

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального
образования

”Московский физико-технический институт (государственный университет)”

На правах рукописи

АЛФИМОВ Михаил Николаевич

**ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СТРУКТУРЫ, КОСЕТНЫЕ
КОНФОРМНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ИНСТАНТОНЫ НА ALE
ПРОСТРАНСТВАХ**

(01.04.02 – теоретическая физика)

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н. А.В. Леонидов

Москва – 2015

Содержание

Введение	4
1 Парафермионная теория поля Лиувилля и инстантоны на ALE пространствах	12
1.1 Инстантонные вычисления на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$	13
1.2 Инстантонные вклады, соответствующие S и D модулям S_3 парафермионной алгебры	17
1.3 Конформные блоки S_3 парафермионной алгебры	20
1.3.1 Расширенная алгебра симметрии $p = 4$ парафермионов	20
1.3.2 Конформные блоки	23
1.4 Сравнение конформных блоков в S и D модулях S_3 парафермионной алгебры с инстантонной статсуммой на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_4$	33
1.5 Завершающие замечания и открытые вопросы	34
2 Косетная конформная теория поля и инстантонные вычисления на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$	36
2.1 Пространство модулей инстантонов и действие группы тора	37
2.1.1 Стационарные точки действия тора на многообразии модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$	37
2.1.2 Классы эквивалентности производящих функций стационарных точек	40
2.2 $\mathcal{A}(2, p)$ как модель с p симметриями Вирасоро	44
2.2.1 Произведение p моделей	46
2.2.2 Характеры первой реализации и производящие функции стационарных точек	52
2.3 $\mathcal{A}(2, p)$ как произведение Минимальных Моделей и косета	53
2.3.1 Косет $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p}/\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$	55

2.3.2	Последовательные Минимальные Модели	58
2.3.3	Сопоставление характеров представлений первой и второй реализаций алгебры $\mathcal{A}(2, p)$	60
2.3.4	Трёхточечные функции косетной модели и их связь с трёхточечными функциями теории Лиувилля	62
2.4	Статсуммы Некрасова для различных построений пространства модулей инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$	68
2.4.1	Инстантоны на ALE пространстве $\widetilde{\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p}$	68
2.4.2	Компактификация путём индуцирования действия \mathbb{Z}_p на пространстве модулей инстантонов на \mathbb{C}^2	70
2.4.3	Базисы в конформной теории поля и равенство инстантонных статсумм	71
3	Спектр ILW иерархии в косетной конформной теории поля	74
3.1	Случай $p = 1$ и общего r : W-алгебры	76
3.2	Случай $r = 1$ и общего p : $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_1$ алгебра	79
3.3	Случай $r = p = 2$: квантовая суперсимметричная система Кортевега-де-Фриза	81
	Заключение	84
	Приложения	88
A	Коммутационные соотношения в S -модуле	88
B	Коммутационные соотношения в D -модуле	93
C	Матрица Грама/Шаповалова и матричные элементы на уровне $7/4$	97
D	Матрица Грама/Шаповалова и матричные элементы на уровне 2	98
E	Симметрии производящих функций	99
F	Конформные теории поля, основанные на косете	102

G	Размерность состояний старшего веса представления $[\Psi_s^m(\mu)]$. . .	103
H	Доказательство тождеств для Υ -функций	105
H.1	Тождества для Υ -функций для произвольного p	105
H.2	Тождества для Υ -функций со сдвинутыми аргументами для $p = 3$	113
I	Вывод тождеств для трёхточечных функций.	115
I.1	Доказательство равенства трёхточечных функций для произвольного p	115
I.2	Доказательство равенства трёхточечных функций в дру- гих секторах для $p = 3$	116
Публикации по теме диссертации		119

Введение

Представленная работа посвящена описанию связей между косетными конформными теориями поля и инстантонными вычислениями в суперсимметричных калибровочных теориях, а также интегрируемым структурам, возникающим в контексте этого соответствия. Данная область теоретической физики имеет интересную и богатую историю развития, однако значительная часть исследователей, занимающихся данной тематикой, уделяла не так много внимания ценности этих исследований для возможного экспериментального или практического применения. Изучение косетных конформных теорий поля, проводимое в данной работе, может быть интересно в связи с исследованием дробного квантового эффекта Холла. В работах Мура и Рида [1] и Рида и Резайи [2] было показано, что волновые функции состояний на нижних уровнях Ландау могут быть с хорошей точностью приближены корреляционными функциями конформных теорий поля, в том числе парафермионных. С другой стороны, как мы хорошо знаем, конформные теории поля с парафермионной симметрией могут быть сформулированы путём рассмотрения косетных алгебр с использованием конструкции Годдарда-Кента-Олива [3, 4]. Поэтому изучение рассматриваемых ниже косетных конформных теорий поля может представлять практический интерес. Таким образом, вычисление конформных блоков в таких конформных теориях поля, которые являются компонентом корреляционных функций, может помочь в конструировании искомых корреляторов для квантового эффекта Холла. Именно в этом месте нам на помощь приходит открытое некоторое время назад соответствие между корреляционными функциями в двумерной конформной теории поля и инстантонными вычислениями в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных четырёхмерных калибровочных теориях поля.

Однако, следует заметить, что в исследованиях, посвящённых дробному квантовому эффекту Холла речь идёт в основном о косетах, в которых уровни

составляющих их аффинных алгебр Ли являются целыми числами. В нашем исследовании данный случай отдельно не разобран. При целых значениях уровней представления данных косетов становятся приводимыми, то есть мы имеем дело с вырожденными представлениями. Но это не является серьёзным препятствием, так как в настоящее время уже разработаны методы для анализа АГТ соответствия для таких моделей (см., например, работу [5]). В указанной работе был найден способ модифицировать инстантонные статсуммы $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории поля так, чтобы они совпадали с конформными блоками конформных теорий поля, заданных косетами с целыми уровнями.

Необходимо отметить, что существует ряд работ [6, 7], где найдена связь между волновыми функциями Мура-Рида и Рида-Резайи и конформными блоками косетных конформных теорий поля, рассматриваемых в данной работе. Учитывая наличие соответствия между данными конформными блоками и статсуммами $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий поля, мы приходим к выводу о том, что из данных статсумм можно сконструировать волновые функции для дробного квантового эффекта Холла. Поэтому мы можем с уверенностью утверждать, что обобщение соответствия Алдая-Гайотты-Тачикавы на случай косетных конформных теорий поля и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ представляет практический интерес.

Шесть лет назад в известной статье [8] была выдвинута гипотеза Алдая, Гаойтты и Тачикавы о том, что $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная четырёхмерная калибровочная теория с $SU(2)$ калибровочной симметрией связана с двумерной конформной теорией поля. С тех пор она изучалась во множестве работ со стороны калибровочных теорий, конформной теории поля [9, 10, 11, 12, 13], матричных моделей [14, 15, 16, 17] и абстрактной математики [18, 19].

В работах [20, 21] была выдвинута гипотеза о соответствии между $SU(r)$

калибровочными теориями на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ и косетными конформными теориями поля, основанными на косете $\hat{\mathfrak{su}}(r)_k \oplus \hat{\mathfrak{su}}(r)_p/\hat{\mathfrak{su}}(r)_{k+p}$, где p – положительное целое число и k – свободный параметр. Первые нетривиальные проверки этого соотношения для $p = 2$ были сделаны в [22, 23, 24] и для $p = 4$ в статье Н.Вилларда [25]. Явные вычисления для случая $(r, p) = (2, 4)$ были там проведены для некоторых конкретных модулей и в пределе Уиттекера. В первой части настоящей работы мы подробно анализируем данный случай и показываем на конкретных примерах, что АГТ соответствие действительно имеет место при $(r, p) = (2, 4)$, а также высказываем некоторые гипотезы для случая произвольного p .

В последние годы замечательное соотношение между двумерными конформными теориями и четырёхмерными $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричными теориями Янга-Миллса получило значительное развитие. Первоначально сформулированное так называемое соответствие Алдая-Гайотто-Тачикавы, предложенное в [8], утверждает равенство корреляционных функций в теории поля Лиувилля и статистической суммы $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ (обобщения соответствия Алдая-Гайотты-Тачикавы для других калибровочных групп и конформных теорий поля см. в [26, 27, 28, 20, 29, 23, 30, 31, 25, 32, 33]). Статистическая сумма $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории может быть вычислена как интеграл по пространству модулей инстантонов \mathcal{M} . С подходящей регуляризацией этот интеграл был вычислен явно в [34]. Это было достигнуто с использованием теоремы о локализации, которая говорит, что интеграл полностью определяется стационарными точками некоторой абелевой группы (тора), действующей на пространстве модулей \mathcal{M} [35].

