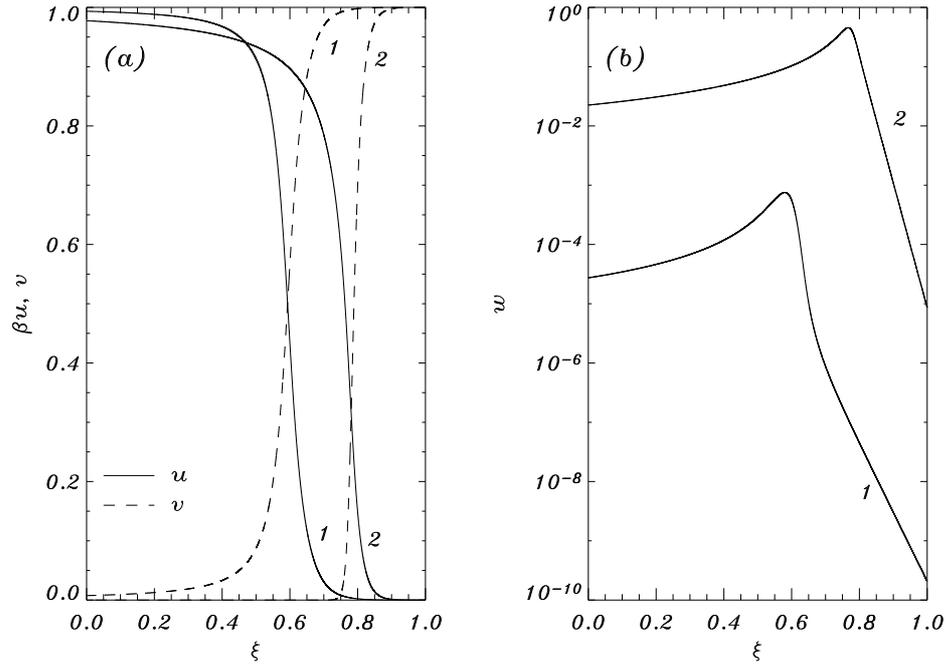


Рис. 3.1. Профили температуры, $u(\xi)$, и концентрации топлива, $v(\xi)$, рис. (а), а так же концентрации радикалов, $w(\xi)$, рис. (б) при $L_A = L_B = 1$, $\beta = 1$, и двух значениях r . На рис. (а) сплошная линия соответствует $u(\xi)$, а пунктирная $v(\xi)$. Кривые 1 и 2 показывают профили при $r = 100$ и 0.01 , соответственно. График (б) построен в логарифмическом масштабе.

шкалированы так, чтобы координата ξ изменялась от 0 до 1 и можно было показать профили для $r = 100.0$ и $r = 0.01$ на одном рисунке. Для профилей 1 длина области интегрирования составляет 2.6×10^3 , а для профилей 2 - только 870. На рис. 3.1 (б) построен профиль концентрации радикалов в логарифмическом масштабе, поскольку максимальные значения w для кривых 1 и 2 отличаются на несколько порядков и не могут быть одновременно показаны в линейном масштабе. Как видно на рис. 3.1 (б) режим медленной рекомбинации (кривая 2) характеризуется относительно большим максимальным значением концентрации радикалов, $\max w \sim O(1)$. Передняя часть фронта $\log w(\xi)$ линейна, что указывает на то, что основными доминирующим процессами в этой области являются диффузия радикалов и тепла из зоны реакции. Эта часть решения хорошо описывается линейной асимптотикой уравнений (3.8) вблизи фиксированной точки S_2 . В зоне продуктов, за областью реакции, радикалы медленно потребляются в ходе реакции рекомбинации и зависимость $w(\xi)$ носит суб-экспоненциальный характер. Профиль температуры $u(\xi)$ на рисунке (а) так же испытывает

медленную сходимость к асимптотическому значению $u = 1$ в зоне продуктов. В отличие от этого, $v(\xi)$ имеет вид, сходный со ступенчатой функцией с узкой областью реакции разветвления, где потребляется практически все топливо и происходит переброс v от максимального до минимального значения. Говоря другими словами, в режиме, показанном на рисунке **3.1** кривыми 2, большое количество радикалов производится в узкой зоне реакции разветвления, в ходе которой потребляется практически все топливо. Концентрация радикалов, $w(\xi)$, достигает пикового значения, что сменяется медленным затуханием $w(\xi)$ и ростом температуры $u(\xi)$ из-за медленной реакции рекомбинации с гораздо большей областью реакции.

В случае режима быстрой рекомбинации, показанного на рисунках кривыми 1, максимальное значение w существенно меньше и составляет по порядку величины 10^{-3} . Профиль распределения концентрации радикалов более локализован около максимального значения. Область, где диффузия является доминирующим процессом и зависимость $\log w(\xi)$ носит линейный характер, сменяется быстрым ростом концентрации радикалов при приближении к максимуму $w(\xi)$. Это соответствует области волны горения, где реакция разветвления становится доминирующим процессом и начинается интенсивный процесс конвертации топлива в радикалы. Сравнивая профили $v(\xi)$ и $w(\xi)$ на рисунках **3.1** (а) и (б) мы заключаем, что рекомбинации радикалов, где локализована основная часть радикалов, происходит в более узкой области, чем зона реакции разветвления, где потребляется основная масса топлива. В области продуктов, зависимость $w(\xi)$ имеет суб-экспоненциальный характер, указывая на то, что реакции по-прежнему идут в этой области и динамика (3.8) остается нелинейной. Данная картина существования различных режимов распространения волны горения качественно согласуется с результатами изложенными в [165].

На рис. **3.2** (а) построена зависимость скорости решения в виде бегущей волны s от β для различных значений r : 0.01 кривая 1, 1.0 кривая 2, 100.0 кривая 3. Результаты численного счета показаны сплошной линией. Скорость пламени представлена в логарифмическом масштабе для того, чтобы продемонстрировать различные режимы распространения волны горения. Крест, расположенный на кривой 1, показывает значения парамет-

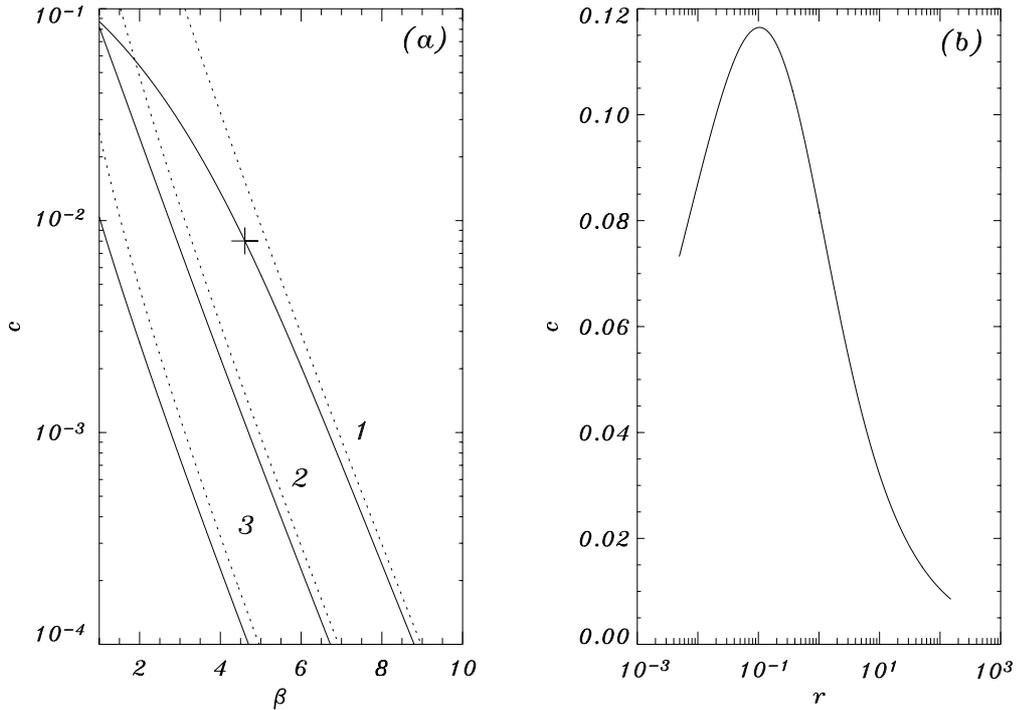


Рис. 3.2. Зависимость скорости волны горения, c , от β на рисунке (а) и c от r на рисунке (б) при $L_A = L_B = 1$. На рисунке (а) скорость построена в логарифмическом масштабе, сплошная линия представляет результаты численного анализа, а точечная линия - данные асимптотического анализа. Значение r равно 0.01 для кривой 1, 1.0 для кривой 2 и 100.0 для кривой 3. На рисунке (б) параметр r построен в логарифмическом масштабе и $\beta = 1.0$.

ров, для которых $R = re^\beta = 1$ при $r = 0.01$. Справа от креста R становится больше единицы и наблюдается режим быстрой рекомбинации. Как видно на рисунке 3.2 (а) при $R > 1$ зависимость $\log c(\beta)$ становится практически линейной функцией. В отличие от этого, слева от креста, где $R < 1$, кривая 1 существенно отдичается от линейного поведения. Для кривых 2 и 3 с большими значениями r точка, где $R = 1$, сдвигается в сторону гораздо более меньших значений β и не показана на графиках. Следовательно, в этих случаях для всех значений энергии активации, показанных на рис. 3.2 (а), наблюдается режим быстрой рекомбинации и зависимость $\log c$ от β близка к линейной.

В работе [165] показано, что в пределе быстрой рекомбинации квазистационарное приближение может быть применено к радикалам и двухступенчатая модель с цепным разветвленным механизмом реакции может быть редуцирована к одноступенчатой модели с реакцией второго порядка и удвоенной энергией активации реакции разветвления. Затем авторы находят скорость пламени в приближении высокой энергии активации с

помощью асимптотического анализа в первом порядке разложения при $L_A = L_B = 1$. В [201] анализ обобщен на случай произвольных чисел Льюиса для топлива и радикалов как в адиабатической, так и в неадиабатической модели. Переписывая эти результаты в наших обозначениях, мы получаем следующее выражение для скорости пламени

$$c = \frac{L_A e^{-\beta}}{\beta \sqrt{2r}}. \quad (3.18)$$

Результаты, полученные с помощью формулы (3.18), показаны на рис. **3.2** (а) пунктирной линией. Как видно на рисунке, в режиме быстрой рекомбинации при больших значениях β , асимптотические и численные данные хорошо согласуются. На рис. **3.2** (b) отображена зависимость скорости пламени от параметра рекомбинации r при $\beta = 1$, в то время, как другие параметры взяты такими же как для рисунка (а). Значение r варьируется на четыре порядка, поэтому оно отложено по оси абсцисс в логарифмическом масштабе. На графике видно, что существует некоторое оптимальное значение параметра рекомбинации около $r = 0.1$, при котором достигается максимум зависимости $c(r)$ так, что для больших и меньших r волна горения распространяется медленней. Следует отметить, что малые значения r соответствуют режиму медленной, а большие r - режиму быстрой рекомбинации.

Результаты анализа зависимости скорости пламени от чисел Льюиса для топлива и радикалов проиллюстрированы на рисунке **3.3**. На графиках (а) скорость волны горения, c , показана как функция L_A сплошной линией для $L_B = 1$, а $c(L_B)$ изображена пунктирной линией для $L_A = 1$. Остальные параметры взяты равными единице, $r = \beta = 1$. Числа Льюиса построены в логарифмическом масштабе. Видно, что скорость волны горения практически не зависит от числа Льюиса для радикалов, L_B , в то время как изменение L_A существенно влияет на нее. Этот результат качественно согласуется с асимптотической формулой (3.18), полученной в приближении высокой энергии активации. На рис. **3.3** (b) зависимость $\log c(\beta)$ построена для $L_B = 1$ и различных значений L_A и r , как отмечено в подписи к рисунку. Численные результаты показаны сплошной линией

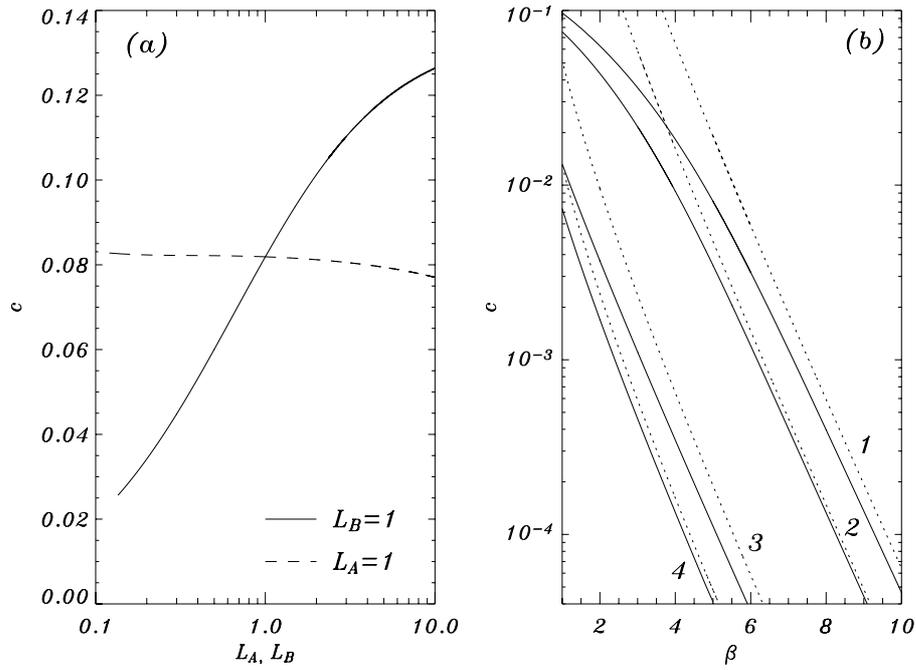


Рис. 3.3. На рисунке (а) зависимость скорости волны горения, c , от L_A при $L_B = 1$ показана сплошной линией, а с от L_B при $L_A = 1$ показана пунктирной линией для $r = \beta = 1$. Числа Льюиса отложены в логарифмическом масштабе. На рисунке (b) скорость пламени построена в логарифмическом масштабе как функция β при $L_B = 1$ и $r = 0.01$, $L_A = 2.0$ для кривых 1; $r = 0.01$, $L_A = 0.5$ для кривых 2; $r = 100$, $L_A = 2.0$ для кривых 3 и $r = 100$, $L_A = 0.5$ для кривых 4. Сплошная линия представляет собой результаты численного анализа, а точечная линия - это зависимость, полученная по формуле (3.18).

в то время, как асимптотические данные, построенные по формуле (3.18), представлены точечной линией. Кривые 1 ($r = 0.01$, $L_A = 2.0$) и кривые 2 ($r = 0.01$, $L_A = 0.5$) демонстрируют хорошее согласие между асимптотическими и численными результатами при больших значениях β . В этом случае зависимость $\log c(\beta)$ становится близкой к линейной функции, а параметр R превышает единицу, что говорит о том, что пламя распространяется в режиме быстрой рекомбинации. При уменьшении β , значение параметра R в какой-то момент становится меньше единицы и режим быстрой сменяется режимом медленной рекомбинации. Зависимость $\log c$ от β становится нелинейной и наблюдается существенное несоответствие численных и асимптотических результатов. Для $r = 100.0$ (кривые 3 и 4) волна горения распространяется в режиме быстрой рекомбинации при всех значениях энергии активации β , показанных на рис. 3.3 (b). В следствие этого, наблюдается хорошее согласие между численными и асимптотическими данными для всего рассмотренного интервала изменения энергии активации.

3.3.3. Коррекция параметризации

Таким образом мы видим, что параметризация (3.3–3.5) приводит к зависимости скорости от энергии активации вида убывающей экспоненты (3.18). Помимо этого вместо параметра рекомбинации r удобно пользоваться $R = re^\beta$. Все это указывает на то, что в более подходящей параметризации эти величины не должны содержать множителей в виде экспоненты в степени энергии активации. С учетом этого мы переопределим переменные и параметры как

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}e^{-\beta/2}, \quad t' = te^{-\beta} \quad r' = re^\beta, \quad (3.19)$$

где штрихи обозначают новую параметризацию и отбрасываются в дальнейшем. В новых переменных уравнения (3.1) и граничные условия (3.2) принимают вид

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + rw^2, \\ v_t &= L_A^{-1}\Delta v - \beta vw \exp(\beta - 1/u), \\ w_t &= L_B^{-1}\Delta w + \beta vw \exp(\beta - 1/u) - r\beta w^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

и

$$u = u_a, \quad v = 1, \quad w = 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad (3.21)$$

$$du/dx = 0, \quad dv/dx = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty.$$

Условие быстрой и медленной рекомбинации записываются как $r > 1$ и $r < 1$ соответственно, а асимптотическое выражение для скорости (3.18) преобразуется к виду

$$c = \frac{L_A}{\beta\sqrt{2r}}. \quad (3.22)$$

Из выражения (3.22) следует, что такой выбор безразмерных параметров избавляет от экспоненциальной зависимости скорости пламени от β и является более удобным для численного исследования свойств решений в виде бегущих волн при больших значениях энергии активации. Свойства решений в виде бегущей волны в новых переменных проиллюстрированы на

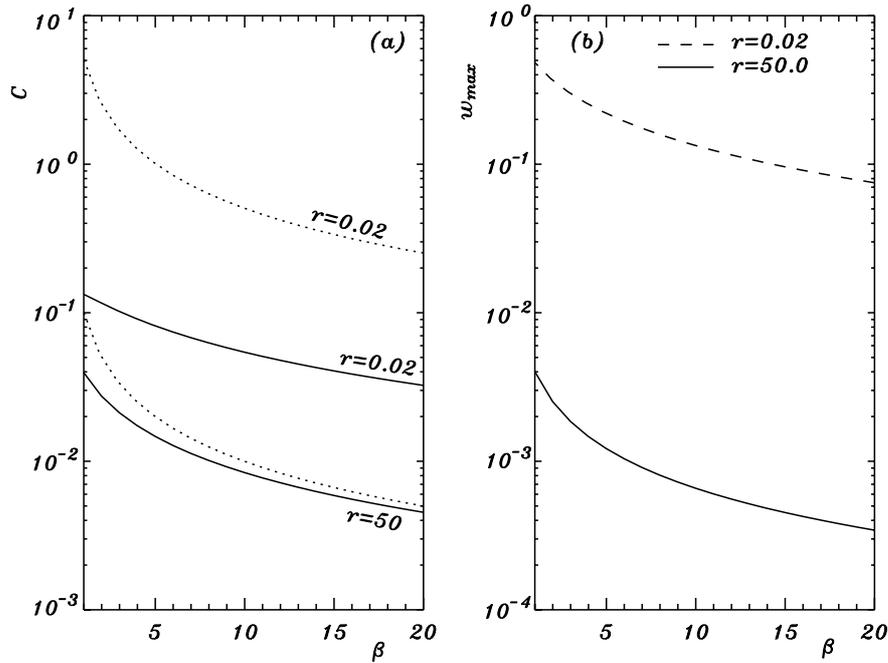


Рис. 3.4. Зависимость (а) скорости, c , волны горения и (б) максимального значения концентрации радикалов, w_{max} , от энергии активации, β , для $L_A = L_B = 1$ и двух значений параметра рекомбинации $r = 0.02$ и $r = 50$. Графики построены в логарифмическом масштабе.

рис. 3.4, где построены зависимости скорости волны (рисунок а) и максимального значения концентрации радикалов, w_{max} , (рисунок б) от энергии активации, β , для $L_A = L_B = 1$ и различных значений параметра рекомбинации $r = 0.02$ и $r = 50.0$. На рис. 3.4 (а) сплошная линия представляет результаты численного счета, а точечная линия соответствует предсказанию асимптотической формулы (3.22). Как и ожидалось, зависимость c от β носит субэкспоненциальный алгебраический характер и так же наблюдается хорошее согласие между двумя подходами к расчету скорости в режиме быстрой рекомбинации ($r = 50$) при больших энергиях активации. В режиме медленной рекомбинации ($r = 0.02$) различие между численным счетом и оценкой (3.22) становится существенным и достигает примерно двух порядков. На рис. 3.4 (б) показана зависимость $w_{max}(\beta)$. Видно, что при $r = 0.02$ максимальное значение концентрации радикалов становится сравнимым с концентрацией топлива для умеренных значений β и убывает с ростом энергии активации. С другой стороны при $r = 50$ концентрация радикалов падает почти на три порядка малости, что качественно согласуется с предсказаниями асимптотического анализа в режиме медленной рекомбинации.

§ 3.4. Линейный анализ устойчивости

В этом параграфе мы исследуем линейную устойчивость волн горения. Для этого как и ранее линеаризуем уравнения в частных производных (3.20) около решения в виде бегущей волны, т.е. ищем решение в виде $u(\mathbf{r}, t) = U(\xi) + \epsilon\phi(\xi) \exp(\lambda t + iky)$, $v(\mathbf{r}, t) = V(\xi) + \epsilon\psi(\xi) \exp(\lambda t + iky)$, and $w(\mathbf{r}, t) = W(\xi) + \epsilon\chi(\xi) \exp(\lambda t + iky)$, где $[U(\xi), V(\xi), W(\xi)]$ представляет решение в виде бегущей волны, члены пропорциональные ϵ - это линейное возмущение, λ - это спектральный параметр, определяющий временную динамику возмущения и k - это волновое число, описывающее структуру возмущения в направлении перпендикулярном, направлению распространения волны. Подставляя решения в таком виде в систему (3.20), оставляя только линейные члены по ϵ и определяя вектор с координатами $\mathbf{v}(\xi) = [\phi, \psi, \chi, \phi_\xi, \psi_\xi, \chi_\xi]^T$ мы получаем

$$\mathbf{v}_\xi = \hat{A}(\xi, \lambda, k)\mathbf{v}, \quad (3.23)$$

где

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{I} \\ \hat{H} + k^2\hat{I} + \lambda\hat{Q} & -c\hat{Q} \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L_A & 0 \\ 0 & 0 & L_B \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2rW \\ \frac{\beta L_A VW}{U^2 e^{1/U}} & \frac{\beta L_A W}{e^{1/U}} & \frac{\beta L_A V}{e^{1/U}} \\ \frac{-\beta L_B VW}{U^2 e^{1/U}} & \frac{-\beta L_B W}{e^{1/U}} & L_B \left(\frac{-\beta V}{e^{1/U}} + 2\beta rW \right) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Здесь \hat{I} это единичная матрица 3×3 , $U(\xi)$, $V(\xi)$, $W(\xi)$ являются функциями координаты в сопутствующей системе отсчета, ξ . Как и ранее ищем решения задачи линейной устойчивости (3.23), ограниченные при $\xi \rightarrow \pm\infty$, с помощью метода функции Эванса.

Результаты анализа линейной устойчивости представлены на рис. 3.5. Для числа Льюиса для топлива больше единицы, решения в виде бегущей волны теряют устойчивость по отношению к возмущениям волнового

типа. В этом случае при пересечении нейтральной границы устойчивости в пространстве параметров максимальное значение действительной части дисперсионного соотношения $\text{Re}\lambda(k)$, которое достигается при некотором $k = k_{max} > 0$, становится положительным, а соответствующее значений мнимой части не равно нулю, $\text{Im}\lambda(k_{max}) \neq 0$. Эта ситуация проиллюстрирована на вкладыше к рисунку **3.5** в правом верхнем углу, где схематически показан типичный вид дисперсионного соотношения $\text{Re}\lambda(k)$ and $\text{Im}\lambda(k)$. Граничные значения параметров для волновой неустойчивости построены с помощью сплошной линии для различных значений параметра рекомбинации r , изменяемого от 0.02 до 50 при фиксированных $L_B = 1$, $u_a = 0$. Влияние последних обсуждается ниже. В каждом случае на рис. **3.5** устойчивые бегущие волны горения существуют для значений параметров, расположенных в областях ниже сплошных кривых.

Критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа, которая встречается в случае одномерной формулировки и исследуется в [209], также показаны на рисунке с помощью точечных кривых при тех же значениях параметров. Видно, что многомерная по природе волновая неустойчивость доминирует над одномерной пульсирующей неустойчивостью и встречается при изменении параметров до того, как достигаются критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа.

Нейтральная граница устойчивости $L_A(\beta)$ является монотонно затухающей функцией гиперболического вида: для больших значений энергии активации критическое значение числа Льюиса для топлива, L_A , стремится к 1; с другой стороны, с приближением β к некоторому критическому значению, β_{tr} , число Льюиса для топлива испытывает неограниченный рост. Положение нейтральной границы устойчивости качественно похоже на случай одноступенчатой адиабатической модели. В режиме медленной рекомбинации, $r < 1$, вариация параметра рекомбинации сильно влияет на устойчивость волн горения: при уменьшении r нейтральная граница устойчивости сдвигается в сторону больших значений энергии активации. В режиме быстрой рекомбинации, $r > 1$, нейтральная граница устойчивости стремится в некоторой предельной кривой. Например, увеличение параметра рекомбинации, от $r = 10$ до $r = 50$ приводит только к незначитель-

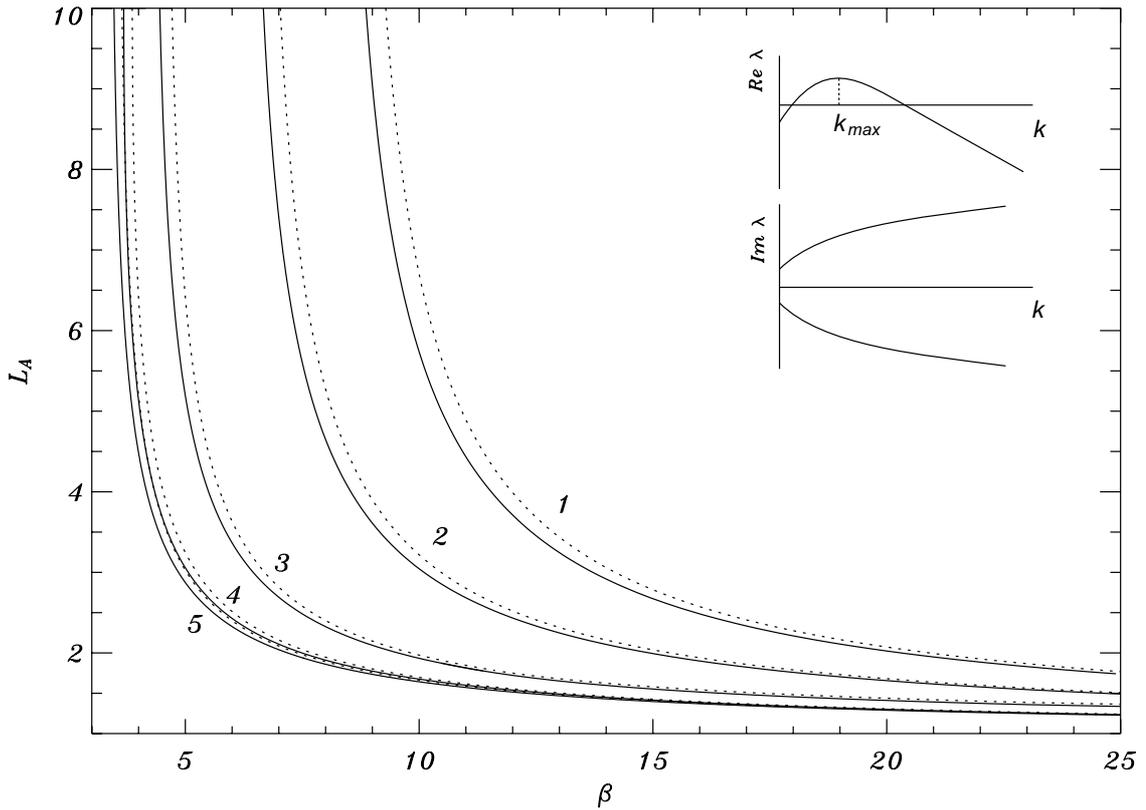


Рис. 3.5. Диаграмма устойчивости на плоскости L_A от β при $L_B = 1$, $u_a = 0$ и различных значениях $\gamma = 0.02, 0.1, 1, 10$ и 50 , показанных кривыми 1, 2, 3, 4 и 5, соответственно. Сплошная и пунктирная линии представляют критические значения параметров для появления волновой неустойчивости и одномерной бифуркации Андронова-Хопфа, соответственно. Решения устойчивы для параметров, находящихся ниже критических кривых в каждом случае. Типичный вид дисперсионного соотношения показан на вкладке к рисунку.

ной модификации критических значений параметров $L_A(\beta)$, показанных кривой 4 и кривой 5 на рис. 3.5.

Найдены свойства волновой неустойчивости такие, как пространственная структура в поперечном направлении и частота временных осцилляций, определяемые величинами k_{max} и $\omega_{max} = \text{Im}\lambda(k_{max})$ доминирующей неустойчивости, т.е. моды задачи линейной устойчивости (3.23), для которой достигается максимум действительной части дисперсионного соотношения $\text{Re}(\lambda) > 0$ при $k = k_{max}$. Эти параметры важны с точки зрения того, что они характеризуют свойства более сложных решений, возникающих в результате первичной бифуркации при потере устойчивости бегущих волн горения. На рис. 3.6 построены зависимости волнового числа (а) и частоты пульсаций (б) от энергии активации для доминирующей неустойчивости. Параметры k_{max} и ω_{max} берутся для каждого значения β на нейтральной границе устойчивости, т.е. L_A каждый раз подстраивает-

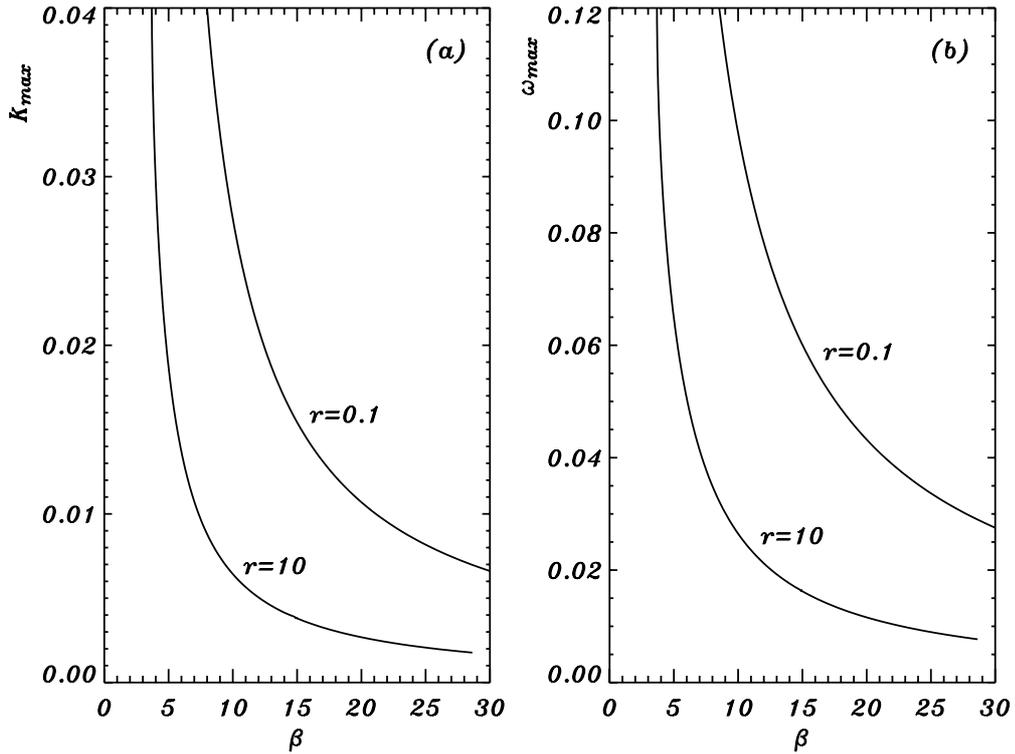


Рис. 3.6. Зависимость k_{max} (a) и ω_{max} (b) от β при $L_B = 1$, $u_a = 0$, $r = 10$ и $r = 0.1$.

ся так, что L_A и β соответствуют граничным значениям для появления волновой неустойчивости. Другие значения параметров фиксированы, как это отображено в подписи к рисунку. Как $k_{max}(\beta)$, так и $\omega_{max}(\beta)$ являются монотонно затухающими функциями. При уменьшении параметра рекомбинации, наблюдаются большие значения волнового числа и частоты пульсаций доминирующей неустойчивости. Поскольку граничная мода доминирующей неустойчивости может быть ‘шаблоном’ при мягком возмущении пульсирующих решений, можно ожидать, что с увеличением параметра рекомбинации будут возникать структуры с большим поперечным масштабом и более медленной временной динамикой.

В случае $L_A < 1$ численный анализ показывает, что волна горения теряет устойчивость по отношению к ячеистым возмущениям. Этот тип неустойчивости не имеет одномерного аналога и существует только в системах с как минимум двухмерной пространственной геометрией. Типичное дисперсионное соотношение для ячеистой неустойчивости схематически показано на вкладке к рис. 3.7 в правом нижнем углу. На графике представлена только действительная часть $\lambda(k)$, поскольку мнимая часть дисперсионного соотношения равна нулю. Для устойчивых бегущих волн

зависимость $\text{Re}\lambda(k)$ представляет собой монотонно убывающую функцию, выходящую из начала отсчета, $\lambda(0) = 0$. По мере приближения к нейтральной границе устойчивости, наклон графика $\text{Re}\lambda(k)$ в точке $k = 0$ стремится к нулю и при достижении критических значений параметров обращается в ноль. При пересечении нейтральной границы устойчивости из области параметров, соответствующей устойчивым волнам горения, и переходе в область параметров, для которых волна горения теряет устойчивость, производная или наклон $\text{Re}\lambda(k)$ в точке $k = 0$ меняет знак от отрицательного к положительному. В результате появляется максимум функции $\text{Re}\lambda(k)$ при некотором значении $k = k^*$, как это проиллюстрировано на вкладке к рис. 3.7. Следует отметить, что дисперсионное соотношение все время исходит из начала отсчета в данном случае, т.е. $\lambda(0) = 0$.

На рис. 3.7 построены критические значения параметров для появления ячеистой неустойчивости на плоскости L_A от β при $L_B = 1$, $u_a = 0$ и нескольких значениях r , изменяющихся от 0.02 до 50. Области параметров, соответствующие устойчивым волнам горения, находятся над критическими кривыми для ячеистой неустойчивости. Нейтральная граница устойчивости, $L_A(\beta)$, является монотонно возрастающей функцией. Зависимость критических значений параметров $L_A(\beta)$ качественно напоминает случай одноступенчатой адиабатической модели: при стремлении β к нулю L_A убывает, а при увеличении β L_A стремится к единице. Область параметров, при которых волна горения устойчива, сжимается и нейтральная граница устойчивости сдвигается вверх при увеличении параметра рекомбинации от 0.02 до 1. При $r > 1$ наблюдается тенденция приближения к некоторому пределу: изменение r от 10 до 50 только немного модифицирует критические значения параметров так, что они становятся практически не отличимы друг от друга.

Влияние изменения L_B на устойчивость волн горения так же исследовалась и проиллюстрирована на рисунках 3.8 и 3.9 для случая медленного $r = 0.1$ и быстрого $r = 10$ режима рекомбинации, соответственно. На рисунках 3.8 (а) и 3.9 (а) рассмотрена потеря устойчивости по отношению к волновым неустойчивостям и следовательно число Льюиса для топлива взято больше единицы. Сплошная линия показывает нейтральную грани-

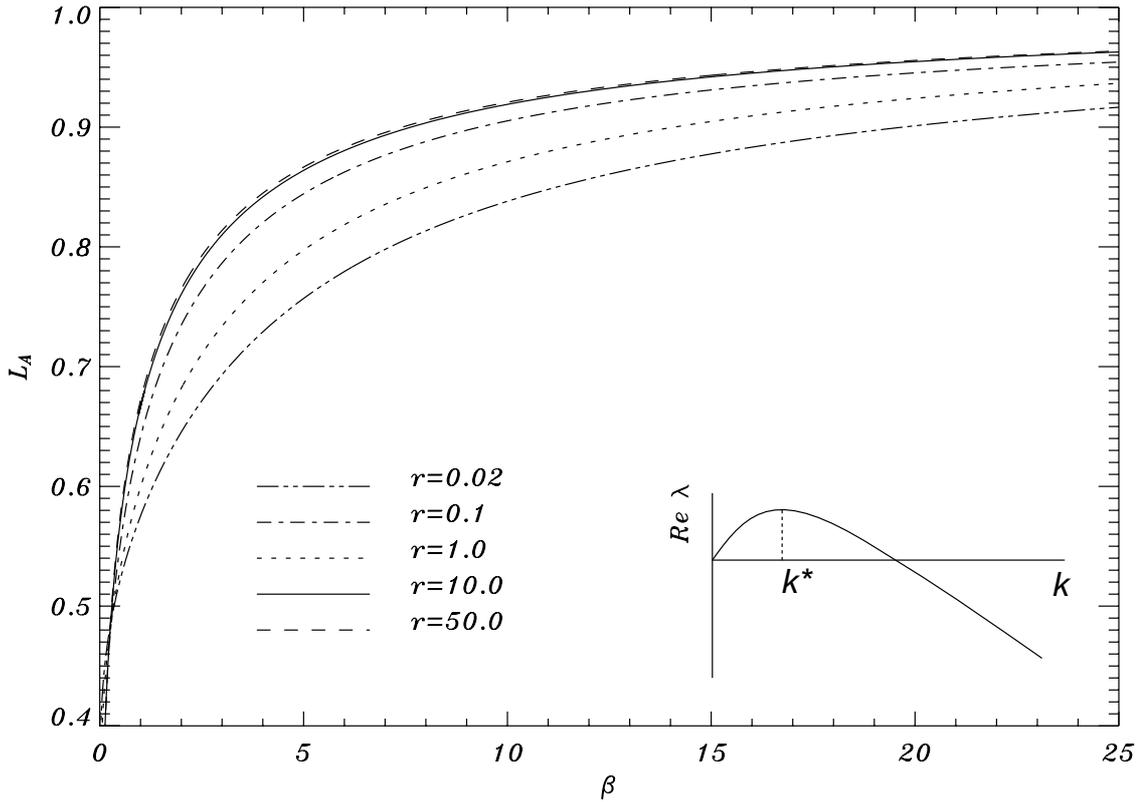


Рис. 3.7. Диаграмма устойчивости на плоскости L_A от β при $L_B = 1$, $u_a = 0$ и различных значениях $r = 0.02, 0.1, 1, 10$ и 50 . Типичный вид дисперсионного соотношения для случая ячеистой неустойчивости показан на вкладке к рисунку в нижнем правом углу.

цу устойчивости. Следуя предыдущему изложению, критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа, возникающей в одномерной модели, так же показаны с помощью точечной кривой. На рисунках **3.8** (b) и **3.9** (b) рассмотрен случай чисел Льюиса для топлива меньших единицы и потеря устойчивости вызвана ячеистыми возмущениями.

