Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

"Московский физико-технический институт (государственный университет)"

На правах рукописи

АЛФИМОВ Михаил Николаевич

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СТРУКТУРЫ, КОСЕТНЫЕ КОНФОРМНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ИНСТАНТОНЫ НА ALE ПРОСТРАНСТВАХ

(01.04.02 – теоретическая физика)

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте им. П.Н.Лебедева Российской академии наук

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, **Леонидов Андрей Владимирович**, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П.Н.Лебедева Российской Академии Наук, Москва
Научный консультант:	доктор физико-математических наук, **Белавин Александр Абрамович**, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт Теоретической Физики им. Л.Д. Ландау Российской Академии Наук, Черноголовка
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, **Забродин Антон Владимирович**, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт Биохимической Физики им. Н.Э. Мануэля Российской Академии Наук, Москва кандидат физико-математических наук, **Миронов Сергей Андреевич**, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт Ядерных Исследований Российской Академии Наук, Москва
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт Проблем Передачи Информации им. А.А. Харкевича Российской Академии Наук, Москва

Защита состоится 19 сентября 2016 года в ____:____ ч. на заседании диссертационного совета Д 002.023.02 при Физическом Институте им. П.Н.Лебедева РАН: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д.53.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в библиотеке ФИАН или на сайте http://lebedev.ru/.

Автореферат разослан "____" ________ 2016 года.

Учёный секретарь диссертационного совета Д 002.023.02
доктор физико-математических наук Я.Н.Истомин

Общая характеристика диссертации

Темой диссертации является обобщение соответствия Алдая-Гайотты-Тачикавы на косетные конформные теории поля и исследование интегрируемых деформаций таких конформных теорий поля.

Актуальность темы. Представленная работа посвящена описанию связей между косетными конформными теориями поля и инстантонными вычислениями в суперсимметричных калибровочных теориях, а также интегрируемым структурам, возникающим в контексте этого соответствия. Данная область теоретической физики имеет интересную и богатую историю развития, однако значительная часть исследователей, занимающихся данной тематикой, уделяла не так много внимания ценности этих исследований для возможного экспериментального или практического применения. Изучение косетных конформных теорий поля, проводимое в данной работе, может быть интересно в связи с исследованием дробного квантового эффекта Холла. В работах Мура и Рида [1] и Рида и Резайи [2] было показано, что волновые функции состояний на нижних уровнях Ландау могут быть с хорошей точностью приближены корреляционными функциями конформных теорий поля, в том числе парафермионных. С другой стороны, как мы хорошо знаем, конформные теории поля с парафермионной симметрией могут быть сформулированы путём рассмотрения косетных алгебр с использованием конструкции Годдарда-Кента-Олива [3, 4]. Поэтому изучение рассматриваемых ниже косетных конформных теорий поля может представлять практический интерес. Таким образом, вычисление конформных блоков в таких конформных теориях поля, которые являются компонентом корреляционных функций, может помочь в конструировании искомых корреляторов для квантового эффекта Холла. Именно в этом месте нам на помощь приходит открытое некоторое время назад соответствие между корреляционными функциями в двумерной конформной теории поля и инстантонными вычислениями в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных четырёхмерных калибровочных теориях поля.

Однако, следует заметить, что в исследованиях, посвящённых дробному квантовому эффекту Холла речь идёт в основном о косетах, в которых уровни составляющих их аффинных алгебр Ли являются целыми числами. В нашем исследовании данный случай отдельно не разобран. При целых значениях уровней представления данных косетов становятся приводимыми, то есть мы имеем дело с вырожденными представлениями. Но это не является серьёзным препятствием, так как в настоящее время уже разработаны методы для анализа АГТ соответствия для таких моделей (см., например, работу [5]). В указанной работе был найден способ модифицировать инстантонные статсуммы $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории поля так, чтобы их можно было сравнивать с конформными блоками конформных теорий поля, заданных косетами с целыми уровнями.

Необходимо отметить, что существует ряд работ [6, 7], где найдена связь между волновыми функциями Мура-Рида и Рида-Резайи и конформными блоками косетных конформных теорий поля, рассматриваемых в данной работе. Учитывая наличие соответствия между данными конформными блоками и статсуммами $\mathcal{N}=2$ суперсимметричных калибровочных теорий поля, мы приходим к выводу о том, что из данных статсумм можно сконструировать волновые функции для дробного квантового эффекта Холла. Поэтому мы можем с уверенностью утверждать, что обобщение соответствия Алдая-Гайотты-Тачикавы на случай косетных конформных теорий поля и $\mathcal{N}=2$ суперсимметричных калибровочных теорий на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ представляет практический интерес.

Шесть лет назад в известной статье [8] была выдвинута гипотеза Алдая, Гаойтты и Тачикавы о том, что $\mathcal{N}=2$ суперсимметричная четырёхмерная калибровочная теория с $SU(2)$ калибровочной симметрией связана с двумерной конформной теорией поля. С тех пор она изучалась во множестве работ со стороны калибровочных теорий, конформной теории поля [9, 10, 11, 12, 13], матричных моделей [14, 15, 16, 17] и абстрактной математики [18, 19].