В настоящей работе мы рассматриваем $U(r)$ инстантоны на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ – решения уравнения самодуальности, с дополнительным условием для калибро-

вочного поля

$$A_\mu(z_1, z_2) = A_\mu(\omega z_1, \omega^{-1} z_2), \quad \omega^p = 1. \quad (0.1)$$

Нетривиальный факт о пространстве модулей инстантонов \mathcal{M} состоит в том, что можно сконструировать действие некоторой алгебры симметрии \mathcal{A} на эквивариантных когомологиях пространства модулей \mathcal{M} . Первый пример такого действия был предложен Накаджимой в [36, 37] для случаев алгебр Гейзенберга и Каца-Мууди. В [38] было показано, что базис в пространстве эквивариантных когомологий может быть приведён в однозначное соответствие с стационарными точками тора, действующего на пространстве модулей. Таким образом, естественно предположить существование специального базиса геометрической природы в представлении \mathcal{A} , элементы которого находятся в однозначном соответствии со стационарными точками тора на пространстве модулей. Этот базис имеет ряд замечательных свойств, которые перечислены в [39].

В работе [20] была выдвинута гипотеза о том, что пространство модулей инстантонов $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной $U(r)$ калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ связано с алгеброй $\mathcal{A}(r, p)$, которая реализована посредством косета

$$\mathcal{A}(r, p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r}, \quad (0.2)$$

где n связано с эквивариантными параметрами (чтобы узнать больше подробностей об этом соответствии см. [39]). Другими словами, существует специальный базис в представлении $\mathcal{A}(r, p)$, чьи элементы находятся в однозначном соответствии со стационарными точками тора, действующего на пространстве модулей инстантонов \mathcal{M} . С другой стороны, эти стационарные точки могут быть пронумерованы наборами из r диаграмм Юнга, раскрашенными в p цветов. Таким образом, мы можем поставить в соответствие конкретный набор из r раскрашенных диаграмм Юнга каждому элементу этого геометрического базиса. Такие базисы были явно построены для $r = 2$ и $p = 1$ в

[40], для $r = 2$ и $p = 2$ в [39] и для $r = 1, 2$ и $p = 2$ в [41]. Вторая часть нашей работы может рассматриваться как продолжение направления исследования, начатого в работах [39, 32, 30, 41, 31]. Главная цель этой части диссертации состоит в том, чтобы найти нетривиальные свидетельства в пользу верности предположенного соответствия между алгеброй $\mathcal{A}(2, p)$ и пространством модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, которое мы обозначаем как $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_p}$.

Третья часть работы является прямым продолжением [42], где был предложен набор уравнений анзатца Бете для спектра интегралов движения (ИД) в конформной теории поля (КТП). Здесь мы рассматриваем более общий класс конформных теорий поля, определяемых косетной конструкцией Годдарда-Кента-Олива [3]

$$\mathcal{K}(r, p, n) = \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n}. \quad (0.3)$$

Конформные теории поля из этого набора являются унитарными для неотрицательных целых значений параметров p и $n - p$, и этот набор включает в себя W унитарные минимальные модели $\mathcal{WA}_r(k) = \mathcal{K}(r, 1, k - r)$ как частный случай.

Хорошо известно [43], что среди примарных полей модели $\mathcal{K}(r, p, n)$ есть специальное поле, которое определяет интегрируемое возмущение. Оно имеет конформную размерность $\Delta = \frac{n}{n+r}$ и соответствует посредством конструкции Годдарда-Кента-Олива разложению произведения двух вакуумных представлений по присоединённым представлениям. Этот оператор является полным аналогом оператора $\Phi_{1,3}$ в Минимальных моделях. В соответствии с [44] такое интегрируемое возмущение определяет бесконечный набор коммутирующих операторов, называемых локальными интегралами движения. В этой части работы мы изучаем задачу вычисления их общего спектра.

Косетные конформные теории поля (0.3) имеют некоторое киральное алгебраическое описание. Как правило, оно включает токи дробных спинов с неабелевой перестановкой, которая делает анализ таких моделей сложным.

В некоторых случаях описание упрощается и киральная алгебра сводится к известным алгебрам. К примеру, мы получаем алгебру W_r [45, 46, 47] для $p = 1$, NSR алгебру Невьё-Шварца-Рамона для $(r, p) = (2, 2)$ и парафермионную алгебру спина $\frac{4}{3}$ [48] для $(r, p) = (2, 4)$. Для нас будет важно, что описание моделей (0.3) при помощи косетов существует и гладко зависит от параметра n , который мы параметризуем как

$$n = \frac{p}{1 + b^2} - r. \quad (0.4)$$

Новый параметр b будет рассматриваться ниже как непрерывный, и мы обозначаем соответствующую киральную алгебру как $\mathcal{G}(r, p)$. В новых обозначениях центральный заряд может быть записан как

$$c = \frac{p(r^2 - 1)}{p + r} + \frac{r(r^2 - 1)}{p} Q^2, \quad \text{где } Q = b + \frac{1}{b}. \quad (0.5)$$

Иногда удобно думать об алгебре $\mathcal{G}(r, p)$ как об алгебре симметрии парафермионной теории Тоды [49]. Эта теория может быть реализована как связанная теория $(r - 1)$ -компонентного бозонного поля φ и $\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p/\widehat{\mathfrak{u}}(1)^{r-1}$ парафермионов [50]. Лагранжиан этой теории может быть схематически записан следующим образом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{PF}} + \frac{p}{8\pi} (\partial_a \varphi)^2 + \mu \sum_{k=1}^{r-1} \Psi_{e_k} \bar{\Psi}_{e_k} e^{b(e_k, \varphi)}, \quad (0.6)$$

где Ψ_{e_k} – парафермионный ток, соответствующий простому корню e_k алгебры $\mathfrak{sl}(r)$, $\bar{\Psi}_{e_k}$ – он же, но комплексно сопряжённый и \mathcal{L}_{PF} – формальный лагранжиан для парафермионной конформной теории поля. В этих терминах оператор интегрируемого возмущения имеет вид $\Psi_{e_0} \bar{\Psi}_{e_0} e^{b(e_0, \varphi)}$, где e_0 – наименьший корень. Математически, локальную систему интегралов движения можно определить как набор локальных величин в $\mathcal{U}(\mathcal{G}(r, p))$, которые коммутируют со всеми полями

$$\int_{\mathcal{C}} \Psi_{e_k} \bar{\Psi}_{e_k} e^{b(e_k, \varphi)} dx, \quad \text{где } k = 0, \dots, r - 1. \quad (0.7)$$

Для $p = 1$ известно, что эта система совпадает с квантовой системой типа Кортевега-де-Фриза с оператором Лакса порядка r [51]. Этот тип систем включает в себя квантовую систему Кортевега-де-Фриза для $r = 2$ (связанную с алгеброй Вирасоро) и квантовую систему Буссинеска для $r = 3$ (связанную с алгеброй W_3). Для общих значений параметров r и p мы называем соответствующую интегрируемую систему квантовой системой Кортевега-де-Фриза типа (r, p) или $qKdV(r, p)$.