Как видно на рис. **3.8**, в случае медленной рекомбинации, изменение L_B приводит к существенному изменению нейтральной границы как для волновой (a), так и для ячеистой (b) неустойчивости. Увеличение L_B в режиме медленной рекомбинации имеет неоднозначное влияние на критические значения параметров для волновой неустойчивости. Для промежуточных значений энергии активации граница устойчивости сдвигается в сторону больших значений β с увеличением L_B , т.е. для более тяжелых радикалов пламя менее устойчиво. С другой стороны, для больших значений β , наблюдается обратная тенденция: увеличение L_B сдвигает нейтральную границу устойчивости в сторону меньших β . В случае ячеистой неустойчивости ситуация более однозначна: уменьшение L_B делает волну горения

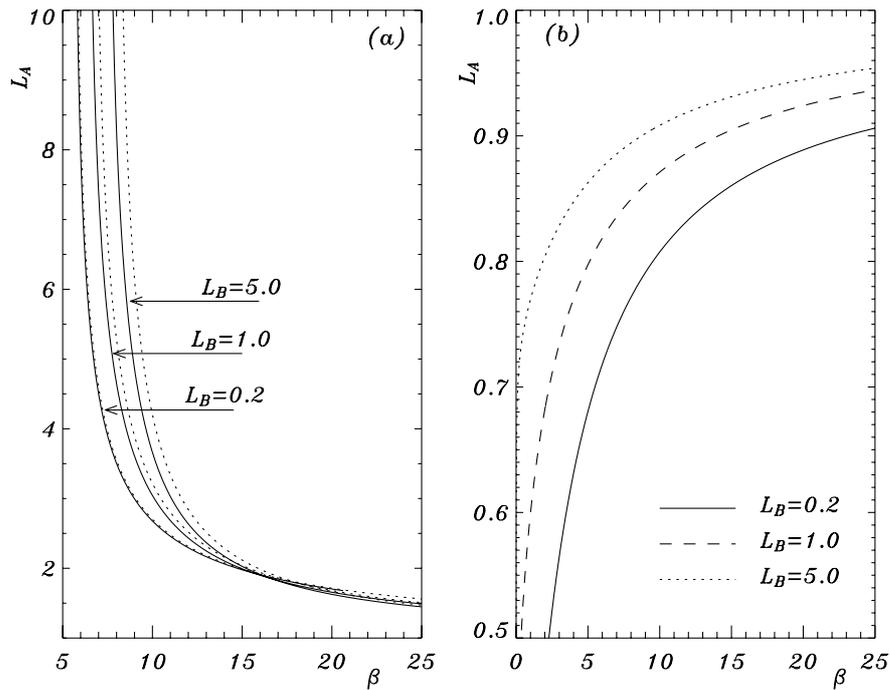


Рис. 3.8. Диаграмма устойчивости на плоскости L_A от β при $r = 0.1$, $u_a = 0$ и различных значениях $L_B = 0.2, 1$, и 5 . Результаты показаны для $L_A > 1$ (a) и $L_A < 1$ (b).

более устойчивой. Тот же результат, но менее выраженный, наблюдается в случае быстрой рекомбинации при $r = 10$ на рис. 3.9. Как отмечено ранее, увеличение r приводит к тому, что характеристики неустойчивости стремятся к некоторому предельному поведению. В результате, увеличение L_B только немного уменьшает область параметров с устойчивым распространением волн горения, как при $L_A < 1$, так и при $L_A > 1$. На рис. 3.9 (a) критические значения параметров лежат очень близко друг у другу, поэтому для того, чтобы разрешить различные кривые нейтральной устойчивости при $L_B = 0.2, 1, 5$, увеличенные графики так же построены на вкладке к рисунку.

Исследовалось влияние температуры окружающей среды, u_a , которая является важным экспериментальным параметром, на устойчивость бегущих волн горения. В расчетах, приведенных выше, она фиксировалась равной нулю, далее мы отбрасываем это допущение. На рис. 3.10 построена нейтральная граница устойчивости на плоскости L_A от β при $r = 0.1$, $L_B = 1$ и двух значениях внешней температуры $u_a = 0$ и $u_a = 0.01$. Случай волновой неустойчивости, $L_A > 1$, представлен на графике (a), где сплошная линия соответствует границе устойчивости, а точечная линия

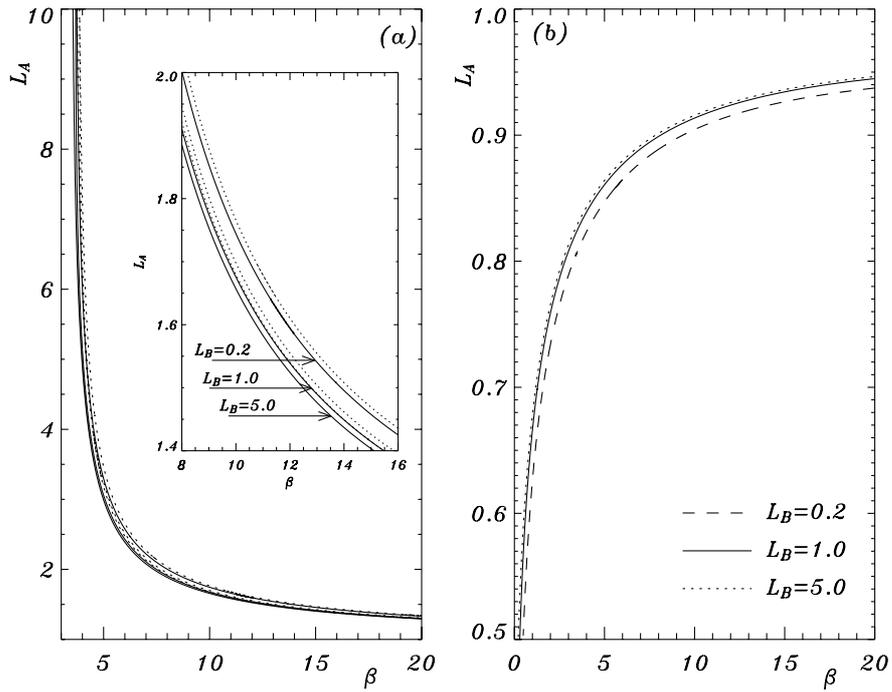


Рис. 3.9. Диаграмма устойчивости на плоскости L_A от β при $r = 10$, $u_a = 0$ и различных значениях $L_B = 0.2, 1$, и 5 . Результаты показаны для $L_A > 1$ (a) и $L_A < 1$ (b).

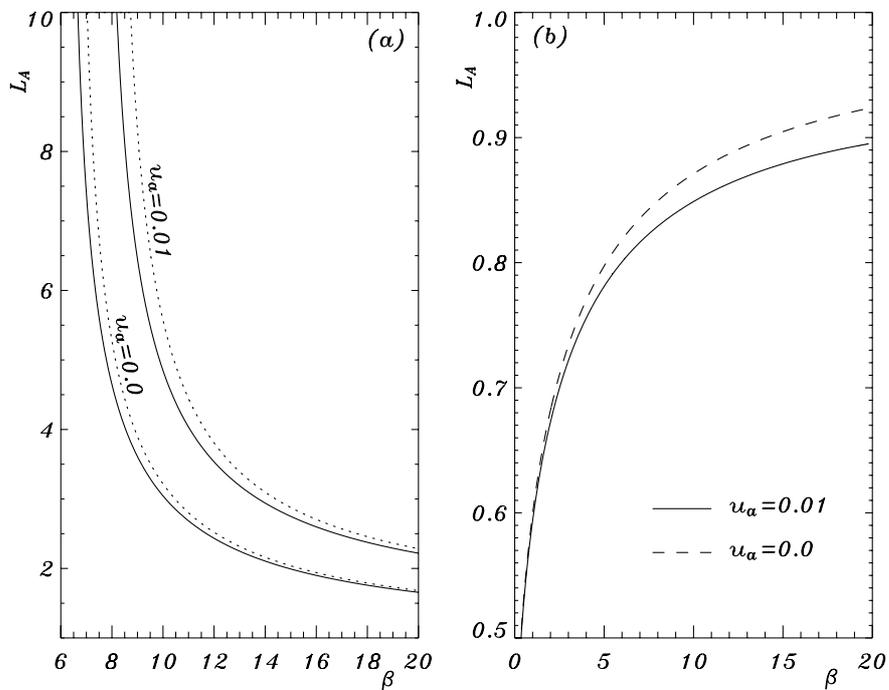


Рис. 3.10. Диаграмма устойчивости на плоскости L_A от β при $r = 0.1$, $L_B = 1$ и различных значениях $u_a = 0.0$ и 0.01 . Результаты показаны для $L_A > 1$ (a) и $L_A < 1$ (b).

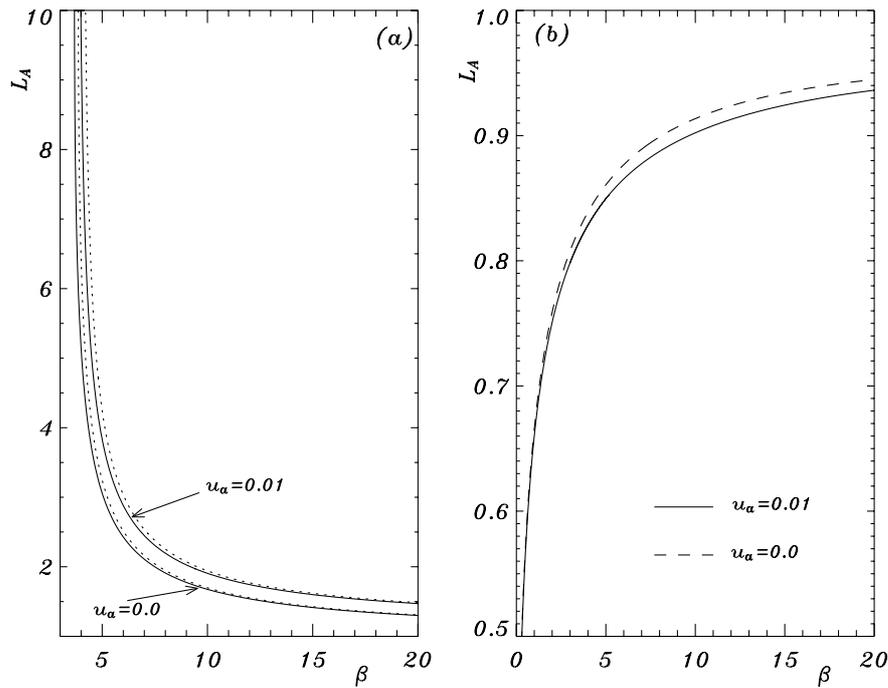


Рис. 3.11. Диаграмма устойчивости на плоскости L_A от β при $r = 10$, $L_B = 1$ и различных значениях $u_a = 0.0$ и 0.01 для случаев $L_A > 1$ (a) и $L_A < 1$ (b).

представляет критические параметры для бифуркации Андронова-Хопфа в одномерном приближении. Видно, что увеличение внешней температуры сдвигает критическую кривую потери устойчивости в сторону больших значений β , таким образом стабилизируя волну горения. Появление ячеистой неустойчивости показано на рисунке 3.10 (b). Как следует из графиков для $u_a = 0$ и 0.01 , увеличение температуры окружающей среды так же имеет стабилизирующий эффект на пламя. Это влияние наиболее очевидно для больших значений энергии активации и становится менее заметным для промежуточных и малых значений β . Рис. 3.10 аналогичен рис. 3.11 с той разницей, что на последнем рассматривается режим быстрой рекомбинации, т.е. $r = 10$. На рисунке (a) представлен случай $L_A > 1$. Видно, что в отличие от числа Льюиса для радикалов L_B , изменение u_a по прежнему имеет существенное влияние на границу устойчивости. Та же ситуация наблюдается на рисунке (b), где представлена критическая кривая для ячеистой неустойчивости для $u_a = 0$ и 0.01 . Увеличение внешней температуры имеет выраженный стабилизирующий эффект, проявляющийся в сдвиге нейтральной границы устойчивости в сторону меньших значений L_A .

§ 3.5. Пульсирующие, стоячие и ячеистые волны

Далее исследуются свойства волн горения, появляющихся при пересечении в пространстве параметров нейтральной границы устойчивости для решений в виде бегущей волны. Модельные уравнения (3.20) решаются на достаточно большой прямоугольной области координат с начальными условиями (3.21), накладываемыми на сторонах прямоугольной области, ориентированных вдоль оси y , и условиями нулевых потоков на u , v и w на сторонах, параллельных оси x . Длина области интегрирования вдоль оси x выбирается достаточно большой для того, чтобы граничные условия (3.21) удовлетворялись с хорошей точностью. Длина области интегрирования вдоль оси y выбирается так, чтобы вместить один период появляющейся структуры в поперечном направлении. Для решения системы (3.20) был использован метод расщепления по физическим процессам. Вначале решалась система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы изменения температуры, концентрации топлива и радикалов, за счет реакций разветвления и рекомбинации. Для этого использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка. На втором этапе решались уравнения переноса. В этом случае использовалась безусловно устойчивая схема Кранка-Николсона, обладающая вторым порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству. Начальные условия берутся в виде бегущих волн.

Как показано в предыдущем параграфе, в зависимости от числа Льюиса для топлива могут появиться два типа неустойчивости: волновая неустойчивость для $L_A > 1$ или ячеистая неустойчивость для $L_A < 1$. Далее, решения, появляющиеся в результате потери устойчивости бегущих волн, исследуются по отдельности в этих областях параметров.

3.5.1. Пульсирующие волны

Исследование режимов, возникающих при потере устойчивости бегущей волны, начнем с рассмотрения одномерного случая. Результаты численного анализа представлены на рисунке 3.12. На графиках (а) и (б) проиллюстрировано поведение пульсирующих волн горения при $L_A = 10$,

$L_B = 1$, $r = 45$ и $\beta = 3.8$. Значение энергии активации, β , взято выше критического для бифуркации Андронова-Хопфа, $\beta_h = 3.657\dots$. Начальный профиль взят в виде неустойчивой бегущей волны и испытывает пульсирующие неустойчивости, которые искажают решение в ходе начальной стадии эволюции профиля во времени. Появляются переходные пики распределения температуры в пространстве и осцилляции формы и максимального значения профиля концентрации радикалов, w_{max} . Профиль концентрации топлива главным образом подвержен изменению угла наклона фронта, хотя некоторые малые осцилляции концентрации топлива наблюдаются в зоне продуктов.

Значение w_{max} и положения максимума радикалов в пространстве ξ_{max} являются удобными параметрами для описания колебательной природы нестационарных решений. Здесь $\xi = x - c_{drift}t$ - это координата в системе отсчета, бегущей со скоростью c_{drift} , которая представляет собой среднюю по времени скорость распространения пламени $c_{drift} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_{max}/t$, где x_{max} - это координата максимума концентрации радикалов в лабораторной системе отсчета. По мере развития пульсирующей неустойчивости значения w_{max} и ξ_{max} осциллируют с амплитудой, которая изначально растет по экспоненциальному закону во времени. Частота этих осцилляций задается мнимой частью $\text{Im}\lambda$, а инкремент экспоненциального роста определяется действительной частью, $\text{Re}\lambda$, пары точек дискретного спектра, ответственных за появление неустойчивости.

На временах порядка $(\text{Re}\lambda)^{-1}$, амплитуды колебаний, w_{max} и ξ_{max} , выходят на насыщение и стабилизируются на некоторых значениях. Поведение профилей $u(\xi, t)$, $v(\xi, t)$ и $w(\xi, t)$ становится периодическим по времени и таким образом формируется пульсирующая волна горения. На рисунках **3.12** (a) и (b) построены распределения температуры и концентрации радикалов в пульсирующей волне горения в три момента времени $t_1 = 0$, $t_2 = 588$ и $t_3 = 1961$. Поскольку эти решения периодические, время отсчитывается от 0 до T , где $T = 2484$ - это период пульсации. В профиле температуры на рисунке (a) видны локальные пики температуры, которые осциллируют по времени. Так же отметим, что значение координаты температурного максимума, ξ_{max} , как и положение точки максимального

градиента $u(\xi)$ колеблется около значения $\xi = 0$. Профиль концентрации топлива $v(\xi, t)$ не построен на рисунке **3.12**. Однако, отметим, что максимальный угол наклона $v(\xi)$ при фиксированном t меняет свое значение со временем и, так же как и координата точки максимального наклона, испытывает осцилляции по периоду времени.

Наиболее яркую солитон-подобную динамику демонстрируют профиль концентрации радикалов $w(\xi, t)$, который изображен на рисунке **3.12** (b). На нем видно, что концентрация радикалов как функция ξ остается локализованной колокол-образной функцией во все моменты времени. Вместе с тем, максимум $w(\xi)$ и его положение являются периодическими функциями времени. Это продемонстрировано на рис. **3.12** (c), где построена зависимость w_{max} от ξ_{max} . Видно, что на плоскости (ξ_{max}, w_{max}) формируется предельный цикл.

Для того чтобы установить тип бифуркации Андронова-Хопфа исследовались свойства пульсирующих решений, возникающих при потере устойчивости бегущих волн горения. Результаты этого анализа представлены на рисунке **3.12** (d), где показаны данные расчетов для $L_A = 3.0$ и $L_A = 10$. Другие параметры взяты, как показано в подписи к рисунку, т.е. $L_B = 1$ и $r = 45$. Энергия активации увеличивается от значения сразу за пороговым для бифуркации Андронова-Хопфа, β_h , и для каждого значения β прямым численным интегрированием модельных уравнений находится пульсирующее решение. На рисунке **3.12** (d) квадрат относительной амплитуды, $\epsilon = \Delta w_{max}^2 / w_h^2$, построен как функция параметра закритичности, $\Delta\beta = \beta - \beta_h$, где $\Delta w_{max} = \max\{w_{max}(t)\} - \min\{w_{max}(t)\}$ за период времени $0 < t < T$, w_h - это максимальное значение концентрации радикалов в бегущей волне взятой точно в точке бифуркации Андронова-Хопфа, $\beta = \beta_h$. Кресты, соединенные сплошной линией, соответствуют $L_A = 10$, а ромбы, соединенные пунктирной линией, представляют результаты для $L_A = 3$. Для малых значений параметра закритичности $\Delta\beta$, сразу за нейтральной границей устойчивости, квадрат амплитуды показывает линейную зависимость. Амплитуда осцилляций непрерывная и корневая функция $\Delta\beta$, что характерно для надкритической бифуркации Андронова-Хопфа, в результате которой рождается устойчивый предельный цикл. По мере увеличе-

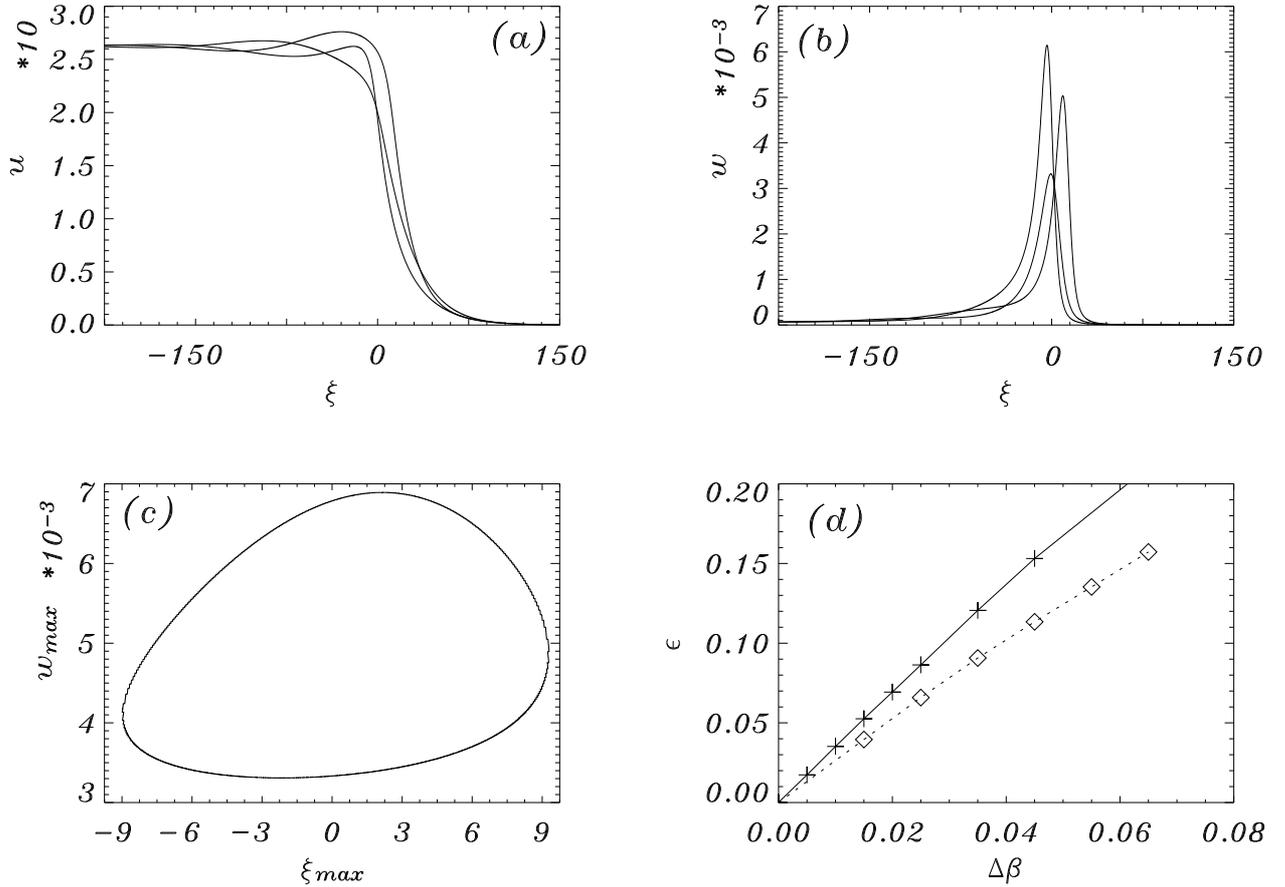


Рис. 3.12. Пульсирующие волны горения при $L_B = 1$ и $r = 45$. На рисунках (a) и (b) построены профили температуры и концентрации радикалов, $u(\xi)$ и $v(\xi)$. Профили взяты в моменты времени $t_1 = 0$, $t_2 = 588$ и $t_3 = 1961$. На рисунке (c) предельный цикл показан на плоскости w_{max} от ξ_{max} . Рисунки (a), (b) и (c) соответствуют энергии активации $\beta = 3.8$ и $L_A = 10$. На рисунке (d) построен квадрат относительная амплитуды, ϵ , как функция бифуркационного параметра, $\Delta\beta$, при $L_A = 10$ (кресты, соединенные сплошной линией) и при $L_A = 3$ (ромбы соединенные пунктирной линией).

ния $\Delta\beta$ зависимость ϵ от $\Delta\beta$ становится нелинейной. График функции ϵ от β позволяет получить критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа с помощью линейной аппроксимации данных прямого численного счета для $\Delta\beta$ стремящегося к нулю. Полученные таким образом оценки хорошо согласуются с результатами анализа линейной устойчивости до третьей значащей цифры, что подтверждает применимость обоих подходов.

3.5.2. Волновая неустойчивость и стоячие волны

При пересечении нейтральной границы для волновой неустойчивости ($L_A > 1$) в пространстве параметров, в результате первичной бифуркации появляется пульсирующая волна горения. Этот тип решения проиллюстрирован на рис. **3.13**, где построены контурные графики распределения концентрации радикалов, $w(x, y)$, взятые в три последовательных момента времени $t_1 = 80$, $t_2 = 145$ и $t_3 = 190$. На рис. **3.13** представлена только часть области интегрирования $x \in [360, 410]$, в то время как полная область интегрирования, использованная в численной схеме составляет $x \in [0, 2000]$. Линии уровня соответствуют концентрациям $w = 0.02, 0.06, 0.1, 0.14, 0.18, 0.22$ и 0.26 . При значениях параметров, использованных в расчетах и отображенных в подписи к рисунку **3.13**, критическое значение энергии активации для появления волновой неустойчивости $\beta = 6.668\dots$, временной период осцилляций составляет $T \approx 108$, а пространственный период решения в поперечном направлении примерно равен 100, что хорошо согласуется с предсказаниям анализа линейной устойчивости. На рис. **3.13** графики построены в системе отсчета, в среднем сопутствующей пульсирующей волне, $x - \bar{c}t$, где \bar{c} - это средняя скорость распространения пламени, т.е. среднее по времени положение пламени за период не меняется. Моменты времени, t_i , взяты таким образом, чтобы покрыть один период осцилляций и проиллюстрировать эволюцию профиля концентрации радикалов за период. Как видно на рис. **3.13**, при пересечении нейтральной границы устойчивости в пространстве параметров, решение в виде бегущей волны испытывает как временные пульсации, так и сегментацию фронта пламени в поперечном направлении. Это приводит к формированию солитон-

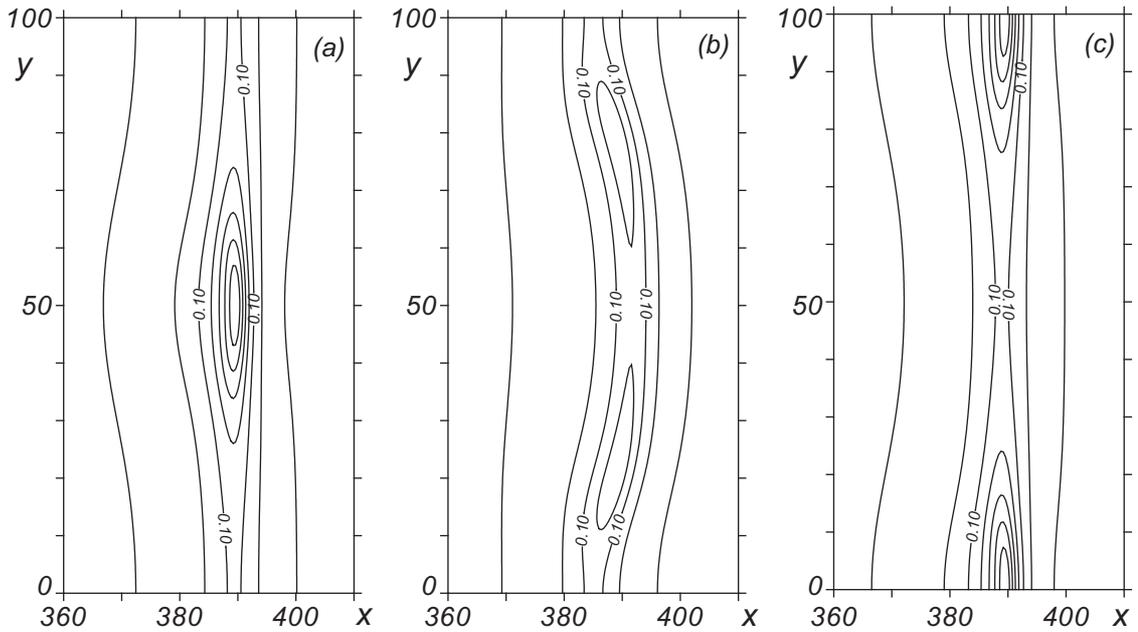


Рис. 3.13. Контурные графики распределения концентрации радикалов, $w(x, y)$, взятые в три последовательных момента времени $t_1 = 80$ рисунок (а), $t_2 = 145$ рисунок (б) и $t_3 = 190$ рисунок (с) для $L_A = 10$, $L_B = 1$, $\beta = 7.5$ и $r = 0.1$.

подобных структур профилей концентрации радикалов, которые так же изображены на рисунке 3.14.

На рис. 3.13(а) есть только один пик радикалов, расположенный на линии $y = 50$. Пока в области локализации пика радикалов присутствует достаточное количество топлива, их концентрация растет, а максимум остается в том же месте относительно координаты y . Увеличение концентрации радикалов приводит к усилению их рекомбинации, локальному разогреву смеси и формированию локального максимума температуры. Повышение температуры ускоряет реакцию разветвления и приводит к локальному обеднению концентрации топлива. В результате рост w_{max} сменяется затуханием максимума концентрации радикалов. Пока w_{max} велико реакция рекомбинации по прежнему активна и температура продолжает расти. Это проиллюстрировано на рис. 3.15, где показана динамика $u_{max}(t)$ и $w_{max}(t)$ на рисунке (а), а так же на рисунке (б) построено положение w_{max} на координатной плоскости (x_{max}, y_{max}) , с помощью ромбов, соединенных сплошной линией. Графики построены для тех же значений параметров, что и на рис. 3.13.

Следует отметить, что два пика концентрации радикалов на рис. 3.15(а) соответствуют одному периоду пульсаций, а так же то, что на ри-

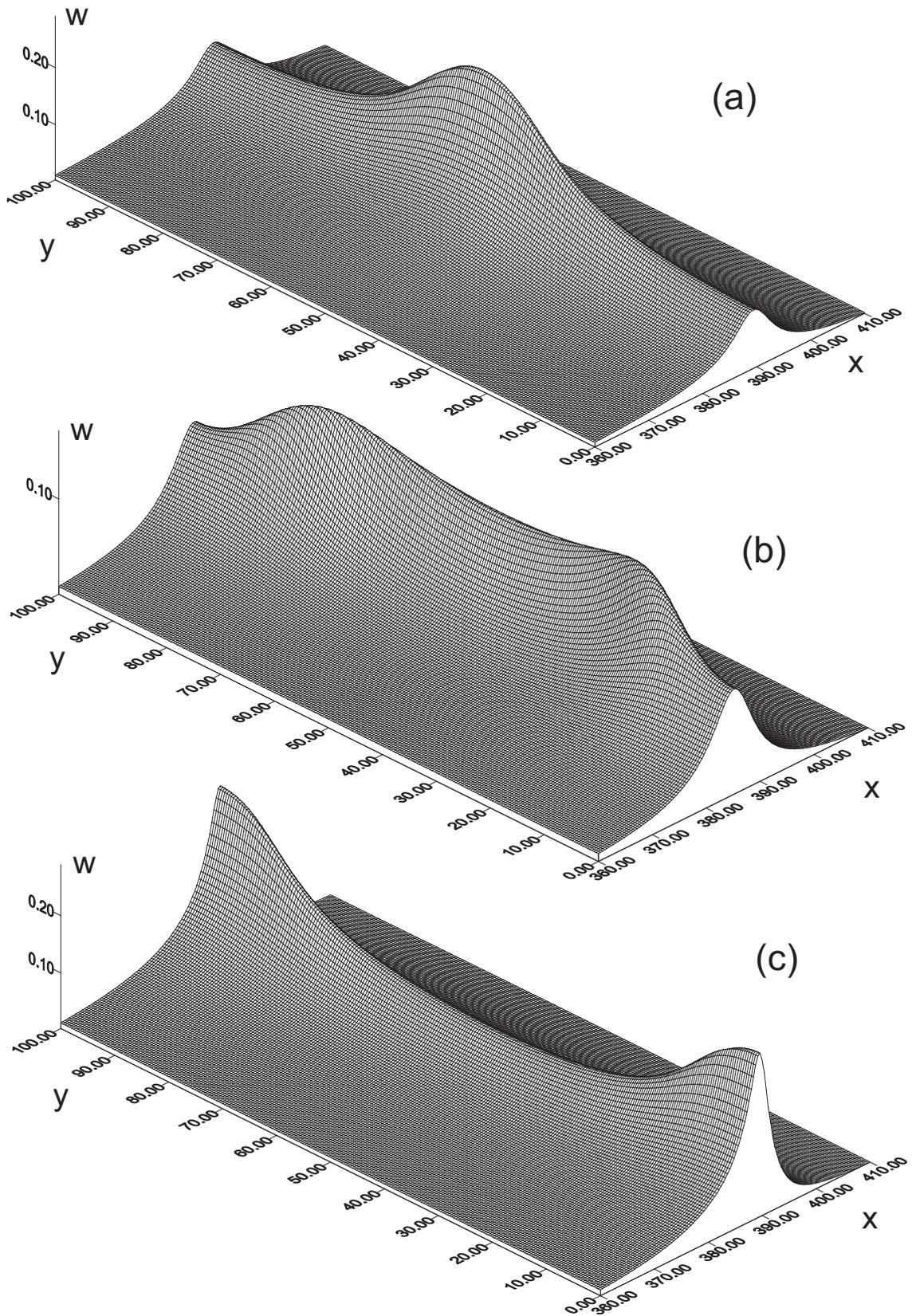


Рис. 3.14. Профили распределения концентрации радикалов, $w(x, y)$, взятые в три последовательных момента времени $t_1 = 80$ рисунок (a), $t_2 = 145$ рисунок (b) и $t_3 = 190$ рисунок (c) для $L_A = 10$, $L_B = 1$, $\beta = 7.5$ и $r = 0.1$.

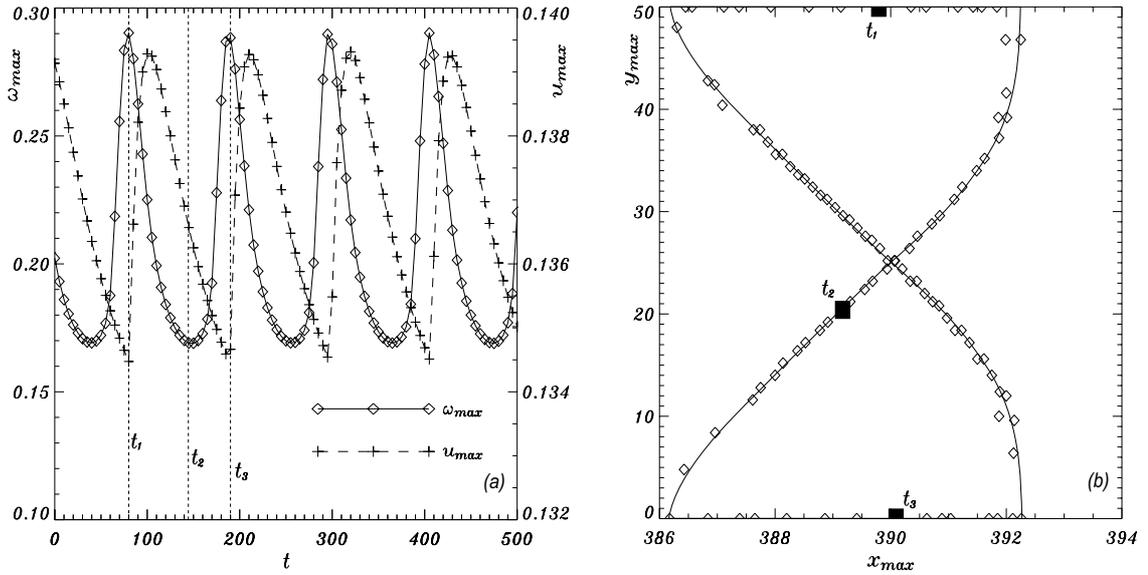


Рис. 3.15. Рисунок (а) показывает значение максимумов концентрации радикалов (ромбы, соединенные сплошной линией) и температуры (кресты, соединенные пунктирной линией). На рисунке (b) показана зависимость положения y от x максимума концентрации радикалов. Параметры взяты как на рисунке 3.13. Моменты времени, в которые строятся профили на рис. 3.13, отмечены пунктирными линиями на рисунке (а) и обозначены квадратами на рисунке (b).

сунке (b) показана только половина области интегрирования вдоль оси y , поскольку другая часть рисунка может быть получена зеркальным отражением относительно оси $y = 50$. Эта фаза динамики системы соответствует профилю (а) на рис. 3.13 и так же отмечена как ' t_1 ' на рис. 3.15. Увеличение локальной температуры сопровождается ускорением пламени, что приводит к продвижению расположения локального пика радикалов в сторону больших значений координаты x . В некоторый момент, когда w_{max} становится малым, тепловыделение начинает испытывать стагнацию и наблюдается уменьшение u_{max} . Эпицентр радикалов не может дальше распространяться вдоль оси x , поскольку в локальной области около оси $y = 50$, где располагается пик радикалов, топливо существенно израсходовано. С другой стороны, с обеих сторон от этого пика концентрации радикалов вдоль оси y присутствует избыток не сгоревшего топлива. Эпицентр реакции разваливается на два пика, которые расходятся от оси $y = 50$ в сторону внешних сторон области интегрирования, т.е. линий $y = 0$ и $y = 100$. Это соответствует профилю концентрации радикалов, изображенному на рис. 3.13(b), а так же частям траектории, отмеченным как ' t_2 ' на рис. 3.15 (b). По мере того, как пики радикалов движутся по этим траекториям от линии

$y = 50$, максимальная концентрация радикалов и температура убывают, скорость распространения эпицентров реакции убывает и они отступают в сторону меньших значений координаты x на рис. **3.15(b)**. К моменту прибытия локальных пиков к внешним границам области интегрирования, $y = 0$ и $y = 100$, локальный максимум концентрации радикалов проходит через минимальное значение и наблюдается обратная тенденция: приближение к богатым топливом внешним областям интенсифицирует реакцию разветвления и w_{max} начинает восстанавливаться к высоким значениям. На этой стадии пики радикалов остаются на тех же местах по оси y и начинают продвигаться в сторону больших значений x . Рост концентрации радикалов увеличивает тепловыделение и локальную температуру. Повышение температуры ускоряет реакцию разветвления так, что топливо начинает активно превращаться в радикалы. В некоторый момент достигается максимум $w_{max}(t)$, который сменяется последующим затуханием. Эта фаза динамики системы соответствует профилю, изображенному рис. **3.13 (c)**, и точке, отмеченной ' t_3 ' на рис. **3.15**. Затем эволюция системы периодически повторяется, что приводит к формированию структуры типа стоячей волны в сопутствующей системе отсчета. Численные расчеты на временах порядка десятков периодов пульсаций показывают периодическую повторяемость осцилляций без какого либо 'уплывания' их параметров.

Свойства бифуркации, приводящей к появлению решений в виде стоячей волны, так же исследовались. При увеличении энергии активации от критического значения, β_c , которое составляет 6.668... для рис. **3.13-3.15**, появляются пульсации $w_{max}(t)$. Эти осцилляции малы при $\beta - \beta_c \ll 1$ и хорошо описываются частотой $\text{Im}\lambda$, получаемой из линейного анализа устойчивости. Амплитуда осцилляций растет по коренному закону с увеличением β . Колебания температуры малы и их амплитуда не превышает уровня нескольких процентов от адиабатической температуры горения даже для достаточно больших значений $\beta - \beta_c$. Для профиля концентрации топлива не наблюдается заметных локальных пиков или провалов в пространственном распределении в результате появления стоячих волн. Однако, при пересечении нейтральной границы устойчивости и появлении стоячих волн в профилях концентрации топлива появляется фазовый сдвиг вдоль оси

y . Это наблюдается в виде искривления фронта пульсирующей волны, в отличие от плоского решения в виде бегущей волны, существующего до бифуркации потери устойчивости. С увеличением бифуркационного параметра характеристики стоячей волны, т.е. временная частота пульсаций и длина волны в направлении оси y , испытывают плавное изменение от значений, предписываемых линейным анализом устойчивости: $\text{Im}\lambda$ и k^{-1} для доминирующей неустойчивости. Среднее значение скорости пламени, \bar{c} , для стоячей волны меньше, чем скорость неустойчивого решения в виде бегущей волны для тех же значений параметров. Это согласуется с результатами прошлой главы для модели Зельдовича-Баренблатта.

3.5.3. Ячеистые неустойчивость и волны

В случае, $L_A < 1$, при пересечении нейтральной границы устойчивости в пространстве параметров появляется неустойчивость ячеистого (тьюриговского [210]) типа. В отличие от волновой неустойчивости, в этом случае дисперсионное соотношение, посчитанное для критических значений параметров, не позволяет получить характерные масштабы времени и длины в поперечном направлении для ячеистого возмущения. Для параметров сразу за границей устойчивости появляется неустойчивая мода с очень малым инкрементом экспоненциального роста и большой длиной волны в поперечном направлении. С ростом закритичности, например, за счет увеличения β , волновое число в направлении оси y и инкремент роста, $\text{Re}\lambda$, доминирующей неустойчивости становятся больше. В результате становится возможным отследить появление ячеистой неустойчивости методами прямого численного интегрирования модельных уравнений (3.20).