В работах [20, 21] была выдвинута гипотеза о соответствии между $SU(r)$ калибровочными теориями на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ и косетными конформными теориями поля, основанными на косете $\hat{\mathrm{su}}(r)_k \oplus \hat{\mathrm{su}}(r)_p/\hat{\mathrm{su}}(r)_{k+p}$, где p – положительное целое число и k – свободный параметр. Первые нетривиальные проверки этого соотношения для $p=2$ были сделаны в [22, 23, 24] и для $p=4$ в статье Н.Вилларда [25]. Явные вычисления для случая $(r,p)=(2,4)$ были там проведены для некоторых конкретных модулей и в пределе Уиттекера.

В последние годы замечательное соотношение между двумерными конформными теориями и четырёхмерными $\mathcal{N}=2$ суперсимметричными теориями Янга-Миллса получило значительное развитие. Первоначально сформулированное так называемое соответствие Алдая-Гайотто-Тачикавы, предложенное в [8], утверждает равенство корреляционных функций в теории поля Лиувилля и статистической суммы $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ (обобщения соответствия Алдая-Гайотты-Тачикавы для других калибровочных групп и конформных теорий поля см. в [26, 27, 28, 20, 29, 23, 30, 31, 25, 32, 33]). Статистическая сумма $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной калибровочной теории может быть вычислена как интеграл по пространству модулей инстантонов $\mathcal{M}$. С подходящей регуляризацией этот интеграл был вычислен явно в [34]. Это было достигнуто с использованием теоремы о локализации, которая говорит, что интеграл полностью определяется стационарными точками некоторой абелевой группы (тора), действующей на пространстве модулей $\mathcal{M}$ [35].

Несколько отдельно стоит вопрос об интегрируемых деформациях косетных конформных теорий поля. Изучение АГТ соответствия в данном контексте открывает новые возможности для нахождения спектра иерархий интегралов движения в таких двумерных интегрируемых теориях поля. Принимая во внимание тот факт, что сигма-модель на $AdS_5 \times S^5$ также является двумерной интегрируемой квантовой теорией поля, можно ожидать, что, благодаря AdS/CFT соответствию, исследования в этом направлении позволят по-новому взглянуть на спектральную задачу в $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса.

Цель работы. В данном исследовании была поставлена задача изучить обобщение АГТ соответствия на косетные конформные теории поля и интегрируемые деформации этих конформных теорий поля в контексте данного соответствия. А именно отдельно проверить соответствие конформных блоков S_3 парафермионной теории поля, которая является особым случаем в том смысле, что для неё, в отличие от остальных косетных конформных теорий поля, можно написать коммутационные соотношения, и инстантонных статсумм $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_4$, найти доказательства АГТ соответствия для случая калибровочной теории поля на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ и написать уравнения Бете для спектра p-параметрической деформации косетной конформной теории поля из этого обобщения АГТ соответствия.

Методы и подходы. В диссертации использованы методы конформной теории поля по вычислению конформных блоков, а также аксиоматическое построение конформной теории поля с косетной алгеброй симметрии. В третьей части диссертации применены методы интегрируемости в двумерной теории поля, в том числе системы интегралов движения и метод анзатца Бете.

Научные результаты. Все основные результаты в диссертации получены впервые.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 3 статьи в журналах из списка, рекомендованного ВАК.

1 Краткое содержание диссертации.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и приложений.

Во **Введении** сначала мы комментируем связь конформных теорий поля с косетной алгеброй симметрии и корреляционных функций в теории дробного квантового эффекта Холла. Затем мы даём короткий обзор соответствия Алдая-Гайотты-Тачикавы между корреляционными функциями двумерной конформной теории поля и инстантонными статсуммами в $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной калибровочной теории поля, а также его обобщений. В заключительной части Введения мы даём сведения о некотором классе двумерных теорий поля, которые являются деформациями косетных конформных теорий поля, рассмотренных в первых двух главах диссертации, в контексте АГТ соответствия.

Прежде чем приступать к описанию содержания диссертации, дадим краткое описание пространства модулей инстантонов в $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной калибровочной теории поля. В представленной работе мы рассматриваем $U(r)$ инстантоны на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ — решения уравнения самодуальности, с дополнительным условием для калибровочного поля

$$A_\mu(z_1,z_2)=A_\mu(\omega z_1,\omega^{-1}z_2),\quad \omega^p=1. \tag{1.1}$$

Нетривиальный факт о пространстве модулей инстантонов $\mathcal{M}$ состоит в том, что можно сконструировать действие некоторой алгебры симметрии $\mathcal{A}$ на эквивариантных когомологиях пространства модулей $\mathcal{M}$. Первый пример такого действия был предложен Накаджимой в [36, 37] для случаев алгебр Гейзенберга и Каца-Муди. В [38] было показано, что базис в пространстве эквивариантных когомологий может быть приведён в однозначное соответствие со стационарными точками тора, действующего на пространстве модулей. Таким образом, естественно предположить существование специального базиса геометрической природы в представлении $\mathcal{A}$, элементы которого находятся в однозначном соответствии со стационарными точками тора на пространстве модулей. Этот базис имеет ряд замечательных свойств, которые перечислены в [39].