С другой стороны алгебра симметрии косета (0.3) недавно возникла в контексте соответствия Алдая-Гайотто-Тачикавы [8]. А именно, в работе [20] была выдвинута гипотеза о том, что $U(r)$ инстантонные вычисления на факторпространстве $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ соответствуют расширенной алгебре

$$\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \mathcal{G}(r, p), \quad (0.8)$$

которая посредством дуальности уровня и ранга соответствует алгебре $\mathcal{A}(r, p)$, обсуждавшейся выше. Изначальная гипотеза работы [20] была далее проверена в работах [21, 23, 22, 32, 52]. Математически, результаты [20] предсказывают существование специального базиса в представлении старшего веса алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \mathcal{G}(r, p)$ с замечательным свойством факторизации матричных элементов. В самом деле, как было отмечено в [53, 41], есть различные базисы, соответствующие различным компактификациям пространства модулей инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Для наших целей так называемый "цветной" базис (см. [41] для подробностей) является более подходящим. Этот базис является базисом собственных векторов для коммутативной алгебры (интегралов движения) внутри универсальной обёртывающей алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \mathcal{G}(r, p)$ с замечательно простым спектром. Для примера, в случае $r = 1$ мы получаем интегрируемую систему Калоджеро-Сазерленда со спином [54], про которую известно, что её собственные функции являются полиномами Углова [55] (также известны как $\mathfrak{gl}(p)$ полиномы Джека). В случае $r > 1$ соответствующая интегрируемая система может рассматриваться как связанная система

r копий моделей Калоджеро-Мозера со спином. Мы называем эту систему обобщённой интегрируемой системой Калоджеро-Сазерленда типа (r, p) или $CS(r, p)$. В третьей части нашей работы мы рассматриваем задачу нахождения спектра p -параметрической интегрируемой системы, которая интерполирует между $CS(r, p)$ и $qKdV(r, p)$.

1 Парафермионная теория поля Лиувилля и инстантоны на ALE пространствах

В первой части нашей работы мы изучаем случай $(r, p) = (2, 4)$. А именно, мы обосновываем явное равенство между определёнными статсуммами Некрасова на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_4$ и S_3 парафермионными четырёхточечными конформными блоками в так называемых S и D модулях [48]. Мы проверили соответствие для первых четырёх уровней. Мы показываем, что это равенство верно с точностью до так называемого $U(1)$ -фактора, который одинаков во всех $SU(2)$ соотношениях АГТ. Это может быть схематически представлено как

$$\mathcal{Z}_{\text{instanton}}(z) = (1 - z)^A \mathcal{F}_{\text{conformal block}}(z),$$

где A зависит от параметров конформного блока (или инстантонной статсуммы). Затем в конце данной части работы мы аргументируем, основываясь на явном вычислении инстантонной статсуммы на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ для $p = 2, \dots, 7$, что такое соотношение верно для всех p . Мы полагаем, что такие общие соотношения могут быть полезны для получения ответов для конформных блоков в парафермионных теориях с использованием вычислений в калибровочных теориях.

Первая часть работы поделена на разделы следующим образом. Раздел 1.1 посвящён инстантонным вычислениям на пространстве $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. В разделе 1.2 мы вычисляем статсумму Некрасова на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_4$. В разделе 1.3 мы напоминаем некоторые факты о расширенной алгебре симметрии $p = 4$ парафермионов и выводим выражения для конформных блоков этой алгебры. В разделе 1.4 мы связываем инстантонную статсумму с парафермионными конформными блоками. Это соотношение является главным результатом нашей работы. В Приложениях А и В мы выводим коммутационные соотношения для вертексных операторов в S и D модулях соответственно. В Приложениях С и D мы

выписываем матрицы Грама/Шаповалова и матричные элементы для уровней $7/4$ и 2 соответственно.

1.1 Инстантонные вычисления на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$

В этом разделе мы коротко напомним вычисление инстантонной статсуммы для $\mathcal{N} = 2 SU(n)$ калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ [56, 57]. Сначала опишем случай чистой $\mathcal{N} = 2 SU(n)$ калибровочной теории и затем сделаем предположение о более общих формулах.

Инстантонная статсумма для чистой $\mathcal{N} = 2 SU(n)$ калибровочной теории на \mathbb{C}^2 выглядит как [35]

$$\mathcal{Z}^{(n)}(\vec{P}|z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{\substack{\vec{Y} \\ |\vec{Y}|=k}} \prod_{i,j=1}^n \prod_{s \in Y_i} \frac{1}{E_{Y_i, Y_j}(s|P_i - P_j)(Q - E_{Y_i, Y_j}(s|P_i - P_j))}, \quad (1.1)$$

где сумма идёт по всем наборам из n диаграмм Юнга $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$, $k = |\vec{Y}|$ – полное число клеток в \vec{Y} , $\vec{P} = (P_1, \dots, P_n)$ – вакуумное среднее присоединённого скаляра, s обозначает клетку в диаграмме Юнга Y_i , и

$$E_{Y,W}(P|s) = P - l_W(s)b^{-1} + (a_Y(s) + 1)b, \quad (1.2)$$

где $a_Y(s)$ и $l_Y(s)$ – длины руки и ноги соответственно, а именно число клеток в Y справа и снизу от клетки $s \in Y$, см. рисунок 1.

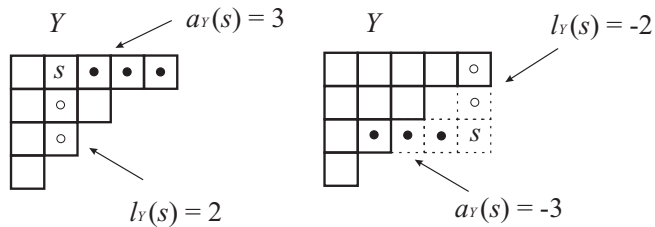


Рис. 1: Нога $l_Y(s)$ и рука $a_Y(s)$ диаграммы Юнга.

Для того, чтобы сравнить ответы со стороны калибровочной и конформной теорий поля и для удобства в дальнейшем мы уже перешли от параметров

деформации ϵ_1, ϵ_2 [58, 59] к параметру b , который параметризует центральный заряд c в конформной теории поля:

$$\epsilon_1 = b^{-1}, \quad \epsilon_2 = b \quad (1.3)$$

и $Q = \epsilon_1 + \epsilon_2 = b + b^{-1}$.

В случае инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, мы имеем похожую структуру статсуммы, но с некоторыми различиями, которые мы собираемся сейчас описать. Мы приписываем \mathbb{Z}_p заряд q_i , где $i = 1, \dots, n$, каждой диаграмме Юнга Y_i , где q_i может принимать значения $0, 1, \dots, p-1$. Мы их обозначаем как $Y_i^{q_i}$. Удобно раскрасить диаграммы Юнга в p цветов следующим образом: клетка с координатами (i, j) диаграммы Юнга Y^q имеет цвет $r \equiv q + i - j \pmod{p}$, см., например, рисунок 2.

2	3	0	1	2
1	2	3		
0	1			
3				

Рис. 2: Раскрашенные диаграммы Юнга $Y = \{5, 3, 2, 1\}$ с зарядом $q = 2$ и для случая $p = 4$.

Затем мы вводим в рассмотрение два p -мерных вектора $\{n_r\}$ и $\{k_r\}$, где $r = 0, 1, \dots, p-1$. Целое число n_r – это число диаграмм Юнга с зарядом $q = r$ и k_r – число клеток с цветом r во всех диаграммах Юнга $(Y_1^{q_1}, \dots, Y_n^{q_n})$. Таким образом, $\sum_r n_r = n$ и $\sum_r k_r = k$.

Векторы $\{n_r\}$ и $\{k_r\}$ связаны с топологическими характеристиками инстантонов:

$$c_1(E) = \sum_{r=0}^{p-1} (n_r - 2k_r + k_{r+1} + k_{r-1}) c_1(T_r), \quad (1.4)$$

где $c_1(E)$ – первый класс Черна калибровочного расслоения E и $c_1(T_r)$ – первый класс Черна векторного расслоения T_r на ALE пространстве. Первый

класс Черна $c_1(T_r)$ расслоений T_r , $r \neq 0$ ($c_1(T_0) = 0$), составляет базис во второй группе когомологий. В этой работе мы рассматриваем только случай $c_1(E) = 0$. Таким образом, мы получаем уравнения

$$0 = n_r - 2k_r + k_{r+1} + k_{r-1}, \quad \text{для } r = 1, \dots, p-1. \quad (1.5)$$

Для простоты мы делаем сдвиг¹ $k_r = k_0 + \delta k_r$, тогда мы имеем для δk_r

$$\delta k_r = \sum_{l=1}^{p-1} C_{rl} n_l, \quad \text{где } C_{rl} = \min(r, l) - \frac{rl}{p}. \quad (1.6)$$

Ниже мы рассмотрим только случай $n = 2$. Ясно, что n_r и k_r – целые числа. Из-за этого ограничения существуют следующие варианты значений вектора $\{n_r\}$: первый вариант: $n_0 = 2$, $n_r = 0, r > 0$; второй: $n_r = n_{p-r} = 1$ для $r = 1, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$; и третий $n_{p/2} = 2$ в случае чётного p . Таким образом, для нескольких первых значений p мы имеем следующие ряды:

$p = 2$	$\{n_r\}$	$\{\delta k_r\}$	q_1	q_2	
1.	(2, 0)	(0, 0)	0	0	
2.	(0, 2)	(1, 1)	1	1	
$p = 3$	$\{n_r\}$	$\{\delta k_r\}$	q_1	q_2	
1.	(2, 0, 0)	(0, 0, 0)	0	0	
2.	(0, 1, 1)	(0, 1, 1)	1	2	(1.7)
$p = 4$	$\{n_r\}$	$\{\delta k_r\}$	q_1	q_2	
1.	(2, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	0	0	
2.	(0, 1, 0, 1)	(0, 1, 1, 1)	1	3	
3.	(0, 0, 2, 0)	(0, 1, 2, 1)	2	2	

Мы используем символ вектора \vec{P} для обозначения пар $\vec{P} = (P, -P)$ и $\vec{P}' = (P', -P')$ и также $\vec{Y}^q = (Y_1^{q_1}, Y_2^{q_2})$ и $\vec{W}^u = (W_1^{u_1}, W_2^{u_2})$. Сейчас мы можем

¹Следует отметить, что δk_r – разница между числом клеток цвета r и цвета 0 во всех диаграммах Юнга.

определить вклад бифундаментального мультиплетта для $SU(2)$ калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ (случай $p = 1$ см., например, в [8]):

$$Z_{\text{bif}}^{(p)}(\alpha|\vec{P}', \vec{W}^u, \vec{P}, \vec{Y}^q) = \prod_{i,j=1}^2 \prod_{s \in Y_i^{q_i \diamond}} (Q - E_{Y_i, W_j}(P_i - P'_j|s) - \alpha) \times \\ \times \prod_{t \in W_j^{u_j \diamond}} (E_{W_j, Y_i}(P'_j - P_i|t) - \alpha), \quad (1.8)$$

где

$$E_{Y,W}(P|s) = P - l_W(s)b^{-1} + (a_Y(s) + 1)b$$

и произведение по $s \in Y_i^{q_i}$ и $t \in W_j^{u_j}$ ограничено набором \diamond , который включает все s, t , которые удовлетворяют

$$s \in Y_i^{q_i \diamond} : l_{W_j}(s) + a_{Y_i}(s) + 1 \equiv u_j - q_i \pmod{p}, \\ t \in W_j^{u_j \diamond} : l_{Y_i}(t) + a_{W_j}(t) + 1 \equiv q_i - u_j \pmod{p}, \quad (1.9)$$

(здесь мы также перешли от обозначений калибровочной теории к обозначениям конформной теории, и обозначаем массу гипермультиплетта как α .) Инстантонная статсумма теории с двумя фундаментальными и двумя антифундаментальными гипермультиплеттами материи, которую следует сравнивать с четырёхточечными конформными блоками, выглядит как

$$\mathcal{Z}^{(p)}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|P|z) = \\ = \sum_{\{\vec{Y}^q\}} \frac{Z_{\text{bif}}^{(p)}(\alpha_1|\vec{P}_1, (\emptyset^0, \emptyset^0), \vec{P}, \vec{Y}^q) Z_{\text{bif}}^{(p)}(\alpha_2|\vec{P}, \vec{Y}^q, \vec{P}_2, (\emptyset^0, \emptyset^0))}{Z_{\text{bif}}^{(p)}(0|\vec{P}, \vec{Y}^q, \vec{P}, \vec{Y}^q)} \cdot z^{\frac{|\vec{Y}^q|}{p}}, \quad (1.10)$$

где сумма идёт по всем парам диаграмм Юнга $\{\vec{Y}^q\}$ из специального набора, которые отвечают соотношению (1.5).

В следующем разделе мы проводим явные вычисления статсуммы (1.10) в случае $p = 4$. Как мы можем видеть из таблицы (1.7) в этом случае есть три ряда. Первый ($k = \sum_r k_r = |\vec{Y}^q| = 4k_0$) и третий ($k = 4k_0 + 4$) ряды дают

вклад в целые степени параметра z , тогда как второй ряд ($k = 4k_0 + 3$) даёт $z^{k_0+3/4}$. Таким образом, можно переписать (1.10) для $p = 4$ как

$$\mathcal{Z}^{(4)}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|P|z) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{Z}^{(4,i \text{ series})}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|P|z), \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z}^{(4,i \text{ series})}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|P|z) = \\ &= \sum_{\{\vec{Y}^q\} \in i \text{ series}} \frac{Z_{\text{bif}}^{(4)}(\alpha_1|\vec{P}_1, (\emptyset^0, \emptyset^0), \vec{P}, \vec{Y}^q) Z_{\text{bif}}^{(4)}(\alpha_2|\vec{P}, \vec{Y}^q, \vec{P}_2, (\emptyset^0, \emptyset^0))}{Z_{\text{bif}}^{(4)}(0|\vec{P}, \vec{Y}^q, \vec{P}, \vec{Y}^q)} \cdot z^{\frac{|\vec{Y}^q|}{p}}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $i = 1, 2, 3$. Мы также можем переписать это как

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z}^{(4)}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|P|z) = \\ &= \sum_{k_0=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{k_0}^{(4,1st \text{ series})} z^{k_0} + \sum_{k_0=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{k_0+3/4}^{(4,2nd \text{ series})} z^{k_0+3/4} + \sum_{k_0=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{k_0+1}^{(4,3rd \text{ series})} z^{k_0+1}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Мы проверяем, что каждый из этих рядов совпадает с определённым типом конформных блоков S_3 -парафермионной алгебры с точностью до $U(1)$ -фактора, который равен $(1-z)^{A_4}$, где $A_4 = \frac{1}{2}\alpha_1(Q - \alpha_2)$ в случае $p = 4$. Как мы проиллюстрируем в Разделе 6 в случае произвольного p он должен иметь ту же структуру с $A_p = \frac{2}{p}\alpha_1(Q - \alpha_2)$.

1.2 Инстантонные вклады, соответствующие S и D модулям S_3 парафермионной алгебры

В данном разделе мы проделываем явные вычисления статсуммы $\mathcal{Z}^{(p)}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|P|z)$ для случая $p = 4$ до уровня z^2 , поэтому мы должны учесть все диграммы Юнга, которые дают вклад в статсумму на уровнях $z^{3/4}, z, z^{7/4}$ и z^2 . Для простоты записи ответов мы будем использовать обо-

значения со стороны конформной теории поля, такие как

$$\Delta_{P_i} = \frac{1}{4}\left(\frac{Q^2}{4} - P_i^2\right), \quad \Delta_{\alpha_i} = \frac{1}{4}\alpha_i(Q - \alpha_i), \quad c = 2 + \frac{3}{2}Q^2, \quad Q = b + b^{-1}. \quad (1.14)$$

• Пары диаграмм Юнга, которые дают вклад в статсумму на уровне $z^{3/4}$ – это $(\{3\}, \{\emptyset\})$, $(\{2\}, \{1\})$, $(\{1\}, \{1, 1\})$, $(\{\emptyset\}, \{1, 1, 1\})$, которые принадлежат ко второму ряду с зарядами $q_1 = 1$, $q_2 = 3$. Они явно показаны на рисунке 3.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \emptyset \right) \quad \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right) \quad \left(\emptyset, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \right)$$

Рис. 3: Диаграммы Юнга из второго ряда на уровне $z^{3/4}$.

Используя формулы (1.12) и (1.8) для $p = 4$, мы имеем

$$\mathcal{Z}_{3/4}^{(4,2\text{nd series})} = \frac{4}{(Q + 2b^{-1} - 2P)(Q + 2b + 2P)}. \quad (1.15)$$

Заметим, что симметрия между парами диаграмм Юнга $(Y_1^{q_1}, Y_2^{q_2}) \leftrightarrow (Y_2^{q_1}, Y_1^{q_2})$ отсутствует по причине различных зарядов: $q_1 \neq q_2$, так что

$\mathcal{Z}^{(4,2\text{nd series})}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|P|z)$ не подчиняется симметрии $P \rightarrow -P$. Другими словами, выполняется следующее общее равенство

$$\mathcal{Z}_{q_1, q_2}^{(p, i \text{ series})}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|P|z) = \mathcal{Z}_{q_2, q_1}^{(p, i \text{ series})}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|-P|z) \quad (1.16)$$

где q_1 и q_2 – заряды диаграмм Юнга из i -го ряда. Эта структура имеет ясную интерпретацию с точки зрения конформной теории поля (CFT).