Изначально, неустойчивость вызывает незначительное изменение фронта пламени, которое проявляется в его искривлении, т.е. волна перестает быть плоской одномерной структурой. Фрагментация фронта пламени так же сопровождается варьированием в поперечном направлении, вдоль оси y , локального максимума концентрации радикалов по продольной координате x . Изменения профилей температуры и концентрации топлива менее выражены. После интегрирования модельных уравнений на временах порядка нескольких характерных инкрементов экспоненциального

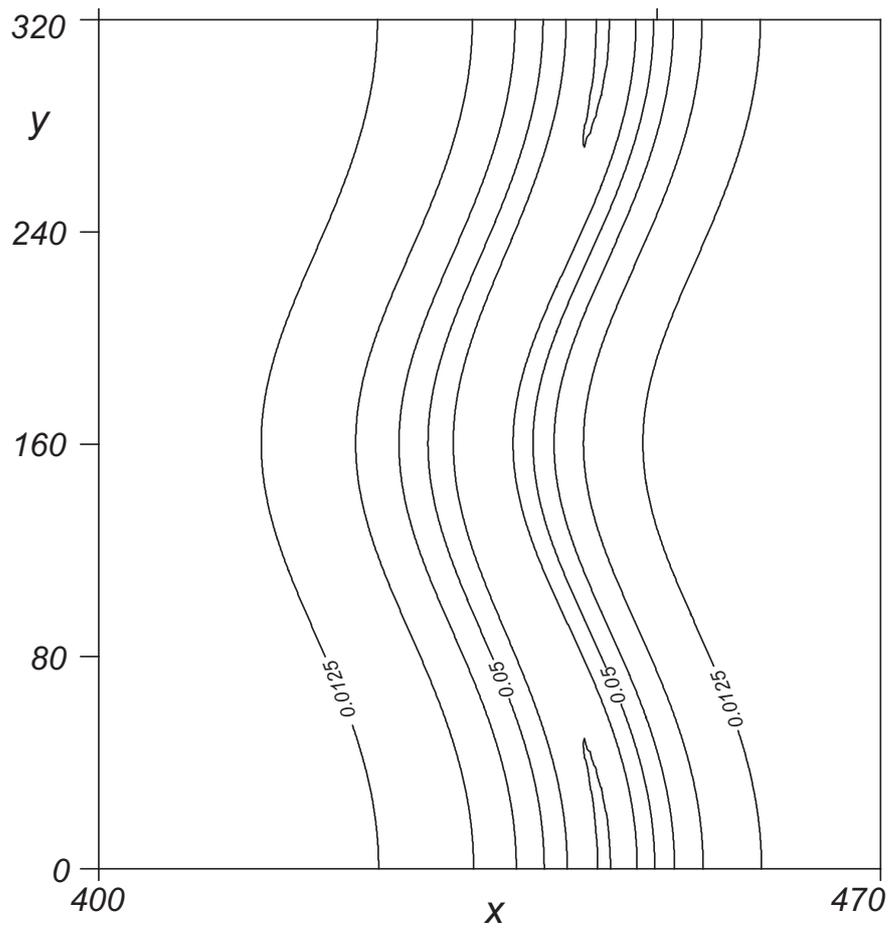


Рис. 3.16. *Контурный график профиля концентрации радикалов, $w(x, y)$, для $L_A = 0.81$, $L_B = 1$, $\beta = 9.5$, $r = 0.1$.*

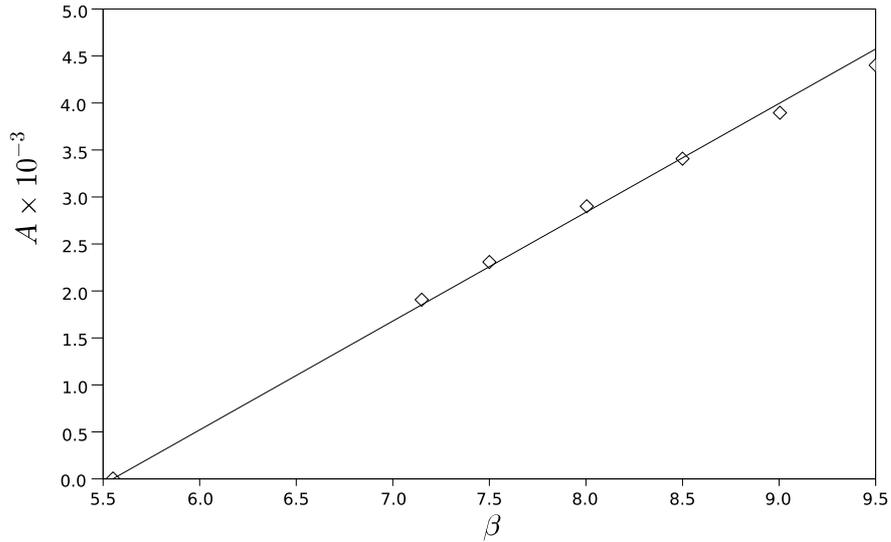


Рис. 3.17. Зависимость $\Delta w_y(\beta)$ изменения пикового значения концентрации радикалов вдоль оси y от энергии активации для $L_A = 0.81$, $L_B = 1$, $r = 0.1$.

роста, $(\text{Re}\lambda)^{-1}$, что составляет по порядку около 10^5 , решение сходится к стационарно распространяющейся ячеистой волне, которая бежит с постоянной скоростью вдоль оси x без изменения своей формы в сопутствующей системе отсчета.

Типичный вид ячеистой волны продемонстрирован на рис. **3.16**, где построен контурный график концентрации радикалов, $w(x, y)$, для $L_A = 0.81$, $L_B = 1$, $\beta = 9.5$ и $r = 0.1$. Здесь x - это координата в сопутствующей волне горения системе отсчета. Линии уровня соответствуют значениям концентрации $w = 0.0125, 0.025, \dots, 0.075$. Как и на предыдущем контурном графике **3.13**, на рис. **3.16** представлена только часть области интегрирования $x \in [400, 470]$. Полный интервал расчетной сетки составляет $x \in [0, 800]$. Ширина области интегрирования вдоль оси y выбрана таким образом, чтобы вместить одну ячейку сегментированного фронта.

Следует отметить, что для параметров, взятых на рис. **3.16**, бегущая волна горения теряет устойчивость при $\beta_c = 5.55\dots$. Несмотря на то, что бифуркационный параметр, β , существенно изменен относительно критического значения, на рис. **3.16** пиковое значение концентрации радикалов мало изменяется вдоль оси y , $\Delta w_y = \max_y[\max_x w] - \min_y[\max_x w]$, достигает только нескольких процентов от максимального значения $w(x, y)$. Это отчетливо видно по расположению линий уровня на рис. **3.16**, а так же проиллюстрировано на рис. **3.17**, где построена зависимость перепада пи-

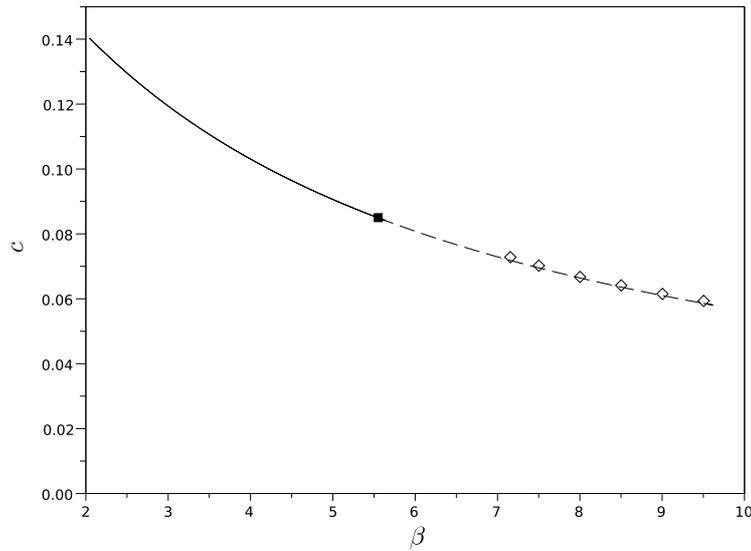


Рис. 3.18. Зависимость скорости, c , ячеистого пламени от энергии активации показана ромбами. Сплошная и пунктирная линии соответствуют скорости устойчивой и не устойчивой бегущей волны горения соответственно. Графики построены для $L_A = 0.81$, $L_B = 1$, $r = 0.1$.

кового значения концентрации радикалов вдоль фронта, Δw_y , от энергии активации при тех же значениях параметров, что и на рис. 3.16. Ромбы представляют численные результаты, а соединяющая их сплошная линия показывает прямую, построенную по методу наименьших квадратов. Природа бифуркации так же отличается от случая $L_A > 1$, поскольку Δw_y растет линейно в зависимости от бифуркационного параметра, β . Для профилей температуры и концентрации топлива ячеистая структура проявляется только в сдвиге фазы фронта пламени с изменением координаты y (или ненулевой кривизне фронта пламени), в то время как при этом не наблюдается значительных пиков в распределении u и v .

Интересным обстоятельством является то, что скорость ячеистого пламени и неустойчивой бегущей волны горения равны с точностью до численной ошибки определения скорости фронта, которая составляет порядка одного процента. Это, вместе с необходимостью осуществлять длительное интегрирование по времени для того, чтобы найти ячеистую волну, делает численное исследование этого типа решений сложной задачей. Зависимость скорости ячеистой волны от энергии активации изображена на рис. 3.18 с помощью ромбов при $L_A = 0.81$, $L_B = 1$, $r = 0.1$. Для сравнения

на этом же графике построена скорость бегущей волны горения. Сплошная линия отвечает устойчивому, а пунктирная - неустойчивому решению. Точка бифуркации, найденная из линейного анализа устойчивости, изображена сплошным квадратом. Зазор между точкой бифуркации и первой точкой, изображающей ячеистую волну горения, связан со сложностью детектирования этого режима распространения пламени методом прямого интегрирования модельных уравнений.

§ 3.6. Выводы

В данной главе рассмотрено распространение волн горения в модели Зельдовича-Линяна в адиабатическом пределе. Установлено, что для заданных значений параметров решение в виде бегущей волны всегда единственно. Структура бегущей волны горения зависит от параметра рекомбинации, r , выражающего соотношение между характерными временами реакций разветвления и рекомбинации. При $r < 1$, наблюдается режим медленной рекомбинации распространения пламени. В этом случае передний край пламени определяется процессами диффузии тепла и реагентов, зона реакции состоит из тонкой области разветвления, заключенной в гораздо более широкую область рекомбинации. В зоне разветвления практически все топливо конвертируется в радикалы и их концентрация достигает величин порядка единицы. В зоне рекомбинации радикалы трансформируются в продукты и выделяется тепло. Область, где активна реакция рекомбинации протягивается в зону продуктов, где рекомбинация, а не транспортные процессы (как это характерно для одноступенчатых моделей) является доминирующей. Как следствие этого, температура и концентрация реагентов стремятся к асимптотическим значениям суб-экспоненциальным образом.

При $r > 1$ реакция рекомбинации быстрее, чем реакция разветвления цепи и пламя распространяется в режиме быстрой рекомбинации. В зоне прогрева доминируют транспортные процессы. Она сменяется зоной реакции, где реакция рекомбинации следует за реакцией разветвления и к радикалам может быть применено стационарное приближение. В результате концентрация радикалов асимптотически мала. Модель с двухступенчатой

реакцией может быть редуцирована к модели с одно-стадийной реакцией второго порядка и удвоенной энергией активации по отношению к реакции разветвления модели Зельдовича-Линяна. В режиме быстрой рекомбинации асимптотический анализ дает хорошую оценку скорости распространения пламени при высокой энергии активации. Для умеренных значений энергии активации оба подхода согласуются качественно в режиме быстрой рекомбинации. Однако эти асимптотические результаты нельзя экстраполировать на режим медленной рекомбинации, для которого численный и асимптотический анализ дают существенно отличающиеся оценки.

Устойчивость волн горения в модели Зельдовича-Линяна исследовалась методом функции Эванса и прямым интегрированием модельных уравнений в частных производных. Результаты обоих методов согласуются с высокой степенью точности. Было установлено, что в одномерном случае бегущая волна горения теряет устойчивость в результате бифуркации Андронова-Хопфа, когда пара комплексно сопряженных точек дискретного спектра задачи линейной устойчивости переходят из левой в правую половину комплексной плоскости, пересекая мнимую ось выше и ниже начала координат, соответственно, и приводя к возникновению пульсирующей неустойчивости. Критические значения параметров для бифуркации Андронова-Хопфа были найдены и показано, что на плоскости параметров L_A от β нейтральная граница устойчивости, $L_A(\beta)$, является монотонно убывающей функцией. Тип бифуркации Андронова-Хопфа и свойства пульсирующих решений, появляющихся в результате нее, детально исследовались. Было показано, что бифуркация имеет надкритический характер. Амплитуда осцилляций растет по коренному закону с увеличением энергии активации за значение, предписываемое нейтральной границей устойчивости.

В двухмерном случае было установлено, что бегущая волна горения теряет устойчивость либо из-за волновой, либо ячеистой неустойчивости в зависимости от числа Льюиса для топлива. На плоскости параметров число Льюиса для топлива – энергия активации найдена нейтральная граница устойчивости. В случае $L_A > 1$ волна горения теряет устойчивость по отношению к возмущениям волнового типа, причем это случается до то-

го, как происходит бифуркация Андронова-Хопфа в одномерной модели. Нейтральная граница устойчивости $L_A(\beta)$ так же является монотонно убывающей функцией, которая стремится к единице при больших значениях энергии активации и неограниченно растет при стремлении β к некоторому критическому значению. Для $L_A < 1$, бегущая волна горения теряет устойчивость по отношению к возмущениям ячеистого типа. Нейтральная граница устойчивости, $L_A(\beta)$, является монотонно возрастающей функцией. При β стремящихся к нулю L_A так же затухает, а при больших β , критическая энергия активации, L_A , стремится к единице. В обоих случаях, расположение нейтральной границы устойчивости качественно согласуется с результатами для одно ступенчатой адиабатической модели.

Важным экспериментальным параметром, который так же присутствует в одноступенчатых моделях, является температура окружающей среды. Показано, что начальный прогрев свежей смеси стабилизирует распространение волны горения. Критическая граница для появления волновой неустойчивости сдвигается в сторону больших значений β , а критические параметры для ячеистой неустойчивости перемещаются к меньшим значениям L_A . Это приводит к расширению области существования устойчивых решений в виде бегущих волн горения в пространстве параметров и качественно согласуется с предсказанием анализа устойчивости для одноступенчатой модели.

Параметры L_B и r специфичны для модели Зельдовича-Линяна и не могут быть воспроизведены в рамках анализа одностадийной реакции. Изменение параметра рекомбинации так же сильно влияет на устойчивость волн горения. Подобное изменение может контролироваться в эксперименте за счет модификации давления смеси. Реакции разветвления цепи как правило бимолерулярны, а реакции рекомбинации тримолекулярны, что обуславливает различие в зависимости их скоростей от давления и возможность манипулирования параметром r , о чем подробнее будет рассказано ниже. В режиме медленной рекомбинации $r < 1$, уменьшение параметра рекомбинации сдвигает нейтральную границу устойчивости в сторону больших значений энергии активации как для $L_A > 1$, так и для $L_A < 1$. Таким образом уменьшение параметра рекомбинации стабилизирует волну горе-

ния. Когда r становится больше единицы, область устойчивых решений в пространстве параметров стягивается к некоторому предельному поведению таким образом, что увеличение параметра рекомбинации на порядок величины только очень слабо отражается на критических значениях параметров как для волновой, так и для ячеистой неустойчивостей.

Влияние изменения числа Льюиса для радикалов на устойчивость волн горения так же исследуется. В режиме быстрой рекомбинации увеличение L_B сужает область параметров с устойчивым распространением пламени, т.е. для более тяжелых радикалов пламя менее устойчиво. В режиме медленной рекомбинации такой же эффект наблюдается для ячеистой неустойчивости, в то время как для волновой неустойчивости влияние изменения L_B более сложное и зависит от значения энергии активации. Параметр L_B может модифицироваться в эксперименте изменением состава смеси, например, разбавлением смеси инертными газами.

Важно отметить, что модель Зельдовича-Линяна, рассмотренная в данной главе и имеющая реакцию рекомбинации второго порядка, обладает качественно схожими свойствами с одноступенчатой адиабатической моделью. Это коренным образом отличается от модели Зельдовича-Баренблатта с реакцией рекомбинации первого порядка по концентрации радикалов, исследованной в прошлой главе, для которой было продемонстрировано существование затухания волн горения и присутствие бифуркации Богданова-Такенса даже в адиабатическом пределе. Другими словами, мы показали, что кинетика реакции рекомбинации, в частности порядок реакции, существенным образом влияет на динамику распространения пламени, на свойства и устойчивость бегущих волн горения.

При пересечении критических параметров в пространстве параметров для волновой неустойчивости появляются пульсирующие двумерные волновые решения. Для параметров вблизи нейтральной границы устойчивости временной период осцилляций и пространственный период структуры в направлении, поперечном направлению распространения волны, появляющихся решений хорошо согласуются с характеристиками доминирующей неустойчивости задачи линейной устойчивости. Первичная бифуркация, приводящая к рождению пульсирующих решений, имеет надкритический

характер. С точки зрения концентрации радикалов, распространяющиеся пульсирующие волны имеют солитон-подобную структуру радикальных пиков, которые следуют вдоль определенных траекторий. Здесь были рассмотрены условия нулевых потоков на боковых (по отношению к направлению распространения волны) сторонах области интегрирования, а длина области интегрирования в поперечном направлении подбиралась так, чтобы уместить один пространственный период пульсирующего решения. В случае других граничных условий рождаются решения с более сложной динамикой. Распространение стоячей волны сопровождается осцилляциями пиков концентрации радикалов. Амплитуда этих осцилляций следует корневой зависимости от параметра закритичности (разности энергии активации и ее критического значения).

При пересечении критических параметров для ячеистой неустойчивости в результате первичной бифуркации из плоской бегущей волны горения появляется двухмерная ячеистая волна. Ячеистое решение распространяется с постоянной скоростью без изменения своей формы в сопутствующей волне системе отсчета. Скорость ячеистой волны совпадает со скоростью распространения плоской бегущей волны с точностью до ошибки расчетов, которая составляет порядка одного процента. Профиль концентрации радикалов представляет собой колокол-образную функцию продольной координаты в то время, как вдоль поперечного направления пики распределения радикалов сдвинуты по фазе, т.е. фронт пламени имеет гофрированную, искривленную структуру. Максимальное значение концентрации радикалов в продольном направлении так же варьируется при изменении поперечной координаты. Эти изменения довольно малы и составляют порядка нескольких процентов от максимального значения концентрации радикалов. В отличие от пульсирующих волн горения, амплитуда изменения максимума концентрации радикалов линейно зависит от параметра закритичности. Профили температуры и концентрации топлива отличаются от соответствующих профилей решений в виде бегущей волны искривлением формы фронта от плоского. При этом не наблюдается существенных пиков температуры по сравнению с бегущей волной. Данные свойства значительно усложняют экспериментальное наблюдение ячеистых волн, если толь-

ко параметры не взяты далеко от критических. Определение нейтральной границы устойчивости как численно, так и в эксперименте является плохо разрешимой задачей.

Как показывают предварительные оценки и данные из литературы модель Зельдовича-Линяна потенциально может быть применена для описания распространения пламени в богатых водород-кислородных (воздушных) смесях. В следующей главе мы развиваем этот подход более детально.

ГЛАВА 4

Исследование устойчивости пламени в предварительно перемешанной богатой водород-воздушной смеси вблизи предела воспламенения

§ 4.1. Введение

В данной главе на основе двухступенчатых моделей с цепным механизмом реакции исследуется устойчивость волн горения, свободно распространяющихся в богатой предварительно перемешанной смеси водорода и воздуха при нормальных внешних условиях ($298K$ и 1атм). Хорошо известно, что волны горения могут распространяться в богатых водород-воздушных смесях только до определенных значений коэффициента избытка топлива, выше которых происходит гашение пламени. Несмотря на то, что многие факторы могут влиять на наблюдаемые пределы воспламенения, такие как подъёмная сила, диффузия, кинетика и т.д., которые также могут взаимодействовать друг с другом, как правило при изучении таких сложных явлений фокусируются на отдельных наиболее важных физико-химических процессах, обуславливающих появление гашения пламени. Здесь рассмотрение направлено на диффузионно-тепловое приближение распространения пламени в перемешанных смесях. В рамках этого подхода существование пределов воспламенения может быть вызвано несколькими факторами. В неадиабатическом случае пламя может гаситься из-за присутствия теплоотдачи или радиационных тепловых потерь [47, 211]. В адиабатическом пределе объяснение затухания пламени может быть дано как конкуренция реакций разветвления цепи и рекомбинации [212], т.е. радикальное затухание, или через появление сложных пульсирующих динамических режимов [70, 180, 211, 213]. Последний сценарий тесно связан с потерей устойчивости плоского пламени [70, 180]. В связи с этим анализ устойчивости пламени является важным для понимания

процесса затухания волн горения. Процесс затухания через возникновение пульсаций в некотором смысле перекликается с концепцией динамического предела воспламенения [10]. Помимо интереса к этому вопросу с точки зрения фундаментальных исследований, определение пределов воспламенения так же важно для практических задач, связанных с безопасностью использования водорода.

Несмотря на то, что на сегодняшний день есть хорошее понимание кинетики окисления водорода, которая включает восемь химических реагентов [214, 215], по-прежнему существует недостаток редуцированных кинетических механизмов, необходимых для моделирования задач со многими масштабами времени и длины таких, как изучение устойчивости пламени и динамических нестационарных и многомерных режимов распространения пламени. Одна из первых моделей горения смеси $H_2 - O_2$ была предложена в работе Я.Б. Зельдовича [205]. Эта модель включает реакции разветвления $A + B \rightarrow 3B$ и рекомбинации $B + B + M \rightarrow P + M$, где A - это дефицитная компонента смеси, например, O_2 , B - это H атомы, которые считаются единственным радикалом, вовлеченным в реакцию. В работе [216] использовано приближение стационарного состояния для O , OH и HO_2 и была получена и исследована похожая модель для богатого водород-кислородного пламени. В этом случае скорость первой глобальной реакции определяются элементарным шагом $H + O_2 \rightarrow OH + H$, а скорость второй глобальной реакции задается элементарной реакцией $H + H + M \rightarrow H_2 + M$. В работе [217] двухступенчатый механизм развит далее. Показано, что он способен давать достаточно точные оценки скорости и структуры пламени по отношению к данным, полученным из прямых численных расчетов с детальным кинетическим механизмом и из экспериментов. Двухступенчатый механизм использовался в [218] для изучения асимптотической структуры пламени водород-воздушной смеси. Сравнительно недавно, [206, 207], модель была опробована с помощью численного расчета с детальным кинетическим механизмом реакции и было установлено, что двухступенчатая модель дает хорошую оценку скорости распространения пламени.

Как обсуждается в работах [206, 207], скорость рекомбинации H радикалов определяются двумя элементарными реакциями $H + H + M \rightarrow H_2 + M$

и $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$. Рекомбинация H -атомов с O_2 имеет более высокую скорость и должна проходить быстрее в присутствии молекул кислорода с достаточной концентрацией. Квадратичная по концентрации H реакция обрыва цепи может, однако, быть существенной в случае богатых смесей и/или в режиме медленной рекомбинации, когда концентрация H атомов становится существенной, а O_2 быстро расходуется в ходе реакции разветвления. Важность стадии с линейной рекомбинацией H так же обсуждалась в [212, 219].

В работах [4, 212, 216, 220] отмечается значительность учета гидропироксидных радикалов. В [212] показано, что в богатых водород-воздушных пламенах концентрация HO_2 может достигать достаточно существенных значений и должна браться в расчет, в то время как концентрации O и OH по прежнему малы и соответствующие реакции, связанные с ними могут быть отброшены. Включение HO_2 радикала в кинетическую схему приводит к двухступенчатой модели, предложенной Линяном, как это указано в [4]. Модель была изучена в [212], где показано, что она способна достаточно точно предсказывать скорость и структуру богатых водород-кислородных пламен, что следует из сравнения с расчетами, основанными на детальном кинетическом механизме. В [220], механизм претерпевает дальнейшую модификацию, направленную на включение реакции инициации $H_2 + O_2 \rightarrow HO_2 + H$ и отбрасывание приближения равновесия для гидропироксидных радикалов. Полученная модель оказалась пригодной для анализа дефлаграции, самовоспламенения и диффузионного пламени окисления водорода в воздухе.

Численный анализ моделей с детальным кинетическим механизмом использовался для изучения различных аспектов пламен в заранее перемешанных смесях водорода с окислителем, воздухом или кислородом, для сравнения с экспериментами [221], выяснения влияния многокомпонентного транспорта [222] и т.д. В ряде работ [211–213, 219, 223–225] детальным кинетический механизм используется для численного исследования динамики распространения водородных пламен в заранее перемешанных смесях вблизи богатого предела воспламенения.

В [225] показано, что по мере того, как состав водород-воздушной сме-

си становится богаче, наблюдаются осцилляций пламени. Появление пульсаций было найдено при содержании H_2 в смеси порядка 75–76%, при этом неопределенность была связана с ошибками расчетной схемы. Качественно сходные результаты были получены в [219]. В этой работе авторы приходят к заключению, что наблюдаемые осцилляции являются объективных отражением физических процессов в пламени, а не “численным артефактом”. Появление осцилляций приписывается конкуренции за H радикалы между реакциями разветвления и обрыва цепи. Критическое значение содержания водорода в свежей смеси было определено равным примерно 79%. По мере увеличения коэффициента избытка топлива осцилляции становились более релаксационными, амплитуда и период осцилляций возрастали. При некоторых критических составах смеси на временных развертках скорости пламени явно наблюдалось удвоение периода. Увеличение содержания водорода до 84% приводило к гашению пламени т.е. ни бегущие, ни пульсирующие волны горения не могли распространяться в таких богатых смесях. Подобное сложное динамическое поведение наблюдалось при распространении пламени в твердых смесях в рамках одно- и двухступенчатых моделей (см. обзор литературы в [180]).

В [224] результаты, описанные выше, качественно подтверждаются, хотя появление пульсаций было найдено в смесях с более чем 75% содержания H_2 . Предел воспламенения так же снижен до 82% водорода в свежей смеси. В [211, 223], исследуются как адиабатический, так и неадиабатический случай при нормальных условиях и повышенном давлении. Для нормальных условий в адиабатическом случае появление пульсаций было найдено для коэффициента избытка топлива около 7.4, а при 7.6 наблюдались решения периода два, в то время как при больших значениях коэффициента избытка топлива осцилляции становились очень релаксационными так, что пламя испытывало длительные периоды “депрессии”, когда распространение практически останавливалось, которые сменялись периодами восстановления, когда скорость пламени возрастала и достигала максимальных значений. При более богатых смесях наблюдалось гашение пламени по осцилляционному сценарию. В неадиабатическом случае граница появления пульсаций сдвигается в сторону более бедной смеси. В

работе [223] граница появления пульсирующих решений и затухания через осцилляции найдена на плоскости давление - стехиометрический коэффициент. Показано, что появление пульсаций существенно сдвигает границу затухания в сторону более бедных смесей. Появление пульсирующих решений также исследуется в водород-кислородной смеси в работе [213], где найдено, что пламя в смеси водорода и кислорода испытывает пульсации по мере изменения состава смеси к более богатому. Эти осцилляции были связаны с диффузионно-тепловой неустойчивостью. Интересно сравнить эти результаты с экспериментальными данными по оценке богатого предела воспламенения в водород-воздушных смесях. В работах [226, 227] и в более поздних [228, 229] максимальное содержание водорода в свежей смеси, при котором возможно распространение волн горения составляет 75% - значение согласующееся с нижней оценкой для появления пульсаций в обсуждаемых выше работах по численному моделированию.

Несмотря на явный прогресс в анализе устойчивости одномерного пламени в богатой водород-воздушной смеси с помощью моделей с детальными кинетическими схемами, наблюдается существенный разброс в оценке границы устойчивости и затухания. Это связано как с использованием разных кинетических механизмов, так и с точностью численных расчетов нестационарных решений для моделей с детальной кинетикой. По видимому, расчеты нестационарных многомерных решений еще долго будут технически невозможны в рамках данного подхода. Как следует из обсуждения выше, модели с редуцированной двухступенчатой кинетикой способны достаточно точно предсказывать скорость и структуру дефлаграции. Вместе с тем исследование устойчивости пламени и возникновения сложных динамических режимов горения довольно мало изучалось в рамках данного подхода. Однако, можно ожидать, что модели с редуцированной кинетикой могут быть хорошей альтернативой затратным численным вычислениям на основе детальной кинетики в задачах исследования устойчивости водород-воздушных пламен и возникновения сложных динамических режимов таких, как удвоение периода, хаотические режимы и гашение пламени через пульсации. С математической точки зрения, из известных двухступенчатых моделей, с помощью которых проводилось исследование устойчивости

волн горения, модель Зельдовича-Линяна и Зельдовича-Баренблатта являются наиболее подходящими для анализа горения водород-воздушной смеси в рамках подхода с редуцированной кинетикой. В данной главе мы исследуем устойчивость волн горения в богатых смесях водорода и кислорода вблизи предела воспламенения с помощью двухступенчатых моделей с цепным механизмом реакции. Рассматриваются три типа моделей: модель с квадратичной по концентрации радикалов реакцией рекомбинации, модель, в которой учитывается как квадратичная, так и линейная рекомбинация H атомов и модель, в которую включены гидропероксил-радикалы.

§ 4.2. Математическая формулировка задачи

Рассмотрим диффузионно-тепловую модель для распространения пламени в богатой водород-воздушной смеси в адиабатическом пределе в одномерной пространственной конфигурации, включающую две стадии протекания реакции: разветвление цепи $3H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O + 2H$ и рекомбинацию $H + H + M \rightarrow H_2 + M$. В соответствие с [4, 212] в случае, когда температура горения не велика, то концентрации O , OH и H_2O_2 малы, элементарные реакции, связанные с ними, могут быть отброшены и скорости gross реакций контролируются следующими тремя элементарными шагами

$$\omega_I = w_1 + \alpha w_4, \tag{4.1}$$

$$\omega_{II} = w_4 + w_5.$$

Скорости w_1 ($H + O_2 \rightarrow OH + O$), w_4 ($H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$) и w_5 ($H + H + M \rightarrow H_2 + M$) взяты либо из кинетического механизма [214], известного под названием Сан-Диего (соответствующие результаты будут маркироваться как ‘SD’), либо из [215] (результаты будут подписываться, как ‘WB’). Константы реакций могут быть записаны в виде $k_i(T) = A_i e^{E_i/RT}$, где $A_i(T) = A_i(T_0)(T/T_0)^{n_i}$ - это предэкспоненциальные множители и $T_0 = 298K$. Выражение для параметра α выводится в [4, 212] с использованием квазистационарного приближения для O , OH и HO_2 и записывается в виде $\alpha = (k_7 + k_8)(k_6 + k_7 + k_8 + k_9[OH]/[H])^{-1}$. Реакции

6 – 9, в которые вовлечен HO_2 , нумеруются как в работе [213]. Константы реакций, необходимые для оценки α , взяты из [230].

Следуя работе [212], запишем размерные модельные уравнения, описывающие распространение волн горения, в виде

$$\begin{aligned}\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \Delta T + q_I \omega_I + q_{II} \omega_{II}, \\ \rho \frac{\partial Y_{O_2}}{\partial t} &= \rho D_{O_2} \Delta Y_{O_2} - W_{O_2} \omega_I, \\ \rho \frac{\partial Y_H}{\partial t} &= \rho D_H \Delta Y_H + 2W_H (\omega_I - \omega_{II}),\end{aligned}\tag{4.2}$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2$; T - это температура; Y_{O_2} и Y_H представляют массовые доли O_2 и H , соответственно; ρ - это плотность смеси; λ - это теплопроводность; c_p - удельная теплоемкость; D_{O_2} и D_H обозначают коэффициенты диффузии молекулярного кислорода и водородного радикала в смесь, соответственно; W_H и W_{O_2} представляют молекулярный вес H и O_2 ; q_I - это теплота реакции разветвления, а q_{II} - реакции рекомбинации; E - это энергия активации реакции разветвления; R - универсальная газовая постоянная. Уравнения (4.2) рассматриваются совместно с граничными условиями

$$T = T_a, \quad Y_{O_2} = Y_{O_2}^\infty, \quad Y_H = 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,\tag{4.3}$$

$$\partial T / \partial x = 0, \quad \partial Y_{O_2} / \partial x = 0, \quad Y_H = 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty,$$

которые соответствуют волне, бегущей в сторону положительных значений оси x . На правой границе T равна внешней температуре окружающей среды, T_a ; кислород еще не начал расходоваться и Y_{O_2} равна максимальному значению в холодной не реагировавшей смеси, $Y_{O_2}^\infty$; радикалы еще не начали производиться т.е. $Y_H = 0$. На левой границе мы требуем, чтобы реакции завершились, поэтому решения достигают стационарной точки уравнений (4.2) и накладывается условие нулевых потоков на T и Y_{O_2} , а также условие равенства нулю массовой доли радикалов Y_H .

Вводя безразмерное время $t' = (\rho A_1 / e^\beta \beta M^*) t$, координату $x' =$

$(\rho^2 A_1 c_p / \lambda M^* \beta e^\beta)^{1/2} x$, переменные

$$u = \frac{T}{T^* \beta}, \quad v = \frac{Y_{O_2}}{Y_{O_2}^\infty}, \quad w = \frac{W_{O_2} Y_H}{2W_H Y_{O_2}^\infty}, \quad (4.4)$$

и параметры

$$\beta = \frac{E c_p}{R q_{II} Y_{O_2}^\infty}, \quad L_{O_2, H} = \frac{\lambda}{D_{O_2, H} \rho c_p}, \quad R_i = \frac{2^{i-4} A_i [M] e^\beta}{A_1}, \quad (4.5)$$

где $i = 4, 5$; $[M]$ - это концентрация третьего тела, $M^* = W_{O_2} / Y_{O_2}^\infty$ и $T^* = q_{II} Y_{O_2}^\infty / W_{O_2} c_p$ - это референсные значения массы и температуры, соответственно, β - это безразмерная энергия активации, L_{O_2} и L_H - числа Льюиса для O_2 и H -радикалов соответственно, запишем уравнения (4.2) и (4.3), отбрасывая штрихи, как

$$u_t = u_{xx} + \Omega_2 + \frac{q_I}{q_{II}} \Omega_1, \quad (4.6)$$

$$v_t = L_{O_2}^{-1} v_{xx} - \beta \Omega_1,$$

$$w_t = L_H^{-1} w_{xx} + \beta \Omega_1 - \beta \Omega_2,$$

и

$$u = u_a, \quad v = 1, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty, \quad (4.7)$$

$$u = u_b, \quad \partial v / \partial x = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

Здесь u_b является температурой продуктов реакции. Безразмерные скорости реакций имеют вид

$$\Omega_1 = v w e^{\beta-1/u} + \alpha R_4 e^{\beta-1/u_b}, \quad (4.8)$$

$$\Omega_2 = R_4 v w e^{\beta-1/u_b} + R_5 w^2 e^{\beta-1/u_b}.$$

Физические величины, ρ , D_i , c_p и λ , характеризующие газовую смесь, так же, как и коэффициенты скоростей реакций, R_i , рассматриваются как константы и оцениваются при температуре $1/2T_b$ [207] и давлении 1 атм. Для заданного состава смеси, определяемого через коэффициент избытка топлива, ϕ , рассчитывается температура горения. Затем берутся термодинамические данные для составляющих компонент смеси из базы данных

NIST [231] при температуре, равной половине температуры горения. Эти данные затем используются для расчета физических свойств смеси в соответствии с методами, описанными в [232]. Численные значения, полученные таким образом, для ρ , c_p и λ , соответствуют определенному составу смеси так же, как и коэффициенты диффузии D_i для H или O_2 в многокомпонентную смесь. Числа Льюиса $L_{O_2, H}$ рассчитываются в соответствии с уравнением 4.5, как функции ϕ , и хорошо согласуются с данными, приведенными в [212, 221], для области значений коэффициента избытка топлива, рассматриваемой в нашей работе. На рис. 4.1 представлены результаты расчета $L_{O_2, H}$, где числа Льюиса построены как функции коэффициента избытка топлива для всех исследуемых моделей. Данные для различных моделей практически совпадают. Параметр α слабо зависит от состава смеси и меняется от 0.837 до 0.846 при $\phi = 5$ и 9, соответственно. Отношение $q_I/q_{II} \approx 0.11$ является константой, не связанной с ϕ . Энергия активации представляет собой практически линейную функцию ϕ , как это показано на рис. 4.1, где β построена для всех моделей и данные для них снова находятся очень близко друг к другу. Константы реакций, $R_{4,5}$, которые входят в уравнения (4.8), рассчитываются в соответствии с определениями (4.5) по кинетическим данным, взятым из [214] и [215]. Зависимость $R_{4,5}$ от величины, обратно пропорциональной температуре продуктов, u_b , представлена на рисунке 4.2. Константы реакций построены в логарифмическом масштабе. На графиках видно, что функции $R_i(u_b^{-1})$ являются практически линейными, что согласуется с уравнениями (4.5). Небольшое отклонение от линейного поведения вызвано зависимостью плотности смеси и A_i от u_b . Модельные уравнения (4.6) могут быть представлены в едином виде для всех моделей, рассмотренных в данной главе. Отличие между ними проясняет таблица 1, а так же обсуждение, приведенное в следующем параграфе.

Для того, чтобы найти скорость и структуру волн горения, задача (4.6)-(4.7) редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение уравнений ищем в виде бегущей волны $u(x, t) = u(\xi)$, $v(x, t) = v(\xi)$ и $w(x, t) = w(\xi)$, где введена координата в сопутствующей системе отсчета, $\xi = x - ct$, и c обозначает скорость бегущей волны. Под-

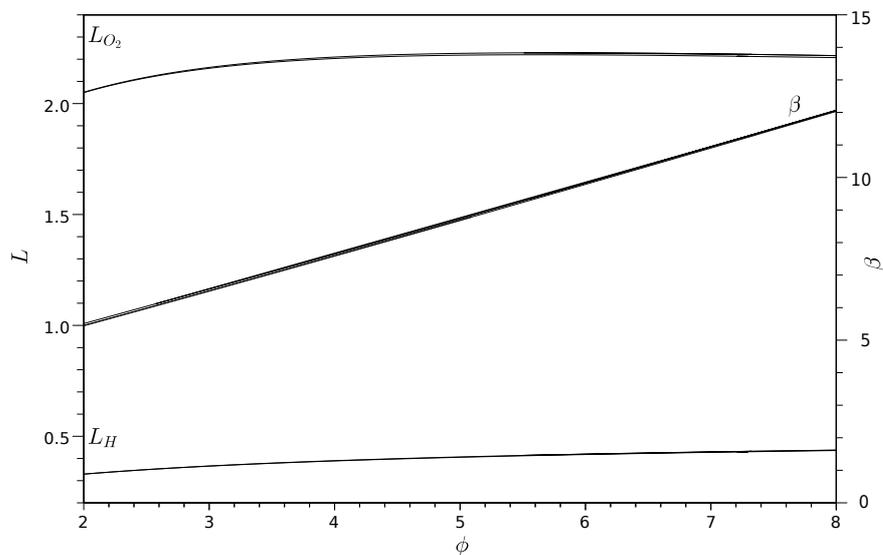


Рис. 4.1. Зависимость числа Льюиса для O_2 и H (левая ось) и энергии активации, β , (правая ось) от коэффициента избытка топлива, ϕ .

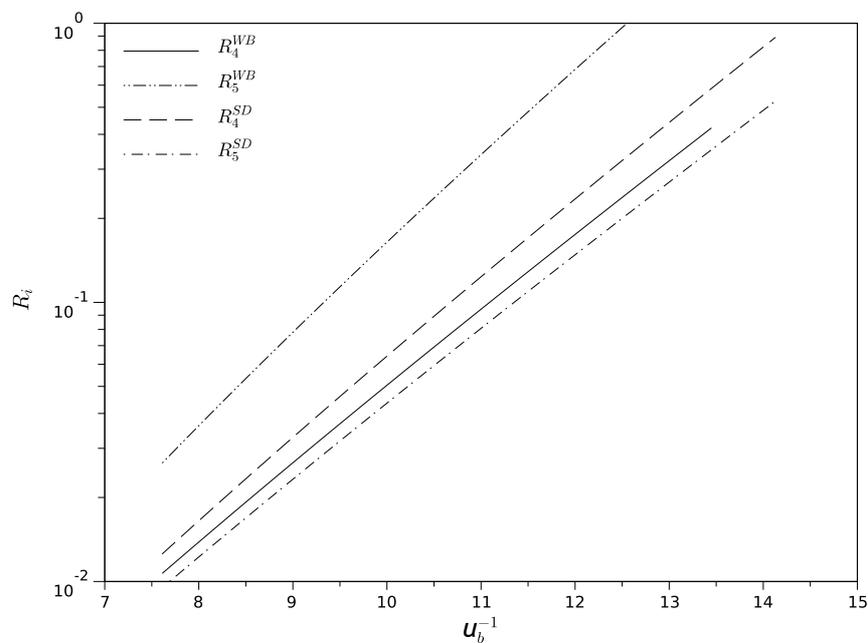


Рис. 4.2. Зависимость констант реакций, $R_{4,5}$, от обратной температуры продуктов, u_b , для выбора кинетических данных из [214] или [215].