В работе [20] была выдвинута гипотеза о том, что пространство модулей инстантонов $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной $U(r)$ калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ связано с алгеброй $\mathcal{A}(r,p)$, которая реализована посредством косета

$$\mathcal{A}(r,p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r}, \tag{1.2}$$

где n связано с эквивариантными параметрами (чтобы узнать больше подробностей об этом соответствии см. [39]). Другими словами, существует специальный базис в представлении $\mathcal{A}(r,p)$, чьи элементы находятся в однозначном соответствии со стационарными точками тора, действующего на пространстве модулей инстантонов $\mathcal{M}$. С другой стороны, эти стационарные точки могут быть пронумерованы наборами из r диаграмм Юнга, раскрашенными в p цветов. Таким образом, мы можем поставить в соответствие конкретный набор из r раскрашенных диаграмм Юнга каждому элементу этого геометрического базиса. Такие базисы были явно построены для $r=2$ и $p=1$ в [40], для $r=2$ и $p=2$ в [39] и для $r=1,2$ и $p=2$ в [41].

В **Первой главе** настоящей работы мы подробно анализируем случай алгебры $\mathcal{A}(2,4)$ и показываем на конкретных примерах, что АГТ соответствие действительно имеет место при $(r,p)=(2,4)$, а также высказываем некоторые гипотезы для случая произвольного p. Данный случай стоит выделить особо по следующей причине. Для алгебры $\mathcal{A}(2,4)$, в отличие от случая общего p, мы можем записать коммутационные соотношения благодаря тому, что в этом случае алгебра симметрии соответствует S_3 парафермионной алгебре, для которой такие соотношения известны.

Первая глава поделена на разделы следующим образом. Первый раздел посвящён инстантонным вычислениям на пространстве $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. В следующем разделе мы вычисляем статсумму Некрасова на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_4$. В третьем разделе мы напоминаем некоторые факты о расширенной алгебре симметрии $p=4$ парафермионов и выводим выражения для конформных блоков этой алгебры. В четвёртом разделе мы связываем инстантонную статсумму с парафермионными конформными блоками. Это соотношение является главным результатом первой главы. В Приложениях мы выводим коммутационные соотношения для вертексных операторов в S и D модулях соответственно, а также выписываем матрицы Грама/Шаповалова и матричные элементы для уровней $7/4$ и 2 соответственно.

Вторая глава нашей работы может рассматриваться как продолжение направления исследования, начатого в работах [39, 32, 30, 41, 31]. Главная цель этой части диссертации состоит в том, чтобы найти нетривиальные свидетельства в пользу верности предположенного соответствия между алгеброй $\mathcal{A}(2,p)$ и пространством модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, которое мы обозначаем как $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2,N)^{\mathbb{Z}_p}$.

При примененении дуальности уровня и ранга, алгебра $\mathcal{A}(2,p)$ может быть представлена двумя способами

$$\begin{tikzcd}
 & & (\mathcal{H}\times \mathrm{Vir}^{(1)})\times\ldots\times(\mathcal{H}\times \mathrm{Vir}^{(p)}) \arrow[dd, leftrightarrow, "4"'] \\
\bigsqcup_N \mathcal{M}(2,N)^{\mathbb{Z}_p} \arrow[r, leftrightarrow, "1"] & \mathcal{A}(2,p) \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "3"'] & \\
 & & \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p\times\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n}\times\mathcal{M}(3/4)\times\ldots\times\mathcal{M}(p+1/p+2)\times\mathcal{H}^p
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

где $\mathrm{Vir}^{(\sigma)}$, $\sigma=1,...,p$ – алгебры Вирасоро со специальными центральными зарядами c_σ, $\mathcal{H}$ – алгебра Гейзенберга, $\mathcal{M}(m/m+1)$ – Минимальная модель[1] и $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p\times\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p}/\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$ – косетная алгебра. В этой части работы мы изучаем связи (1.3) в подробностях.

В первом разделе второй главы мы находим производящие функции для стационарных точек на пространстве модулей. В следующем разделе мы изучаем первую реализацию $\mathcal{A}(2,p)$, обозначаемую стрелкой 2 на (1.3) и вычисляем характеры представления $\mathcal{A}(2,p)$ в этой реализации и сравниваем их с производящими функциями стационарных точек на пространстве модулей. В третьем разделе мы изучаем вторую реализацию $\mathcal{A}(2,p)$, представленную стрелкой 3 на (1.3). Также мы находим соответствие между характерами первой и второй реализаций $\mathcal{A}(2,p)$ (стрелка 4 на (1.3)). В следующем разделе мы находим равенства между инстантонными статсуммами $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной $U(2)$ чистой калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, посчитанными для разных компактификаций пространства модулей.