• Пары диаграмм Юнга, которые дают вклад в статсумму на уровне z принадлежат к первому и третьему ряду. Из первого ряда это следующие пары диаграмм Юнга: $(\{4\}, \{\emptyset\})$, $(\{3, 1\}, \{\emptyset\})$, $(\{2, 1, 1\}, \{\emptyset\})$, $(\{1, 1, 1, 1\}, \{\emptyset\})$, $(\{\emptyset\}, \{4\})$, $(\{\emptyset\}, \{3, 1\})$, $(\{\emptyset\}, \{2, 1, 1\})$, $(\{\emptyset\}, \{1, 1, 1, 1\})$ с зарядами $q_1 = q_2 = 0$. Все они явно показаны на рисунке 4.

$$\begin{array}{cccc}
(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \emptyset) & (\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \emptyset) & (\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \emptyset) & (\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \emptyset) \\
(\emptyset, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}) & (\emptyset, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}) & (\emptyset, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}) & (\emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array})
\end{array}$$

Рис. 4: Диаграммы Юнга из первого ряда на уровне z .

И мы получаем для $\mathcal{Z}_1^{(4,1st\ series)}$ следующий ответ

$$\mathcal{Z}_1^{(4,1st\ series)} = \frac{(\Delta_P - \Delta_{P_1} + \Delta_{\alpha_1})(\Delta_P - \Delta_{P_2} + \Delta_{\alpha_2})}{2\Delta_P} - \frac{1}{2}\alpha_1(Q - \alpha_2). \quad (1.17)$$

(мы также подразумеваем, что $\mathcal{Z}_0^{(4,1st\ series)} = 1$, и что имеется лишь одна пара диаграмм Юнга ($\{\emptyset^0\}, \{\emptyset^0\}$) для этого случая). Пары диаграмм Юнга для третьего ряда следующие ($\{2, 2\}, \{\emptyset\}$), ($\{2\}, \{1, 1\}$), ($\{2, 1\}, \{1\}$), ($\{\emptyset\}, \{2, 2\}$), ($\{1\}, \{2, 1\}$), ($\{1, 1\}, \{2\}$), с зарядами $q_1 = q_2 = 2$. Эти диаграммы показаны на рисунке 5.

$$\begin{array}{ccc}
(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \emptyset) & (\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}) & (\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}) \\
(\emptyset, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}) & (\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}) & (\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \end{array})
\end{array}$$

Рис. 5: Диаграммы Юнга из третьего ряда на уровне z .

Тогда можно получить

$$\mathcal{Z}_1^{(4,3rd\ series)} = \frac{3}{128\Delta_P(\Delta_P + \frac{c}{8} - \frac{1}{4})}. \quad (1.18)$$

• Имеется 32 пары диаграмм Юнга, которые дают вклад в статсумму на уровне $z^{7/4}$. Первые несколько таких диаграмм показаны на рисунке 6.

Ответ для $\mathcal{Z}_{7/4}^{(4,2nd\ series)}$ слишком громоздкий, и мы явно не выписываем его в этой работе.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \emptyset \right) \quad \left(\emptyset, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \quad \dots$$

Рис. 6: Диаграммы Юнга из второго ряда на уровне $z^{7/4}$.

- На уровне z^2 первый и третий ряды дают вклады. Имеется 56 пар диаграмм Юнга из первого ряда и пар диаграмм Юнга из третьего ряда на этом уровне. Явные ответы для $\mathcal{Z}_2^{(4,1\text{st series})}$ и для $\mathcal{Z}_2^{(4,3\text{rd series})}$ также опущены из-за их огромных размеров.

1.3 Конформные блоки S_3 парафермионной алгебры

1.3.1 Расширенная алгебра симметрии $p = 4$ парафермионов

Известно, что расширенная алгебра симметрии так называемых S_3 парафермионов есть алгебра спина $4/3$. Детальное обсуждение этой алгебры можно найти в [60, 48]. Здесь мы выделим лишь аспекты, необходимые для нашего дальнейшего обсуждения. Во-первых, мы выпишем операторные разложения (OPEs) тензора энергии-импульса $T(z)$ и тока дробного спина $4/3$ $G^\pm(z)$

$$T(z)T(w) = \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w) + \dots, \quad (1.19)$$

$$T(z)G^\pm(w) = \frac{4}{3(z-w)^2}G^\pm(w) + \frac{1}{z-w}\partial G^\pm(w) + \dots, \quad (1.20)$$

$$G^\pm(z)G^\pm(w) = \frac{\lambda^\pm}{(z-w)^{\frac{4}{3}}}G^\mp(w) + \frac{\lambda^\mp}{(z-w)^{\frac{1}{3}}}\partial G^\mp(w) + \dots, \quad (1.21)$$

$$G^\pm(z)G^\mp(w) = \frac{3c}{8(z-w)^{\frac{8}{3}}} + \frac{1}{(z-w)^{\frac{2}{3}}}T(w) + \dots, \quad (1.22)$$

где

$$c = 2 + \frac{3}{2}Q^2, \quad \lambda^\pm = \pm \sqrt{\frac{c-8}{6}}, \quad Q = b + b^{-1}, \quad (1.23)$$

а многоточие обозначает несингулярные члены. Каждому полю в алгебре выше приписан так называемый \mathbb{Z}_3 -заряд. Тензору энергии-импульса $T(z)$

приписывается \mathbb{Z}_3 -заряд $q = 0$, а дробным токам $G^\pm(z)$ приписываются \mathbb{Z}_3 -заряды $q = \pm 1$.

Следующая важная вещь, которую необходимо выделить, – это разложение по модам дробных токов. Эти моды могут быть определены лишь действием на состояние $\chi_q(0)$ с соответствующим \mathbb{Z}_3 -зарядом q

$$G_{k-\frac{1\mp q}{3}}^\pm \chi_q(0) \stackrel{\text{def}}{=} \oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} z^{k\pm\frac{q}{3}} G^\pm(z) \chi_q(0), \quad (1.24)$$

где γ – контур, окружающий начало координат и $k \in \mathbb{Z}$. Из формулы (1.24) можно извлечь правило, в соответствии с которым моды G^\pm могут действовать на состояние с \mathbb{Z}_3 -зарядом q :

$$G_{k-\frac{1\mp q}{3}}^\pm |q\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad q = 0, \pm 1. \quad (1.25)$$

Коммутационные соотношения для мод $T(z)$ и $G^\pm(z)$ могут быть легко получены из соответствующих операторных разложений (1.19) и (1.20)

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}, \quad (1.26)$$

$$[L_m, G_r^\pm] = \left(\frac{m}{3} - r\right) G_{m+r}^\pm, \quad (1.27)$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$ и $r = k + \frac{1\mp q}{3}$ с $k \in \mathbb{Z}$ и q – \mathbb{Z}_3 -заряд состояния, на которое действует соответствующий G_r^\pm . Оказывается, что из-за того факта, что операторные разложения (1.21) и (1.22) алгебры дробного спина содержат дробные степени, невозможно получить обычные коммутационные соотношения, но возможно выписать так называемые обобщённые коммутационные

СООТНОШЕНИЯ

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{+\infty} C_k^{(-\frac{2}{3})} \left(G_{\frac{q}{3}+n-k}^+ G_{\frac{2+q}{3}+m-k}^+ - G_{\frac{q}{3}+m-k}^+ G_{\frac{2+q}{3}+n-k}^+ \right) |q\rangle = \\
& = \frac{\lambda^+}{2} (n-m) G_{\frac{2+2q}{3}+n+m}^+ |q\rangle, \\
& \sum_{k=0}^{+\infty} C_k^{(-\frac{2}{3})} \left(G_{-\frac{q}{3}+n-k}^- G_{\frac{2-q}{3}+m-k}^- - G_{-\frac{q}{3}+m-k}^- G_{\frac{2-q}{3}+n-k}^- \right) |q\rangle = \\
& = \frac{\lambda^-}{2} (n-m) G_{\frac{2-2q}{3}+n+m}^- |q\rangle, \\
& \sum_{k=0}^{+\infty} C_k^{(-\frac{1}{3})} \left(G_{\frac{1+q}{3}+n-k}^+ G_{-\frac{1+q}{3}+m-k}^- + G_{\frac{1+q}{3}+m-k}^- G_{-\frac{1+q}{3}+n-k}^+ \right) |q\rangle = \\
& = \left(L_{n+m} + \frac{3c}{16} \left(n+1 + \frac{q}{3} \right) \left(n + \frac{q}{3} \right) \right) |q\rangle,
\end{aligned} \tag{1.28}$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$ и

$$C_k^{(\nu)} = (-1)^k \binom{\nu}{k} = \frac{(-1)^k}{k!} \prod_{i=1}^k (\nu - i + 1). \tag{1.29}$$