Model	α	q_I	R_4	R_5
ZL	0	0	0	+ ¹
ZLD	0	0	+ ¹	+ ¹
CL	+ ²	+ ²	+ ¹	+ ¹

¹⁾ Reference [214, 215], уравнение (4.5).

²⁾ Reference [4, 212].

Таблица 4.1. Параметры α , q_I и $R_{4,5}$ для различных моделей. Аббревиатуры: ZL, ZLD и CL соответствуют моделям Зельдовича-Линяна, Зельдовича-Баренблатта и Клавина-Линяна, соответственно. Ненулевые значения параметров обозначены символом ‘+’ и даны соответствующие ссылки на литературу и уравнения, использованные для вычисления параметров.

ставляя решение в таком виде в модельные уравнения, получаем

$$\begin{aligned}
 u_{\xi\xi} + cu_{\xi} + \Omega_2 + q_I/q_{II}\Omega_1 &= 0, \\
 L_{O_2}^{-1}v_{\xi\xi} + cv_{\xi} - \beta\Omega_1 &= 0, \\
 L_H^{-1}w_{\xi\xi} + cw_{\xi} + \beta\Omega_1 - \beta\Omega_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Далее, умножаем первое уравнения в системе (4.9) на β , складываем его со вторым уравнением для v , домноженным на $1 + q_I/q_{II}$, и с третьим уравнением для w , а затем интегрируем один раз по ξ с пределами $(-\infty, +\infty)$. Это дает условие: $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} S = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} S$, где $S = \beta u + (1 + q_I/q_{II})v + w$. Сопоставляя это выражение с граничными условиями (4.7), получаем следующее уравнение для температуры продуктов $u_b = u_a + (1 + q_I/q_{II})/\beta$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.9) составляет вместе с граничными условиями (4.7) двухточечную краевую задачу, которая решается численно с помощью алгоритма стрельбы со схемой интегрирования Рунге-Кутта четвертого порядка и последующей коррекции методом релаксации.

Анализ устойчивости волн горения проводится по стандартной схеме, уже описанной выше. Решение системы (2.3) линеаризуем вблизи бегущей волны, т.е. ищем решение вида $u(x, t) = U(\xi) + \epsilon\phi(\xi)e^{\lambda t}$, $v(x, t) = V(\xi) + \epsilon\psi(\xi)e^{\lambda t}$ и $w(x, t) = W(\xi) + \epsilon\chi(\xi)e^{\lambda t}$, где $[U(\xi), V(\xi), W(\xi)]$ представляет бегущую волну. Члены, пропорциональные малому параметру ϵ , являются линейным возмущением, λ - это спектральный параметр, определяющий временную эволюцию возмущения. Подставляя это разложение в систему (4.6), оставляя только члены пропорциональные первому порядку

ϵ и определяя вектор функцию с элементами $\mathbf{v}(\xi) = [\phi, \psi, \chi, \phi_\xi, \psi_\xi, \chi_\xi]^T$, мы получаем

$$\mathbf{v}_\xi = \hat{A}(\xi, \lambda)\mathbf{v}, \quad (4.10)$$

где

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{I} \\ \hat{H} + \lambda\hat{Q} & -c\hat{Q} \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L_{O_2} & 0 \\ 0 & 0 & L_H \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

Здесь $H(\xi)$ - это Вронсиан источников в уравнениях (4.6), посчитанный на $U(\xi), V(\xi), W(\xi)$, и \hat{I} - это единичная матрица 3×3 . Как это обсуждалось выше, устойчивость волн горения определяется дискретным спектром задачи (4.10), который ищется методом функции Эванса.

Анализ решений, возникающих в результате бифуркации из решений в виде бегущей волны, проводится прямым численным интегрированием уравнений (4.6). Для этого был использован метод расщепления по физическим процессам. Вначале решалась система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы изменения температуры, концентрации топлива и радикалов, за счет реакций разветвления и рекомбинации. Для этого использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка. На втором этапе решались уравнения переноса. В этом случае использовалась безусловно устойчивая схема Кранка-Николсона, обладающая вторым порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству. Начальные условия берутся в виде бегущих волн - решений системы (4.9).

§ 4.3. Решение в виде бегущих волн

В данном параграфе представлены результаты численного анализа для трех моделей распространения пламени в богатой водород-воздушной смеси.

4.3.1. Модель Зельдовича-Линяна

Во-первых, рассмотрим модель, предложенную в [205, 216], которая включает две глобальных стадии со скоростями реакции, $\omega_{I,II}$, определяемыми элементарными реакциями $w_1 (H + O_2 \rightarrow OH + O)$ и $w_5 (H + H + M \rightarrow$

$H_2 + M$), соответственно, т.е. $\omega_I = w_1$ и $\omega_{II} = w_5$. Предполагается, что H - это единственный тип радикалов, вовлеченных в реакции, а концентрацией остальных радикалов можно пренебречь. Первая реакция обладает высокой энергией активации и пренебрежимо малой теплотой реакции в то время, как реакция рекомбинации имеет нулевую энергию активации и является экзотермической. Основываясь на этих предположениях, R_5 , α , q_I кладутся равными нулю в уравнениях (4.6). Как показано в работе [233], в этом случае можно записать уравнения в виде, соответствующем модели Зельдовича-Линяна. В связи с этим, мы будем обозначать результаты латинскими буквами 'ZL'.

На рис. 4.3 показана зависимость скорости пламени, s , от коэффициента избытка топлива, ϕ . Здесь и далее в данной главе подразумевается, что смесь находится при нормальных внешних условиях – внешней температуре и давлении, т.е. $T_a = 298K$ и $P = 1atm$. Скорость построена в размерных единицах – метрах в секунду. Сплошной линией показаны численные результаты, полученные в данной работе. Кривые, отмеченные индексами 'SD' или 'WB', соответствуют выбору констант реакции как в [214] или в [215], соответственно. Как видно на рисунке, расчеты с данными, взятыми из [215], дают систематически меньшее значение скорости пламени в сравнении с расчетами, основанными на кинетических данных из работы [214]. Скорость реакции, R_5 , в схеме 'SD' меньше, чем соответствующее значение скорости реакции в схеме 'WB' во всем интервале значений ϕ , рассматриваемых здесь. Как показано в [233], увеличение скорости реакции рекомбинации, R_5 , сдвигает условия горения в сторону режима быстрой рекомбинации, что приводит к уменьшению скорости. Символы на рисунке 4.3 соответствуют различным экспериментальным и численным данным, взятым из литературы [211, 219, 225, 234–237], как это описано на вкладке рисунка. Как видно на рисунке, модель Зельдовича-Линяна с кинетическими данными 'SD' дает очень хорошую аппроксимацию скорости пламени.

Для сравнения на рисунке 4.3 так же представлены примеры расчетов скорости пламени с помощью численного пакета FlameMaster [238], позволяющего находить характеристики одномерного стационарно распространяющегося плоского пламени с различными детальными кинетически-

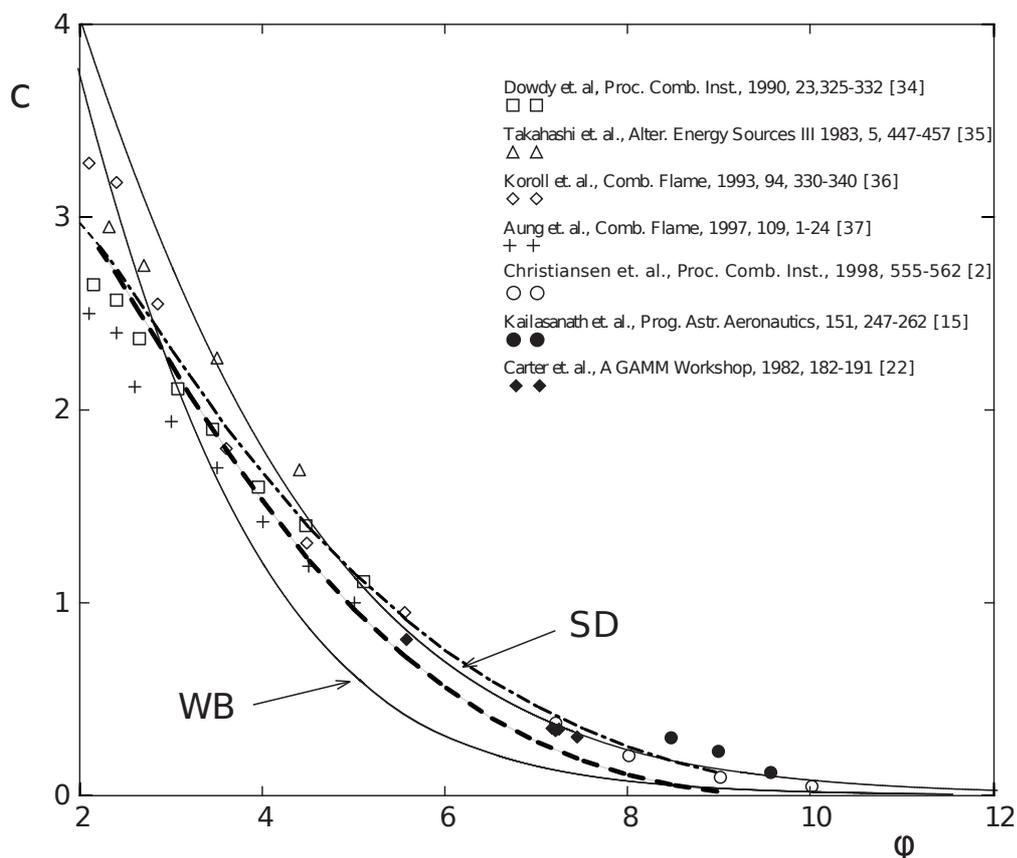


Рис. 4.3. Зависимость скорости, c , волны горения от коэффициента избытка топлива для модели Зельдовича-Лиляна. Тонкой сплошной линией показаны численные результаты, полученные в работе, линии, отмеченные индексами 'SD' или 'WB', соответствуют выбору констант реакции из [214] или из [215], соответственно. Различные символы представляют экспериментальные и численные данные из литературы (см. пояснения в правом верхнем углу). Толстая пунктирная и точечно-пунктирная линии иллюстрируют результаты расчетов численным пакетом *FlameMaster* [238] с кинетическими механизмами *GRI-Mech 3.0* [239] и *San Diego* [214, 240], соответственно.

ми механизмами. Здесь мы воспользовались механизмом *GRI-Mech 3.0* [239] и *San Diego* [214, 240], а так же термодинамическими данными, идущими вместе с этими механизмами. Толстая пунктирная и точечно-пунктирная линии иллюстрируют результаты этих расчетов численным пакетом с кинетическими механизмами *GRI-Mech 3.0* и *San Diego*, соответственно. Видно, что для больших значений коэффициента избытка топлива, $\phi \geq 8$, разброс результатов для различных баз данных сравним с разбросом данных, полученных для двухступенчатых моделей с механизмами [214] и [215].

Профили распределения молярной доли кислорода, X_{O_2} , и H радикалов, X_H , а так же температуры T , полученные численным решением уравнений (4.9), построены на рис. 4.4 как функции координаты, x , в системе отсчета, бегущей вместе с волной. Результаты представлены для $\phi = 5.57$,

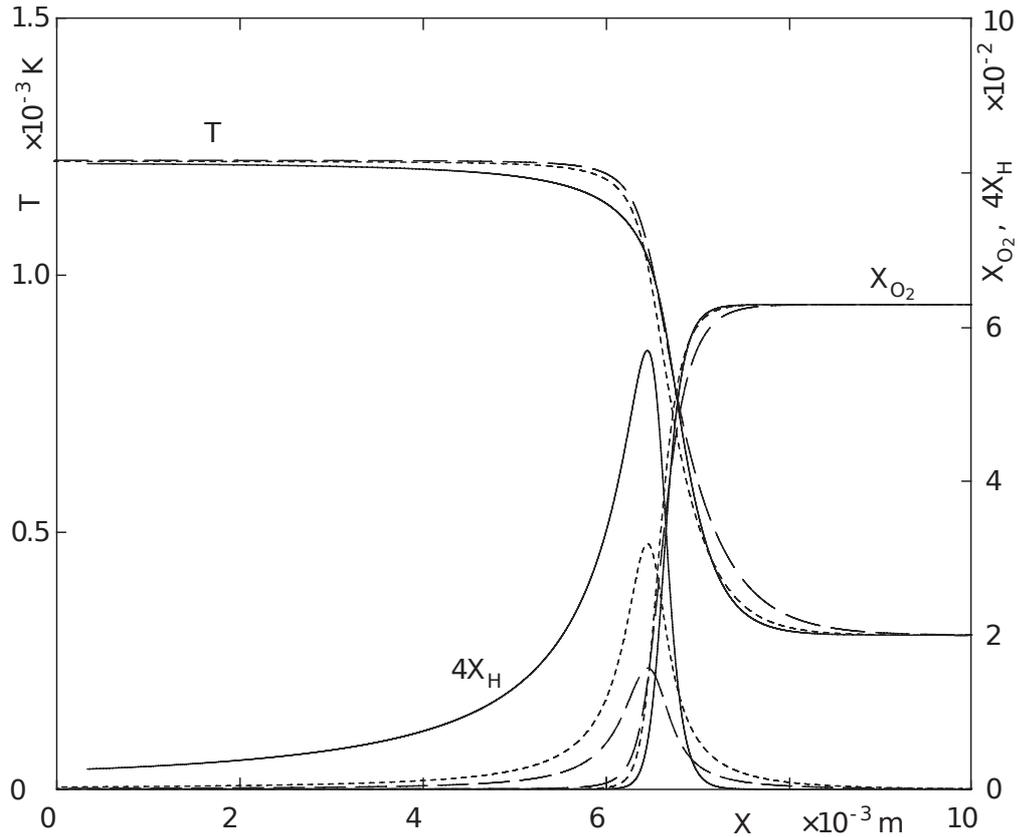


Рис. 4.4. Профили распределения X_{O_2} , X_H и T как функции координаты x для $\phi = 5.57$. Сплошные линии соответствуют феноменологической модели 'PN'. Точечная и пунктирная линии представляют результаты для модели Зельдовича-Линяна с параметрами, взятыми из кинетических схем 'SD' или 'WB', соответственно.

что соответствует содержанию водорода в 70% в свежей смеси. Данный случай рассматривается в работе [222], результаты которой будут использованы далее для сравнения. Молярная доля H умножена на 4 на рисунке так, чтобы уместить как X_{O_2} , так и X_H на одном графике. Видно, что отличие между 'SD' и 'WB' профилями молярной доли H значительно. Максимальное значение содержания H радикалов $\max X_H^{SD} \approx 0.0079$ и $\max X_H^{WB} \approx 0.0039$, в то время как результаты расчетов [222] с детальной кинетикой дают $\max X_H^{Det} \approx 0.0078$. Мы снова видим, что данные, полученные с помощью модели Зельдовича-Линяна с кинетическими параметрами 'SD', дают хорошую оценку структуры пламени. Существенное уменьшение X_H для модели с 'WB' кинетикой так же можно объяснить большим значением скорости реакции рекомбинации в сравнении с соответствующим членом в схеме 'SD'. При этом быстрое потребление H радикалов приводит к уменьшению X_H .

На рисунке 4.5 так же представлены профили распределения моляр-

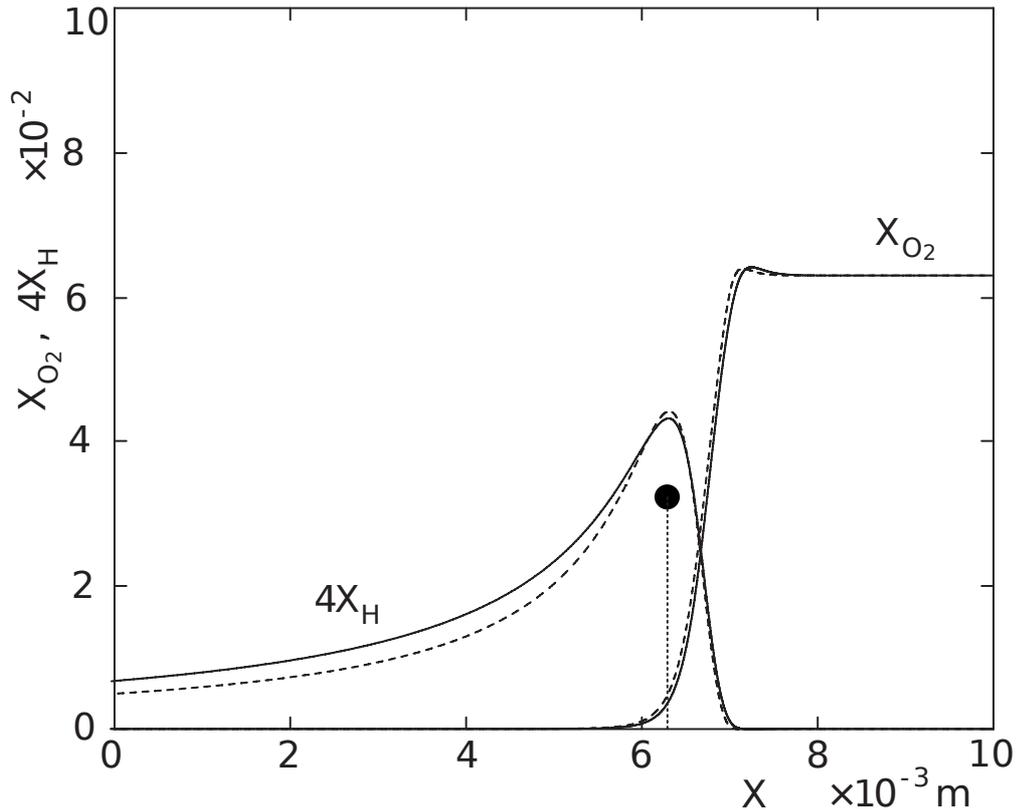


Рис. 4.5. Профили распределения X_{O_2} и X_H как функции координаты x для $\phi = 5.57$. Сплошные и пунктирная линии иллюстрируют результаты расчетов численным пакетом *FlameMaster* [238] с кинетическими механизмами *GRI-Mech 3.0* [239] и *San Diego* [214, 240], соответственно. Кружок показывает максимальное значение X_H , полученное в [222].

ной доли кислорода, X_{O_2} , и H радикалов, X_H , полученные с помощью численного пакета *FlameMaster* [238] при $\phi = 5.57$. Сплошная и пунктирная линии иллюстрируют результаты расчетов численным пакетом с кинетическими механизмами *GRI-Mech 3.0* и *San Diego*, соответственно. Видно, что распределения X_{O_2} и X_H хорошо согласуются друг с другом. На графике так же кружком показано максимальное значение молярной доли водорода, взятое из работы [222] для тех же значений параметров. Как и на рис. 4.3 использование различных подходов в рамках численного моделирования на основе детальных кинетических механизмов приводит к заметному разбросу характеристик пламени.

Устойчивость волн горения исследовалась методом функции Эванса, как это описано ранее. Было установлено, что пламя устойчиво по отношению к пульсирующим (продольным) возмущениям на всем отрезке значений коэффициента избытка топлива, рассмотренном в этой главе. Это вполне ожидаемо, поскольку, как было показано в прошлой главе, в модели

Зельдовича-Линяна нейтральная граница устойчивости для волн горения сдвигается в сторону больших значений энергии активации при уменьшении числа Льюиса для топлива. В нашем случае, лимитирующей компонентой смеси является O_2 и число Льюиса для топлива, L_{O_2} , составляет порядка 2. Высокая энергия активации соответствует большому ϕ для рассматриваемой здесь модели, поэтому нейтральная граница устойчивости сдвигается к значениям ϕ , значительно превышающим $\phi = 7 - 8$, описанным в литературе [211, 219, 223–225].

4.3.2. Модель Зельдовича-Баренблатта

Следующим шагом мы модифицируем рассмотренную выше модель Зельдовича-Линяна, включая в кинетическую схему линейную по отношению к концентрации H реакцию рекомбинации. Подобное обобщение обсуждается в [241]. В таком случае пара гросс реакций со скоростями $\omega_{I,II}$ контролируется элементарными реакциями w_1 ($H + O_2 \rightarrow OH + O$), w_4 ($H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$) и w_5 ($H + H + M \rightarrow H_2 + M$), т.е. $\omega_I = w_1$ и $\omega_{II} = w_4 + w_5$. Как и в предыдущем случае предполагается, что H - это единственный вид радикалов, вовлеченный в процесс горения. Первая гросс реакция имеет высокую энергию активации и пренебрежимо малую теплоту в то время, как реакция рекомбинации обладает нулевой энергией активации и является высоко экзотермической. Формально это означает, что в уравнениях (4.6) параметры α и q_I равны нулю. Данную модель будем обозначать латинскими буквами 'ZLD'.

Модельные уравнения решаются численно. Результаты анализа представлены на рисунке 4.6, где построена зависимость скорости пламени, s , от коэффициента избытка топлива, ϕ . Как и ранее, символы на рис. 4.6 соответствуют данным из литературы [211, 219, 225, 234–237], как это указано на вкладке к рисунку. Результаты нашей работы представлены сплошной линией. Кривые, отмеченные индексами 'SD' или 'WB' соответствуют выбору констант реакции как в [214] или [215], соответственно.

Включение реакции $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$ существенно усиливает рекомбинацию радикалов H . В результате качественное поведение зависимости скорости пламени для данной модели от коэффициента избытка топ-

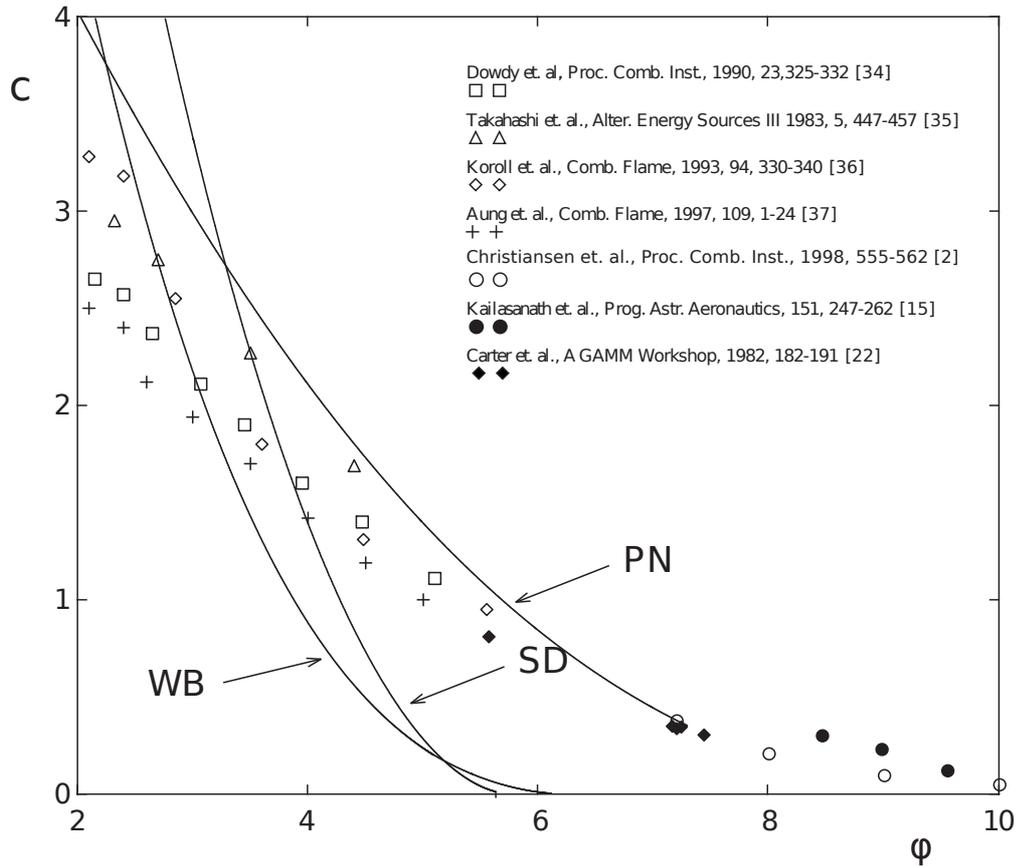


Рис. 4.6. Зависимость скорости, c , волны горения от коэффициента избытка топлива для модели Зельдовича-Баренблатта. Сплошной линией показаны численные результаты, полученные в работе, линии, отмеченные индексами 'SD' или 'WB', соответствуют выбору констант реакции из [214] или из [215], соответственно. Различные символы представляют экспериментальные и численные данные из литературы (см. пояснения в правом верхнем углу). Кривая, отмеченная буквами 'PN' представляет результаты для модели Зельдовича-Баренблатта со свободными коэффициентами скоростей реакции.

лива меняется. С приближением ϕ к некоторому конечному предельному значению скорость пламени стремится к нулю и волна горения затухает. Это показано на рис. 4.6, где обе кривые 'SD' и 'WB' пересекают ось $c = 0$. Похожее поведение обсуждалось в работе [212] и так же отмечено в [179] для модели Зельдовича-Баренблатта с только линейной зависимостью скорости реакции рекомбинации от концентрации радикалов.

Скорость реакции $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$ можно записать в безразмерном виде как $w_4 = R_4 v w e^{\beta-1/u_b}$, а скорость производства радикалов в ходе реакции $H + O_2 \rightarrow OH + O$, как $w_1 = v w e^{\beta-1/u}$. Следовательно, существует температура перекрытия u^* , при которой скорости w_1 и w_4 равны. При умеренных значениях ϕ процесс идет с выделением достаточно большой теплоты и $u_b > u^*$. Однако, с увеличением ϕ тепловыделение в ходе

горения становится меньше и температура пламени приближается к температуре перекрытия. В результате пламя гаснет при дальнейшем сдвиге в сторону более богатой смеси. Появление затухания еще более усиливается, если брать в расчет реакцию рекомбинации w_5 . Численные расчеты показывают, что в ZLD-модели волны горения испытывают гашение при значениях ϕ около шести при обоих наборах констант реакции, 'SD' и 'WB'.

Анализ устойчивости решений методом функции Эванса говорит о том, что включение реакции w_4 ускоряет появление пульсирующие неустойчивости. Таким образом роль реакции 4 двояка: с ее учетом как предел воспламенения, так и нейтральная граница устойчивости сдвигаются в сторону меньших значений ϕ . Как видно ZLD-модель плохо согласуется с данными из литературы [211, 219, 225, 234–237].

Дальше мы рассмотрим предэкспоненты реакций 4 и 5 как свободные параметры для того, чтобы, подбирая их, аппроксимировать как скорость, так и устойчивость пламени с максимальной точностью в сравнении с расчетами, основанными на детальном кинетическом механизме. Для определенности возьмем результаты [211] как целевые данные для такого анализа и остановимся на кинетических параметрах 'SD'. Будем называть полученную модель - 'PN'-моделью. Расчеты показывают, что скорости реакций должны быть сильно снижены для того, чтобы достичь наилучшего согласия с данными из работы [211], в которой предсказывается наступление пульсаций при ϕ лежащим в интервале между 7.3 и 7.4. Наилучшие результаты были получены при $A_4^{PN} = 0.0655A_4^{SD}$ и $A_5^{PN} = 0.117A_5^{SD}$.

Зависимость скорости пламени от ϕ для PN-модели показана на рисунке 4.6 с помощью кривой, отмеченной буквами 'PN'. Как и ожидалось, при коэффициенте избытка топлива около 7 она приближается к результатам [211], построенным окружностями. Кривая показывает устойчивое решение и обрывается как только, оно становится неустойчивым при $\phi = 7.31\dots$

Метод функции Эванса позволяет предсказать частоту пульсаций, которые возникают в результате бифуркации Андронова-Хопфа [180]. В наших расчетах было найдено, что $f \approx 64\text{Hz}$, в то время как в [211, 223] она составила около 80Hz . В более ранних работах [219, 224] предсказывается

меньшее значение частоты, примерно $12 - 30 Hz$. Следует отметить, что частота нелинейных осцилляций может зависеть от амплитуды (не изохронность), в особенности, когда амплитуда становится большой. Однако, здесь и далее мы обсудим только малые осцилляции, которые возникают сразу за критическими значениями параметров для бифуркации Андронова-Хопфа, когда закритичность и амплитуды пульсаций малы. Профили решений для PN-модели построены на рисунке 4.4 с помощью сплошной линии. Видно, что PN-модель переоценивает максимальное значение H при $\phi = 5.57$, которое составляет $\max X_H^{PN} \approx 0.014$.

4.3.3. Модель Клавина-Линяна

Модель, которая допускает роль гидропероксил радикалов в процессе горения богатой водород-воздушной смеси, была предложена Линяном. Она сформулирована в [4], исследовалась в [212] и мы будем называть ее далее 'CL' модель. С точки зрения кинетики предполагается, что H так же потребляется в ходе реакций, включающих HO_2 . Это учитывается в уравнениях (4.1) членами, пропорциональными α , в выражениях для скорости глобальной реакции ω_I . Помимо этого считается, что теплота реакции разветвления, q_I , не является пренебрежимо малой, а имеет конечное значение.

Скорость пламени, как и ранее, находится численным решением модельных уравнений (4.9) с граничными условиями (4.7). Результаты представлены на рис. 4.7, где построена зависимость скорости пламени, s , от коэффициента избытка топлива, ϕ . Символы и обозначения имеют тот же смысл, что и на рисунках 4.3 и 4.6. Анализ устойчивости так же проводился с помощью метода функции Эванса. Сплошная линия на рисунке соответствует устойчивым решениям, а пунктирная линия показывает неустойчивые ветви решений. Точки на плоскости параметров, где происходит изменение устойчивости отмечены квадратами, расположенными на 'SD' и 'WB' кривых. Как видно на графиках результаты расчетов скорости пламени как с 'SD', так и с 'WB' кинетическими схемами лежат между данными [219] и [211] при значениях ϕ , превышающих 8. При меньших значениях коэффициента избытка топлива 'CL'-модель имеет тенденцию

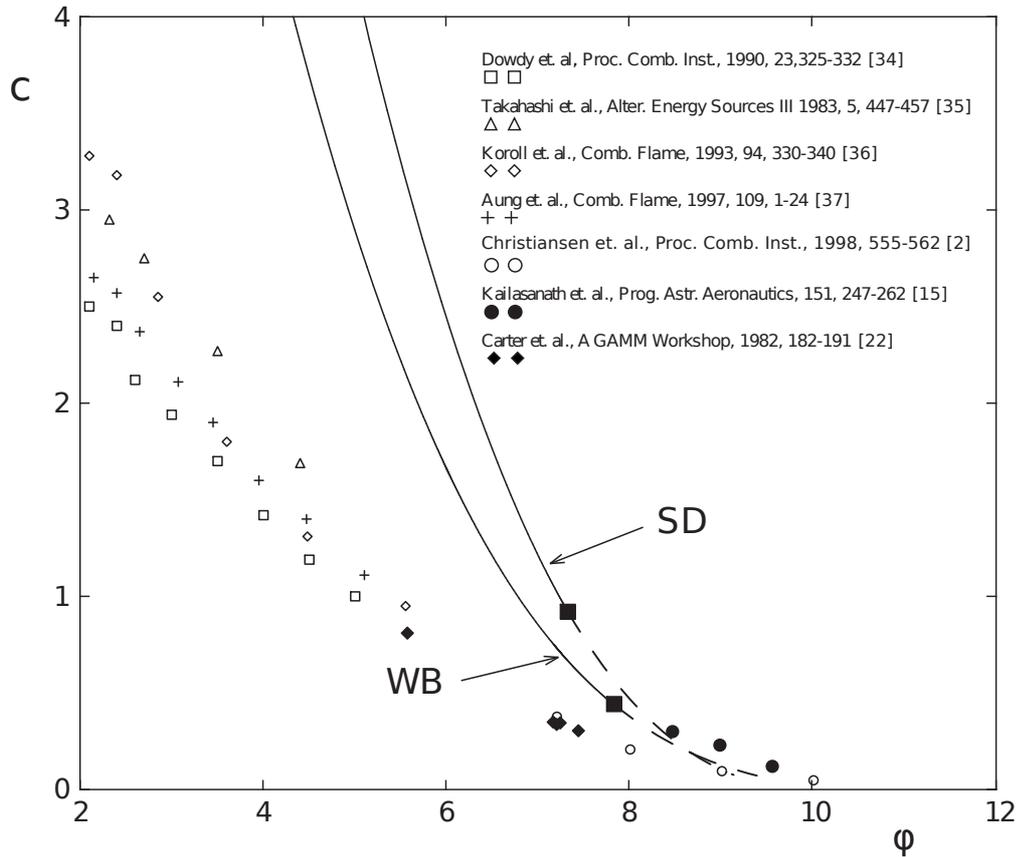


Рис. 4.7. Зависимость скорости, c , волны горения от коэффициента избытка топлива для модели Клавина-Линяна. Сплошной линией показаны численные результаты, полученные в работе, линии, отмеченные индексами 'SD' или 'WB', соответствуют выбору констант реакции из [214] или из [215], соответственно. Неустойчивые ветви решений показаны пунктирной линией. Различные символы представляют экспериментальные и численные данные из литературы (см. пояснения в правом верхнем углу).

переоценивать скорость пламени в сравнении с результатами из литературы, процитированными на рисунке.

Появление пульсаций найдено при $\phi = 7.32$ и $\phi = 7.82$, когда используются 'SD' и 'WB' константы реакций, соответственно. Эти результаты согласуются с данными расчетов с детальной кинетикой [211–213, 219, 223–225]. Частота Хопфа для схемы 'SD' составила 220Hz , в то время как для 'WB' кинетической схемы она была оценена в 70Hz . Значительно более высокое значение частоты осцилляций для случая с константами реакций 'SD' связано с тем, что время обезразмеривается на величину, обратно пропорциональную константе реакции, A_1 , которая почти в 3 раз больше для 'SD' механизма в сравнении с 'WB' механизмом.

На рисунке 4.7 построены профили T , X_{O_2} и X_H при $\phi = 5.57$. Сплошная и пунктирная линии соответствуют 'SD' и 'WB' кинетическим

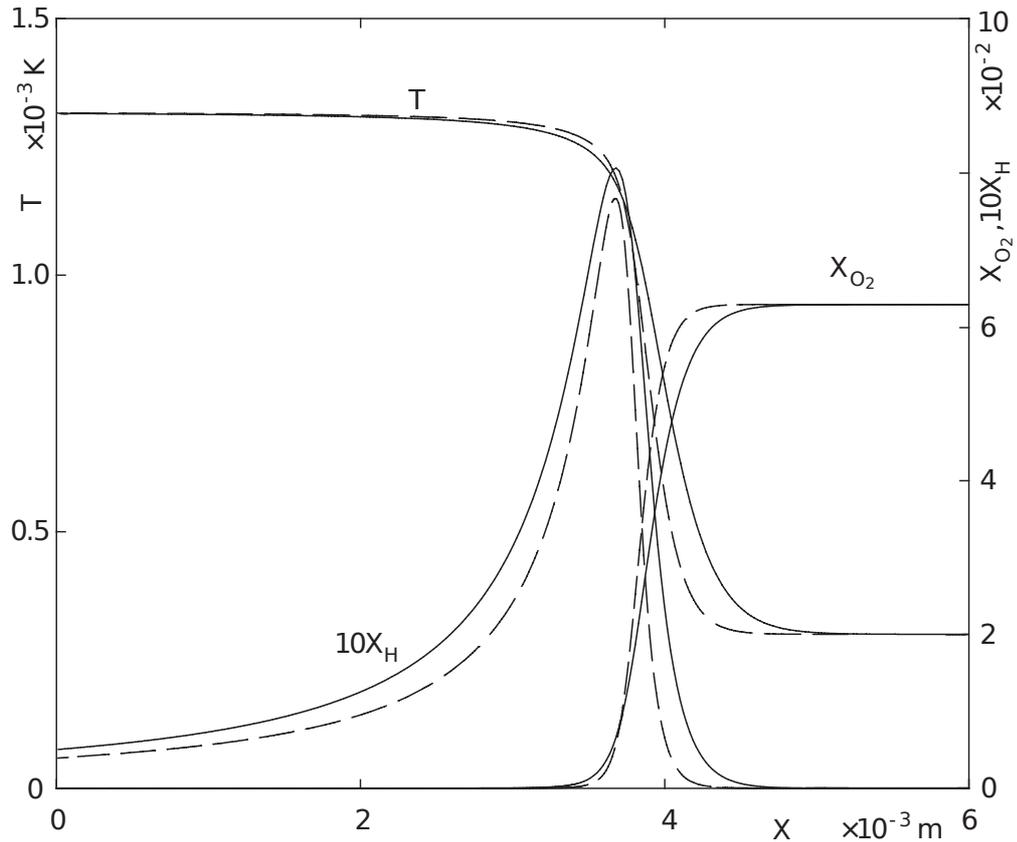


Рис. 4.8. Профили распределения X_{O_2} , X_H и T как функции координаты x для $\phi = 5.57$. Сплошная и пунктирная линии представляют результаты расчетов для CL-модели с ‘SD’ или ‘WB’ кинетическими параметрами, соответственно.

схемам, соответственно. Молярная концентрация H умножена на 10 для того, чтобы построить ее на одном графике с X_{O_2} . Структура решений близка для обеих реакционных схем и видно, что распределение X_H лежит между результатами [222] и расчетами на основе пакета FlameMaster, показанными на рис. 4.5. Отметим, что температура в зоне продуктов выше, чем на рисунке 4.4. Это связано с дополнительным тепловыделением, q_I , от реакции разветвления цепи, которое необходимо учитывать для точной оценки температуры пламени.

§ 4.4. Анализ устойчивости

В этом параграфе мы выбираем три модели, а именно, модель Зельдовича-Баренблатта со свободными константами реакций (PN-модель), модель Клавина-Линяна с двумя наборами констант реакций (CL-SD и CL-WB) и исследуем устойчивость волн дефлаграции более подробно

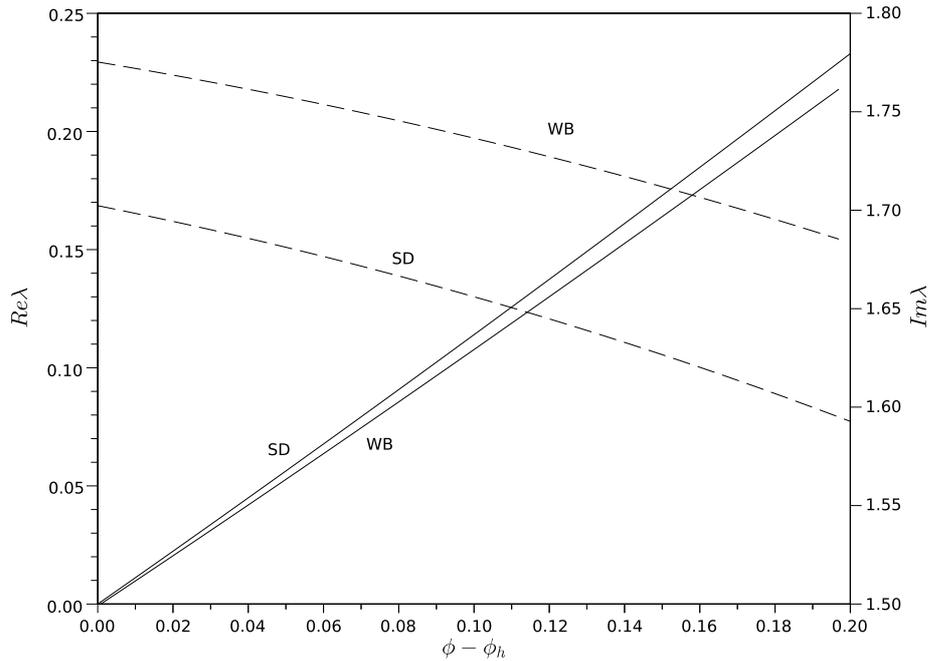


Рис. 4.9. Действительная и мнимая части точек дискретного спектра, λ , как функции $\phi - \phi_h$ показаны сплошной и пунктирной линиями и представляют результаты расчетов для *CL*-модели с ‘*SD*’ или ‘*WB*’ кинетическими параметрами, соответственно.