Третья глава работы является прямым продолжением [42], где был предложен набор уравнений анзатца Бете для спектра интегралов движения (ИД) в конформной теории поля (КТП). Здесь мы рассматриваем более общий класс

[1] Здесь мы уже использовали другую дуальность уровня и ранга, которая даёт $\widehat{\mathfrak{sl}}(p)_2=\mathcal{M}(3/4)\times\ldots\times\mathcal{M}(p+1/p+2)$.

конформных теорий поля, определяемых косетной конструкцией Годдарда-Кента-Олива [3]

$$\mathcal{K}(r,p,n)=\frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p\times\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n}. \tag{1.4}$$

Конформные теории поля из этого набора являются унитарными для неотрицательных целых значений параметров p и $n-p$, и этот набор включает в себя W унитарные минимальные модели $\mathcal{WA}_r(k)=\mathcal{K}(r,1,k-r)$ как частный случай.

Хорошо известно [43], что среди примарных полей модели $\mathcal{K}(r,p,n)$ есть специальное поле, которое определяет интегрируемое возмущение. Оно имеет конформную размерность $\Delta=\frac{n}{n+r}$ и соответствует посредством конструкции Годдарда-Кента-Олива разложению произведения двух вакуумных представлений по присоединённым представлениям. Этот оператор является полным аналогом оператора $\Phi_{1,3}$ в Минимальных моделях. В соответствии с [44] такое интегрируемое возмущение определяет бесконечный набор коммутирующих операторов, называемых локальными интегралами движения. В этой части работы мы изучаем задачу вычисления их общего спектра.

Косетные конформные теории поля (1.4) имеют некоторое киральное алгебраическое описание. Как правило, оно включает токи дробных спинов с неабелевой перестановкой, которая делает анализ таких моделей сложным. В некоторых случаях описание упрощается и киральная алгебра сводится к известным алгебрам. К примеру, мы получаем алгебру W_r [45, 46, 47] для $p=1$, NSR алгебру Невьё-Шварца-Рамона для $(r,p)=(2,2)$ и парафермионную алгебру спина $\frac{4}{3}$ [48] для $(r,p)=(2,4)$. Для нас будет важно, что описание моделей (1.4) при помощи косетов существует и гладко зависит от параметра n, который мы параметризуем как

$$n=\frac{p}{1+b^2}-r. \tag{1.5}$$

Новый параметр b будет рассматриваться ниже как непрерывный, и мы обозначаем соответствующую киральную алгебру как $\mathcal{G}(r,p)$. В новых обозначениях центральный заряд может быть записан как

$$c=\frac{p(r^2-1)}{p+r}+\frac{r(r^2-1)}{p}Q^2,\quad \text{где}\quad Q=b+\frac{1}{b}. \tag{1.6}$$

Иногда удобно думать об алгебре $\mathcal{G}(r,p)$ как об алгебре симметрии парафермионной теории Тоды [49]. Эта теория может быть реализована как связанная теория $(r-1)$-компонентного бозонного поля φ и $\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p/\widehat{\mathfrak{u}}(1)^{r-1}$ парафермионов [50]. Лагранжиан этой теории может быть схематически записан следующим образом

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mathrm{PF}}+\frac{p}{8\pi}\left(\partial_a\varphi\right)^2+\mu\sum_{k=1}^{r-1}\Psi_{e_k}\bar{\Psi}_{e_k}e^{b(e_k,\varphi)}, \tag{1.7}$$

где Ψ_{e_k} – парафермионный ток, соответствующий простому корню e_k алгебры $\mathfrak{sl}(r)$, $\bar{\Psi}_{e_k}$ – он же, но комплексно сопряжённый и $\mathcal{L}_{\mathrm{PF}}$ – формальный лагранжиан для парафермионной конформной теории поля. В этих терминах оператор интегрируемого возмущения имеет вид $\Psi_{e_0}\bar{\Psi}_{e_0}e^{b(e_0,\varphi)}$, где e_0 – наименьший корень. Математически, локальную систему интегралов движения можно определить как набор локальных величин в $\mathcal{U}(\mathcal{G}(r,p))$, которые коммутируют со всеми полями

$$\int_{\mathcal{C}} \Psi_{e_k}\bar{\Psi}_{e_k}e^{b(e_k,\varphi)}dx, \quad \text{где} \quad k=0,\dots,r-1. \tag{1.8}$$

Для $p=1$ известно, что эта система совпадает с квантовой системой типа Кортевега-де-Фриза с оператором Лакса порядка r [51]. Этот тип систем включает в себя квантовую систему Кортевега-де-Фриза для $r=2$ (связанную с алгеброй Вирасоро) и квантовую систему Буссинеска для $r=3$ (связанную с алгеброй W_3). Для общих значений параметров r и p мы называем соответствующую интегрируемую систему квантовой системой Кортевега-де-Фриза типа (r,p) или $\mathrm{qKdV}(r,p)$.