Структура состояний старшего веса в этой алгебре следующая. Существует три различных модуля, обозначаемых S, D и R . Состояния старшего веса в этих модулях уничтожаются генераторами L_m и G_r^\pm с $r, m > 0$. R -модуль несущественен для нашей дискуссии. Мы обозначаем примарные состояния как

$$|\alpha; q\rangle, \tag{1.30}$$

где α – параметр Лиувилля состояния и q – \mathbb{Z}_3 -заряд состояния. Сопряжённое состояние обозначено как $\langle \alpha; q|$. Тогда в этих обозначениях состоянием старшего веса в S -модуле является $|\alpha; 0\rangle$. В D -модуле есть два состояния старшего веса, то есть состояние старшего веса двукратно вырождено, и они обозначены как $|\alpha; \pm 1\rangle$. Конформные размерности этих состояний старшего веса

$$\Delta_\alpha^{(s)} = \frac{1}{4} \alpha (Q - \alpha), \quad \Delta_\alpha^{(d)} = \frac{1}{4} \alpha (Q - \alpha) + \frac{1}{12}. \tag{1.31}$$

Мы используем следующие соглашения для состояний старшего веса в D -модуле

$$G_0^\pm |\alpha; \pm 1\rangle = \Lambda^\pm |\alpha; \mp 1\rangle, \quad \Lambda^\pm = \pm \sqrt{\frac{c}{24} - \Delta_\alpha^{(d)}}. \quad (1.32)$$

Базис состояний в каждом модуле может быть выбран в следующей форме

$$\prod_{i=1}^u G_{-r_i}^\pm \prod_{j=1}^v L_{-n_j} |\alpha; q\rangle. \quad (1.33)$$

Уровень состояния определяется как $l = l_0 + \delta$ с $l_0 = \sum_{i=1}^u r_i + \sum_{j=1}^v n_j$ и где $\delta = 0$ для S -модуля и $\delta = \frac{1}{12}$ для D -модуля. Заметим, что в этих определениях уровень состояния старшего веса в D -модуле $\frac{1}{12}$ и размерность $\Delta_\alpha^{(d)} = \Delta_\alpha^{(s)} + \frac{1}{12}$, что означает, что мы отсчитываем уровень состояния от уровня состояния старшего веса в S -модуле. Беря во внимание правило (1.25) для действия на состояние, можно показать, что возможные значения уровней в S -модуле $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{1}{3}$. То же самое в D -модуле $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{1}{12}$ и $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{3}{4}$. Эрмитовски сопряжённые генераторы: $(L_n)^\dagger = L_{-n}$, $(G_r^\pm)^\dagger = -G_{-r}^\mp$.

1.3.2 Конформные блоки

Чтобы посчитать коэффициенты парафермионных конформных блоков, мы вычисляем четырёхточечную корреляционную функцию состояний старшего веса в S -модуле. Мы обозначаем вертексный оператор этого состояния старшего веса как $W_\alpha^{(s)}(z)$. Тогда объект нашего интереса

$$\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}^{(s)}(1) W_{\alpha_2}^{(s)}(z) | m_2; 0 \rangle \quad (\equiv \langle W_{m_1}^{(s)}(\infty) W_{\alpha_1}^{(s)}(1) W_{\alpha_2}^{(s)}(z) W_{m_2}^{(s)}(0) \rangle). \quad (1.34)$$

Здесь мы уже используем обозначения для параметров Лиувилля как в калибровочной теории для сравнения конформного блока со статсуммой. Связь параметров α , m_1 и m_2 с параметрами калибровочной теории следующая

$$\alpha = \frac{Q}{2} + P, \quad m_1 = \frac{Q}{2} + P_1, \quad m_2 = \frac{Q}{2} + P_2. \quad (1.35)$$

Мы вычисляем эту корреляционную функцию путём вставки полного набора состояний на каждом уровне

$$\hat{\mathbf{1}}_l = \sum_{i,j} |i\rangle_l \times (K_\alpha^{-1}(l))_{ij} \times {}_l\langle j|, \quad (1.36)$$

где $\{|1\rangle_l, |2\rangle_l, \dots\}$ – набор потомков примарных полей на уровне l и $K_\alpha^{-1}(l)$ – обратная матрица Грама/Шаповалова на уровне l ($(K_\alpha(l))_{ij} = {}_l\langle i|j\rangle_l$). Отметим, что потомки на каждом уровне зависят от параметра Лиувилля α так же, как и матрица Грама/Шаповалова. Соответствующий конформный блок представляется как ряд по дробным степеням $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{1}{12}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{1}{3}$ и $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{3}{4}$ переменной z . Но, как мы уже знаем из статсуммы (1.13) калибровочной теории, он не содержит степени параметра разложения $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{1}{12}$ и $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{1}{3}$. Затем мы делаем вывод, что для совпадения с результатом калибровочной теории мы должны рассматривать только те вклады в корреляционную функцию (1.34), которые возникают в результате вставки полных наборов (1.36) состояний на уровнях $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{3}{4}$. Как мы увидим далее, есть два типа конформных блоков на уровнях $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0,1,2,\dots} \sum_{i,j} \langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}^{(s)}(1) | i \rangle_l \times (K_\alpha^{-1}(l))_{ij} \times {}_l\langle j | W_{\alpha_2}^{(s)}(z) | m_2; 0 \rangle = \\ & = C_{m_1, \alpha_1}^\alpha C_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} \times z^{\Delta_\alpha^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)}} \mathcal{F}^{(1)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | \Delta_\alpha^{(s)} | z) + \\ & + \tilde{C}_{m_1, \alpha_1}^\alpha \tilde{C}_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} \times z^{\Delta_\alpha^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)}} \mathcal{F}^{(3)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | \Delta_\alpha^{(s)} | z), \end{aligned} \quad (1.37)$$

где

$$C_{m_1, \alpha_1}^\alpha = \langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}^{(s)}(1) | \alpha; 0 \rangle, \quad (1.38)$$

$$\tilde{C}_{m_1, \alpha_1}^\alpha = \langle m_1; 0 | \tilde{W}_{\alpha_1}^{(s)}(1) | \alpha; 0 \rangle \quad (1.39)$$

– структурные константы и $\tilde{W}_\alpha^{(s)}(z)$ – вертексный оператор, соответствующий состоянию

$$|\tilde{W}_\alpha^{(s)}\rangle = \left(G_{-\frac{2}{3}}^+ G_{-\frac{1}{3}}^- - G_{-\frac{2}{3}}^- G_{-\frac{1}{3}}^+ \right) | \alpha; 0 \rangle \quad (1.40)$$

– потомок, который также является примарным состоянием алгебры Виросоро. Мы видим, что есть два типа конформных блоков по причине того, что имеется два типа структурных констант: одна для поля $W_\alpha^{(s)}(z)$ и другая для поля $\tilde{W}_\alpha^{(s)}(z)$ и эти структурные константы не могут быть выражены друг через друга. Мы обозначаем конформные блоки, соответствующие W и \tilde{W} как $\mathcal{F}^{(1)}$ и $\mathcal{F}^{(3)}$ соответственно. Заметим, что разложение второго конформного блока начинается с первой степени z .