для этих случаев. Наш выбор продиктован результатами анализа, проведенного в предыдущем параграфе, которые говорят о том, что отобранные модели способны предсказывать скорость и устойчивость пламени в богатых смесях.

На рисунке 4.9 проиллюстрировано характерное решение задачи на собственные значения (4.10) для модели Клавина-Линяна. С приближением к нейтральной границе устойчивости за счет увеличения коэффициента избытка топлива пара комплексно сопряженных точек дискретного спектра сдвигаются из левой в правую часть комплексной плоскости, приводя к потере устойчивости бегущих волн горения в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Обозначим критическое значение коэффициента избытка топлива, при котором происходит бифуркация, как ϕ_h . На рис. 4.9 действительная и мнимые части λ построены как функции разности ϕ и критического значения ϕ_h с помощью сплошной и пунктирной линий, соответственно. Здесь показана только одна точка дискретного спектра с положительной мнимой частью λ . По мере увеличения бифуркационного

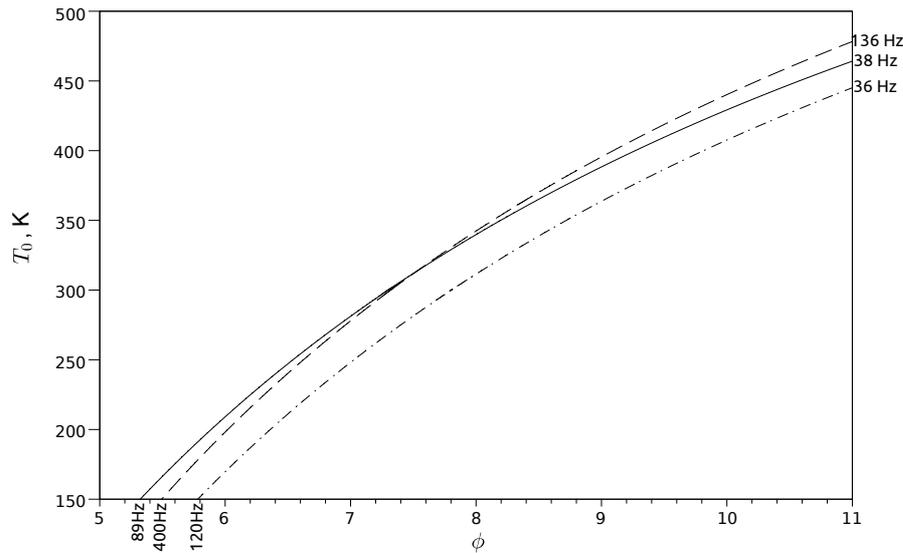


Рис. 4.10. Нейтральная граница устойчивости для бегущих волн горения как функция коэффициента избытка топлива. Сплошная линия представляет результаты для ZLD-модели со свободными константами реакции. Пунктирная и точечно-пунктирная линии соответствуют модели Клавина-Линяна с выбором параметров реакции как в [214] ('SD') или в [215] ('WB'), соответственно.

параметра, $\phi - \phi_h$, действительная часть $Re\lambda$ растет, приводя к усилению неустойчивости решения в виде бегущей волны, в то же время, $Im\lambda$, ответственная за частоту осцилляций, затухает.

На рис. 4.10 построена нейтральная граница устойчивости, соответствующая критическим значениям параметров для бифуркации Андронова-Хопфа, на плоскости начальная температура от коэффициента избытка топлива. Устойчивое распространение волн горения наблюдается при параметрах, находящихся выше кривых в каждом из случаев. Температура отложена в Кельвинах. Устойчивость исследована с использованием метода функции Эванса, как это описано выше. Все кривые имеют похожее качественное поведение: нейтральная граница устойчивости сдвигается в сторону более богатой смеси с увеличением внешней температуры. Модель Клавина-Линяна с кинетическими данными из [215] переоценивает область устойчивых решений, в то время как CL-модель с 'SD' константами реакций и феноменологическая модель хорошо согласуются в особенности для внешней температуры, близкой к нормальной. На рис. 4.10 так же даны значения частоты Хопфа, f , для каждой кривой при начальной

температуре $T_0 = 150K$ и коэффициенте избытка топлива $\phi = 11$. Собственные значения, λ , задачи линейной устойчивости 4.10 используются для расчета f по формуле $Im\lambda/2\pi$, где λ взято при критических условиях для потери устойчивости, т.е. $Re\lambda = 0$. При $T_0 = 150K$ частоты Хопфа равны $f_{PN} \approx 89Hz$, $f_{CL-SD} \approx 400Hz$ и $f_{CL-WB} \approx 120Hz$, в то время как при $\phi = 11$ они составляют $f_{PN} \approx 38Hz$, $f_{CL-SD} \approx 136Hz$ и $f_{CL-WB} \approx 36Hz$. Таким образом, прогрев свежей смеси приводит к меньшим значениям частоты Хопфа. В модели Клавина-Линяна с кинетическими данными из [215] (CL-WB) дает существенно более высокие оценки для частоты Хопфа.

При пересечении нейтральной границы устойчивости в пространстве параметров волна дефлаграции, бегущая без изменения скорости формы, теряет устойчивости из-за бифуркации Андронова-Хопфа. Численное интегрирование модельных уравнений (4.6) говорит о том, что в результате бифуркации Андронова-Хопфа появляется пульсирующий режим распространения пламени. Данный сценарий наблюдается для всех трех моделей. Типичный вид пульсирующей волны горения в PN модели проиллюстрирован на рис. 4.11 при $\phi = 7.478$ и нормальных внешних условиях. Значение ϕ взято выше критического коэффициента избытка топлива, соответствующего бифуркации Андронова-Хопфа, $\phi_h = 7.31\dots$ Начальные профили брались в виде бегущей волны горения и были неустойчивы по отношению к пульсирующим возмущениям. Эти неустойчивости искажают решение уравнения (4.6) в виде бегущей волны на начальной стадии эволюции системы. Появляются переходные пики в пространственном распределении температуры и осцилляции формы и максимального значения профиля массовой доли H , $\max\{X_H\}$. Профиль X_{O_2} главным образом подвержен изменению крутизны фронта, хотя некоторые слабые осцилляции массовой доли O_2 так же наблюдаются в зоне продуктов.

С целью дальнейшего исследования пульсирующего поведения решений удобно определить $\xi = x - c_{drift}t$ - координату в системе отсчета, движущейся со скоростью c_{drift} , являющейся средней скоростью распространения пламени, $c_{drift} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_{max}/t$, где x_{max} - это координата максимума массовой доли H в лабораторной системе отсчета. Значение $\max X_H$ и

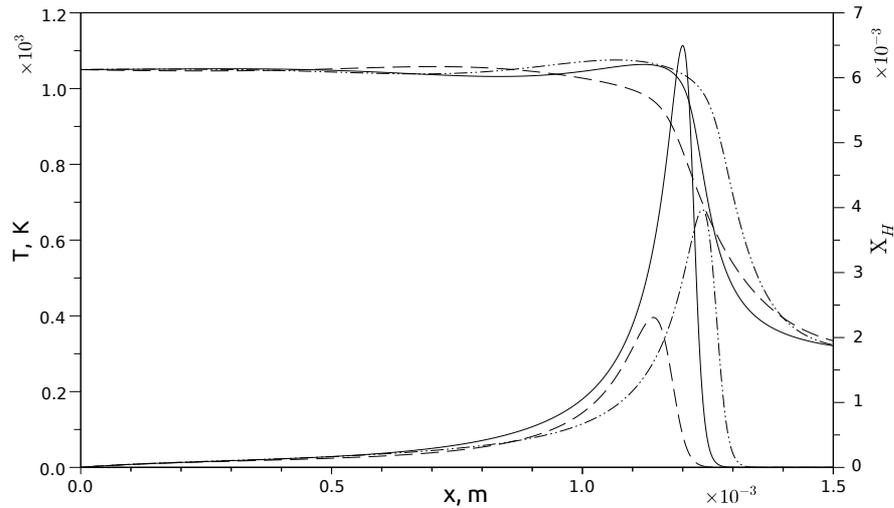


Рис. 4.11. Решение в виде пульсирующей волны горения при $\phi = 7.478$. Температура (левая ось) и массовая доля радикалов (правая ось), $T(\xi)$ и $X_H(\xi)$, построены как функции координаты в сопутствующей системе отсчета. Профили взяты в моменты времени $t_1 = 0$, $t_2 = 3.148 \times 10^{-3}$ и $t_3 = 1.25918 \times 10^{-2}$ с, и изображены сплошной, точечно-пунктирной и пунктирной линией, соответственно.

положение максимума концентрации радикалов ξ_{max} являются удобными параметрами для описания пульсирующей природы решений.

С развитием пульсирующих возмущений значение $\max X_H$ колеблется с амплитудой, которая на начальном этапе нарастает экспоненциально со временем. Частота этих осцилляций задается мнимой частью $Im\lambda$, а инкремент экспоненциального роста определяется действительной частью, $Re\lambda$, пары комплексно сопряженных точек дискретного спектра, ответственных за появление неустойчивости. На временах порядка $(Re\lambda)^{-1}$ амплитуда осцилляций $\max X_H$ выходит на насыщение и стабилизируется на некотором значении. Поведение профилей $T(\xi, t)$ и $X_{H,O_2}(\xi, t)$ становится периодическим во времени и таким образом формируются пульсирующие волны горения. На рис. 4.11 построены профили температуры и массовой доли H -радикалов для пульсирующей волны горения в три последовательных момента времени $t_1 = 0$ (сплошная линия), $t_2 = 3.148 \times 10^{-3}$ (точечно-пунктирная линия) и $t_3 = 1.25918 \times 10^{-2}$ с (пунктирная линия). Поскольку решения периодические, то время измеряется от 0 до T , где $T \approx 0.0223$ с - это период пульсаций.

На рис. 4.12 построена зависимость максимального значения массо-

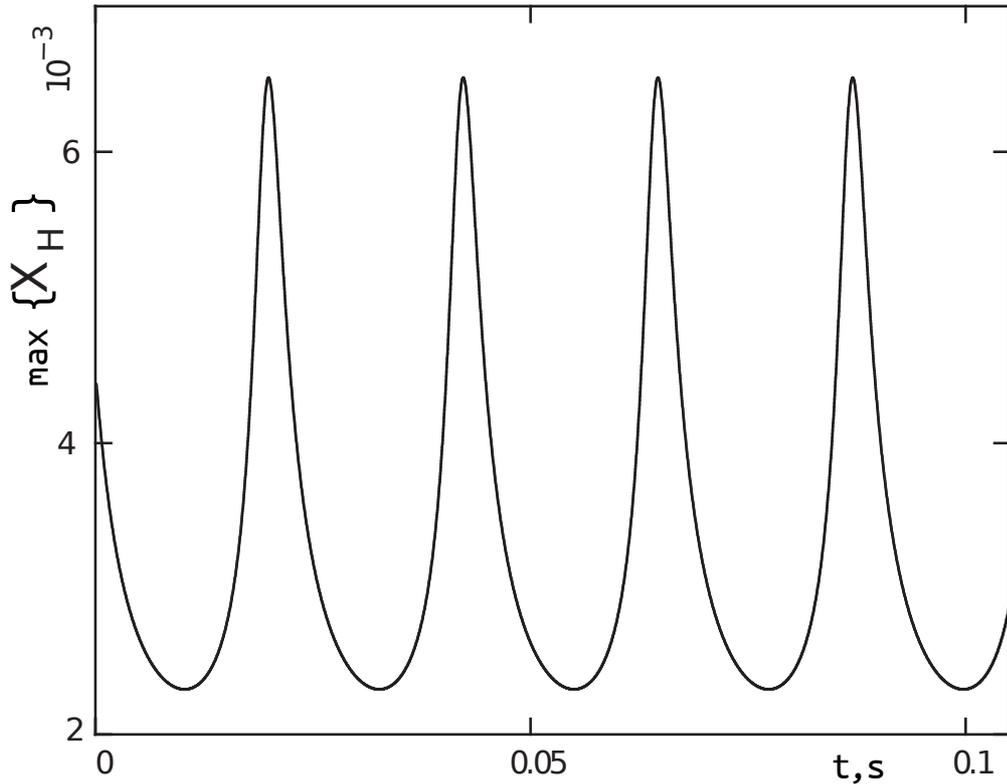


Рис. 4.12. Временные пульсации максимума X_H при $\phi = 7.478$.

вой доли H от времени для периодической пульсирующей волны горения с $\phi = 7.478$. По мере того, как мы сдвигаемся в пространстве параметров от границы устойчивости, увеличивая ϕ от критического значения для бифуркации Андронова-Хопфа, пульсации начинают носить все более релаксационный характер т.е. $\max X_H(t)$ содержит все больше высоких гармоник в Фурье спектре. Это видно на рис. 4.12, где осцилляции носят явно не гармонический характер и характеризуются острыми пиками и более пологими впадинами. Увеличение ϕ так же сопровождается ростом периода пульсаций. Так на рисунке период функции $\max X_H(t)$ составляет $T \approx 0.0223$ с, в то время как сразу за границей устойчивости период равен $0.015625\dots$ с.

Далее, мы исследуем, как амплитуда осцилляции $\max\{X_H\}(t)$ зависит от бифуркационного параметра ϕ . Для этого при заданном фиксированном значении ϕ на рисунке 4.13 мы откладываем по оси ординат минимум и максимум этой функции для пульсирующих периодических волн горения, а по оси абсцисс - соответствующий коэффициент избытка топлива. При стационарном распространении волн горения пульсаций нет и

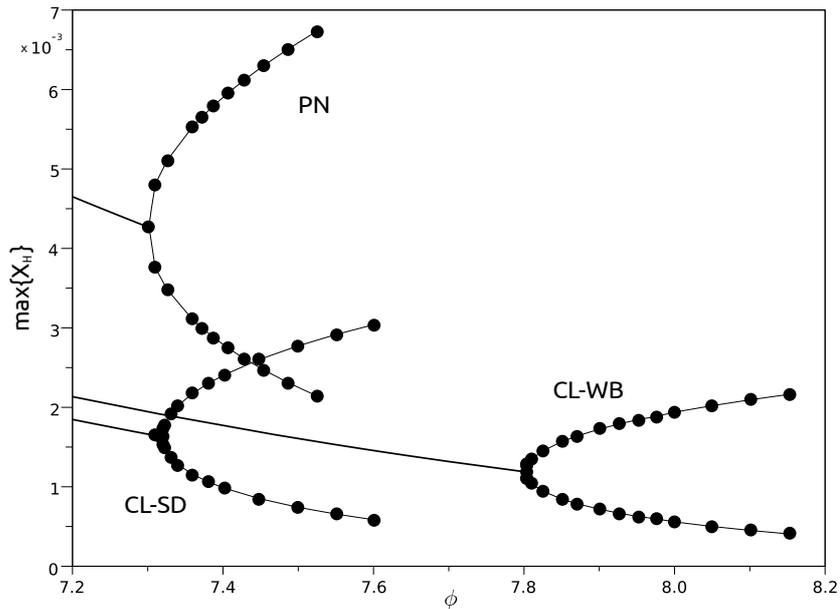


Рис. 4.13. Временной максимум и минимум локального пикового по пространству значения молярной доли H , $\max X_H$ как функция ϕ . Толстая сплошная линия и точки, соединенные тонкой сплошной линией, представляют решение в виде бегущей волны и пульсирующей волны, соответственно.

$\max\{X_H\}(t)$ не изменяется со временем. Эти ветви решений показаны с помощью толстых сплошных линий. В случае пульсирующих решений минимальное и максимальное значения пика массовой доли радикалов, X_H , в пространстве построены в виде двух точек. Как видно на рис. 4.13, при увеличении ϕ за пороговое значение, соответствующее бифуркации Андронова-Хопфа, амплитуда пульсаций растет непрерывным образом по коренному закону. Такое поведение типично для надкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Отметим, что амплитуда пульсаций растет сильнее с увеличением ϕ для PN модели, чем для CL модели.

Скорость пламени так же меняется при появлении пульсаций. На рис. 4.14 построена зависимость как s , так и c_{drift} от ϕ для бегущей и пульсирующей волн горения соответственно. Устойчивые ветви решений показаны сплошной линией, а точечные линии представляют неустойчивые решения в виде бегущей волны, которые теряют устойчивость из-за бифуркации Андронова-Хопфа. Сразу за точкой бифуркации пульсирующие ветви решений рождаются из решений в виде бегущей волны. Как видно на рис.

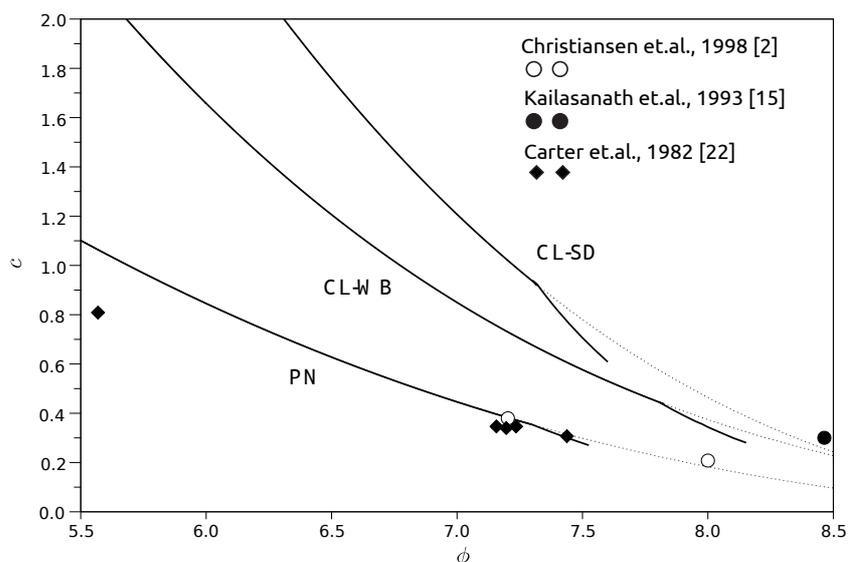


Рис. 4.14. Зависимость скорости пламени, c , от коэффициента избытка топлива для PN, CL-SD и CL-WB моделей. Сплошная линия представляет численные результаты, полученные в работе, в то время как различные символы показывают экспериментальные и расчетные данные из литературы. Неустойчивые ветви решений показаны пунктирной линией.

4.14 пульсирующие волны в среднем распространяются медленней, чем бегущие волны горения и разность $c - c_{drift}$ растёт с увеличением ϕ от значения, соответствующего бифуркации Андронова-Хопфа.

§ 4.5. Выводы

В этой главе было рассмотрено четыре двухступенчатых адиабатических модели с цепным механизмом реакции, описывающих распространение волн горения в богатой водород-воздушной смеси, с целью исследовать диффузионно-тепловую устойчивость вблизи предела воспламенения. Было предположено, что реакция проходит в два глобальных шага, H является единственным радикалом, вовлеченным в процесс горения. Первая реакция имеет большую энергию активации и малую теплоту, а вторая реакция обладает нулевой энергией активации и является высоко экзотермической.

В модели Зельдовича-Линяна глобальные реакции разветвления и рекомбинации контролируются следующими элементарными шагами: $H +$

$O_2 \rightarrow OH + O$ и $H + H + M \rightarrow H_2 + M$, соответственно. Численный анализ показал, что модель с кинетическими данными из работы [214] хорошо предсказывает значение нормальной скорости распространения пламени в богатой смеси по отношению к данным, полученным в расчетах с детальным кинетическим механизмом. Однако, решения в виде бегущих волн горения оказались устойчивыми до очень больших значений коэффициента избытка топлива (более десяти). Это не согласуется с расчетами на основе детальными кинетическими механизмов [211, 219, 224, 225]. Следовательно, эта модель подходит для исследования только стационарного распространения пламени и не подходит для анализа устойчивости и генерации сложных пространственно временных режимов горения.

В модели Зельдовича-Баренблатта глобальная реакция рекомбинации контролируется двумя элементарными шагами: $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$ и $H + H + M \rightarrow H_2 + M$. Включение реакции $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$ существенным образом интенсифицирует рекомбинацию H радикалов. В результате волна горения гаснет при конечных значениях коэффициента избытка топлива, равного примерно шести, что делает данную модель непригодной для исследования богатых водород-воздушных пламен. Основываясь на модели Зельдовича-Баренблатта, мы сформулировали феноменологическую модель, в которой константы реакций $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$ и $H + H + M \rightarrow H_2 + M$ рассматриваются как свободные параметры. Данный подход дает достаточно точную аппроксимацию для скорости распространения пламени вблизи предела воспламенения, критического значения коэффициента избытка топлива для появления пульсирующих неустойчивостей и частоты осцилляций. Структура волны горения так же относительно неплохо согласуется с результатами расчетов, основанных на детальными кинетическими механизмах, хотя, для феноменологической модели наблюдается тенденция переоценки концентрации H радикалов.

Модель Клавина-Линяна учитывает, что H так же вовлечены в реакции, включающие HO_2 , хотя сами гидропироксил радикалы считаются находящимися в стационарном состоянии. В результате скорость глобальной реакции разветвления модифицируется. Помимо этого, теплота реакции разветвления тоже берется в расчет. Полученная таким образом мо-

дель с кинетическими данными, взятыми из [215], дает оценку скорости и структуры пламени, а так же границы устойчивости и частоты пульсаций, с хорошей точностью при больших коэффициентах избытка топлива. Вместе с тем модель переоценивает скорость пламени для умеренно богатых смесей.

Модели Клавина-Линяна и Зельдовича-Баренблатта со свободными константами реакций были выбраны для дальнейшего анализа устойчивости, поскольку они продемонстрировали способность предсказывать скорость, структуру и устойчивость пламени. Нейтральная граница устойчивости была найдена как функция температуры окружающей среды. Было показано, что увеличение начальной температуры свежей смеси расширяет область устойчивого горения в сторону более богатых составов смесей. Зависимость частоты Андронова-Хопфа от начальной температуры также исследовалась и найдено, что частота пульсаций убывает с прогревом свежей смеси. Помимо этого модель Клавина-Линяна дает завышенную оценку частоты Хопфа по сравнению с другими моделями.

Бифуркация Андронова-Хопфа, ответственная за потерю устойчивости бегущих волн горения, детально исследована. Показано, что она является надкритической и устойчивые пульсирующие волны горения появляются при пересечении нейтральной границы устойчивости в результате этой бифуркации. Пульсирующий режим горения характеризуется осцилляциями максимального значения температуры и концентрации H -радикалов. Пульсирующие волны являются периодическими функциями времени в системе отсчета, в среднем бегущей вместе с волной. Установлено, что средняя скорость пламени убывает быстрее, чем скорость бегущей волны горения с ростом коэффициента избытка топлива от критического значения для бифуркации Андронова-Хопфа. При удалении в пространстве параметров от нейтральной границы устойчивости период и амплитуда осцилляции растут.

Резюмируя, наши исследования различных двухступенчатых моделей показали, что модель Клавина-Линяна может быть использована для анализа сложной пульсирующей динамики пламени в богатой водород-воздушной смеси вблизи предела воспламенения.

ГЛАВА 5

Исследование устойчивости бегущих волн горения методом функции Эванса

§ 5.1. Введение

Анализ линейной устойчивости бегущих волн обычно сводится к исследованию дискретного спектра некоторого линейного дифференциального оператора, который может быть получен линеаризацией модельных уравнений в частных производных, описывающих задачу, около исследуемого решения в виде бегущей волны. Функция Эванса впервые была введена в 1972 году в работе [198] для изучения устойчивости нервных импульсов, как аналитическая функция, нули которой соответствуют изолированным собственным значениям этого дифференциального оператора. С момента, когда функция Эванса была впервые введена, идея ее использования для анализа устойчивости была обобщена и развита целым рядом авторов [242–245]. Сравнительно недавно функция Эванса была продлена через непрерывный спектр для определения точек дискретного спектра, вложенных в непрерывный спектр [246–248]. Метод функции Эванса был использован для анализа устойчивости решений в виде бегущей волны в большом количестве примеров, включающих различные области естествознания, такие как: оптика [247–251], биология [198, 252–255], химия [256], теория горения [62, 66, 67, 73, 74, 77, 111, 131, 134–136, 172, 174–176, 179, 180, 197, 199, 209, 233, 257] и т.д.

В ряде случаев таких, как нелинейное уравнение Шрёдингера [248], уравнения типа Буссинеска [258], уравнение синус-Гордона [259], для систем, описывающих прохождение света через нелинейные периодические структуры [251], функция Эванса может быть найдена в явном виде.

В других случаях, таких как обобщенное уравнение Кортевега-де Фриза [260], Буссинеска [261], Шрёдингера [249, 250] и в целом ряде дру-

гих [254, 255, 262–266], поведение функции Эванса для малых значений аргумента может быть найдено с помощью результатов, полученных в [246] и [267], где установлена связь между производными функции Эванса в нуле с методом интеграла Мельникова [268]. Знание этих производных позволяет авторам найти нули функции Эванса, разлагая ее в ряд Тейлора, и таким образом решить задачу устойчивости решений в виде бегущей волны аналитически.

Эта глава посвящена обзору метода функции Эванса и его применения к анализу устойчивости систем типа реакция–диффузия. Делается как обзор основных определений и свойств функции Эванса, так и методов ее численного расчета.

§ 5.2. Решение в виде бегущей волны

В данной главе мы рассматриваем уравнения типа реакция–диффузия, которые могут быть записаны в следующем виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{D} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}^2} + \mathbf{N}(\mathbf{u}), \quad (5.1)$$

где \mathbf{r} и t это пространственная и временная координаты соответственно. Вектор $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ это неизвестная вектор-функция с n компонентами (здесь $(\cdot)^T$ означает транспонирование). В задачах горения \mathbf{u} обычно представляет температуру и концентрацию различных химических соединений, вовлеченных в реакцию. Матрица \mathbf{D} - это $n \times n$ матрица коэффициентов диффузии и в задачах, рассматриваемых в данной работе, она имеет диагональный вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

с положительными элементами $d_i > 0$, в то время как $\mathbf{N}(\mathbf{u}, \vec{\mu}) = (N_1, N_2, \dots, N_n)^T$ это нелинейная вектор-функция \mathbf{u} и параметров $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^m$, представляющая члены, описывающие реакцию. Здесь мы требуем, чтобы

система (5.1) имела по крайней мере два стационарных состояния \mathbf{u}^- и \mathbf{u}^+ таких, что $\mathbf{N}(\mathbf{u}^\pm) = 0$. Это является необходимым условием существования решения в виде бегущей волны.

Решение системы уравнений (5.1) в виде плоской бегущей волны - это решение вида $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_s(x - ct)$, где c является константой, обозначающей скорость. Вводя новую координату $\xi = x - ct$, мы можем получить следующее уравнение для стационарного распространения волны, бегущей без изменения скорости и формы,

$$\mathbf{D} \frac{d^2 \mathbf{u}_s}{d\xi^2} + c \frac{d\mathbf{u}_s}{d\xi} + \mathbf{N}(\mathbf{u}_s) = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

Система (5.3) имеет по крайней мере два стационарных решения $\mathbf{u}_s(\xi) = \mathbf{u}^+$ и $\mathbf{u}_s(\xi) = \mathbf{u}^-$. Поведение решений системы (5.3) вблизи этих стационарных точек описывается линеаризованными уравнениями

$$\mathbf{L}^\pm \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (5.4)$$

где

$$\mathbf{L}^\pm \equiv \mathbf{D} \frac{d^2}{d\xi^2} + c \mathbf{I} \frac{d}{d\xi} + \mathbf{W}^\pm. \quad (5.5)$$

Здесь мы ввели следующие обозначения: \mathbf{I} это единичная матрица размером $n \times n$ и

$$\mathbf{W}^\pm \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^\pm} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial u_1} & \frac{\partial N_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial N_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial N_2}{\partial u_1} & \frac{\partial N_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial N_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial N_n}{\partial u_1} & \frac{\partial N_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^\pm} \quad (5.6)$$

это матрица, элементами которой являются производные нелинейной вектор-функции $\mathbf{N}(\mathbf{u})$. Фундаментальная система решений уравнений (5.4) может быть записана в виде $\mathbf{u}_{si}^\pm(\xi) = \mathbf{u}_{0i}^\pm \exp(\lambda_i^\pm \xi)$, где \mathbf{u}_{0i}^\pm - это векторы-константы, а λ_i^\pm являются корнями алгебраического уравнения

$$\det(\lambda^2 \mathbf{D} + c \lambda \mathbf{I} + \mathbf{W}^\pm) = 0, \quad (5.7)$$

которое имеет $2n$ решений. Предположим, что существует по крайней мере одно решение, λ_i^- , с положительной реальной частью и по крайней мере одно решение, λ_i^+ , с отрицательной реальной частью. Аналогично, мы можем предположить, что в фазовом пространстве (5.4) существует по крайней мере одномерное неустойчивое многообразие неподвижной точки $\mathbf{u} = \mathbf{u}^-$ и по крайней мере одномерное устойчивое многообразие неподвижной точки $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+$. Предположим, что в некоторой области параметров существует решение системы (5.3), соединяющее устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижных точек \mathbf{u}^+ и \mathbf{u}^- соответственно и удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s(\xi) &\rightarrow \mathbf{u}^- \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \\ \mathbf{u}_s(\xi) &\rightarrow \mathbf{u}^+ \quad \text{при } \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (5.8)$$

В случае, когда $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+$, это решение является импульсом, в противном случае, когда $\mathbf{u}^- \neq \mathbf{u}^+$, решение называется бегущим фронтом.

§ 5.3. Задача линейной устойчивости и ее непрерывный спектр

Для исследования устойчивости решения в виде бегущей волны система (5.1) линеаризуется около $\mathbf{u}_s(\xi)$, где ξ это координата в бегущей системе отсчета, т.е. мы ищем решение следующего вида $\mathbf{u}(\xi, t) = \mathbf{u}_s(\xi) + \mathbf{u}(\xi)e^{\lambda t + i\mathbf{K}_\perp \mathbf{r}_\perp}$, где \mathbf{K}_\perp и \mathbf{r}_\perp - это волновое число и радиус вектор в направлении, ортогональном оси x , вдоль которой распространяется решение в виде бегущей волны. Для определенности будем считать, что \mathbf{K} направлен вдоль оси z и $\mathbf{K}_\perp \mathbf{r}_\perp = Kz$. Это дает

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad (5.9)$$

где мы ввели линейный дифференциальный оператор,

$$\mathbf{L}(\xi, \vec{\mu}, K) = \mathbf{D} \frac{d^2}{d\xi^2} + c\mathbf{I} \frac{d}{d\xi} + \mathbf{W} - K^2\mathbf{D}, \quad (5.10)$$

зависящий от координаты в бегущей системе отсчета ξ , параметров $\vec{\mu}$ и волнового числа, которое входит в него как дополнительный параметр.

Матрица \mathbf{W} определяется аналогично (5.6), как

$$\mathbf{W}(\xi) = \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_s(\xi)}. \quad (5.11)$$

Из определения (5.5) и (5.10) следует, что $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathbf{L} = \mathbf{L}^\pm - \mathbf{D}K^2$. Устойчивость решения в виде бегущего фронта определяется спектром линейного оператора \mathbf{L} .

В [189] и [5] показано, что непрерывный спектр операторов \mathbf{L} и $\mathbf{L}^\pm - \mathbf{D}K^2$, который мы обозначим как Σ_{ess} и Σ_{ess}^\pm , соответственно, связаны. Далее мы исследуем структуру Σ_{ess}^\pm и, используя соотношение спектров операторов $\mathbf{L}^\pm - \mathbf{D}K^2$ и \mathbf{L} , определим положение Σ_{ess} на комплексной плоскости.

Для этого мы подставляем $\mathbf{L}^\pm - \mathbf{D}K^2$ вместо \mathbf{L} в уравнения (5.9) и ищем решение в виде $\mathbf{u} \sim e^{i\tau\xi}$, где τ - произвольное действительное число. Это дает следующее уравнение

$$\det(-\mathbf{D}(\tau^2 + K^2) + i\tau c\mathbf{I} + \mathbf{W}^\pm - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (5.12)$$

Непрерывный спектр \mathbf{L}^\pm состоит из конечного числа алгебраических кривых $\lambda_i(\tau)$, которые являются корнями уравнения (5.12). Далее, если мы знаем, что для некоторого τ' , $\lambda_i(\tau')$ принадлежит Σ_{ess}^\pm , то, взяв комплексно сопряженное (5.12), мы получим, что $\lambda_i^*(-\tau') \in \Sigma_{ess}^\pm$ (где $*$ обозначает комплексное сопряжение). Следовательно, кривые $\lambda_i(\tau)$ симметричны относительно действительной оси. Более того, они асимптотически являются параболой: $\lambda_i(\tau) \rightarrow -d_i\tau^2 + O(\tau)$ при $|\tau| \rightarrow \infty$.

Для того, чтобы получить более детальную картину о расположении Σ_{ess}^\pm на комплексной плоскости, мы должны подробнее определить класс проблем, которые рассматриваются в данной работе. Для примера рассмотрим случай моделей с одноступенчатым механизмом реакции. Они включают два уравнения: одно из них описывает температуру, а второе концентрацию топлива. По этой причине вектор \mathbf{u} является двумерным, а \mathbf{D} , \mathbf{W} , и \mathbf{I} являются матрицами размерности 2×2 . Предельные матрицы \mathbf{W}^\pm имеют оба собственных значения $w_{1,2}^\pm \leq 0$ (так называемый бистабильный случай [5]). Мы определяем $s = \lambda + i\tau c$. В этих обозначениях уравнения (5.12) запишутся

$$\det(-\mathbf{D}(\tau^2 + K^2) + \mathbf{W}^\pm - s\mathbf{I}) = 0. \quad (5.13)$$

Корни (5.13) могут быть выражены в явном виде как

$$s_{1,2}^{\pm} = \frac{-\tilde{\tau}^2 \text{Tr}(\mathbf{D}) + \text{Tr}(\mathbf{W}^{\pm}) \pm \sqrt{[\tilde{\tau}^2 \text{Tr}(\mathbf{D}) - \text{Tr}(\mathbf{W}^{\pm})]^2 - 4(\tilde{\tau}^2 |\mathbf{D}| + |\mathbf{W}^{\pm}|)}}{2}, \quad (5.14)$$

где $\tilde{\tau}^2 = \tau^2 + K^2$, а $\text{Tr}(\cdot)$ и $|\cdot|$ обозначают след и детерминант матрицы соответственно. По определению действительная часть $s_{1,2}^{\pm}$ равна действительной части соответствующего $\lambda_{1,2}^{\pm}$.

Рассмотрим одномерный случай, $K = 0$. Максимум $\text{Re}(s_{1,2}^{\pm})$ может быть найден из решения уравнения $d(s_{1,2}^{\pm})/d\tau = 0$, которое имеет два решения: $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = \sqrt{-|\mathbf{W}^{\pm}|/|\mathbf{D}|}$. Как $|\mathbf{W}^{\pm}|$ так и $|\mathbf{D}|$ положительные числа. Следовательно, τ_2 является чисто мнимым и может быть отброшено. Подставляя τ_1 в (5.14), мы получаем

$$\max \text{Re}(\lambda_{1,2}^{\pm}(\tau)) = \max \text{Re}(s_{1,2}^{\pm}(\tau)) = w_{1,2}^{\pm} \leq 0. \quad (5.15)$$

Для случая $K \neq 0$, $\tilde{\tau}$ положительно и соответствующие значения $\max \text{Re}(\lambda_{1,2}^{\pm}(\tau))$ сдвигаются в сторону меньших действительных значений. Это доказывает, что непрерывный спектр Σ_{ess}^{\pm} оператора \mathbf{L}^{\pm} , который является набором алгебраических кривых $\lambda = \lambda_{1,2}^{\pm}(\tau)$, лежит в левой полуплоскости. Тогда, в соответствии с [189], непрерывный спектр оператора \mathbf{L} так же лежит в левой полуплоскости и, в частности, включает в себя Σ_{ess}^{\pm} . Пусть область \mathbb{K} комплексной плоскости такая, что она содержит все точки \mathbb{C} , лежащие левее верхней границы действительной части Σ_{ess} . Тогда непрерывный спектр оператора \mathbf{L} содержится в \mathbb{K} и, в частности, включает в себя Σ_{ess}^{\pm} . На рисунке 5.1 мы схематично иллюстрируем расположение областей \mathbb{K} и Σ_{ess}^{\pm} на комплексной плоскости. Заштрихованная область рисунка соответствует \mathbb{K} .

В случае моделей с двухступенчатой кинетикой, исследуемых в этой работе, аналогичное рассмотрение показывает, например см. [179], что непрерывный спектр оператора \mathbf{L} лежит в левой полуплоскости.

§ 5.4. Дискретный спектр и функция Эванса

В связи с тем, что непрерывный спектр оператора \mathbf{L} полностью лежит в левой полуплоскости, устойчивость бегущего фронта определяется

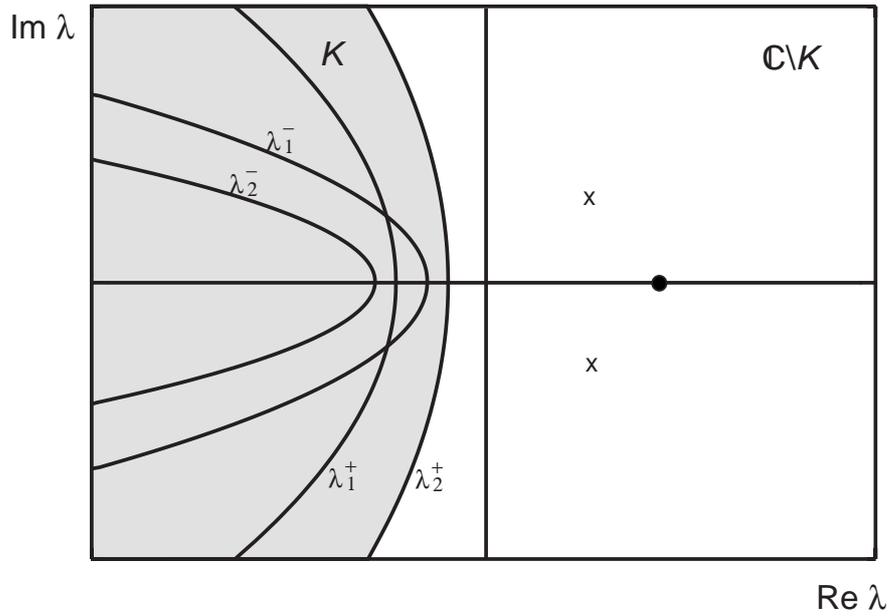


Рис. 5.1. Спектр оператора \mathbf{L} . Непрерывная линия показывает Σ_{ess}^{\pm} . Кружок обозначает точку дискретного спектра, расположенную на действительной оси, а крестики - пару комплексно сопряженных точек дискретного спектра.