С другой стороны алгебра симметрии косета (1.4) недавно возникла в контексте соответствия Алдая-Гайотто-Тачикавы [8]. А именно, в работе [20] была выдвинута гипотеза о том, что $U(r)$ инстантонные вычисления на фактор-пространстве $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ соответствуют расширенной алгебре

$$\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \mathcal{G}(r,p), \tag{1.9}$$

которая посредством дуальности уровня и ранга соответствует алгебре $\mathcal{A}(r,p)$, обсуждавшейся выше. Изначальная гипотеза работы [20] была далее проверена в работах [21, 23, 22, 32, 52]. Математически, результаты [20] предсказывают существование специального базиса в представлении старшего веса алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \mathcal{G}(r,p)$ с замечательным свойством факторизации матричных элементов. В самом деле, как было отмечено в [53, 41], есть различные базисы, соответствующие различным компактификациям пространства модулей инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Для наших целей так называемый "цветной" базис (см. [41] для подробностей) является более подходящим. Этот базис является базисом собственных векторов для коммутативной алгебры (интегралов движения) внутри универсальной обёртывающей алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \mathcal{G}(r,p)$ с замечательно простым спектром. Для примера, в случае $r=1$ мы получаем интегрируемую систему Калоджеро-Сазерленда со спином [54], про которую известно, что её собственные функции являются полиномами Углова [55] (также известны как $\mathfrak{gl}(p)$ полиномы Джека). В случае $r>1$ соответствующая интегрируемая система может рассматриваться как связанная система r копий моделей Калоджеро-Мозера со спином. Мы называем эту систему обобщённой интегрируемой системой Калоджеро-Сазерленда типа (r,p) или $\mathrm{CS}(r,p)$. В третьей части нашей работы мы рассматриваем задачу нахождения спектра p-параметрической интегрируемой системы, которая интерполирует между $\mathrm{CS}(r,p)$ и $\mathrm{qKdV}(r,p)$.

В первом разделе третьей главы мы рассматриваем случай $p = 1$ и общего r, которое соответствует W_r алгебрам, в следующем разделе мы рассматриваем "ортогональное" направление: $r = 1$ и общее p, соответствующее теории свободного фермиона $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_1$ и, наконец, в третьем разделе мы рассматриваем специальный случай $p = r = 2$, который соответствует NSR алгебре Невьё-Шварца-Рамона.

2 Основные результаты диссертации

В заключение хотелось бы ещё раз кратко описать полученные результаты и сделать несколько замечаний относительно вопросов, оставшихся открытыми.

1. Первая глава данной работы устанавливает явный вид соответствия между $SU(2)$ статсуммой Некрасова на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_4$ и четырёхточечными конформными блоками в S и D модулях S_3 парафермионной алгебры. Это соответствие может быть схематично записано как $\mathcal{Z}_{\text{instanton}}(z) = (1-z)^{A_4}\mathcal{F}_{\text{conformal block}}(z)$.

   Можно заметить, что четырёхточечные косетные конформные блоки зависят от размерностей примарных полей в корреляционной функции и параметра P, который обозначает промежуточный параметр в конформном блоке. Как обычно, конформные размерности Δ_i параметризуются импульсами P_i как $\Delta_i = \frac{1}{p}(\frac{Q^2}{4} - P_i^2)$. Таким образом, косетные конформные блоки являются функциями параметров P_i^2 и P, то есть $\mathcal{F}_{\text{conformal block}} = f(P_i^2, P|z)$. С другой стороны, инстантонная статсумма на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ является функцией параметров P_i, P. Мы проделали явные проверки для случаев $p = 2, ..., 7$, что комбинация

   $$(1-z)^{-A_p}\mathcal{Z}^{(p)}_{\text{instanton}}(P_i, P|z) = \phi(P_i^2, P|z),$$

   где ϕ –некоторая функция, которая зависит от P_i^2, а не от P_i! Таким образом, можно предположить, что соотношение

   $$\mathcal{Z}^{(p)}_{\text{instanton}}(P_i, P|z) = (1-z)^{A_p}\mathcal{F}_{\text{conformal block}}(\Delta_i, P|z)$$

   выполняется для всех p ($A_p = \frac{2}{p}(Q/2 + P_2)(Q/2 - P_3)$).

2. Во второй главе нашей работы рассматривается алгебра $\mathcal{A}(2,p)$ и её связь с пространством модулей $U(2)$ инстантонов в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории поля на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. В начале мы нашли производящие функции стационарных точек действия абелевой группы (тора) на пространстве модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Далее мы рассмотрели две реализации алгебры $\mathcal{A}(2,p)$, отвечающие двум разным компактификациям пространства модулей инстантонов. Мы вычислили характеры представлений алгебры $\mathcal{A}(2,p)$ в этих двух реализациях и вывели формулы, связывающие их друг с другом и с производящими функциями стационарных точек на пространстве модулей инстантонов. Также были получены выражения, которые связывают трёхточечные функции в конформных теориях поля с алгебрами симметрии, представленными двумя разными реализациями алгебры $\mathcal{A}(2,p)$. Установленное соответствие между двумя реализациями алгебры $\mathcal{A}(2,p)$ и пространством модулей $U(2)$ инстантонов в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории поля на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ позволили нам также написать

формулы, связывающие инстантонные статсуммы, отвечающие разным компактификациям пространства модулей инстантонов.