То же самое может быть проделано на уровнях $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \dots} \sum_{i,j} \langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}^{(s)}(1) | i \rangle_l \times (K_\alpha^{-1}(l))_{ij} \times {}_l \langle j | W_{\alpha_2}^{(s)}(z) | m_2; 0 \rangle = \\ & = \mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(+)\alpha} \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(+)\alpha_2} \times z^{\Delta_\alpha^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)}} \mathcal{F}^{(2)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | P | z) + \\ & + \mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(-)\alpha} \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(-)\alpha_2} \times z^{\Delta_\alpha^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)}} \mathcal{F}^{(2)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | -P | z), \end{aligned} \quad (1.41)$$

где $\{|i\rangle_l\}$ – набор потомков в D -модуле на уровне l , $K_\alpha^{-1}(l)$ – обратная матрица Грама/Шаповалована уровне l и

$$\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(\pm)\alpha} = \left\langle m_1; 0 \left| V_{\alpha_1}^{(s)\pm}(1) \right| \alpha; -1 \right\rangle \pm \left\langle m_1; 0 \left| V_{\alpha_1}^{(s)\pm}(1) \right| \alpha; 1 \right\rangle, \quad (1.42)$$

где $V_\alpha^{(s)\pm}(z)$ – вертексные операторы, соответствующие состояниям

$$|V_\alpha^{(s)\pm}\rangle = G_{-\frac{1}{3}}^\pm |\alpha; 0\rangle, \quad (1.43)$$

которые являются первыми дробными потомками состояния $|\alpha; 0\rangle$. Заметим, что разложение конформного блока $\mathcal{F}^{(2)}$ начинается с $z^{\frac{3}{4}}$. Другая важная вещь, которую нужно отметить о конформном блоке $\mathcal{F}^{(2)}$, заключается в том, что оно не симметрично при замене знака P в параметре $\alpha = \frac{Q}{2} + P$. Поэтому мы пишем P вместо $\Delta_\alpha^{(s)}$ в формуле (1.41).

Используя обозначения (1.38), (1.39) и (1.42) мы можем коротко резюми-

ровать утверждения (1.37) и (1.41)

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0,1,2}^{+\infty} \sum_{i,j} \langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}^{(s)}(1) | i \rangle_l \times (K_{\alpha}^{-1}(l))_{ij} \times {}_l \langle i | W_{\alpha_2}^{(s)}(z) | m_2; 0 \rangle = \\
& = z^{\Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)}} \left(C_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} \cdot C_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} \times \mathcal{F}^{(1)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | \Delta_{\alpha}^{(s)} | z) + \right. \\
& \quad \left. + \tilde{C}_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} \cdot \tilde{C}_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} \times \mathcal{F}^{(3)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | \Delta_{\alpha}^{(s)} | z) \right), \tag{1.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}}^{+\infty} \sum_{i,j} \langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}^{(s)}(1) | i \rangle_l \times (K_{\alpha}^{-1}(l))_{ij} \times {}_l \langle j | W_{\alpha_2}^{(s)}(z) | m_2; 0 \rangle = \\
& = z^{\Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)}} \left(\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(+)\alpha} \cdot \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(+m_2)} \times \mathcal{F}^{(2)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | P | z) + \right. \\
& \quad \left. + \mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(-)\alpha} \cdot \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(-m_2)} \times \mathcal{F}^{(2)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | -P | z) \right). \tag{1.45}
\end{aligned}$$

И для удобства мы примем следующие обозначения для коэффициентов разложения конформного блока

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^{(1)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | \Delta_{\alpha}^{(s)} | z) = 1 + \mathcal{F}_1^{(1)} z + \mathcal{F}_2^{(1)} z^2 + \dots, \\
& \mathcal{F}^{(2)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | P | z) = \mathcal{F}_{\frac{3}{4}}^{(2)} z^{\frac{3}{4}} + \mathcal{F}_{\frac{7}{4}}^{(2)} z^{\frac{7}{4}} + \dots, \tag{1.46} \\
& \mathcal{F}^{(3)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | \Delta_{\alpha}^{(s)} | z) = \mathcal{F}_1^{(3)} z + \mathcal{F}_2^{(3)} z^2 + \dots.
\end{aligned}$$

Обсуждение выше приводит нас к заключению, что два ключевых ингредиента, которые нам нужны для вычисления, – это обратная матрица Грама/Шаповалова на определённом уровне и матричные элементы состояний на определённом уровне

$$\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}^{(s)}(1) | i \rangle_l, \quad {}_l \langle j | W_{\alpha_2}^{(s)}(z) | m_2; 0 \rangle, \tag{1.47}$$

где $|i\rangle_l$ – состояние на уровне l . Чтобы вычислить эти матричные элементы мы должны вывести коммутационные соотношения для вертексных операторов.

Вывод коммутационных соотношений для $W_{\alpha}^{(s)}(z)$ и $\tilde{W}_{\alpha}^{(s)}(z)$ представлен в

Приложении А. Здесь мы только цитируем результат

$$[L_m, W_\alpha^{(s)}(z)] = z^m \partial W_\alpha^{(s)}(z) + (m+1) \Delta_\alpha^{(s)} W_\alpha^{(s)}(z), \quad (1.48)$$

$$[G_r^\pm, W_\alpha^{(s)}(z)] = z^{r+\frac{1}{3}} V_\alpha^{(s)\pm}(z), \quad (1.49)$$

$$[L_m, V_\alpha^{(s)\pm}(z)] = z^m \partial V_\alpha^{(s)\pm}(z) + (m+1) \left(\Delta_\alpha^{(s)} + \frac{1}{3} \right) V_\alpha^{(s)\pm}(z), \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(-\frac{1}{3})} \left(z^l G_{r-l-\frac{1}{3}}^\pm V_\alpha^{(s)\mp}(z) + z^{-l-\frac{1}{3}} V_\alpha^{(s)\mp}(z) G_{r+l}^\pm \right) = \\ = z^{r-\frac{2}{3}} \left(r + \frac{1}{3} \right) \Delta_\alpha^{(s)} W_\alpha^{(s)}(z) + z^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} \partial W_\alpha^{(s)}(z) \pm \tilde{W}_\alpha^{(s)}(z) \right). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Также мы вывели коммутационные соотношения в D -модуле в Приложении В. Эти соотношения могут быть полезны для тех, кто хочет посчитать матричные элементы полей D -модуля. Здесь мы снова цитируем только результат

$$[L_m, W_\alpha^{(d)\pm}(z)] = z^m \partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) + (m+1) \Delta_\alpha^{(d)} W_\alpha^{(d)\pm}(z),$$

$$[L_m, V_\alpha^{(d)(\pm)}(z)] = z^m \partial V_\alpha^{(d)(\pm)}(z) + (m+1) \left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{2}{3} \right) V_\alpha^{(d)(\pm)}(z),$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(-\frac{2}{3})} \left(z^l G_{r-l-\frac{2}{3}}^\pm W_\alpha^{(d)\pm}(z) - z^{-l-\frac{2}{3}} W_\alpha^{(d)\pm}(z) G_{r+l}^\pm \right) = \\ = z^{r-\frac{2}{3}} \left(r + \frac{1}{3} \right) \Lambda^\pm W_\alpha^{(d)\mp}(z) + z^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{2\Lambda^\pm}{3\Delta_\alpha^{(d)}} \partial W_\alpha^{(d)\mp}(z) + \tilde{W}_\alpha^{(d)\mp}(z) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(-\frac{1}{3})} \left(z^l G_{r-l-\frac{1}{3}}^\pm W_\alpha^{(d)\mp}(z) + z^{-l-\frac{1}{3}} W_\alpha^{(d)\mp}(z) G_{r+l}^\pm \right) = \\ = \frac{1}{2} z^{r+\frac{1}{3}} \left(V_\alpha^{(d)(+)}(z) \pm V_\alpha^{(d)(-)}(z) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[G_r^\pm, V_\alpha^{(d)\pm}(z)] &= z^{r-\frac{2}{3}} \left(r + \frac{1}{3} \right) \left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} + \lambda^\pm \Lambda^\mp \right) W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \\
&+ z^{r+\frac{1}{3}} \frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} + \lambda^\pm \Lambda^\mp}{3\Delta_\alpha^{(d)}} \partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) - z^{r+\frac{1}{3}} \left(\Lambda^\pm - \frac{1}{2} \lambda^\pm \right) \tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z), \\
[G_r^\pm, V_\alpha^{(d)-}(z)] &= z^{r-\frac{2}{3}} \left(r + \frac{1}{3} \right) \left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} - \lambda^\pm \Lambda^\mp \right) W_\alpha^{(d)\pm}(z) \mp \\
&\mp z^{r+\frac{1}{3}} \frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} - \lambda^\pm \Lambda^\mp}{3\Delta_\alpha^{(d)}} \partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) \pm z^{r+\frac{1}{3}} \left(\Lambda^\pm + \frac{1}{2} \lambda^\pm \right) \tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z),
\end{aligned}$$