дискретным спектром \mathbf{L} . В соответствии с [5] в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$ существует конечное число точек дискретного спектра оператора \mathbf{L} , приводящих к неустойчивости. Из определения (5.10) следует, что $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}$, поэтому, если λ' - это собственное значение оператора \mathbf{L} , то λ'^* тоже является собственным значением. Следовательно, точки дискретного спектра располагаются либо на действительной оси, либо симметрично относительно действительной оси, как показано на рисунке 5.1.

Для последующего анализа удобно переписать задачу на собственные значения (5.9), которая является системой дифференциальных уравнений второго порядка, в виде системы уравнений первого порядка. Определяя вектор $\mathbf{z} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\xi})$, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad (5.16)$$

где

$$\mathbf{A}(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{D}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{W}) & -c\mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Мы используем уравнение (5.16) для исследования устойчивости бегущего фронта. Следуя [269], мы говорим, что бегущий фронт линейно устойчив, если для некоторого фиксированного значения λ с $Re(\lambda) > 0$, су-

существует решение (5.16), которое экспоненциально затухает при $\xi \rightarrow \pm\infty$ (локализованное решение). Мы будем называть это λ собственным значением и соответствующее ему решение собственной модой.

Далее, мы определяем предельные матрицы

$$\mathbf{A}^\pm(\lambda) \equiv \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathbf{A}(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{D}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{W}^\pm) & -c\mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Они являются матрицами $2n \times 2n$ и, следовательно, имеют по $2n$ собственных значения μ_i^\pm ($i = 1, \dots, 2n$) и соответствующих им собственных векторов \mathbf{k}_i^\pm . Для моделей, рассмотренных в данной работе, \mathbf{A}^- имеет n собственных значений с положительной действительной частью и n собственных значений с отрицательной действительной частью $\mu_{1,3,\dots,2n-1}^-$ для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$ (см. рисунок 5.1). Аналогично в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$ для \mathbf{A}^+ мы имеем $Re(\mu_{2,4,\dots,2n}^+) > 0$ и $Re(\mu_{1,3,\dots,2n-1}^+) < 0$.

Следовательно, для любого значения $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$ существуют n линейно независимых решения $\mathbf{z}_{2,4,\dots,2n}^-(\xi, \lambda)$ системы (5.16), соответствующих неустойчивому подпространству \mathbf{A}^- , удовлетворяющих условиям

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \exp(-\mu_i^- \xi) \mathbf{z}_i^-(\xi, \lambda) = \mathbf{k}_i^-, \quad i = 2, 4, \dots, 2n, \quad (5.19)$$

и n линейно независимых решения $\mathbf{z}_{1,3,\dots,2n-1}^+(\xi, \lambda)$ системы (5.16), соответствующих устойчивому подпространству \mathbf{A}^+ , удовлетворяющих условиям

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \exp(-\mu_i^+ \xi) \mathbf{z}_i^+(\xi, \lambda) = \mathbf{k}_i^+, \quad i = 1, 3, \dots, 2n - 1. \quad (5.20)$$

Теперь мы рассмотрим пространство решений E^- системы (5.16), ограниченных при $\xi \rightarrow -\infty$, которое является линейной оболочкой $\mathbf{z}_2^-(\xi, \lambda)$, $\mathbf{z}_4^-(\xi, \lambda)$, ... а именно

$$E^-(\xi, \lambda) = \sum_{i=2,4,\dots,2n} \alpha_i \mathbf{z}_i^-(\xi, \lambda), \quad (5.21)$$

где α_i - это постоянные коэффициенты. Аналогично, пространство решений E^+ , ограниченных при $\xi \rightarrow +\infty$, которое является линейной оболочкой $\mathbf{z}_1^+(\xi, \lambda)$, $\mathbf{z}_3^+(\xi, \lambda)$, ... может быть представлено как

$$E^+(\xi, \lambda) = \sum_{i=1,3,\dots,2n-1} \beta_i \mathbf{z}_i^+(\xi, \lambda), \quad (5.22)$$

где β_i - это постоянные коэффициенты. Если эти пространства пересекаются нетривиальным образом для какого-либо значения λ , то это λ является собственным значением. Мы будем называть функцию, которая показывает, пересекаются ли эти два пространства решений или нет, функцией Эванса (следует отметить, что существует несколько определений функции Эванса, которые мы обсудим позднее). Геометрически это значит, что для некоторого λ и любого значения координаты ξ плоскость, натянутая на решения $\mathbf{z}_{2,4,\dots,2n}^-$, нетривиально пересекается с плоскостью, натянутой на решения $\mathbf{z}_{1,3,\dots,2n-1}^+$. Также мы можем сказать, что λ - это собственное значение тогда, когда решения $\mathbf{z}_{2,4,\dots,2n}^-$ и $\mathbf{z}_{1,3,\dots,2n-1}^+$ линейно зависимы или, эквивалентно, Вронскиан, определенный на этих решениях (детерминант матрицы, столбцами которой являются координаты векторов $\mathbf{z}_{2,4,\dots,2n}^-(\xi)$ и $\mathbf{z}_{1,3,\dots,2n-1}^+(\xi)$) равен нулю. Одно из определений функции Эванса, данное в [62] и [245], основано на использовании этого Вронскиана, который для определенности берется при $\xi = 0$. Пусть \mathbf{e}_i - это ортонормированный базис в $2n$ -мерном пространстве решений системы (5.16). В этом базисе векторы \mathbf{z}_i^\pm имеют координаты $(z_{i1}^\pm, z_{i2}^\pm, \dots, z_{i2n}^\pm)^T$ и функция Эванса определяется как

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} z_{21}^-(0, \lambda) & z_{41}^-(0, \lambda) & \dots & z_{11}^+(0, \lambda) & z_{31}^+(0, \lambda) & \dots \\ z_{22}^-(0, \lambda) & z_{42}^-(0, \lambda) & \dots & z_{12}^+(0, \lambda) & z_{32}^+(0, \lambda) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{22n}^-(0, \lambda) & z_{42n}^-(0, \lambda) & \dots & z_{12n}^+(0, \lambda) & z_{32n}^+(0, \lambda) & \dots \end{vmatrix}. \quad (5.23)$$

Главным преимуществом данного определения $D(\lambda)$ через Вронскиан (5.23) является его простота. Далее мы переходим к описанию свойств функции Эванса.

§ 5.5. Свойства функции Эванса

В этом параграфе мы перечислим основные свойства функции Эванса, которые следуют из ее определения (5.23). Эти свойства часто используются при исследовании устойчивости бегущих фронтов.

- 1. Функция Эванса $D(\lambda)$, определенная по формуле (5.23), является аналитической функцией в $\mathbb{C} \setminus K$.

- 2. $D(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда λ является собственным значением.
- 3. Порядок нуля функции Эванса $D(\lambda)$ и алгебраическая кратность соответствующего собственного значения равны.

Здесь порядок нуля функции Эванса $D(\lambda) = 0$ определяется как однозначно определяемое целое число m , для которого

$$\frac{d^k D}{d\lambda^k} = 0 \quad \text{при} \quad k < m, \quad \frac{d^m D}{d\lambda^m} \neq 0. \quad (5.24)$$

Доказательство свойств 1 – 3 может быть найдено в [242], [246], и [245].

- 4. Функция Эванса равна нулю в начале координат: $D(0) = 0$.

Это свойство связано с трансляционной инвариантностью решений системы (5.3), т. е. если $\mathbf{u}_s(\xi)$ является решением системы (5.3), то $\mathbf{u}_s(\xi + h)$ тоже решение (5.3). Здесь h - это произвольное число. Далее мы подставляем $\mathbf{u}_s(\xi + h)$ в (5.3) и, дифференцируя по h , получаем

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_{s\xi} = 0. \quad (5.25)$$

Здесь мы учли, что $d/dh \equiv d/d\xi$. Решение $\mathbf{u}_{s\xi}$ локализовано (ограниченно) при $\xi \rightarrow \pm\infty$ и удовлетворяет (5.3) с $\lambda = 0$. Следовательно, $\mathbf{u}_{s\xi}$ - это собственная мода (5.16), соответствующая нулевому собственному значению, и $D(0) = 0$. Это решение иногда называют нейтральной модой.

- 5. Функция Эванса удовлетворяет свойству симметрии: $D(\lambda^*) = (D(\lambda))^*$.

Действительно, матрица $\mathbf{A}(\xi, \lambda)$, определенная в (5.17), зависит от λ линейным образом, а именно,

$$\mathbf{A}(\xi, \lambda) = \mathbf{A}(\xi, 0) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \lambda}(\xi, 0)\lambda, \quad (5.26)$$

где как $\mathbf{A}(\xi, 0)$, так и $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \lambda}(\xi, 0)$ - это действительные матрицы. Следовательно, мы имеем $\mathbf{A}(\xi, \lambda^*) = (\mathbf{A}(\xi, \lambda))^*$. Это свойство приводит к аналогичному свойству решений системы (5.16): $\mathbf{z}(\xi, \lambda^*) = (\mathbf{z}(\xi, \lambda))^*$. Далее, учитывая

определение функции Эванса (5.23), мы получаем

$$\begin{aligned} D(\lambda^*) &= \det [\mathbf{z}_2^-(0, \lambda^*), \mathbf{z}_4^-(0, \lambda^*), \dots, \mathbf{z}_1^+(0, \lambda^*), \mathbf{z}_3^+(0, \lambda^*), \dots] \\ &= \det [\mathbf{z}_2^-(0, \lambda), \mathbf{z}_4^-(0, \lambda), \dots, \mathbf{z}_1^+(0, \lambda), \mathbf{z}_3^+(0, \lambda), \dots]^* = (D(\lambda))^*. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Отсюда следует, что если λ' - это собственное значение (5.16), то λ'^* тоже является собственным значением (или $D(\lambda') = D(\lambda'^*) = 0$). Это свойство отражает симметрию дискретного спектра оператора \mathbf{L} относительно реальной оси, о котором уже упоминалось в начале предыдущего параграфа.

- 6. $D(\lambda)$ - это действительная функция действительного аргумента: $D(x) \in \mathbb{R}$ для $x \in \mathbb{R}$.

Это свойство является следствием свойства 5.

В определении (5.23) есть неопределенность в выборе длины векторов $\mathbf{z}_i^\pm(0, \lambda)$ и выборе базисных векторов \mathbf{e}_i . Это приводит к следующему свойству:

- 7. Функция Эванса определена с точностью до множителя, которым может быть любая функция спектрального параметра, не обращающаяся в ноль и аналитическая в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$.

Понятно, что свойство 7 не отражается ни на числе нулей функции Эванса, ни на их расположении на комплексной плоскости. Следовательно, указанная выше неопределенность не сказывается на связи функции Эванса и спектральной задачи (5.16), которые перечисляются в первых трех свойствах. Более того, неопределенность может быть убрана, во-первых, заданием $|\mathbf{z}_i^\pm(0, \lambda)| = 1$. Во-вторых, для каждого базиса мы выбираем множитель перед детерминантом таким образом, что выполняется следующее условие:

- 8. Функция Эванса имеет следующее асимптотическое поведение: $D(\lambda) \rightarrow 1$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$.

Для того чтобы найти необходимый коэффициент перед детерминантом, который должен быть аналитической не обращающейся в ноль функцией λ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$, необходимо вернуться к задаче на собственные значения

(5.16). Мы перепишем ее в асимптотически согласованном виде, определяя шкалированную переменную $\eta = \varepsilon\xi$, как

$$\mathbf{L}_0\mathbf{u} = -\varepsilon\mathbf{c}\mathbf{u}_\eta - \varepsilon^2\mathbf{W}\mathbf{u} + \varepsilon^2\mathbf{D}\mathbf{K}^2, \quad (5.28)$$

где $\varepsilon = 1/\sqrt{|\lambda|}$ и $\mathbf{L}_0 = \mathbf{D}d^2/d\eta^2 - \lambda/|\lambda|\mathbf{I}$. Решение (5.28) ищется в виде бесконечного ряда с ε в качестве малого параметра, т. е. $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon\mathbf{u}_1 + \dots$. Однако здесь мы интересуемся только задачей в ведущем порядке асимптотического разложения, которая может быть записана как $\mathbf{L}_0\mathbf{u} = 0$. Общим решением этой задачи является

$$u_i(\eta) = \left(\alpha_i e^{\eta\sqrt{\lambda/|\lambda|d_i}} + \beta_i e^{-\eta\sqrt{\lambda/|\lambda|d_i}} \right), \quad (5.29)$$

где α_i и β_i - это константы. Возвращаясь к оригинальным переменным, мы можем представить решения (5.16), ограниченные при $\xi \rightarrow -\infty$, как

$$\mathbf{z}_{2j}^-(\xi) = \left(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_{j+n}\sqrt{\lambda/d_j} \right) e^{\xi\sqrt{\lambda/d_j}} \quad (5.30)$$

где $j = 1, 2, \dots, n$. Аналогично, решения (5.16), ограниченные при $\xi \rightarrow \infty$, могут быть представлены в виде

$$\mathbf{z}_{2j-1}^+(\xi) = \left(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+n}\sqrt{\lambda/d_j} \right) e^{-\xi\sqrt{\lambda/d_j}} \quad (5.31)$$

где $j = 1, 2, \dots, n$.

Далее мы нормализуем эти решения таким образом, что $|\mathbf{z}_i^\pm(0, \lambda)| = 1$. Подставляя их в (5.23) и устремляя $|\lambda| \rightarrow \infty$, мы получаем в ведущем порядке

$$\det [\mathbf{z}_2^-(0, \lambda), \mathbf{z}_4^-(0, \lambda), \dots, \mathbf{z}_1^+(0, \lambda), \mathbf{z}_3^+(0, \lambda), \dots] = (-2)^n \frac{\sqrt{d_1 \dots d_n \lambda^n}}{|\lambda|^n} \quad (5.32)$$

Если мы хотим, чтобы свойство 8 было удовлетворено, мы должны разделить детерминант в (5.23) на функцию равную выражению, стоящему в правой части (5.32). На практике удобно использовать в качестве калибровочных множителей собственные значения предельных матриц (5.18). Для рассматриваемых в данной работе задач они имеют асимптотики вида $\sqrt{\lambda/d_i}$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$. Более того мы берем собственные значения предельных матриц \mathbf{A}_\pm , которые не обращаются в ноль в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$, поэтому умножение на них не приводит к внесению дополнительных нулей функции Эванса в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$, не связанных с точками дискретного спектра \mathbf{L} .

§ 5.6. Численный метод расчета функции Эванса

Этот параграф посвящен численным методам нахождения $D(\lambda)$. Алгоритм для расчета функции Эванса может быть найден в [260], где исследуется устойчивость решений в виде бегущей волны обобщенного уравнения КдВ–Бюргера. Задача линейной устойчивости формулируется в виде (5.16), где \mathbf{A} - это матрицы размером 3×3 . Предельные матрицы \mathbf{A}_{\pm} имеют собственные значения, распределенные на комплексной плоскости следующим образом

$$Re(\mu_1^{\pm}) < 0 < Re(\mu_j^{\pm}), \quad j = 2, 3. \quad (5.33)$$

Собственные моды задачи на линейную устойчивость охватывают одномерное устойчивое подпространство A^+ и двухмерное неустойчивое подпространство A^- . Решение задачи на линейную устойчивость, ограниченное при $\xi \rightarrow \infty$, удовлетворяет

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \exp(-\mu_1^+ \xi) \mathbf{z}_1(\xi, \lambda) = \mathbf{k}_1^+. \quad (5.34)$$

Аналогично, решение, ограниченное при $\xi \rightarrow -\infty$, удовлетворяет

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \exp(-\mu_{2,3}^- \xi) \mathbf{z}_{2,3}(\xi, \lambda) = \mathbf{k}_{2,3}^-. \quad (5.35)$$

Для расчета функции Эванса, достаточно найти решение, удовлетворяющее (5.34). Затем функция Эванса может быть определена через Вронскиан на $\xi = -\infty$

$$D(\lambda) \sim \det [\mathbf{z}_1(-\infty, \lambda), \mathbf{k}_2^-, \mathbf{k}_3^-], \quad (5.36)$$

где $|\mathbf{z}_1(-\infty, \lambda)| = 1$. Для того чтобы найти это решение, мы берем начальные условия $\mathbf{z} = \mathbf{k}_1^+$ и интегрируем уравнения (5.16) назад от $\xi = l_1$ до $\xi = -l_2$, где l_1 и l_2 берутся достаточно большими числами. Однако в нашем случае решение испытывает экспоненциальный рост из-за собственных значений с отрицательными реальными частями μ_1^{\pm} . Для того чтобы обойти эту проблему, в [260] предлагается специальный алгоритм интегрирования. Следуя авторам, нам необходимо ввести новые перемен-

ные $\mathbf{v}(\xi, \lambda) = \exp(-\mu_1(\xi, \lambda) \xi) \mathbf{z}(\xi, \lambda)$, где

$$\begin{aligned} \mu_1(\xi, \lambda) &= \mu_1^- \quad \text{при } \xi < 0, \\ \mu_1(\xi, \lambda) &= \mu_1^+ \quad \text{при } \xi > 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Функция $\mathbf{v}(\xi, \lambda)$ удовлетворяет

$$\mathbf{v}_\xi = (\mathbf{A} - \mu_1 \mathbf{I}) \mathbf{v}. \quad (5.38)$$

Пределные матрицы $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} (\mathbf{A} - \mu_1 \mathbf{I})$ имеют собственные значения 0 , $\mu_2^\pm - \mu_1^\pm$, and $\mu_3^\pm - \mu_1^\pm$. Следовательно, решение (5.38) с начальными условиями $\mathbf{v} = \mathbf{k}_1^+$ не испытывает экспоненциального роста при интегрировании назад от $\xi = l_1$ до $\xi = -l_2$ и может быть найдено численно. Далее, мы подставляем $\mathbf{v}(-l_2, \lambda)/|\mathbf{v}(-l_2, \lambda)|$ в (5.36) вместо \mathbf{z}_1 , поскольку направления обоих векторов совпадают. Таким образом мы можем посчитать $D(\lambda)$ для любого значения $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$.

Однако метод расчета функции Эванса, кратко описанный выше, не применим к задачам, рассматриваемым в данной диссертации. Главная сложность связана с тем, что данный метод может быть применим только для узкого класса систем с одномерным пространством решений, ограниченных (или неограниченных) при $\xi = +\infty$ или $-\infty$. Другими словами, численный алгоритм, приведенный в [260], позволяет найти только решения с максимальным (минимальным) коэффициентом экспоненциального роста (затухания) при $\xi \rightarrow \pm\infty$.

В дальнейшем проиллюстрируем это на случае модели с одноступенчатой кинетикой и матрицей $\mathbf{A}(\xi, \lambda)$ размерности 4×4 [66]. Необходимо найти две пары решений: одну пару решений, ограниченных при ξ стремящимся к $+\infty$, другую пару решений ограниченных при $\xi \rightarrow -\infty$. Для определенности рассмотрим область $\xi < 0$. В нашем случае система (5.16) имеет два решения $\mathbf{z}_{2,4}^-$, ограниченных при $\xi \rightarrow -\infty$, и два решения $\mathbf{z}_{1,3}^-$, неограниченных при $\xi \rightarrow -\infty$, которые не представляют для нас интереса. Для того чтобы отбросить $\mathbf{z}_{1,3}^-$, мы должны интегрировать систему (5.16) численно от $\xi = -l_1$ до $\xi = 0$ (где l_1 выбрано достаточно большим числом). Есть два коэффициента μ_2^- и μ_4^- , и один из них всегда больше другого (за исключением, быть может, специального случая, когда они равны для

какого-то значения λ). Интегрируя вперед, мы можем найти только решение, соответствующее наибольшему коэффициенту экспоненциального роста, решение с меньшим коэффициентом экспоненциального роста всегда подавляется из-за численных ошибок, неизбежных в любой расчетной схеме. Иными словами, решения \mathbf{z}_2^- и \mathbf{z}_4^- теряют линейную независимость при численном интегрировании. В пределе $\xi \rightarrow +\infty$ мы сталкиваемся с теми же сложностями. Системы с такими свойствами называются жесткими [269, 270]. Жесткость приводит к тому, что прямые численные расчеты с использованием (5.23) невозможны и требуется некоторая процедура ортогонализации.

Существует несколько методов решения этой проблемы. Один из них используется в [271] при расчете спектра показателей Ляпунова для хаотических систем. Он основан на применении процедуры ортогонализации Грама–Шмидта к паре решений каждые несколько шагов и обычно называется дискретной ортогонализацией [269].

Вернемся к рассмотрению решений в области $\xi < 0$. Для определенности мы также предполагаем, что $Re\mu_2^- < Re\mu_4^-$. Алгоритм, предложенный в [260] и описанный выше, позволяет нам найти решение, соответствующее наибольшему коэффициенту экспоненциального роста $\mathbf{z}_4^-(\xi, \lambda)$ (точнее, мы получаем $\mathbf{v}_4^-(\xi, \lambda)$ на интервале $\xi \in [-l_1, 0]$). Далее, мы берем начальные условия в виде $\mathbf{v}(-l_1, \lambda) = \mathbf{k}_2^- + \mathbf{k}_4^-$, где $|\mathbf{k}_{2,4}^-| = 1$, и используем данный алгоритм для нахождения решения. Строго говоря, решение данной проблемы это $\mathbf{v}(\xi, \lambda) = \mathbf{v}_2^-(\xi, \lambda) + \mathbf{v}_4^-(\xi, \lambda)$. Однако $|\mathbf{v}_2^-(\xi, \lambda)|$ экспоненциально уменьшается и для некоторого $-l_1 < \xi' < 0$ решение $\mathbf{v}_2^-(\xi, \lambda)$ становится численно неразрешимым из-за конечной машинной точности. Предположим, что мы интегрируем от $-l_1$ до ξ'' так, что $|\mathbf{v}_2^-(\xi, \lambda)|$ не отличается существенно от единицы. Мы знаем решение $\mathbf{v}_4^-(\xi'', \lambda)$ и, следовательно, решение может быть найдено с помощью алгоритма Грама–Шмидта. Мы сначала находим $\mathbf{v}_2^-(\xi'', \lambda) = \mathbf{v}(\xi'', \lambda) - \mathbf{v}_4^-(\xi'', \lambda)$. Затем мы нормализуем оба вектора и берем начальные условия при ξ'' в виде $\mathbf{v}(\xi'', \lambda) = \mathbf{v}_4^-(\xi'', \lambda)/|\mathbf{v}_4^-(\xi'', \lambda)| + \mathbf{v}_2^-(\xi'', \lambda)/|\mathbf{v}_2^-(\xi'', \lambda)|$. Повторяя эту процедуру рекуррентно, мы получаем направление обоих векторов $\mathbf{v}_2^-(0, \lambda)$ и $\mathbf{v}_4^-(0, \lambda)$. Затем этот алгоритм используется для $\xi > 0$ и функция Эванса находится с

помощью определения (5.23).

§ 5.7. Метод составной матрицы

В предыдущем параграфе мы рассмотрели метод дискретной ортогонализации для расчета функции Эванса. Недостатком этого метода является то, что решение (5.16), соответствующее меньшему коэффициенту экспоненциального роста, убывает экспоненциально при использовании данного алгоритма. Другими словами, метод не исключает жесткость проблемы полностью. В качестве альтернативы дискретной ортогонализации существуют гораздо более сильные методы: непрерывная ортогонализация [272–276] и метод составной матрицы [277–283]. При расчете функции Эванса мы будем пользоваться вторым методом. Поясним его применение к задаче поиска дискретного спектра задачи линейной устойчивости на примере моделей с одноступенчатой кинетикой.

Пусть \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 - это решения системы (5.16). Рассмотрим матрицу 4×2 , составленную из этих решений,

$$\mathbf{U}(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \\ z_{13} & z_{23} \\ z_{14} & z_{24} \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Если $\mathbf{z}_1(\xi, \lambda)$ и $\mathbf{z}_2(\xi, \lambda)$ линейно независимы, то матрица $\mathbf{U}(\xi)$ представляет двухмерное подпространство решений системы (5.16). В этом случае мы можем упорядочить все 2×2 миноры матрицы \mathbf{U} в виде вектора с компонентами

$$\begin{aligned} v_1 &= z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, & v_4 &= z_{12}z_{23} - z_{13}z_{22}, \\ v_2 &= z_{11}z_{23} - z_{13}z_{21}, & v_5 &= z_{12}z_{24} - z_{14}z_{22}, \\ v_3 &= z_{11}z_{24} - z_{14}z_{21}, & v_6 &= z_{13}z_{24} - z_{14}z_{23}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Компоненты вектора \mathbf{v} удовлетворяют квадратичному тождеству

$$v_1v_6 - v_2v_5 + v_3v_4 = 0, \quad (5.41)$$

которое может быть проверено прямой подстановкой (5.40) в (5.41). Интеграл (5.41) показывает, что пространство векторов \mathbf{v} является поверхностью в \mathbb{C}^6 .

Вектор \mathbf{v} обычно называется вторым компаундом матрицы \mathbf{U} . Дифференцируя (5.40) и используя (5.16), можно показать, что \mathbf{v} удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (5.42)$$

где $\mathbf{B}(\xi, \lambda)$ – это матрица 6×6 , элементы которой могут быть выражены через $\mathbf{A}(\xi, \lambda) = \|a_{i,j}\|$ (5.17) [278].

Можно показать, что собственные значения s_i^\pm матриц $\mathbf{B}^\pm(\lambda)$ (которые равны $\mathbf{B}(\xi, \lambda)$ в пределе $\xi \rightarrow \pm\infty$) могут быть записаны как

$$\begin{aligned} s_1^\pm &= \mu_1^\pm + \mu_2^\pm, & s_4^\pm &= \mu_2^\pm + \mu_3^\pm, \\ s_2^\pm &= \mu_1^\pm + \mu_3^\pm, & s_5^\pm &= \mu_2^\pm + \mu_4^\pm, \\ s_3^\pm &= \mu_1^\pm + \mu_4^\pm, & s_6^\pm &= \mu_3^\pm + \mu_4^\pm. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Более того, если \mathbf{k}_i^\pm и \mathbf{k}_j^\pm ($i < j$) являются собственными векторами \mathbf{A}^\pm , соответствующими μ_i^\pm и μ_j^\pm , то собственный вектор \mathbf{q}_k^\pm матрицы \mathbf{B}^\pm , соответствующий $s_k^\pm = \mu_i^\pm + \mu_j^\pm$, определяется формулой (5.40), где \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 заменены на \mathbf{k}_i^\pm и \mathbf{k}_j^\pm .

Двухмерное пространство $E^-(\xi, \lambda)$ решений (5.16), ограниченных при $\xi \rightarrow -\infty$, переходит в одномерное пространство, представленное решением $\mathbf{v}^-(\xi, \lambda)$ уравнений (5.42). Это решение удовлетворяет следующим граничным условиям

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \exp(-s_5^- \xi) \mathbf{v}^-(\xi, \lambda) = \mathbf{q}_5^- \quad (5.44)$$

с наибольшим коэффициентом экспоненциального затухания при $\xi \rightarrow -\infty$ (т. е. $Re(s_5^-) = \min(Re(s_i^-))$ для $i = 1, 2, \dots, 6$). Аналогично, двухмерное пространство $E^+(\xi, \lambda)$ решений (5.16), ограниченных при $\xi \rightarrow +\infty$, переходит в одномерное пространство, представленное решением $\mathbf{v}^+(\xi, \lambda)$ уравнений (5.42), удовлетворяющее

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \exp(-s_2^+ \xi) \mathbf{v}^+(\xi, \lambda) = \mathbf{q}_2^+ \quad (5.45)$$

с наибольшим коэффициентом экспоненциального затухания при $\xi \rightarrow +\infty$ (т. е. $Re(s_2^+) = \max(Re(s_i^+))$ для $i = 1, 2, \dots, 6$).

Решения $\mathbf{v}^-(\xi, \lambda)$ и $\mathbf{v}^+(\xi, \lambda)$ уравнений (5.42), соответствующие наибольшим коэффициентам экспоненциального роста при интегрировании от

$\xi = -l_1$ до $\xi = 0$ и от $\xi = l_2$ до $\xi = 0$, могут быть найдены с помощью алгоритма, предложенного [260] и описанного в предыдущем параграфе. Используя этот подход, можно полностью избавиться от жесткости системы, как описано в [260], где рассматривался случай с одномерным устойчивым (неустойчивым) подпространством \mathbf{A} при $\xi \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow -\infty$). Как только векторы $\mathbf{v}^-(0, \lambda)$ и $\mathbf{v}^+(0, \lambda)$ найдены, мы можем инвертировать (5.40) и (5.41) для того, чтобы найти $\mathbf{z}_{2,4}^-(0, \lambda)$, соответствующее \mathbf{v}^- и, аналогично, $\mathbf{z}_{1,3}^+(0, \lambda)$ соответствующее \mathbf{v}^+ .

Действительно, используя связь (5.41), решения (5.40) могут быть записаны как

$$\mathbf{V}\mathbf{z} = 0, \quad (5.46)$$

где матрица \mathbf{V} выражается через координаты \mathbf{v}^\pm как

$$\mathbf{V}(\mathbf{v}^\pm) = \begin{pmatrix} v_4^\pm & -v_2^\pm & v_1^\pm & 0 \\ v_5^\pm & -v_3^\pm & 0 & v_1^\pm \\ v_6^\pm & 0 & -v_3^\pm & v_2^\pm \\ 0 & v_6^\pm & -v_5^\pm & v_4^\pm \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

По определению (5.41) детерминант \mathbf{V} равен нулю. Более того, приводя \mathbf{V} к ступенчатой форме, можно показать, что ранг матрицы \mathbf{V} равен двум. Следовательно, система линейных алгебраических уравнений (5.46) имеет два линейно независимых решения. Если мы подставим координаты $\mathbf{v}^-(0, \lambda)$ (или $\mathbf{v}^+(0, \lambda)$) в (5.47), то мы получим $\mathbf{z}_{2,4}^-(0, \lambda)$ (или $\mathbf{z}_{1,3}^+(0, \lambda)$). Затем функция Эванса может быть найдена через детерминант (5.23). Однако удобнее выразить этот детерминант через координаты векторов \mathbf{v}^\pm , а именно,

$$D(\lambda) \sim \det [\mathbf{z}_2^-(0, \lambda), \mathbf{z}_4^-(0, \lambda), \mathbf{z}_1^+(0, \lambda), \mathbf{z}_3^+(0, \lambda)] = (\mathbf{v}^-(0, \lambda))^* \cdot \Sigma \mathbf{v}^+(0, \lambda), \quad (5.48)$$

где (\cdot) обозначает скалярное произведение векторов и

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

Прямой подстановкой \mathbf{v}^- и \mathbf{v}^+ в виде (5.40) можно показать, что определения в (5.48) эквивалентны.

§ 5.8. Функция Эванса, метод составной матрицы и внешняя алгебра

В параграфе § 5.4 функция Эванса определена через Вронскиан (5.23). Она показывает, пересекаются ли пространства решений E^- , ограниченных при $\xi \rightarrow -\infty$, и E^+ , ограниченных при $\xi \rightarrow \infty$, нетривиально. Геометрическая интерпретация этого состоит в том, что при каком-то значении λ и любом значении координаты ξ плоскость E^- , натянутая на векторы $\mathbf{z}_{2,4}^-$, нетривиально пересекается с плоскостью E^+ , натянутой на векторы $\mathbf{z}_{1,3}^+$. Однако, для того чтобы геометрическая картина была полной, нам необходимо определить ориентацию n -мерных плоскостей E^\pm в $2n$ -мерном пространстве решений задачи (5.16).

Рассмотрим сначала случай, когда пространство решений является трехмерным \mathbb{C}^3 , как в приведенном выше примере [260], где исследуется устойчивость решений в виде бегущих волн обобщенного уравнения КдВ–Бюргера. Плоскость E^- , натянутая на решения, ограниченные при $\xi \rightarrow -\infty$ может быть представлена векторным произведением этих решений $[\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3]$, принадлежащим \mathbb{C}^3 . Подпространство E^+ одномерно и может быть представлено решением \mathbf{z}_1 , ограниченным при $\xi \rightarrow \infty$. Следовательно, вопрос о том, пересекаются ли E^- и E^+ , нетривиально можно переформулировать как, принадлежит ли \mathbf{z}_1 плоскости E^- , и функция Эванса может быть определена как смешанное произведение $(\mathbf{z}_1 \cdot [\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3])$. Этот пример показывает, что можно дать простое геометрическое определение

функции Эванса, если определить ориентацию k -мерного подпространства \mathbb{C}^n . Далее мы изложим вышесказанное более формальным образом.

Пусть $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k$ – это набор из k векторов, принадлежащих \mathbb{C}^n , которые образуют k -мерное подпространство \mathbb{C}^n . Тогда $\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{z}_k$ является k -формой (k -вектором), представляющим k -мерное подпространство (здесь ‘ \wedge ’ – это внешнее произведение [284]). Линейная оболочка всех k -векторов образует векторное пространство $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$, которое называется k -ой внешней степенью \mathbb{C}^n .

Предположим, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ это ортонормированный базис в \mathbb{C}^n ; следующий набор k -форм формирует базис в $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$:

$$\mathbf{g}_j = \mathbf{e}_{i(1)} \wedge \mathbf{e}_{i(2)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i(k)}, \quad 1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(k) \leq n. \quad (5.50)$$

Из (5.50) немедленно следует, что размерность векторного пространства $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ задается как

$$\dim \Lambda^k(\mathbb{C}^n) = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (5.51)$$

Важным свойством (5.51) является то, что $\dim \Lambda^{n-k}(\mathbb{C}^n) = \dim \Lambda^k(\mathbb{C}^n)$. В частности, $\dim \Lambda^{n-1}(\mathbb{C}^n) = \dim \Lambda^1(\mathbb{C}^n) = n$ and $\dim \Lambda^n(\mathbb{C}^n) = \dim \Lambda^0(\mathbb{C}^n) = 1$.

Построим внутреннее произведение в $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$. Внутреннее произведение в \mathbb{C}^n определяется обычным образом, как билинейное отображение из $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ в \mathbb{R} :

$$\langle \mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_2 \rangle = \sum_{i=1}^n z_{1i}^* z_{2i}. \quad (5.52)$$

Тогда внутреннее произведение в $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ двух k -форм $\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{z}_k \in \Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ and $\mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{y}_k \in \Lambda^k(\mathbb{C}^n)$, где $\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^n$, определяется через детерминант

$$\langle \mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{z}_k | \mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{y}_k \rangle_k = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{z}_1 | \mathbf{y}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{z}_1 | \mathbf{y}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{z}_k | \mathbf{y}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{z}_k | \mathbf{y}_k \rangle \end{vmatrix}. \quad (5.53)$$

Это билинейное отображение из $\Lambda^k(\mathbb{C}^n) \times \Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ в \mathbb{R} , которое, очевидно, симметрично. Следствием (5.53) является то, что базис (5.50) в

$\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ тоже ортонормированный. Это можно проверить прямой подстановкой (5.50) в (5.53). Индекс k в обозначении $\langle \cdot | \cdot \rangle_k$ указывает, что множители в формуле принадлежат $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$.

Далее мы переходим к описанию частного случая второй внешней степени \mathbb{C}^4 , который непосредственно связан с задачами линейной устойчивости для моделей с одноступенчатой кинетикой.

5.8.1. Вторая внешняя степень \mathbb{C}^4 . Индуцированная система. Разложимость

Рассмотрим вторую внешнюю степень \mathbb{C}^4 . В соответствии с формулой (5.50) ортонормированный базис в $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ может быть построен, используя ортонормированный базис в $\{\mathbf{e}_i\} \in \mathbb{C}^4$ ($i = 1, 2, \dots, 4$), а именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, & \mathbf{g}_4 &= \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{g}_2 &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, & \mathbf{g}_5 &= \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4, & \mathbf{g}_6 &= \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Предположим, что у нас есть пара векторов $\mathbf{z}_{1,2} \in \mathbb{C}^4$ с координатами $\mathbf{z}_i = (z_{i1}, z_{i2}, z_{i3}, z_{i4})^T$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$. Линейная оболочка, натянутая на эти векторы, образует двухмерное подпространство \mathbb{C}^4 , которое может быть представлено 2-вектором $\mathbf{v} = \mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2 \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Координаты $\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2 \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ в $\{\mathbf{g}_i\}$ можно найти, подставляя $\mathbf{z}_i = \sum_{j=1}^4 z_{ij} \mathbf{e}_j$, где $i = 1, 2$, в $\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2$ и учитывая (5.50),

$$\begin{aligned} v_1 &= z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, & v_4 &= z_{12}z_{23} - z_{13}z_{22}, \\ v_2 &= z_{11}z_{23} - z_{13}z_{21}, & v_5 &= z_{12}z_{24} - z_{14}z_{22}, \\ v_3 &= z_{11}z_{24} - z_{14}z_{21}, & v_6 &= z_{13}z_{24} - z_{14}z_{23}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Здесь мы используем свойства внешнего произведения: ‘ \wedge ’ - это билинейная и антисимметричная операция [284]. Сравнивая эту формулу с (5.40), мы заключаем, что второй компаунд – это просто внешнее произведение $\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2$, записанное в координатах базиса $\{\mathbf{g}_i\}$. Это заключение перебрашивает логический мостик между методом составной матрицы и внешней алгеброй.

Вернемся к уравнениям (5.16). Предположим, что $\mathbf{z}_{1,2}(\xi, \lambda)$ это два линейно независимых решения (5.16). Тогда двухмерное подпространство, натянутое на эти решения, может быть представлено 2-формой $\mathbf{v}(\xi, \lambda) = \mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2$. Дифференцируя это выражение по ξ и учитывая (5.16), можно показать, что \mathbf{v} удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (5.56)$$

где

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{B}(\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2) = (\mathbf{A}\mathbf{z}_1) \wedge \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_1 \wedge (\mathbf{A}\mathbf{z}_2). \quad (5.57)$$

Система (5.56) называется индуцированной системой, а матрица \mathbf{B} – индуцированной матрицей [283]. Фактически уравнения (5.56) и (5.42) идентичны, однако внешняя алгебра позволяет нам построить индуцированную матрицу \mathbf{B} более простым способом. Например, построим элемент B_{11} индуцированной матрицы [283]

$$B_{11} = \langle \mathbf{g}_1 | \mathbf{B}\mathbf{g}_1 \rangle_k = \langle \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 | \mathbf{A}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \rangle_k + \langle \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{A}\mathbf{e}_2 \rangle_k. \quad (5.58)$$

Затем, учитывая (5.53), мы получим

$$B_{11} = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{A}\mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{A}\mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2 \rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{A}\mathbf{e}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{A}\mathbf{e}_2 \rangle \end{vmatrix} = a_{11} + a_{22}. \quad (5.59)$$

Используя этот подход, мы можем получить все другие элементы матрицы \mathbf{B} .

Далее, мы показываем, что предельные матрицы \mathbf{B}^\pm имеют собственные значения s_k^\pm , определенные в (5.43). Для этого мы начнем с предположения, что \mathbf{A}^\pm имеет собственные значения μ_i^\pm и соответствующие собственные вектора \mathbf{k}_i^\pm . Мы определяем $\mathbf{q}_k^\pm = \mathbf{k}_i^\pm \wedge \mathbf{k}_j^\pm$. Далее, мы получаем

$$\mathbf{B}^\pm \mathbf{q}_k^\pm = \mathbf{A}^\pm \mathbf{k}_i^\pm \wedge \mathbf{k}_j^\pm + \mathbf{k}_i^\pm \wedge \mathbf{A}^\pm \mathbf{k}_j^\pm = (\mu_i^\pm + \mu_j^\pm) \mathbf{q}_k^\pm. \quad (5.60)$$

Это доказывает, что s_k^\pm данные в (5.43) действительно являются собственными значениями \mathbf{B}^\pm .