3. В третьей главе нашей работы мы изучили спектр локальных интегралов движения в косетной конформной теории поля (1.4). На самом деле, мы заметили, что довольно естественно расширить косетную алгебру $\mathcal{G}(r,p)$ алгеброй $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r$. Мы предположили, что существует система интегралов движения в универсальной обёртывающей алгебре, при этом эта система интегралов движения зависит от p внешних параметров. Мы назвали эту систему $\mathrm{qILW}(r,p)$ системой и выдвинули утверждение, что её спектр даётся уравнениями анзатца Бете. Мы проверили нашу гипотезу для отдельных значений r и p. Сделаем несколько комментариев, которые представляются важными.

   - В настоящий момент ясно, что интегрируемая система, рассмотренная в нашей работе, происходит от определённой R-матрицы с параметрами твиста q_k. Она может быть представлена как $R-$матрица для янгиана $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}(p))$ [56]. Что неизвестно, так это цепочка рассуждений, приводящая от этой $R-$матрицы к уравнениями Бете . Другими словами, мы не знаем, как вывести анзатц Бете (алгебраический, функциональный или какой-либо другой) в этом случае.
   - Как мы объяснили во Введении, описание косетной конформной теории поля (1.4) с помощью киральной алгебры слишком сложно для анализа из-за присутствия токов с неабелевой монодромией. Считается, что существует описание той же конформной теории поля с помощью локальной симметрии. Такое описание было найдено в [57, 58] для $r = 2$. Соответствующая киральная алгебра генерируется током W спина 4 и может быть реализована в терминах трёх бозонных полей. Одно из преимуществ этого описания состоит в том, что оно непрерывно по обоим параметрам косета (1.4). В нашем подходе один из параметров косета (1.4) с необходимостью является целым (мы считаем p целым и n непрерывным). Было бы интересно найти способ обобщить уравнения анзатца Бете для нецелых значений p. Заметим, что спектр локальных интегралов движения в трёхполевой теории (также известной как модель Фатеева) был вычислен в [59, 60] с использованием соответствия между обыкновенными дифференциальными уравнениями и интегрируемыми моделями. Связь между соответствием между обыкновенными дифференциальными уравнениями и интегрируемыми моделями и нашим подходом не ясна.

Публикации по теме диссертации

[1] M. N. Alfimov and A. V. Litvinov, "On spectrum of ILW hierarchy in conformal field theory II: coset CFT's," JHEP **1502**, 150 (2015) [arXiv:1411.3313 [hep-th]].

[2] M. N. Alfimov, A. A. Belavin and G. M. Tarnopolsky, "Coset conformal field theory and instanton counting on C^2/Z_p," JHEP **1308**, 134 (2013) [arXiv:1306.3938 [hep-th]].

[3] M. N. Alfimov and G. M. Tarnopolsky, "Parafermionic Liouville field theory and instantons on ALE spaces," JHEP **1202**, 036 (2012) [arXiv:1110.5628 [hep-th]].

Список литературы

[1] N. Read and G. W. Moore, *Fractional quantum Hall effect and nonAbelian statistics*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **107** (1992) 157–166, [hep-th/9202001].

[2] N. Read and E. Rezayi, *Beyond paired quantum Hall states: Parafermions and incompressible states in the first excited Landau level*, *Phys. Rev.* **B59** (1999) 8084, [cond-mat/9809384].

[3] P. Goddard, A. Kent, and D. I. Olive, *Virasoro Algebras and Coset Space Models*, *Phys.Lett.* **B152** (1985) 88.

[4] P. Goddard, A. Kent, and D. I. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and Supervirasoro algebras*, *Commun. Math. Phys.* **103** (1986) 105–119.

[5] V. Belavin, O. Foda, and R. Santachiara, *AGT, N-Burge partitions and $\mathcal{W}_N$ minimal models*, *JHEP* **10** (2015) 073, [arXiv:1507.0354].

[6] R. Santachiara and A. Tanzini, *Moore-Read Fractional Quantum Hall wavefunctions and SU(2) quiver gauge theories*, *Phys. Rev.* **D82** (2010) 126006, [arXiv:1002.5017].

[7] B. Estienne, B. A. Bernevig, and R. Santachiara, *Electron-Quasihole Duality and Second Order Differential Equation for Read-Rezayi and Jacks Wavefunctions*, *Phys. Rev.* **B82** (2010) 205307, [arXiv:1005.3475].

[8] L. F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, *Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories*, *Lett. Math. Phys.* **91** (2010) 167–197, [arXiv:0906.3219].

[9] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, *On AGT conjecture*, *JHEP* **02** (2010) 014, [arXiv:0912.0504].