Теперь мы видим, что любые двухмерные подпространства в \mathbb{C}^4 могут быть представлены 2-формами в $\wedge^2(\mathbb{C}^4)$. Однако не каждая 2-форма представляет двухмерное подпространство в \mathbb{C}^4 . Другими словами, не каждая

2-форма является чистой или разложимой формой, т.е. формой, которая может быть записана в виде внешнего произведения $\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2$, где $\mathbf{z}_i \in \mathbb{C}^4$. Для того чтобы 2-форма \mathbf{v} была разложимой, она должна удовлетворять уравнению (см. [283])

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = (v_1v_6 - v_2v_5 + v_3v_4) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 = 0. \quad (5.61)$$

Объемная форма $\Gamma = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$ не равна нулю, следовательно, мы должны заключить, что

$$\mathcal{I} = v_1v_6 - v_2v_5 + v_3v_4 = 0. \quad (5.62)$$

Это важное ограничение, которое должно быть удовлетворено при интегрировании уравнений (5.56) для того, чтобы решение представляло путь в двухмерном подпространстве. Поверхность, определенная уравнением $\mathcal{I}(\mathbf{v}) = 0$, называется Грассманнианом 2-плоскостей в \mathbb{C}^4 (см. [283, 285, 286]).

5.8.2. Функция Эванса и оператор звезда Ходжа

В данной главе мы вводим определение функции Эванса, которое имеет ясный геометрический смысл. Возвращаясь к геометрической картине, мы можем сказать, что для нахождения собственных значений нам не надо искать решения $\mathbf{z}_{2,4}^-$ и $\mathbf{z}_{1,3}^+$ системы (5.16), ограниченные при $\xi \rightarrow \pm\infty$, а достаточно определить ориентацию плоскостей, натянутых на соответствующие пары векторов, в пространстве \mathbb{C}^4 решений системы (5.16).

В нашем случае плоскость может быть задана шестикомпонентным вектором. Например, мы определяем

$$\mathbf{V}^- = \mathbf{z}_2^- \wedge \mathbf{z}_4^-, \quad \mathbf{V}^+ = \mathbf{z}_1^+ \wedge \mathbf{z}_3^+, \quad (5.63)$$

где $\mathbf{V}^\pm \in \wedge^2(\mathbb{C}^4)$. Если λ является собственным значением, то плоскости, связанные с векторами \mathbf{V}^+ и \mathbf{V}^- , пересекаются нетривиально. Это значит, что \mathbf{V}^+ и \mathbf{V}^- линейно зависимы и внешнее произведение $\mathbf{V}^+ \wedge \mathbf{V}^-$ равно нулю. Теперь мы используем определение функции Эванса, данное в [242],

$$D(\lambda) = \exp \left[- \int_0^\xi \text{Tr}(\mathbf{A}(s, \lambda)) ds \right] \mathbf{V}^-(\xi, \lambda) \wedge \mathbf{V}^+(\xi, \lambda). \quad (5.64)$$

Удобно взять $\xi = 0$ в определении (5.64). Векторы $\mathbf{V}^\pm(0, \lambda)$ могут быть найдены интегрированием (5.42) с подходящими начальными условиями. Однако, для того чтобы воспользоваться определением (5.64), нам необходимо записать внешнее произведение $\mathbf{V}^-(0, \lambda)$ и $\mathbf{V}^+(0, \lambda)$ в координатах базиса (5.54). Для этого воспользуемся оператором звезда Ходжа [283], чтобы выразить $\mathbf{V}^- \wedge \mathbf{V}^+$ через внутреннее произведение.

Предположим, что $\lambda \in \Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ – это k -форма и $\mu \in \Lambda^{n-k}(\mathbb{C}^n)$ – это $(n - k)$ -форма. Существует [284] единственный элемент $\star\lambda \in \Lambda^{n-k}(\mathbb{C}^n)$ такой, что

$$\lambda \wedge \mu = \langle \star\lambda | \mu \rangle_{n-k} \Gamma. \quad (5.65)$$

Звезда Ходжа – это оператор, который переводит λ в $\star\lambda$. Действие \star также включает комплексное сопряжение [283]. В нашем случае $k = n - k = 2$ и $\Lambda^k(\mathbb{C}^n) = \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, $\Lambda^{n-k}(\mathbb{C}^n) = \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Следовательно, мы можем использовать один и тот же базис (5.50) для обоих векторных пространств. В этом базисе оператор звезда Ходжа может быть найден в явном виде по его действию на базисные векторы. Например, $\star\mathbf{g}_1$ может быть представлено в координатах базиса (5.54) как

$$\star\mathbf{g}_1 = \sum_{j=1}^6 \Sigma_{1j} \mathbf{g}_j. \quad (5.66)$$

С другой стороны из (5.65) следует, что

$$\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_k = \langle \star\mathbf{g}_1 | \mathbf{g}_k \rangle_2 \Gamma. \quad (5.67)$$

Используя (5.50), мы находим, что правая часть (5.67) равна нулю, если $k \neq 6$, для которого $\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_k = \Gamma$. Следовательно, $\Sigma_{1,j} = 0$ для $j < 6$ и $\Sigma_{1,j} = 1$ для $j = 6$. Продолжая эту процедуру для других $\star\mathbf{g}_k$, мы можем найти все элементы $\Sigma_{i,j}$ и показать, что они даются формулой (5.49). Теперь, следуя [283], мы находим, что

$$\langle \star\lambda | \mu \rangle_2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \lambda_i \mu_j \langle \star\mathbf{g}_i | \mathbf{g}_j \rangle_2 = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \lambda_i \mu_j \Sigma_{ij} = \langle \lambda^* | \Sigma \mu \rangle. \quad (5.68)$$

Следовательно, определение (5.63) может быть записано для фиксированного $\xi = 0$ как

$$D(\lambda) = \langle \mathbf{V}^-(0, \lambda)^* | \Sigma \mathbf{V}^+(0, \lambda) \rangle, \quad (5.69)$$

что совпадает с правой частью (5.48).

Таким образом, описана операционная процедура расчета функции Эванса для случая четырехмерного пространства решений (5.16) с двухмерными устойчивыми подпространствами решений при $\xi \rightarrow \pm\infty$. С помощью подобной геометрии введены основные понятия и процедуры связанные с поиском собственных значений задачи линейной устойчивости.

5.8.3. Третья внешняя степень \mathbb{C}^6 . Индуцированная система. Разложимость

При решении задач линейной устойчивости во всех моделях, рассмотренных в данной работе, мы сталкиваемся с ситуацией, когда решения системы (5.16) принадлежат \mathbb{C}^6 и имеют экспоненциальную дихотомию с подпространствами решений устойчивых и неустойчивых при $\xi \rightarrow \pm\infty$ одинаковой размерности равной трем. При этом мы считаем, что собственные значения предельных матриц \mathbf{A}^\pm размерности 6×6 упорядочены так, что $Re\mu_{1,3,5}^\pm < 0$ и $Re\mu_{2,4,6}^\pm > 0$. Подпространства E^- и E^+ являются линейными оболочками, натянутыми на наборы из трех векторов $\mathbf{z}_{2,4,6}^-$ и $\mathbf{z}_{1,3,5}^+$, соответственно, и представляются 3-векторами $\mathbf{v} = \mathbf{z}_i \wedge \mathbf{z}_{i+2} \wedge \mathbf{z}_{i+4}$, принадлежащими $\wedge^3(\mathbb{C}^6)$ ($i = 1, 2$).

Размерность пространства $\wedge^3(\mathbb{C}^6)$ равна 20 (5.51). Ортонормированный базис может быть построен по формуле (5.50) как

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4, \quad \dots \quad \mathbf{g}_{20} = \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5 \wedge \mathbf{e}_6 \quad (5.70)$$

Индексы i, j, k в $\mathbf{g}_l = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k$ упорядочены лексикографическим образом. Запишем их в матрицу индексов $I_{l,k}$, где $l = 1 \dots 20$ и $k = 1 \dots 3$. Тогда в координатах 3-векторы могут быть записаны

$$v_l = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{r,j,k} z_{rI_{l,i}} z_{r+2I_{l,j}} z_{r+4I_{l,k}}, \quad (5.71)$$

где $\varepsilon_{i,j,k}$ - символ Леви-Чивита, а $r = 1, 2$. Векторы \mathbf{v} удовлетворяют системе уравнений (5.56), где индуцированная матрица записывается аналогично (5.57)

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{B}(\mathbf{z}_i \wedge \mathbf{z}_{i+2} \wedge \mathbf{z}_{i+4}) = \mathbf{A}\mathbf{z}_i \wedge \mathbf{z}_{i+2} \wedge \mathbf{z}_{i+4} + \mathbf{z}_i \wedge \mathbf{A}\mathbf{z}_{i+2} \wedge \mathbf{z}_{i+4} + \mathbf{z}_i \wedge \mathbf{z}_{i+2} \wedge \mathbf{A}\mathbf{z}_{i+4}. \quad (5.72)$$

Индукцированная матрица \mathbf{B} имеет размерность 20×20 и может быть выражена через элементы \mathbf{A} . Явное выражение дано в [280]. Методика построения индуцированной матрицы в общем случае $\bigwedge^p(\mathbb{C}^n)$ приведена в [257]. В базисе $\{\mathbf{g}_i\}$ она может быть записана

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{nm} &= \langle \mathbf{g}_n | \mathbf{B}\mathbf{g}_m \rangle = \langle \mathbf{e}_{i(1)} \wedge \mathbf{e}_{i(2)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i(p)} | \mathbf{A}\mathbf{e}_{j(1)} \wedge \mathbf{e}_{j(2)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j(p)} \rangle + \\ &\quad \langle \mathbf{e}_{i(1)} \wedge \mathbf{e}_{i(2)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i(p)} | \mathbf{e}_{j(1)} \wedge \mathbf{A}\mathbf{e}_{j(2)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j(p)} \rangle + \dots + \\ &\quad \langle \mathbf{e}_{i(1)} \wedge \mathbf{e}_{i(2)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i(p)} | \mathbf{e}_{j(1)} \wedge \mathbf{e}_{j(2)} \wedge \dots \wedge \mathbf{A}\mathbf{e}_{j(p)} \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^p \langle \mathbf{e}_{i(1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i(p)} | \mathbf{e}_{j(1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{A}\mathbf{e}_{j(k)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j(p)} \rangle, \end{aligned} \quad (5.73)$$

что представим в виде

$$\mathbf{B}_{nm} = \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^n a_{s,j(k)} \langle \mathbf{e}_{i(1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i(p)} | \mathbf{e}_{j(1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_s \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j(p)} \rangle. \quad (5.74)$$

Суммируемые члены в (5.74) не равны нулю, если (i) все числа в наборе $j(1), j(2), \dots, s, \dots, j(k)$ различны; (ii) наборы чисел $\{i(1), \dots, i(p)\}$ и $\{j(1), \dots, s, \dots, j(p)\}$ идентичны или представляют один и то же вектор \mathbf{g}_n . Это возможно в нескольких случаях, рассмотренных далее.

Во-первых, это происходит, когда $n = m$ ($\{i(1), \dots, i(p)\}$ и $\{j(1), \dots, j(p)\}$ идентичны). В этом случае вместо (5.74), получаем

$$\mathbf{B}_{nn} = \sum_{k=1}^p a_{i(k),i(k)}. \quad (5.75)$$

Во-вторых, слагаемые не равны нулю, когда $n \neq m$, но все числа в наборе $\{i(1), \dots, i(p)\}$ совпадают с $\{j(1), \dots, j(p)\}$ за исключением одного. Для определенности будем считать, что элемент s_1 (или $i(s_1)$) в наборе $\{i(1), \dots, i(p)\}$ не совпадает с элементом s_2 (или $j(s_2)$) в наборе

$\{j(1), \dots, j(p)\}$. В этом случае соответствующие матричные элементы равны

$$\mathbf{B}_{nm} = (-1)^{s_1 - s_2} a_{i(s_1), j(s_2)}. \quad (5.76)$$

Во всех остальных случаях, когда наборы индексов $\{i(1), \dots, i(p)\}$ и $\{j(1), \dots, j(p)\}$ отличаются на два и более числа, матричные элементы равны нулю.

На практике удобно ввести матрицу Θ , элементы которой показывают на сколько индексов набор $\{i(1), \dots, i(p)\}$, соответствующий \mathbf{g}_n , отличается от $\{j(1), \dots, s, \dots, j(p)\}$, соответствующего \mathbf{g}_m . Она может быть определена как

$$\Theta_{nm} = \sum_{i,j=1\dots p} \theta(|I_{ni} - I_{mj}|) - p(p-1), \quad (5.77)$$

где θ - это степ-функция Хевисайда. Тогда генерация индуцированной матрицы задается простым алгоритмом: (i) если $\Theta_{nm} = 0$, то B_{nm} определяется по формуле (5.75); (ii) если $\Theta_{nm} = 1$, то B_{nm} определяется по формуле (5.76); (iii) $\Theta_{nm} > 1$, то $B_{nm} = 0$.

Вернемся к рассмотрению системы (5.56) в $\Lambda^3(\mathbb{C}^6)$. Еще одним ключевым элементом, необходимым для расчета функции Эванса, является построение координатного представления звезды Ходжа в базисе $\{\mathbf{g}_n\}$. Аналогично тому, как это было сделано в случае $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, можно получить следующее представление оператора \star ,

$$\Sigma_{nm} = \delta_{(21-n),m} \Gamma_n, \quad (5.78)$$

где $\delta_{i,j}$ - это символ Кронекера, а $\mathbf{\Gamma} = [1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1]$. Теперь, пользуясь этим выражением, можно рассчитывать функцию Эванса по формуле (5.69). Условие разложимости 3-формы, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$, так же может быть выражено через представление оператора \star в виде билинейной формы

$$\mathcal{I} = \langle \mathbf{v}^* | \Sigma \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (5.79)$$

Однако, условия разложимости в случае $\Lambda^3(\mathbb{C}^6)$ выглядят более сложным образом по сравнению со случаем $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Допустим, что $\mathbf{v} =$

$\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2 \wedge \mathbf{z}_3$ и $\mathbf{z}_i \in \mathbb{C}^6$. Тогда ориентация плоскости в \mathbb{C}^6 , натянутой на векторы \mathbf{z}_i , задается 15 числами. Формально можно записать, что любой $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^6$ принадлежит линейной оболочке векторов \mathbf{z}_i , если $\mathbf{v} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Данное произведение принадлежит $\Lambda^4(\mathbb{C}^6)$, имеющей размерность 15, а соответствующее уравнение дает систему 15 алгебраических уравнений, которые запишем в виде $\mathbf{V}\mathbf{z} = \mathbf{0}$, где

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -V_{11} & V_5 & -V_2 & V_1 & 0 & 0 \\ -V_{12} & V_6 & -V_3 & 0 & V_1 & 0 \\ -V_{13} & V_7 & -V_4 & 0 & 0 & V_1 \\ -V_{14} & V_8 & 0 & -V_3 & V_2 & 0 \\ -V_{15} & V_9 & 0 & -V_4 & 0 & V_2 \\ -V_{16} & V_{10} & 0 & 0 & -V_4 & V_3 \\ -V_{17} & 0 & V_8 & -V_6 & V_5 & 0 \\ -V_{18} & 0 & V_9 & -V_7 & 0 & V_5 \\ -V_{19} & 0 & V_{10} & 0 & -V_7 & V_6 \\ -V_{20} & 0 & 0 & V_{10} & -V_9 & V_8 \\ 0 & -V_{17} & V_{14} & -V_{12} & V_{11} & 0 \\ 0 & -V_{18} & V_{15} & -V_{13} & 0 & V_{11} \\ 0 & -V_{19} & V_{16} & 0 & -V_{13} & V_{12} \\ 0 & -V_{20} & 0 & V_{16} & -V_{15} & V_{14} \\ 0 & 0 & -V_{20} & V_{19} & -V_{18} & V_{17} \end{pmatrix}. \quad (5.80)$$

Из пятнадцати строк матрицы \mathbf{V} только три являются линейно независимыми т.е. $\text{rank } \mathbf{V} = 3$. Выбирая любые три строки матрицы \mathbf{V} и решая соответствующие однородные алгебраические уравнения, мы можем найти подпространство, натянутое на векторы \mathbf{z}_i . Все миноры матрицы \mathbf{V} ранга четыре и больше обращаются в ноль, а те из них, которые не обращаются в ноль тривиально, задают квадратичные соотношения, определяющие разложимость \mathbf{V} . Очевидно, что при интегрировании уравнений (5.56) все эти квадратичные соотношения должны быть малы с заданной расчетной точностью вычислений.

§ 5.9. Выводы

В данной главе мы рассмотрели задачу линейной устойчивости для класса уравнений типа реакция–диффузия для трех независимых переменных. Исследовались свойства операторов, которые появляются в формулировке задачи на линейную устойчивость. Показано, что непрерывный спектр лежит в левой комплексной полуплоскости и что устойчивость решений полностью определяется дискретным спектром этих операторов. Расположение дискретного спектра на комплексной плоскости связывается с нулями функции Эванса.

Мы определяем функцию Эванса двумя разными способами: через Вронскиан, построенный на решениях задачи на линейную устойчивость, ограниченных при $\xi \rightarrow \pm\infty$, и в терминах внешней алгебры. Мы показали, как эти определения связаны друг с другом, продемонстрировали основные свойства функции Эванса, обрисовали сложности, связанные с ее численным расчетом и продемонстрировали пути их преодоления с помощью метода составной матрицы. Мы описали метод составной матрицы и показали, как он может быть обобщен в рамках внешней алгебры. Алгоритмы построения индуцированного пространства и индуцированной системы, предложенные в этой работе, носят общий характер и могут быть перенесены на случай систем большей размерности таких, как системы типа реакция–диффузия, описываемые более чем тремя уравнениями в частных производных второго порядка.

Здесь мы хотим отметить, что существует и другое определение функции Эванса, которое основано на использовании уравнений, сопряженных задаче линейной устойчивости [287, 288]. Оно было успешно использовано для исследования поведения функции Эванса для $|\lambda| \ll 1$ [245]. Однако для систем типа реакция–диффузия, моделирующих горение, обычно тяжело исследовать сопряженную задачу, поскольку ее решения не могут быть выражены через решение исходной задачи или ее производные, как это имеет место в [246], [243] и [260], поэтому данное определение не обсуждалось в настоящей главе.

Заключение

1. Исследованы свойства, структура и устойчивость решений в виде бегущих волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта, описывающей распространение ламинарного пламени в заранее перемешанной смеси с цепным двухступенчатым кинетическим механизмом и реакцией рекомбинации первого порядка по концентрации радикалов, как в адиабатическом случае, так и с учетом тепловых потерь. В пространстве параметров установлены область существования, границы воспламенения и устойчивости бегущих волн горения, а так же типы и свойства бифуркаций, приводящих к затуханию волны горения и потере устойчивости. В частности были получены следующие результаты:

(а) Установлено, что в адиабатическом пределе в зависимости от числа Льюиса для топлива возможно два сценария затухания пламени: либо скорость волны горения стремиться к нулю при конечных значениях параметров, либо затухание происходит в результате бифуркации складки при конечной скорости волны горения. С учетом тепловых потерь скорость пламени становится двухзначной функцией энергии активации и затухание наступает в результате бифуркации складки. Показано, что вблизи предела затухания волны горения ее структура носит характер режима быстрой, а вдали от предела затухания режима медленной рекомбинации. В пространстве параметров найдена граница затухания и исследовано каким образом параметры модели влияют на ее расположение.

(б) Исследована устойчивость волн горения в модели Зельдовича-Баренблатта, установлены типы бифуркаций, приводящих к потере устойчивости, в пространстве параметров найдена нейтральная граница устойчивости и изучены сложные пространственно-временные режимы распространения пламени, возникающие в результате потери устойчивости бегущих волн горения.

(в) Методами нелинейной динамики исследовано возникновение ха-

отических режимов распространения волн горения в результате каскада бифуркаций удвоения периода по сценарию Фейгенбаума, что характеризуется непрерывным Фурье спектром наблюдаемых динамических переменных, случайным нерегулярным распределением изображающих точек на сечении Пуанкаре и положительным максимальным показателем Ляпунова. Так же было продемонстрировано, что область с хаотическим режимом имеет конечную ширину в пространстве параметров и сменяется затуханием при дальнейшем увеличении параметра закритичности.

(г) Исследован сценарий динамического затухания волн горения, приводящий к исчезновению хаотического режима распространения пламени. Установлено, что возникновение затухания происходит по сценарию переходного хаоса за счет кризиса хаотического аттрактора, исследованы статистические свойства данного процесса, а так же показано, что полученные результаты качественно согласуются в результатами экспериментов.

(д) На основе бифуркационного анализа и исходя из расположения в пространстве параметров областей существования различных динамических режимов показано, что при приближении числа Льюиса для топлива к единице, система становится чрезвычайно чувствительна к малому изменению параметров. Это объясняет то, что удвоение периода осцилляций волнового фронта практически не фиксируется в экспериментах в данном пределе.

(е) Показано, что при пересечении в пространстве параметров критических значений для появления волновой неустойчивости рождаются двухмерные пульсирующие решения, бифуркация является надкритической, распределение концентрации радикалов имеет вид солитонно-подобных уединенных пиков, распространяющихся по определенным траекториям.

2. Исследованы свойства, структура и устойчивость решений в виде бегущих волн горения в модели Зельдовича-Линяна, описывающей распространение ламинарного пламени в заранее перемешанной смеси с цепным двухступенчатым кинетическим механизмом и реакцией рекомбинации второго порядка по концентрации радикалов. В пространстве параметров установлены область существования, границы воспламенения и устойчивости бегущих волн горения, а так же типы и свойства бифуркаций,

приводящих к затуханию волны горения и потере устойчивости, и исследованы свойства и структура решений, возникающих при потере устойчивости бегущих волн горения в одномерной и двухмерной пространственной геометрии.

(а) Установлено, что для заданных значений параметров решение в виде бегущей волны единственно. Структура волны горения зависит от соотношения между характерными временами стадий. Наблюдается либо режим медленной, либо режим быстрой рекомбинации распространения пламени.

(б) В одномерном случае бегущая волна горения теряет устойчивость в результате бифуркации Андронова-Хопфа. В двухмерном случае бегущая волна горения теряет устойчивость либо из-за волновой, либо ячеистой неустойчивости в зависимости от числа Льюиса для топлива. Найдена нейтральная граница устойчивости. Оценено влияние основных параметров модели на устойчивость волн горения.

(в) При пересечении критических параметров в пространстве параметров для волновой неустойчивости появляются пульсирующие двухмерные волновые решения, в которых концентрация радикалов имеет структуру уединенных пиков с осциллирующими максимумами, следующих вдоль определенных траекторий. Амплитуда этих осцилляций следует корневой зависимости от параметра закритичности. При пересечении критических параметров для ячеистой неустойчивости появляется двухмерная ячеистая волна, распространяющаяся с постоянной скоростью без изменения своей формы в сопутствующей системе отсчета. Фронт пламени имеет гофрированную, искривленную структуру.

3. Сравнение полученных результатов для моделей Зельдовича-Линяна и Зельдовича-Баренблатта позволяет сделать вывод о том, что кинетика реакции рекомбинации, в частности порядок реакции, существенным образом влияет на динамику распространения пламени, на свойства и устойчивость бегущих волн горения.

4. В рамках диффузионно-тепловых моделей с двухступенчатой кинетикой исследована устойчивость волн горения в богатых водород-воздушных смесях при нормальных внешних условиях и показано, что дан-

ный подход позволяет получить адекватное описание скорости, структуры и устойчивости пламени, что подтверждается сравнением с данными экспериментов и прямого численного счета на основании моделей с детальной кинетикой.

5. Разработана методика и численные алгоритмы исследования устойчивости решений в виде бегущих волн для моделей, описываемых тремя и более уравнениями в частных производных второго порядка в одно-, двух- и трехмерной пространственной геометрии, путем обобщения метода функции Эванса. Полученный подход применим для анализа устойчивости нелинейно-волновых процессов для широкого класса физических, физико-химических и биофизических моделей.

В заключение хочу выразить искреннюю признательность А.А. Полежаеву, А.В. Колобову и всем сотрудникам Отделения теоретической физики им. И.Е. Тамма Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, своим соавторам, родным и близким, всем тем, кто помогал и поддерживал меня при работе над данной диссертацией.

Литература

1. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.
2. *Merzhanov A., Rumanov E.* Physics of reaction waves // *Reviews of Modern Physics*. — 1999. — Vol. 71, no. 4. — P. 1173.
3. *Sivashinsky G. I.* Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 1983. — Vol. 15, no. 1. — Pp. 179–199.
4. *Clavin P.* Dynamic behavior of premixed flame fronts in laminar and turbulent flows // *Progress in Energy and Combustion Science*. — 1985. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 1–59.
5. *Volpert A. I., Volpert V. A., Volpert V. A.* Traveling wave solutions of parabolic systems. — Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1991.
6. *Zamashchikov V., Minaev S.* Limits of flame propagation in a narrow channel with gas filtration // *Combustion, Explosion and Shock Waves*. — 2001. — Vol. 37, no. 1. — Pp. 21–29.
7. *Fursenko R., Minaev S., Babkin V.* Thermal interaction of two flame fronts propagating in channels with opposing gas flows // *Combustion, Explosion and Shock Waves*. — 2001. — Vol. 37, no. 5. — Pp. 493–500.
8. *Ju Y., Maruta K.* Microscale combustion: Technology development and fundamental research // *Prog. Energy Combust. Sci.* — 2011. — Vol. 37, no. 6. — Pp. 669–715.
9. *Gorman M., El-Hamdi M., Robbins K. A.* Chaotic dynamics near the extinction limit of a premixed flame on a porous plug burner // *Combustion science and technology*. — 1994. — Vol. 98, no. 1-3. — Pp. 47–56.

10. *Sankaran R., Im H. G.* Dynamic flammability limits of methane/air premixed flames with mixture composition fluctuations // *Proceedings of the Combustion Institute.* — 2002. — Vol. 29, no. 1. — Pp. 77–84.
11. *Choi W., Hong S., Abrahamson J. T., Han J.-H., Song C., Nair N., Baik S., Strano M. S.* Chemically driven carbon-nanotube-guided thermopower waves // *Nat. Mater.* — 2010. — Vol. 9, no. 5. — Pp. 423–429.
12. *Ландау Л. Д.* К теории медленного горения // *ЖЭТФ.* — 1944. — Т. 14, № 6. — С. 240–245.
13. *Darrieus G.* Propagation d'un front de amme. — Paris: 1946. — Pp. 15–16.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика, т. 6. — М., Наука, 1986.
15. *Sivashinsky G. I.* Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—i. derivation of basic equations // *Acta Astronautica.* — 1977. — Vol. 4, no. 11. — Pp. 1177–1206.
16. Нестационарное распространение пламени / Под ред. Д. Г. Маркштейн. — М.: Мир, 1968.
17. *Щелкин К. И.* Неустойчивость горения и детонации газов // *Успехи физических наук.* — 1965. — Т. 87, № 10. — С. 273–302.
18. *Гуссак Л. А., Спринцина Е. Н., Щёлкин К. И.* Исследование фронта нормального пламени // *Физика Горения и Взрыва.* — 1968. — Т. 4, № 3. — С. 358–366.
19. *Льюис Б., Эльбе Г.* Горение, пламя и взрывы в газах. — М.: Наука, 1968.
20. *Jomaas G., Bechtold J. K., Law C. K.* Spiral waves in expanding hydrogen–air flames: Experiment and theory // *Proceedings of the Combustion Institute.* — 2007. — Vol. 31, no. 1. — Pp. 1039–1046.
21. *Clavin P., Williams F. A.* Effects of molecular diffusion and of thermal expansion on the structure and dynamics of premixed flames in turbulent flows of large scale and low intensity // *Journal of fluid mechanics.* — 1982. — Vol. 116, no. 1. — Pp. 251–282.

22. *Pelce P., Clavin P.* Influence of hydrodynamics and diffusion upon the stability limits of laminar premixed flames // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1982. — Vol. 124, no. 1. — Pp. 219–237.
23. *Jackson T., Kapila A.* Effect of thermal expansion on the stability of plane, freely propagating flames // *Combustion Science and Technology*. — 1984. — Vol. 41, no. 3-4. — Pp. 191–201.
24. *Matalon M., Matkowsky B.* Flames as gasdynamic discontinuities. // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1982. — Vol. 124, no. 1. — Pp. 239–259.
25. *Liberman M. A., Bychkov V. V., Golberg S. M., Book D. L.* Stability of a planar flame front in the slow-combustion regime // *Physical Review E*. — 1994. — Vol. 49, no. 1. — P. 445.
26. *Bychkov V., Liberman M. A.* Dynamics and stability of premixed flames // *Physics reports*. — 2000. — Vol. 325, no. 4. — Pp. 115–237.
27. *Rosen J. B.* Theory of laminar flame stability. i. analytic stability condition // *The Journal of Chemical Physics*. — 1954. — Vol. 22, no. 4. — Pp. 733–742.
28. *Rosen J. B.* Theory of laminar flame stability. ii. general numerical method and application to typical system // *The Journal of Chemical Physics*. — 1954. — Vol. 22, no. 4. — Pp. 743–748.
29. *Rosen J. B.* Combustion wave stability and flammability limits // *The Journal of Chemical Physics*. — 1954. — Vol. 22, no. 4. — Pp. 750–751.
30. *Zeldovich Y. B., Barenblatt G. I.* Theory of flame propagation // *Combustion and flame*. — 1959. — Vol. 3. — Pp. 61–74.
31. *Richardson J. M.* The existence and stability of simple, one-dimensional, steady-state combustion waves // *Fourth Symposium (International) on Combustion*. — 1953. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 182–189.
32. *Spalding D. B.* A theory of inflammability limits and flame-quenching // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1957. — Vol. 240. — Pp. 83–100.

33. *Новожилов Б. В.* Критерии устойчивости стационарного режима горения пороха. // *Прикладная Механика и Техническая Физика.* — 1965. — № 4. — С. 157–160.
34. *Махвиладзе Г. М., Новожилов Б. В.* Двумерная устойчивость горения конденсированных систем // *Прикладная Механика и Техническая Физика.* — 1971. — № 5. — С. 51–59.
35. *Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г.* О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени // *Прикладная Механика и Техническая Физика.* — 1962. — № 4. — С. 21–26.
36. *Максимов Э. И., Шкадинский К. Г.* Об устойчивости стационарного горения безгазовых систем // *Физика горения и взрыва.* — 1971. — Т. 7. — С. 454–457.
37. *Хайкин Б. И., Мержанов А. Г.* К теории теплового распространения фронта химической реакции // *Физика Горения и Взрыва.* — 1966. — Vol. 2. — Pp. 36–46.
38. *Алдушин А. П., Хайкин Б. И.* Влияние теплофизических характеристик на устойчивость стационарного горения безгазовых систем // *Физика Горения и Взрыва.* — 1975. — Т. 11, № 1. — С. 128–130.
39. *Алдушин А. П., Мартемьянова Т. М., Мержанов А. Г., Хайкин Б. И., Шкадинский К. Г.* Автоколебательное распространение фронта горения в гетерогенных конденсированных средах // *Физика Горения и Взрыва.* — 1973. — Т. 9, № 5. — С. 613–626.
40. *Шкадинский К. Г., Хайкин Б. И., Мержанов А. Г.* Распространение пульсирующего фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе // *Физика Горения и Взрыва.* — 1971. — Т. 9, № 5. — С. 613–626.
41. *Алдушин А. П., Каспарян С. Г.* О теплодиффузионной неустойчивости фронта горения // *Доклады Академии Наук СССР.* — 1979. — Т. 244, № 1. — С. 67–70.

42. *Алдушин А. П., Каспарян С. Г.* Влияние теплотерь на устойчивость волн горения // *Физика Горения и Взрыва*. — 1981. — Т. 17, № 2. — С. 74–77.
43. *Lagerstrom P.* Matched Asymptotic Expansions: Ideas and Techniques. — New York: Springer, 1988. — Vol. 76 of *Applied Mathematical Sciences*.
44. *Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics. — New York: Academic Press, 1964.
45. *Bush W. B., Fendell F. E.* Asymptotic analysis of laminar flame propagation for general lewis numbers // *Combustion Science and Technology*. — 1970. — Vol. 1. — Pp. 421–428.
46. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* Применение метода сращиваемых асимптотических разложений к расчету стационарного теплового распространения фронта экзотермической реакции в конденсированной среде // *Прикладная Механика и Техническая Физика*. — 1972. — № 5. — С. 106–112.
47. *Joulin G., Clavin P.* Linear stability analysis of nonadiabatic flames: diffusional thermal model // *Combustion and Flame*. — 1979. — Vol. 35. — Pp. 139–153.
48. *Курдюмов В. Н.* Неопубликованная работа. — 2013.
49. *Margolis S. B., Matkowsky B. J.* Stability and bifurcation in the transition from laminar to turbulent flame propagation // *Combust. Sci. Technol.* — 1983. — Vol. 34. — Pp. 45–77.
50. *Margolis S. B., Williams F. A.* Diffusional/thermal instability of a solid propellant flame // *SIAM J. Appl. Math.* — 1989. — Vol. 49. — Pp. 1390–1420.
51. *Schult D. A.* Matched asymptotic expansions and the closure problem for combustion waves // *SIAM J. Appl. Math.* — 1999. — Vol. 60. — Pp. 136–155.

52. *Sivashinsky G. I.* Structure of busen flames // *J. Chem. Phys.* — 1975. — Vol. 62. — Pp. 638–643.
53. *Sivashinsky G. I.* Diffusional–thermal theory of cellular flames // *Combust. Sci. Technol.* — 1977. — Vol. 15. — Pp. 137–146.
54. *Matkowsky B. J., Sivashinsky G. I.* Propagation of a pulsating reaction front in solid fuel combustion // *SIAM J. Appl. Math.* — 1978. — Vol. 35. — Pp. 465–478.
55. *Matkowsky B. J., Olagunju D. O.* Propagation of a pulsating flame front in a gaseous combustible mixture // *SIAM J. Appl. Math.* — 1980. — Vol. 39. — Pp. 290–300.
56. *Sivashinsky G. I.* On spinning propagation of combustion waves // *SIAM J. Appl. Math.* — 1981. — Vol. 40. — Pp. 432–438.
57. *Matkowsky B., Olagunju D.* Spinning waves in gaseous combustion. // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 1982. — Vol. 42, no. 5. — Pp. 1138–1156.
58. *Matkowsky B. J., Volpert V.* Spiral gasless condensed phase combustion // *SIAM J. Appl. Math.* — 1994. — Vol. 54. — Pp. 132–146.
59. *Margolis S. B.* The transition to nonsteady deflagration in gasless combustion // *Prog. Energy Combust Sci.* — 1991. — Vol. 17. — Pp. 135–162.
60. *Matkowsky B. J., Sivashinsky G. I.* An asymptotic derivation of two models in flame theory associated with the constant density approximation // *SIAM J. Appl. Math.* — 1979. — Vol. 37. — Pp. 686–699.
61. *Sivashinsky G. I.* On the stability of nonadiabatic flames // *SIAM J. Appl. Math.* — 1981. — Vol. 37. — Pp. 255–260.
62. *Terman D.* Stability of planar wave solutions to a combustion model // *SIAM J. Math. Anal.* — 1990. — Vol. 21. — Pp. 1139–1171.
63. *Weber R. O., Mercer G. N., Sidhu H. S., Gray B. F.* Combustion waves for gases ($le = 1$) and solids ($le \rightarrow \infty$) // *Proceedings of the Royal Society*

- A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 1997. — Vol. 453, no. 1960. — Pp. 1105–1118.
64. *Billingham J., Mercer G. N.* The effect of heat loss on the propagation of strongly exothermic combustion waves // *Combustion Theory and Modelling.* — 2001. — no. 5. — Pp. 319–342.
 65. *Billingham J.* A new asymptotic solution for combustion waves // *Неопубликованная работа.*
 66. *Gubernov V., Mercer G., Sidhu H., Weber R.* Evans function stability of combustion waves // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 2003. — Vol. 63, no. 4. — Pp. 1259–1275.
 67. *Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N., Weber R. O.* Evans function stability of nonadiabatic combustion waves // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 2004. — Vol. 460. — Pp. 1259–1275.
 68. *McIntosh A., Weber R., Mercer G.* Non-adiabatic combustion waves for general lewis numbers: Wave speed and extinction conditions // *ANZIAM Journal.* — 2004. — Vol. 46, no. 1. — Pp. 1–16.
 69. *Rogg B.* The effect of lewis number greater than unity on an unsteady propagating flame with one-step chemistry // *Numerical Methods in Laminar Flame Propagation* / Ed. by N. Peters, J. Warnatz. — Braunschweig: Vieweg, 1992. — Pp. 38–48.
 70. *Mercer G., Weber R., Sidhu H.* An oscillatory route to extinction for solid fuel combustion waves due to heat losses // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 1998. — Vol. 454, no. 1975. — Pp. 2015–2022.
 71. *Jameson L., Jackson T. L., Lasseigne D. G.* Wavelets as a numerical tool // *Lecture Notes in Physics* / Ed. by J. Buckmaster, T. Takeno. — Berlin: Springer, 1995. — Pp. 221–226.
 72. *Lasseigne D., Jackson T., Jameson L.* Stability of freely propagating flames revisited // *Combustion Theory and Modelling.* — 1999. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 591–611.

73. *Gubernov V., Mercer G., Sidhu H., Weber R.* On the evans function calculation of the stability of combustion waves // *Austral. Math. Soc. Gaz.* — 2002. — Vol. 29. — Pp. 155–163.
74. *Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N.* The effect of ambient temperature on the propagation of nonadiabatic combustion waves // *Journal of Mathematical Chemistry.* — 2005. — Vol. 37, no. 2. — Pp. 149–162.
75. *Balasuriya S., Gottwald G., Hornibrook J., Lafortune S.* High lewis number combustion wavefronts: a perturbative melnikov analysis // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 2007. — Vol. 67, no. 2. — Pp. 464–486.
76. *Kuznetsov Y.* Elements of Applied Bifurcation Theory. — New York: Springer, 1998. — Vol. 112 of *Applied Mathematical Sciences.*
77. *Gubernov V., Sidhu H., Mercer G.* Detecting bogdanov-takens bifurcation of traveling waves in reaction-diffusion systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* — 2006. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 749–755.
78. *Simon P. L., Kallidas S., Scott S. K.* Evans function analysis of the stability of non-adiabatic flames // *Combustion Theory and Modelling.* — 2003. — Vol. 7. — Pp. 545–561.
79. *Simon P. L., Merkin J. H., Scott S. K.* Bifurcations in non-adiabatic flame propagation models // *Focus on Combustion Research, Nova Science Publishers, New York.* — 2005. — Pp. 315–357.
80. *Michelson D. M., Sivashinsky G. I.* Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—ii. numerical experiments // *Acta Astronautica.* — 1977. — Vol. 4, no. 11. — Pp. 1207–1221.
81. *Sivashinsky G.* On the structure and stability of laminar flames // *Annals of the New York Academy of Sciences.* — 1983. — Vol. 404, no. 1. — Pp. 210–214.
82. *Hyman J. M., Nicolaenko B.* The kuramoto-sivashinsky equation: a bridge between pde's and dynamical systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 1986. — Vol. 18, no. 1. — Pp. 113–126.

83. *Hyman J. M., Nicolaenko B., Zaleski S.* Order and complexity in the kuramoto-sivashinsky model of weakly turbulent interfaces // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1986. — Vol. 23, no. 1. — Pp. 265–292.
84. *Benkhaldoun F., Larroutrou B.* A finite element adaptive investigation of curved stable and unstable flame front // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1989. — Vol. 76. — Pp. 119–134.
85. *Denet B., Haldenwang P.* Numerical study of thermal-diffusive instability of premixed flames // *Combustion Science and Technology*. — 1992. — Vol. 86. — Pp. 199–221.
86. *Kagan L., Sivashinsky G.* Self-fragmentation of nonadiabatic cellular flames // *Combustion and Flame*. — 1997. — Vol. 108. — Pp. 220–226.
87. *Markstein G.* Instability phenomena in combustion waves. — Baltimore: 1953. — Pp. 43–59.
88. *Ronney P.* Near-limit flame structures at low lewis number // *Combustion and Flame*. — 1990. — Vol. 82, no. 1. — Pp. 1–14.
89. *Gorman M., El-Hamdi M., Robbins K. A.* Experimental observation of ordered states of cellular flames // *Combustion science and technology*. — 1994. — Vol. 98, no. 1-3. — Pp. 37–45.
90. *el-Hamdi M., Gorman M., Robbins K. A.* Deterministic chaos in laminar premixed flames: Experimental classification of chaotic dynamics // *Combustion science and technology*. — 1993. — Vol. 94, no. 1-6. — Pp. 87–101.
91. *Smithells A., Ingle H.* Xv.—the structure and chemistry of flames // *Journal of the Chemical Society, Transactions*. — 1892. — Vol. 61. — Pp. 204–216.
92. *Smith F. A., Pickering S. F.* Bunsen flames with unusual structure // U.S. Bureau of Standards Journal of Research. — 1929. — Vol. 3. — Pp. 65–74.
93. *Gorman M., Hamill C. F., El-Hamdi M., Robbins K. A.* Rotating and modulated rotating states of cellular flames // *Combustion science and technology*. — 1994. — Vol. 98, no. 1-3. — Pp. 25–35.

94. *Беляев А. Ф., Комкова Л. Д.* Зависимость скорости горения термитов от давления // *Журнал Физической Химии*. — 1950. — Т. XXIV, № 11. — С. 1302–1311.
95. *Максимов Э. И.* Исследование пульсаций свечения при горении нитроглицериновых порохов // *Физика горения и взрыва*. — 1963. — Т. 37. — С. 1129–1132.
96. *Шкиро В. М., Нерсисян Г. А.* О структуре колебаний при горении смесей тантала с углеродом // *Физика Горения и Взрыва*. — 1978. — Т. 14. — С. 149–151.
97. *Moore J. J., Feng H. J.* Combustion synthesis of advanced materials: Part i. reaction parameters // *Prog. Mater. Sci.* — 1995. — Vol. 39. — Pp. 243–273.
98. *Moore J. J., Feng H. J.* Combustion synthesis of advanced materials: Part ii. classification, applications and modelling // *Prog. Mater. Sci.* — 1995. — Vol. 39. — Pp. 275–316.
99. *Makino A.* Fundamental aspects of the heterogeneous flame in the self-propagating high-temperature synthesis (shs) process // *Prog. Energy Combust. Sci.* — 2001. — Vol. 27. — Pp. 1–74.
100. *Мержанов А. Г., Филоненко А. К., Боровинская И. П.* Новые явления при горении конденсированных систем // *Доклады Академии Наук СССР*. — 1973. — Т. 208, № 4. — С. 892–894.
101. *Боровинская И. П., Мержанов А. Г., Новиков Н. П., Филоненко А. К.* Безгазовое горение смесей порошков переходных металлов с бором // *Физика Горения и Взрыва*. — 1974. — Т. 10, № 1. — С. 4–15.
102. *Гололобов И. М., Грановский Э. А., Гостинцев Ю. А.* О двух режимах горения на пределе распространения светящегося пламени // *Физика горения и взрыва*. — 1981. — Т. 17, № 1. — С. 28–33.
103. *Pearlman H. G., Ronney P. D.* Near-limit behavior of high-lewis number premixed flames in tubes at normal and low gravity // *Physics of Fluids*. — 1994. — Vol. 6. — P. 4009.

104. *Pearlman H. G., Ronney P. D.* Self-organized spiral and circular waves in premixed gas flames // *The Journal of chemical physics*. — 1994. — Vol. 101. — P. 2632.
105. *Stephenson D.* Combustion research facility newsletter // *Sandia National Laboratories*. — 1980. — Vol. 2, no. 4.
106. *Blackshear J. I., Mapp J. J. W., Gorman M.* An experimental study of pulsating low pressure flames // *Combustion Science and Technology*. — 1984. — Vol. 35, no. 5-6. — Pp. 311–315.
107. *El-Hamdi M., Gorman M., Mapp J. W., Blackshear Jr. J. I.* Stability boundaries of periodic models of propagation in burner-stabilized methane-air flames // *Combustion science and technology*. — 1987. — Vol. 55, no. 1-3. — Pp. 33–40.
108. *Новожилов Б. В.* Нелинейные колебания скорости горения. // *Прикладная Механика и Техническая Физика*. — 1966. — № 5. — С. 31–41.
109. *Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Об одной предельной схеме распространения пульсирующего фронта экзотермической реакции в конденсированной среде. // *Прикладная Механика и Техническая Физика*. — 1974. — № 6. — С. 107–116.
110. *Зельдович Я. Б., Лейпунский О. Г., Либрович В. Б.* Теория нестационарного горения пороха. — М.: Наука, 1975.
111. *Gubernov V. V., Kim J. S.* On the fast-time oscillatory instabilities of linán's diffusion-flame regime // *Combust. Theory Mod.* — 2006. — Vol. 10. — Pp. 749–770.
112. *Bayliss A., Matkowsky B.* Two routes to chaos in condensed phase combustion // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1990. — Vol. 50, no. 2. — Pp. 437–459.
113. *Brailovsky I., Sivashinsky G.* Chaotic dynamics in solid fuel combustion // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1993. — Vol. 65, no. 1. — Pp. 191–198.

114. *Frankel M., Roytburd V., Sivashinsky G.* A sequence of period doublings and chaotic pulsations in a free boundary problem modeling thermal instabilities // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1994. — Vol. 54, no. 4. — Pp. 1101–1112.
115. *Frankel M. L., Kovačič G., Roytburd V., Timofeyev I.* Finite-dimensional dynamical system modeling thermal instabilities // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2000. — Vol. 137, no. 3. — Pp. 295–315.
116. *Максимов Ю. М., Пак А. Т., Лавренчук Г. В., Найбороденко Ю. С., Мержанов А. Г.* Спиновое горение безгазовых систем // *Физика горения и взрыва*. — 1979. — Т. 15. — С. 156–159.
117. *Mukasyan A. S., Vadchenko S. G., Khomenko I. O.* Combustion modes in the titanium–nitrogen system at low nitrogen pressures // *Combust. Flame*. — 1997. — Vol. 111. — Pp. 65–72.
118. *Mukasyan A. S., Marasia J. A., Filimonov I. A., Varma A.* Role of infiltration in spin combustion in gas–solid systems // *Combust. Flame*. — 2000. — Vol. 122. — Pp. 368–374.
119. *Bayliss A., Matkowsky B. J.* Interaction of counterpropagating hot spots in solid fuel combustion // *Physica D*. — 1999. — Vol. 128. — Pp. 18–40.
120. *Bayliss A., Matkowsky B. J., Aldushin A. P.* Dynamics of hot spots in solid fuel combustion // *Physica D*. — 2002. — Vol. 166. — Pp. 104–130.
121. *Margolis S. B.* Two routes to chaos in condensed phase combustion // *Proc. R. Soc. Lond. A*. — 1991. — Vol. 433. — Pp. 131–150.
122. *Pearlman H. G.* Excitability in high–lewis number premixed gas combustion // *Combust. Flame*. — 1997. — Vol. 109. — Pp. 382–398.
123. *Clavin P., Fife P., Nicolaenko B.* Multiplicity and related phenomena in competing reaction flames // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1987. — Vol. 47, no. 2. — Pp. 296–331.

124. *Мартыросян И. А., Долуханьян С. Г., Мержанов А. Г.* Экспериментальные наблюдения неединственности стационарных режимов распространения волн горения в системе с параллельными реакциями // *Физика горения и взрыва.* — 1983. — Т. 19, № 3. — С. 22–24.
125. *Мартыросян И. А., Долуханьян С. Г., Мержанов А. Г.* Неединственность стационарных режимов при горении смесей порошков циркония и сажи в водороде // *Физика горения и взрыва.* — 1983. — Т. 19, № 5. — С. 39–42.
126. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* Асимптотический анализ стационарного распространения фронта параллельной экзотермической реакции // *Прикладная Механика и Техническая Физика.* — 1975. — № 2. — С. 306–315.
127. *Любченко И. С., Матвеев В. В., Марченко Г. И.* Асимптотико тепловая теория зажигания конденсированных веществ с последовательными реакциями // *Физика горения и взрыва.* — 1982. — Т. 18, № 2. — С. 36–43.
128. *Хайкин Б. И., Худяев С. И.* О неединственности температуры и скорости горения при протекании конкурирующих реакций // Препринт / Отд. ин-та хим. физики. — Черногловка: 1981.
129. *Некрасов Е. А., Тимохин А. М.* К теории теплового распространения волн многостадийных реакций, описываемых простыми брутто-схемами // *Физика Горения и Взрыва.* — 1986. — по. 4. — Рр. 48–55.
130. *Алдушин А. П., Каспарян С. Г.* Двумерная неустойчивость фронта горения с параллельными реакциями // *Химическая Физика.* — 1982. — № 10. — С. 1412–1420.
131. *Towers I. N., Gubernov V. V., Kolobov A. A., Polezhaev A. A., Sidhu H. S.* Bistability of flame propagation in a model with competing exothermic reactions // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — В печати 2013.

132. *Sinditskii V. P., Egorshv V. Y., Levshenkov A. I., Serushkin V. V.* Ammonium nitrate: combustion mechanism and the role of additives // *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. — 2005. — Vol. 30, no. 4. — Pp. 269–280.
133. *Hmaid A., McIntosh A., Brindley J.* A mathematical model of hotspot condensed phase ignition in the presence of a competitive endothermic reaction // *Combustion theory and modelling*. — 2010. — Vol. 14, no. 6. — Pp. 893–920.
134. *Gubernov V. V., Sharples J. J., Sidhu H. S., McIntosh A. C., Brindley J.* Properties of combustion waves in the model with competitive exo- and endothermic reactions // *Journal of mathematical chemistry*. — 2012. — Vol. 50, no. 8. — Pp. 2130–2140.
135. *Sharples J. J., Sidhu H. S., McIntosh A. C., Brindley J., Gubernov V. V.* Analysis of combustion waves arising in the presence of a competitive endothermic reaction // *IMA journal of applied mathematics*. — 2012. — Vol. 77, no. 1, SI. — Pp. 18–31.
136. *Sharples J. J., Gubernov V. V., Sidhu H. S., McIntosh A. C., Brindley J.* Analysis of a competitive exothermic-endothermic reaction scheme // 19th international congress on modelling and simulation (MODSIM2011) / Ed. by Chan, F and Marinova, D and Anderssen, RS. — 2011. — Pp. 345–351.
137. *Вольперт В. Д., Хайкин Б. И., Худяев С. И.* Распространение волны горения при протекании двух независимых реакций // *Проблемы технологического горения*. — 1981. — Vol. 1.
138. *Вольперт В. А., Кришеник П. М.* Устойчивость распространения двухстадийной волны горения в режиме управления // *Физика горения и взрыва*. — 1986. — no. 2. — Pp. 24–32.
139. *Margolis S. B., Matkowsky B. J.* Flame propagation with multiple fuels // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1982. — Vol. 42, no. 5. — Pp. 982–1003.

140. *Lazarovici A., Kalliadasis S., Merkin J., Scott S.* Flame quenching through endothermic reaction // *Journal of engineering mathematics.* — 2002. — Vol. 44, no. 3. — Pp. 207–228.
141. *Simon P. L., Kalliadasis S., Scott S. K.* Inhibition of flame propagation by an endothermic reaction // *IMA J. Appl. Math.* — 2011. — Vol. 68. — Pp. 537–562.
142. *Simon P. L., Kalliadasis S., Merkin J. H., Scott S. K.* Stability of flames in an exothermic–endothermic system // *IMA journal of applied mathematics.* — 2004. — Vol. 69, no. 2. — Pp. 175–203.
143. *Hall A., Wolfhard H.* Multiple reaction zones in low pressure flames with ethyl and methyl nitrate, methyl nitrite and nitromethane // *Symposium (International) on Combustion / Elsevier.* — Vol. 6. — 1957. — Pp. 190–199.
144. *Хайкин Б. И., Филоненко А. К., Худяев С. И.* Распространение пламени при протекании в газе двух последовательных реакций // *Физика Горения и Взрыва.* — 1968. — Vol. 4. — Pp. 591–599.
145. *Westbrook C. K., Dryer F. L.* Simplified reaction mechanisms for the oxidation of hydrocarbon fuels in flames // *Combustion science and technology.* — 1981. — Vol. 27, no. 1-2. — Pp. 31–43.
146. *Franzelli B., Riber E., Sanjosé M., Poinso T.* A two-step chemical scheme for kerosene–air premixed flames // *Combustion and Flame.* — 2010. — Vol. 157, no. 7. — Pp. 1364–1373.
147. *Мержанов А. Г., Руманов Э. Н., Хайкин Б. И.* Многозонное горение конденсированных систем // *Прикладная Механика и Техническая Физика.* — 1972. — № 6. — С. 99–105.
148. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* Асимптотический анализ стационарного распространения фронта двухстадийной экзотермической реакции в газе // *Прикладная Механика и Техническая Физика.* — 1973. — Т. 37, № 6. — С. 1049–1058.

149. Берман В. С., Рязанцев Ю. С. Асимптотический анализ стационарного распространения фронта двухстадийной экзотермической реакции в конденсированной среде // *Прикладная Механика и Техническая Физика*. — 1973. — № 1. — С. 75–87.
150. Joulin G., Clavin P. Asymptotic analysis of a premixed laminar flame governed by a two-step reaction // *Combustion and Flame*. — 1975. — Vol. 25. — Pp. 389–392.
151. Kapila A., Ludford G. Two-step sequential reactions for large activation energies // *Combustion and Flame*. — 1977. — Vol. 29. — Pp. 167–176.
152. McConnaughey H., Ludford G. Two-step sequential reactions revisited // *Combustion and flame*. — 1985. — Vol. 60, no. 3. — Pp. 239–244.
153. Margolis S. B., Matkowsky B. J. Flame propagation with a sequential reaction mechanism // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1982. — Vol. 42, no. 6. — Pp. 1175–1188.
154. Берман В. С., Рязанцев Ю. С., Шевцова В. И. Нестационарное распространение двухстадийной последовательной реакции в конденсированной фазе // *Физика Горения и Взрыва*. — 1981. — Т. 17, № 6. — С. 72–76.
155. Margolis S. B., Matkowsky B. J. Steady and pulsating modes of sequential flame propagation // *Combustion Science and Technology*. — 1982. — Vol. 27, no. 5-6. — Pp. 193–213.
156. Peláez J., Linan A. Structure and stability of flames with two sequential reactions // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1985. — Vol. 45, no. 4. — Pp. 503–522.
157. Peláez J. Stability of premixed flames with two thin reaction layers // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1987. — Vol. 47, no. 4. — Pp. 781–799.
158. Booty M., Holt J., Matkowsky B. Condensed phase combustion with a merged sequential reaction mechanism // *The Quarterly Journal of Me-*

- chanics and Applied Mathematics.* — 1990. — Vol. 43, no. 2. — Pp. 223–249.
159. Некрасов Е. А., Тимохин А. М. Неединственность стационарного режима горения при протекании последовательной реакции с эндотермической стадией // *Физика Горения и Взрыва.* — 1984. — no. 3. — Pp. 17–22.
160. Некрасов Е. А., Тимохин А. М. К теории стадийного горения с эндотермической реакцией // *Физика Горения и Взрыва.* — 1984. — no. 4. — Pp. 21–28.
161. Боровиков М. Б., Буровой И. А., Гольдишлегер У. И. Распространение волны горения в системах последовательных реакций с эндотермической стадией // *Физика Горения и Взрыва.* — 1984. — Т. 20, № 3. — С. 3–10.
162. Please C. P., Liu F., McElwain D. Condensed phase combustion travelling waves with sequential exothermic or endothermic reactions // *Combustion Theory and Modelling.* — 2003. — Vol. 7, no. 1. — Pp. 129–143.
163. Вольперт В. А., Кришеник П. М. Нестационарное распространение волны горения в системе последовательных реакций с эндотермической стадией // *Физика горения и взрыва.* — 1986. — no. 3. — Pp. 31–38.
164. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени // *Журнал Физической Химии.* — 1948. — Т. 22. — С. 27–49.
165. Liñán A. A theoretical analysis of premixed flame propagation with an isothermal chain-branching reaction // *Instituto Nacional de Technica Aeroespacial “Esteban Terradas” (Madrid), USAFOSR Contract No. E00AR68-0031, Technical Report No. 1.* — 1971.
166. Spalding D. B. A theory of inflammability limits and flame-quenching // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences.* — 1956. — Vol. 249, no. 957. — Pp. 1–25.

167. *Dold J. W., Weber R. O., Thatcher R. W., Shah A. A.* Flame balls with thermally sensitive intermediate kinetics // *Combustion Theory and Modelling*. — 2003. — Vol. 7, no. 1. — Pp. 175–203.
168. *Dold J. W., Daou J., Weber R.* Reactive-diffusive stability of premixed flames with modified zeldovich-linan kinetics // *Simplicity, Rigor and Relevance in Fluid Mechanics: A Volume in Honor of Amable Liñán* / Ed. by F. Higuera, J. Jiménez, J. Vega, A. Liñán. — CIMNE, 2004. — Theory and engineering applications of computational methods.
169. *Dold J. W.* Premixed flames modelled with thermally sensitive intermediate branching kinetics // *Combust. Theory Mod.* — 2007. — Vol. 11. — Pp. 909–948.
170. *Sharpe G. J.* Effect of thermal expansion on the linear stability of planar premixed flames for a simple chain-branching model: The high activation energy asymptotic limit // *Combustion Theory and Modelling*. — 2008. — Vol. 12, no. 4. — Pp. 717–738.
171. *Sharpe G. J., Falle S. A. E. G.* Numerical simulations of premixed flame cellular instability for a simple chain-branching model // *Combustion and Flame*. — 2011. — Vol. 158, no. 5. — Pp. 925–934.
172. *Gubernov V. V., Mercer G. N., Sidhu H. S.* Combustion waves in a model with chain branching reaction // *J. Math. Chem.* — 2006. — Vol. 39. — Pp. 1–14.
173. *Mikolaitis D. W.* Adiabatic flame speeds and the zeldovich-liñán model // *Combustion Science and Technology*. — 1986. — Vol. 49, no. 5-6. — Pp. 277–288.
174. *Gubernov V., Sidhu H., Mercer G.* Combustion waves in a model with chain branching reaction and their stability // *Combustion Theory and Modelling*. — 2008. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 407–431.
175. *Gubernov V. V., Sidhu H. S., Mercer G. N., Kolobov A. V., Polezhaev A. A.* The effect of lewis number variation on combustion waves

- in a model with chain-branching reaction // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2008. — Vol. 44, no. 3. — Pp. 816–830.
176. Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S., Mercer G. N. Pulsating instabilities of combustion waves in a chain-branching reaction model // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2009. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 873–887.
177. Kurdyumov V. N., Fernandez-Galisteo D. Asymptotic structure of premixed flames for a simple chain-branching chemistry model with finite activation energy near the flammability limit // *Combustion and Flame*. — 2012. — Vol. 159, no. 10. — Pp. 3110 – 3118.
178. Sharpe G. J. Thermal-diffusive instability of premixed flames for a simple chain-branching chemistry model with finite activation energy // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 2009. — Vol. 70, no. 3. — Pp. 866–884.
179. Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S. Oscillatory thermal-diffusive instability of combustion waves in a model with chain-branching reaction and heat loss // *Combustion Theory and Modelling*. — 2011. — Vol. 15, no. 3. — Pp. 385–407.
180. Gubernov V., Kolobov A., Polezhaev A., Sidhu H., Mercer G. Period doubling and chaotic transient in a model of chain-branching combustion wave propagation // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2010. — Vol. 466, no. 2121. — Pp. 2747–2769.
181. Zhang H., Chen Z. Spherical flame initiation and propagation with thermally sensitive intermediate kinetics // *Combustion and Flame*. — 2011. — Vol. 158, no. 8. — Pp. 1520–1531.
182. Blythe P. A., Kapila A. K., Short M. Shock-induced chain-branched ignition. — Vol. 32 II. — 2009. — Pp. 2371–2377.
183. Zhang H.-W., Guo P., Chen Z. Studies on the mechanism of radical ignition of premixed gas // *Journal of Engineering Thermophysics*. — 2012. — Vol. 33, no. 12. — Pp. 2219–2222.

184. *Greenberg J. B., Zinoviev A., Dold J. W.* Laminar premixed spray flame analysis with thermally sensitive intermediate kinetics // *Combustion Theory and Modelling*. — 2009. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 365–388.
185. *Вильямс Ф. А.* Теория горения. — М.: Наука, 1971.
186. *Варнац Ю., Маас Д., Дибл Р.* Горение физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ. — М.: Физматлит, 2006.
187. *Mercer G. N., Weber R. O.* Combustion waves in two dimensions and their one-dimensional approximation // *Combustion Theory and Modelling*. — 1997. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 157–165.
188. *Зельдович Я. Б.* Теория предела распространения тихого пламени // *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. — 1941. — Т. 11, № 1. — С. 159–169.
189. *Henry D.* Geometric theory of semilinear parabolic equations. — Springer-Verlag, New York, 1981.
190. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
191. FlexPDETM available online at: — <http://www.pdesolutions.com> (accessed 01 February 2013).
192. *Feigenbaum M. J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *Journal of statistical physics*. — 1978. — Vol. 19, no. 1. — Pp. 25–52.
193. *Tetam R.* Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — Springer, 1997. — Vol. 68.
194. *Купцов П. В.* Вычисление показателей Ляпунова для распределённых систем: преимущества и недостатки различных численных методов // *Известия высших учебных заведений*. — 2010. — Т. 18, № 5.

195. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1983. — Vol. 7, no. 1. — Pp. 181–200.
196. Tél T., Lai Y.-C. Chaotic transients in spatially extended systems // *Physics Reports*. — 2008. — Vol. 460, no. 6. — Pp. 245–275.
197. Kim J. S., Gubernov V. On the fast-time cellular instabilities of linan's diffusion-flame regime // *Combustion science and technology*. — 2005. — Vol. 177, no. 5-6. — Pp. 991–1022.
198. Evans J. W. Nerve axon equations: Iii stability of the nerve impulses // *Indiana Univ. Math. J.* — 1972. — Vol. 22. — Pp. 577–593.
199. Gubernov V. V., Kim J. S. A detailed spectral map for the fast-time instability in linan's diffusion-flame regime // *Unpublished*.
200. Joulin G., Liñán A., Ludford G. S. S., Peters N., Schmidt-Lainé C. Flames with chain-branching/chain-breaking kinetics // *SIAM J. Appl. Math.* — 1985. — Vol. 45. — Pp. 420–434.
201. Chao B. H., Law C. K. Laminar flame propagation with volumetric heat loss and chain branching-termination reactions // *Int. J. Heat Mass Transfer*. — 1994. — Vol. 37. — Pp. 673–680.
202. Seshardi K., Peters N. The influence of stretch on a premixed flame with two-step kinetics // *Combust. Sci. and Tech.* — 1983. — Vol. 49. — Pp. 35–63.
203. Tam R. Y. Stretch response and large heat release in the zeldovich-liñán model // *Combust. Sci. and Tech.* — 1988. — Vol. 60. — Pp. 125–142.
204. Tam R. Y. Damköler-number ratio asymptotics of the zeldovich-liñán model // *Combust. Sci. and Tech.* — 1988. — Vol. 62. — Pp. 297–309.
205. Zeldovich Y. B. Chain reactions in hot flames - an approximate theory of flame velocity // *Kinetika i kataliz.* — 1961. — Vol. 2, no. 3. — Pp. 305–318.

206. *Fernandez-Galisteo D., del Alamo G., Sánchez A. L., Linán A.* Zeldovich analysis of hydrogen–air premixed flames // Proc. of the Third European Combustion Meeting. — 2007. — Pp. 6–19.
207. *Коробейничев О. П., Большова Т. А.* О применимости теории Зельдовича цепного распространения пламени для горения водородокислородных смесей // *Физика горения и взрыва.* — 2009. — Т. 45, № 5.
208. *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.* Numerical recipes in C+: the art of scientific computing. — Cambridge University Press Cambridge, 2009. — Vol. 994.
209. *Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S.* Pulsating instabilities in the zeldovich-linán model // *Journal of Mathematical Chemistry.* — 2011. — Vol. 49, no. 5. — Pp. 1054–1070.
210. *Turing A.* The chemical theory of morphogenesis // *Phil. Trans. Roy. Soc.* — 1952. — Vol. 13.
211. *Christiansen E. W., Sung C. J., Law C. K.* Pulsating instability in near-limit propagation of rich hydrogen/air flames // *Symposium (International) on Combustion.* — 1998. — Vol. 27, no. 1. — Pp. 555 – 562.
212. *He L., Clavin P.* Premixed hydrogen-oxygen flames. part i: Flame structure near the flammability limits // *Combustion and Flame.* — 1993. — Vol. 93. — Pp. 391–407.
213. *He L., Clavin P.* Premixed hydrogen-oxygen flames. part ii: Quasi-isobaric ignition near the flammability limits // *Combustion and Flame.* — 1993. — Vol. 93. — Pp. 408–420.
214. *Saxena P., Williams F. A.* Testing a small detailed chemical-kinetic mechanism for the combustion of hydrogen and carbon monoxide // *Combustion and Flame.* — 2006. — Vol. 145, no. 1-2. — Pp. 316–323.
215. *Conaire M. O., Curran H. J., Simmie J. M., Pitz W. J., Westbrook C. K.* A comprehensive modeling study of hydrogen oxidation // *International Journal of Chemical Kinetics.* — 2004. — Vol. 36, no. 11. — Pp. 603–622.

216. *Dixon-Lewis G.* Flame Structure and Flame Reaction Kinetics. I. Solution of Conservation Equations and Application to Rich Hydrogen-Oxygen Flames // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1967. — Vol. 298. — Pp. 495–513.
217. *Mauss F., Peters N., Rogg B., Williams F. A.* Reduced Kinetic Mechanisms for Premixed Hydrogen Flames // *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 1993 / Ed. by N. Peters & B. Rogg. — Vol. 15 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag. — 1993. — Pp. 29–43.
218. *Seshadri K., Peters N., Williams F. A.* Asymptotic analyses of stoichiometric and lean hydrogen-air flames // *Combustion and Flame.* — 1994. — Vol. 96, no. 4. — Pp. 407 – 427.
219. *Kailasanath K., Ganguly K., Patnaik G.* Dynamics of flames near the rich-flammability limit of hydrogen-air mixtures // *Prog. in Astronautics and Aeronautics.* — Vol. 151. — Washington DC: AIAA, 1993. — Pp. 247–262.
220. *Boivin P., Jiménez C., Sánchez A. L., Williams F. A.* An explicit reduced mechanism for h₂-air combustion // *Proceedings of the Combustion Institute.* — 2011. — Vol. 33, no. 1. — Pp. 517 – 523.
221. *Hu E., Huang Z., He J., Miao H.* Experimental and numerical study on laminar burning velocities and flame instabilities of hydrogen-air mixtures at elevated pressures and temperatures // *Int. J. Hydrogen Energy.* — 2009. — Pp. 8741–8755.
222. *Ern A., Giovangigli V.* Impact of detailed multicomponent transport on planar and counterflow hydrogen/air and methane/air flames // *Combust. Sci. Tech.* — 1999. — Vol. 149. — Pp. 157–181.
223. *Christiansen E. W., Law C. K., Sung C. J.* Steady and pulsating propagation and extinction of rich hydrogen/air flames at elevated pressures // *Combustion and Flame.* — 2001. — Vol. 124. — Pp. 35–49.
224. *Goyal G., Maas U., Warnatz J.* Simulation of the behavior of rich hydrogen-air flames near the flammability limit // *Combust. Sci. and Tech.* — 1995. — Vol. 105. — Pp. 183–193.

225. *Carter N. R., Cherian M. A., Dixon-Lewis G.* Flames near rich flammability limits with particular reference to hydrogegen-air and similar systems // Numerical methods in Laminar Flame Propagation: A GAMM Workshop / Ed. by N. Peters, J. Warnatz. — Vieweg, 1982. — Pp. 182–191.
226. *Coward H. F., Jones G. W.* Limits of flammability of gases and vapors: Tech. rep.: DTIC Document, 1952.
227. *Zabetakis M. G.* Flammability characteristics of combustible gases and vapors: Tech. rep.: DTIC Document, 1965.
228. *Wierzba I., Harris K., Karim G.* Effect of low temperature on the rich flammability limits in air of hydrogen and some fuel mixtures containing hydrogen // *International Journal of Hydrogen Energy*. — 1992. — Vol. 17, no. 2. — Pp. 149 – 152.
229. *Kuznetsov M., Kobelt S., Grune J., Jordan T.* Flammability limits and laminar flame speed of hydrogen–air mixtures at sub-atmospheric pressures // *International Journal of Hydrogen Energy*. — 2012. — Vol. 37, no. 22. — Pp. 17580 – 17588.
230. J. A. Manion, R. E. Huie, R. D. Levin, D. R. Burgess Jr., V. L. Orkin, W. Tsang, W. S. McGivern, J. W. Hudgens, V. D. Knyazev et al. // NIST Standard Reference Database 17, Version 7.0 (Web Version), Release 1.4.3, Data version 2008.12. — National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland, 20899-8320. Web address: <http://kinetics.nist.gov/> (retrieved August 15, 2011): 2011.
231. *Lemmon E. W., McLinden M. O., Friend D. G.* Thermophysical Properties of Fluid Systems // NIST Chemistry WebBook / Ed. by P. Linstrom, W. Mallard. — NIST Standard Reference Database Number 69. — National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg MD, 20899, <http://webbook.nist.gov> (retrieved August 15, 2011): 2011.
232. *Reid R. C., Prausnitz J. M., Sherwood T. K.* The properties of gases and liquids. — New York: McGraw, 1987.

233. *Gubernov V. V., Kolobov A. V., Polezhaev A. A., Sidhu H. S.* Stability of combustion waves in the zeldovich-liñán model // *Combustion and Flame*. — 2012. — Vol. 159, no. 3. — Pp. 1185–1196.
234. *Dowdy D. R., Smith D. B., Taylor S. C., Williams A.* The use of expanding spherical flames to determine burning velocities and stretch effects in hydrogen/air mixtures // *Symposium (International) on Combustion*. — 1991. — Vol. 23, no. 1. — Pp. 325 – 332. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0082078406802754>.
235. *Takahashi F., Mizomoto M., Ikai S.* Alternative energy sources // Nuclear energy/synthetic fuels / Ed. by T. N. Veziroglu. — New York: McGraw-Hill, 1983. — Pp. 447–457.
236. *Koroll G., Kumar R., Bowles E.* Burning velocities of hydrogen-air mixtures // *Combustion and Flame*. — 1993. — Vol. 94, no. 3. — Pp. 330 – 340. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/001021809390078H>.
237. *Aung K., Hassan M., Faeth G.* Flame stretch interactions of laminar premixed hydrogen/air flames at normal temperature and pressure // *Combustion and Flame*. — 1997. — Vol. 109, no. 1–2. — Pp. 1 – 24. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010218096001514>.
238. *Pitsch H., Bollig M.* Flamemaster, a computer code for homogeneous and one-dimensional laminar flame calculations // *Institut für Technische Mechanik, RWTH Aachen*. — 1994.
239. *Smith G. P., Golden D. M., Frenklach M., Moriarty N. W., Eiteneer B., Goldenberg M., Bowman C. T., Hanson R. K., Song S. et al.* GRI-mech 3.0. available online at: — http://www.me.berkeley.edu/gri_mech (accessed 21 June 2013).
240. The San Diego Mechanism. Chemical-Kinetic Mechanisms for combustion applications available online at: — <http://web.eng.ucsd.edu/mae/groups/combustion> (accessed 21 June 2013).
241. *Fernández-Galisteo D., Sánchez A. L., Liñán A., Williams F. A.* One-step reduced kinetics for lean hydrogen-air deflagration // *Com-*

- bustion and Flame.* — 2009. — Vol. 156, no. 5. — Pp. 985 – 996.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010218008003118>.
242. *Alexander J., Gardner R., Jones C. K. R. T.* A topological invariant arising in the stability analysis of the travelling waves // *J. Reine Angew. Math.* — 1990. — Vol. 410. — Pp. 167–212.
243. *Pego R. L., Semerka P., Weinstein M. I.* Evans' function, Melnikov's integral, and solitary wave instabilities, In: *Differential Equations with Application to Mathematical Physics*, (eds. W. F. Ames, E. M. Harrell II and J. V. Herod), pp. 273–286. — San Diego: Academic Press, 1993.
244. *Bridges T. J., Derks G.* The symplectic evans matrix, and the instability of solitary waves and fronts with symmetry // *Arch. Rat. Mech. Anal.* — 2001. — Vol. 156. — Pp. 1–87.
245. *Sandstede B.* Stability of travelling waves // *Handbook of dynamical systems II* / Ed. by B. Fiedler. — North-Holland: Elsevier,, 2002. — Pp. 983–1055.
246. *Pego R. L., Semerka P., Weinstein M. I.* Eigenvalues, and instabilities of solitary waves // *Phil. Trans. R. Soc. London A.* — 1992. — Vol. 340. — Pp. 47–94.
247. *Kapitula T.* Existence and stability of singular heteroclinic orbits for the ginzburg–landau equation // *Nonlinearity.* — 1996. — Vol. 9. — Pp. 669–685.
248. *Kapitula T., Sandstede B.* Stability of bright solitary wave solutions to perturbed nonlinear schrödinger equations // *Physica D.* — 1998. — Vol. 124. — Pp. 58–103.
249. *Kapitula T.* Stability criterion for bright solitary waves of the perturbed cubic–quintic schrödinger equations // *Physica D.* — 1998. — Vol. 116. — Pp. 95–120.
250. *Pelinovsky D. E., Kivshar Y. S., Afanasjev V. V.* Internal modes of envelope solitons // *Physica D.* — 1998. — Vol. 116. — Pp. 121–142.

251. *Pelinovsky D. E., Sheel A.* Stability analysis of stationary light transmission in nonlinear photonic structures // *J. Nonlin. Sci., to appear 2003.* — 2003.
252. *Evans J. W.* Nerve axon equations: Iv the stable and unstable impulse // *Indiana Univ. Math. J.* — 1975. — Vol. 24. — Pp. 1169–1190.
253. *Gardner R.* Stability of travelling wave solutions of diffusive predator–prey systems // *Tran. Amer. Math. Soc.* — 1991. — Vol. 327. — Pp. 465–524.
254. *Alexander J., Jones C. K. R. T.* Existence and stability of asymptotic oscillatory triple pulses // *Z. Angew. Math. Phys.* — 1993. — Vol. 44. — Pp. 189–200.
255. *Alexander J., Jones C. K. R. T.* Existence and stability of asymptotic oscillatory double pulses // *J. Reine Angew. Math.* — 1994. — Vol. 446. — Pp. 49–79.
256. *Balmforth N. J., Craster R. V., Malham S. J. A.* Unsteady fronts in an autocatalytic systems // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1999. — Vol. 455. — Pp. 1401–1433.
257. *Gubernov V. V., Mercer G. N., Sidhu H. S.* Generalized compound matrix method // *Appl. Math. Lett.* — 2006. — Vol. 19. — Pp. 458–463.
258. *Pego R. L., Weinstein M. I.* Convective linear stability of solitary waves for boussinesq equations // *Stud. Appl. Math.* — 1997. — Vol. 99. — Pp. 311–375.
259. *Derks G., Doelman A., van Gils S. A., Visser T.* Travelling waves in a singularly perturbed sine–gordon equation // *Physica D.* — 2003. — Vol. 180. — Pp. 40–70.
260. *Pego R. L., Semerka P., Weinstein M. I.* Oscillatory instability of traveling waves for a kdv–burgers equation // *Physica D.* — 1993. — Vol. 67. — Pp. 45–65.

261. *Alexander J., Sachs R.* Linear stability of solitary waves of a boussinesq-type equation: a computer assisted computation // *Nonlinear World*. — 1995. — Vol. 2. — Pp. 471–507.
262. *Alexander J., Grillakis M. G., Jones C. K. R. T., Sandstede B.* Stability of pulses on optical fibers with phase-sensitive amplifiers // *Z. Angew. Math. Phys.* — 1997. — Vol. 48. — Pp. 175–192.
263. *Rubin J. E., Jones C. K. R. T.* Bifurcations and edge oscillations in the semiconductor fabry-pérot interferometer // *Opt. Comm.* — 1997. — Vol. 140. — Pp. 93–98.
264. *Bridges T. J., Derks G.* Unstable eigenvalues and the linearization about solitary waves and fronts with symmetry // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1999. — Vol. 455. — Pp. 2427–2469.
265. *Li Y. A., Promislow K.* The mechanism of the polarizational mode instability in birefringent fiber optics // *SIAM J. Math. Anal.* — 2000. — Vol. 31. — Pp. 1351–1373.
266. *Miller J. R.* Stability of solitary waves in a complex modified kdv system // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 2001. — Vol. 55. — Pp. 557–565.
267. *Kapitula T.* The evans function and generalized melnikov integrals // *SIAM J. Math. Anal.* — 1999. — Vol. 30. — Pp. 273–297.
268. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. — New York: Springer-Verlag, 1983.
269. *Afendikov A. L., Bridges T. J.* Instability of the hocking-stewartson pulse and its implications for three-dimensional poiseuille flow // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 2001. — Vol. 457. — Pp. 257–272.
270. *Miranker W. L.* Numerical methods for stiff equations and singular perturbation problems. — Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1981.

271. *Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.* Determining lyapunov exponents from a time series // *Physica D.* — 1985. — Vol. 16. — Pp. 285–317.
272. *Davey A.* An automatic orthonormalization method for solving stiff boundary–value problems // *J. Comp. Phys.* — 1983. — Vol. 51. — Pp. 343–356.
273. *Hairer E.* Solving ordinary differential equations. — New York: Springer–Verlag, 1987.
274. *Van Loon P. M., Mattheij R. M. M.* Stable continuous orthonormalization techniques for linear boundary value problems // *J. Austral. Math. Soc.* — 1988. — Vol. B29. — Pp. 282–295.
275. *Dieci L., Russell R. D., Van Vleck E. S.* Unitary integrators and applications to continuous orthonormalization techniques // *SIAM J. Numer. Analysis.* — 1994. — Vol. 31. — Pp. 261–281.
276. *Bridges T. J.* The orr–sommerfeld equation on a manifold // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1999. — Vol. 455. — Pp. 3019–3040.
277. *Davey A.* On the removal of the singularities from the riccati method // *J. Comp. Phys.* — 1979. — Vol. 30. — Pp. 137–144.
278. *Ng B. S., Reid W. H.* An initial value method for eigenvalue problems using compound matrices // *J. Comput. Phys.* — 1979. — Vol. 30. — Pp. 125–136.
279. *Drazin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic stability. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
280. *Ng B. S., Reid W. H.* The compound matrix method for ordinary differential equations // *J. Comput. Phys.* — 1985. — Vol. 58. — Pp. 209–228.
281. *Straughn B., Walker D. W.* Two very accurate and efficient methods for computing eigenvalues and eigenfunctions in porous convection problems // *J. Comput. Phys.* — 1996. — Vol. 127. — Pp. 128–141.

282. *Nicodemus R., Grossmann S., Holthaus M.* Variational bound on energy dissipation in plane couette flow // *Phys. Rev. E.* — 1997. — Vol. 56. — Pp. 6774–6786.
283. *Allen L. A., Bridges T. J.* Numerical exterior algebra and the compound matrix method // *Numerische Mathematik.* — 2002. — Vol. 92. — Pp. 197–232.
284. *Darling R. W. R.* Differential forms and connections. — Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
285. *Hermann R.* Differential geometry and the calculus of variations. — New York: Academic Press, 1968.
286. *Nakahara M.* Geometry, topology and physics. — Bristol: Adam Hilger, 1990.
287. *Swinton J., Elgin J.* Stability of the travelling pulse solutions to a laser equation // *Phys. Lett. A.* — 1990. — Vol. 145. — Pp. 428–433.
288. *Bridges T. J., Derks G.* Hodge duality and the evans function // *Phys. Lett. A.* — 1999. — Vol. 251. — Pp. 363–372.