[10] L. Hadasz, Z. Jaskolski, and P. Suchanek, *Proving the AGT relation for $N_f = 0, 1, 2$ antifundamentals*, *JHEP* **06** (2010) 046, [arXiv:1004.1841].

[11] R. Poghossian, *Recursion relations in CFT and N=2 SYM theory*, *JHEP* **12** (2009) 038, [arXiv:0909.3412].

[12] A. Mironov and A. Morozov, *The power of Nekrasov functions*, *Phys. Lett.* **B680** (2009) 188–194, [arXiv:0908.2190].

[13] A. Mironov and A. Morozov, *Proving AGT relations in the large-c limit*, *Phys. Lett.* **B682** (2009) 118–124, [arXiv:0909.3531].

[14] R. Dijkgraaf and C. Vafa, *Toda theories, matrix models, topological strings, and N=2 gauge systems*, arXiv:0909.2453.

[15] M. C. Cheng, R. Dijkgraaf, and C. Vafa, *Non-perturbative topological strings and conformal blocks*, *JHEP* **1109** (2011) 022, [arXiv:1010.4573].

[16] A. Mironov, A. Morozov, and S. Shakirov, *A direct proof of AGT conjecture at beta = 1*, *JHEP* **1102** (2011) 067, [arXiv:1012.3137].

[17] A. Mironov, A. Morozov, and S. Shakirov, *Towards a proof of AGT conjecture by methods of matrix models*, *Int. J. Mod. Phys.* **A27** (2012) 1230001, [arXiv:1011.5629].

[18] A. Braverman, B. Feigin, M. Finkelberg, and L. Rybnikov, *A finite analog of the AGT relation I: finite W-algebras and quasimaps' spaces*, *Commun. Math. Phys.* (2011) [arXiv:1008.3655].

[19] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi, and S. Yanagida, *Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture*, arXiv:1106.4088.

[20] V. Belavin and B. Feigin, *Super Liouville conformal blocks from N=2 SU(2) quiver gauge theories*, *JHEP* **1107** (2011) 079, [arXiv:1105.5800].

[21] T. Nishioka and Y. Tachikawa, *Central charges of para-Liouville and Toda theories from M-5-branes*, *Phys.Rev.* **D84** (2011) 046009, [arXiv:1106.1172].

[22] G. Bonelli, K. Maruyoshi, and A. Tanzini, *Instantons on ALE spaces and Super Liouville Conformal Field Theories*, *JHEP* **1108** (2011) 056, [arXiv:1106.2505].

[23] A. Belavin, V. Belavin, and M. Bershtein, *Instantons and 2d Superconformal field theory*, *JHEP* **1109** (2011) 117, [arXiv:1106.4001].

[24] G. Bonelli, K. Maruyoshi, and A. Tanzini, *Gauge Theories on ALE Space and Super Liouville Correlation Functions*, *Lett. Math. Phys.* **101** (2012) 103–124, [arXiv:1107.4609].

[25] N. Wyllard, *Coset conformal blocks and N=2 gauge theories*, arXiv:1109.4264.

[26] N. Wyllard, *A_{N-1} conformal Toda field theory correlation functions from conformal $N = 2$ $SU(N)$ quiver gauge theories*, *JHEP* **11** (2009) 002, [arXiv:0907.2189].

[27] A. Mironov and A. Morozov, *On AGT relation in the case of $U(3)$*, *Nucl. Phys.* **B825** (2010) 1–37, [arXiv:0908.2569].

[28] L. F. Alday and Y. Tachikawa, *Affine SL(2) conformal blocks from 4d gauge theories*, *Lett. Math. Phys.* **94** (2010) 87–114, [arXiv:1005.4469].

[29] M.-C. Tan, *M-Theoretic Derivations of 4d-2d Dualities: From a Geometric Langlands Duality for Surfaces, to the AGT Correspondence, to Integrable Systems*, *JHEP* **07** (2013) 171, [arXiv:1301.1977].

[30] Y. Ito, *Ramond sector of super Liouville theory from instantons on an ALE space*, *Nucl. Phys.* **B861** (2012) 387–402, [arXiv:1110.2176].

[31] A. Belavin and B. Mukhametzhanov, *N=1 superconformal blocks with Ramond fields from AGT correspondence*, *JHEP* **01** (2013) 178, [arXiv:1210.7454].

[32] M. N. Alfimov and G. M. Tarnopolsky, *Parafermionic Liouville field theory and instantons on ALE spaces*, *JHEP* **02** (2012) 036, [arXiv:1110.5628].

[33] V. Belavin and N. Wyllard, *N=2 superconformal blocks and instanton partition functions*, *JHEP* **06** (2012) 173, [arXiv:1205.3091].

[34] N. Nekrasov and A. Okounkov, *Seiberg-Witten theory and random partitions*, hep-th/0306238.

[35] R. Flume and R. Poghossian, *An algorithm for the microscopic evaluation of the coefficients of the Seiberg-Witten prepotential*, *Int. J. Mod. Phys.* **A18** (2003) 2541, [hep-th/0208176].

[36] H. Nakajima, *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces*, *Ann. of Math.* **145** (1997) 379–388, [alg-geom/9507012].

[37] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, *Duke Math. J.* **91** (1998) 515–560, [math/9912158].

[38] M. Atiyah and R. Bott, *The Moment map and equivariant cohomology*, *Topology* **23** (1984) 1–28.

[39] A. A. Belavin, M. A. Bershtein, B. L. Feigin, A. V. Litvinov, and G. M. Tarnopolsky, *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory*, arXiv:1111.2803.

[40] V. A. Alba, V. A. Fateev, A. V. Litvinov, and G. M. Tarnopolsky, *On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture*, *Lett. Math. Phys.* **98** (2011) 33–64, [arXiv:1012.1312].

[41] A. A. Belavin, M. A. Bershtein, and G. M. Tarnopolsky, *Bases in coset conformal field theory from AGT correspondence and Macdonald polynomials at the roots of unity*, *JHEP* **03** (2013) 019, [arXiv:1211.2788].

[42] A. V. Litvinov, *On spectrum of ILW hierarchy in conformal field theory*, *JHEP* **11** (2013) 155, [arXiv:1307.8094].

[43] C. Ahn, D. Bernard, and A. LeClair, *Fractional Supersymmetries in Perturbed Coset Cfts and Integrable Soliton Theory*, *Nucl. Phys.* **B346** (1990) 409–439.

[44] A. B. Zamolodchikov, *Higher Order Integrals of Motion in Two-Dimensional Models of the Field Theory with a Broken Conformal Symmetry*, *JETP Lett.* **46** (1987) 160–164. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.46,129(1987)].

[45] A. B. Zamolodchikov, *Infinite Additional Symmetries in Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory*, *Theor. Math. Phys.* **65** (1985) 1205–1213.

[46] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, *Conformal quantum field theory models in two-dimensions having Z(3) symmetry*, *Nucl. Phys.* **B280** (1987) 644–660.

[47] V. A. Fateev and S. L. Lukyanov, *The models of two-dimensional conformal quantum field theory with Z(n) symmetry*, *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988) 507.

[48] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, *Representations of the algebra of parafermion currents of spin* 4/3 *in two-dimensional conformal field theory. Minimal models and the tricritical Potts* $Z(3)$ *model*, *Theor. Math. Phys.* **71** (1987) 451–462.

[49] A. LeClair, D. Nemeschansky, and N. P. Warner, *S matrices for perturbed N=2 superconformal field theory from quantum groups*, *Nucl. Phys.* **B390** (1993) 653–680, [hep-th/9206041].

[50] D. Gepner, *New Conformal Field Theories Associated with Lie Algebras and their Partition Functions*, *Nucl. Phys.* **B290** (1987) 10.

[51] B. A. Kupershmidt and P. Mathieu, *Quantum Korteweg-de Vries Like Equations and Perturbed Conformal Field Theories*, *Phys. Lett.* **B227** (1989) 245.

[52] M. N. Alfimov, A. A. Belavin, and G. M. Tarnopolsky, *Coset conformal field theory and instanton counting on* C^2/Z_p, *JHEP* **08** (2013) 134, [arXiv:1306.3938].

[53] A. A. Belavin, M. A. Bershtein, B. L. Feigin, A. V. Litvinov, and G. M. Tarnopolsky, *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory*, *Commun. Math. Phys.* **319** (2013) 269–301, [arXiv:1111.2803].

[54] Z. N. C. Ha and F. D. M. Haldane, *Models with inverse-square exchange*, *Phys. Rev.* **B46** (1992) 9359–9368.

[55] D. Uglov, *Yangian Gelfand-Zetlin bases, gl(N) Jack polynomials and computation of dynamical correlation functions in the spin Calogero-Sutherland model*, *Commun. Math. Phys.* **193** (1998) 663–696, [hep-th/9702020]. [Commun. Math. Phys.191,663(1998)].

[56] D. Maulik and A. Okounkov, *Quantum Groups and Quantum Cohomology*, arXiv:1211.1287.

[57] V. A. Fateev, *The sigma model (dual) representation for a two-parameter family of integrable quantum field theories*, *Nucl. Phys.* **B473** (1996) 509–538.

[58] B. L. Feigin and A. M. Semikhatov, *The $sl(2) + sl(2)/sl(2)$ coset theory as a Hamiltonian reduction of $D(2|1:\alpha)$*, *Nucl. Phys.* **B610** (2001) 489–530, [hep-th/0102078].

[59] S. L. Lukyanov, *ODE/IM correspondence for the Fateev model*, *JHEP* **12** (2013) 012, [arXiv:1303.2566].

[60] V. V. Bazhanov and S. L. Lukyanov, *Integrable structure of Quantum Field Theory: Classical flat connections versus quantum stationary states*, *JHEP* **09** (2014) 147, [arXiv:1310.4390].