где $V_\alpha^{(d)(\pm)}(z)$ и $\tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z)$ – вертексные операторы, определяемые соответственно состояниями

$$\begin{aligned}
|V_\alpha^{(d)(\pm)}\rangle &= G_{-\frac{2}{3}}^+ |W_\alpha^{(d)-}\rangle \pm G_{-\frac{2}{3}}^- |W_\alpha^{(d)+}\rangle, \\
|\tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}\rangle &= G_{-1}^\mp |W_\alpha^{(d)\mp}\rangle - \frac{2\Lambda^\mp}{3\Delta_\alpha^{(d)}} L_{-1} |W_\alpha^{(d)\pm}\rangle.
\end{aligned}$$

Уровень 3/4 Базис состояний на этом уровне может быть выбран следующим образом

$$|1\rangle_{3/4} = G_{-\frac{2}{3}}^+ |\alpha; -1\rangle, \quad (1.52)$$

$$|2\rangle_{3/4} = G_{-\frac{2}{3}}^- |\alpha; 1\rangle.$$

Мы должны вычислить следующую величину

$$\sum_{i,j=1}^2 \langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}^{(s)}(1) | i \rangle_{3/4} \times (K_\alpha^{-1}(3/4))_{ij} \times {}_{3/4} \langle j | W_{\alpha_2}^{(s)}(z) | m_2; 0 \rangle. \quad (1.53)$$

Вычисление матрицы Грама/Шаповалова даёт

$$K_\alpha(3/4) = \begin{pmatrix} -\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12}\right) & \sqrt{\frac{c-8}{6}} \sqrt{\frac{c}{24} - \Delta_\alpha^{(d)}} \\ \sqrt{\frac{c-8}{6}} \sqrt{\frac{c}{24} - \Delta_\alpha^{(d)}} & -\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12}\right) \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

Легко найти обратную матрицу Грама/Шаповалова

$$K_\alpha^{-1}(3/4) = \begin{pmatrix} -\frac{2b(1+b(2\alpha+b(4+b^2+2b\alpha-2\alpha^2)))}{(b+\alpha)(2+b^2-b\alpha)(1+2b^2-b\alpha)(1+b\alpha)} & -\frac{2b|1-b^2||1+b^2-2b\alpha|}{(b+\alpha)(2+b^2-b\alpha)(1+2b^2-b\alpha)(1+b\alpha)} \\ -\frac{2b|1-b^2||1+b^2-2b\alpha|}{(b+\alpha)(2+b^2-b\alpha)(1+2b^2-b\alpha)(1+b\alpha)} & -\frac{2b(1+b(2\alpha+b(4+b^2+2b\alpha-2\alpha^2)))}{(b+\alpha)(2+b^2-b\alpha)(1+2b^2-b\alpha)(1+b\alpha)} \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Используя коммутационные соотношения (1.49), мы имеем

$$\begin{aligned}
\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 1 \rangle_{3/4} &= - \left(\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(+)\alpha} + \mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(-)\alpha} \right), \\
\langle m_1; 0 | W_{\alpha_2}(1) | 2 \rangle_{3/4} &= - \left(\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(+)\alpha} - \mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(-)\alpha} \right), \\
{}_{3/4} \langle 1 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= -z^{\Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} + \frac{3}{4}} \left(\mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(+m_2)} + \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(-m_2)} \right), \\
{}_{3/4} \langle 2 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= -z^{\Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} + \frac{3}{4}} \left(\mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(+m_2)} - \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(-m_2)} \right).
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Заметим, что в недиагональных матричных элементах матрицы Грама/Шаповалова есть модули. Чтобы вычислить вклады в конформный блок мы должны выбрать знак этих модулей. Оказывается, что для сравнения с результатом в калибровочной теории (1.15) нам следует выбрать следующий знак $|1 - b^2| |1 + b^2 - 2b\alpha| = (b^2 - 1)(2b\alpha - 1 - b^2) = 2b(b^2 - 1)P$. Подставляя матричные элементы (1.56) и обратную матрицу Грама/Шаповалова (1.55) в (1.53), после некоторых вычислений мы получаем вклад в конформный блок $\mathcal{F}^{(2)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)} | P | z)$

$$\mathcal{F}_{3/4}^{(2)} = -\frac{8b}{(b + \alpha)(2 + b^2 - b\alpha)} = -\frac{32}{(Q + 2b + P)(Q + 2b^{-1} - P)}. \tag{1.57}$$

Стоит также заметить, что члены, пропорциональные $\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(+)\alpha} \cdot \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(-)m_2}$ или $\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(-)\alpha} \cdot \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(+m_2}$, не возникают в окончательном результате, когда мы вычисляем (1.53). Этот результат находится в соответствии с формулой (1.41).

Интересный факт состоит в том, что мы также можем установить соответствие результатов в случае другого выбора знака недиагональных элементов обратной матрицы Грама/Шаповалова. Если мы выберем противоположный знак $|1 - b^2| |1 + b^2 - 2b\alpha| = -(b^2 - 1)(2b\alpha - 1 - b^2) = -2b(b^2 - 1)P$, мы получим результат (1.57) с P заменённым на $-P$. Затем, если мы одновременно заменим \mathbb{Z}_4 -заряды $q_1 = 1$ и $q_2 = 3$, ассоциированные с диаграммами Юнга из второго ряда в калибровочной теории (1.15), наши результаты опять совпадут. Или, что то же самое, при определённом выборе знака в матрице

Грама/Шаповалова конформный блок $\mathcal{F}^{(2)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)}|P|z)$, умноженный на $\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(+)\alpha} \cdot \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(+)\alpha}$, соответствует выбору зарядов диаграммы Юнга $(Y_1^{q_1}, Y_2^{q_2})$ и $\mathcal{F}^{(2)}(\Delta_{m_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_1}^{(s)}, \Delta_{\alpha_2}^{(s)}, \Delta_{m_2}^{(s)}|-P|z)$, умноженная на $\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(-)\alpha} \cdot \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(-)\alpha}$, соответствует диаграммам Юнга с поменянными местами \mathbb{Z}_4 -зарядами $(Y_1^{q_2}, Y_2^{q_1})$.

Таким образом, если сформулировать короче, перемена местами \mathbb{Z}_4 -зарядов диаграмм Юнга в калибровочной теории соответствует перемене знака в матричных элементах с модулем в обратной матрице Грама/Шаповалова на уровнях $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + \frac{3}{4}$ на стороне конформной теории поля. Та же ситуация имеет место на уровне $7/4$.

Уровень 1 Базис состояний на этом уровне может быть выбран следующим образом

$$|1\rangle_1 = G_{-\frac{2}{3}}^- G_{-\frac{1}{3}}^+ |\alpha; 0\rangle, \quad (1.58)$$

$$|2\rangle_1 = G_{-\frac{2}{3}}^+ G_{-\frac{1}{3}}^- |\alpha; 0\rangle.$$

Мы должны вычислить следующую величину

$$\sum_{i,j=1}^2 \langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}^{(s)}(1) | i \rangle_1 \times (K_{\alpha}^{-1}(1))_{ij} \times {}_1 \langle j | W_{\alpha_2}^{(s)}(z) | m_2; 0 \rangle. \quad (1.59)$$

Матрица Грама/Шаповалова на этом уровне

$$K_{\alpha}(1) = \frac{\Delta_{\alpha}^{(s)}}{3} \begin{pmatrix} 2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} + 1 & - \left(2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} - 2 \right) \\ - \left(2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} - 2 \right) & 2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} + 1 \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

Обратная матрица Грама/Шаповалова

$$K_{\alpha}^{-1}(1) = \begin{pmatrix} \frac{8\Delta_{\alpha}^{(s)} + c + 4}{2\Delta_{\alpha}^{(s)}(8\Delta_{\alpha}^{(s)} + c - 2)} & \frac{8\Delta_{\alpha}^{(s)} + c - 8}{2\Delta_{\alpha}^{(s)}(8\Delta_{\alpha}^{(s)} + c - 2)} \\ \frac{8\Delta_{\alpha}^{(s)} + c - 8}{2\Delta_{\alpha}^{(s)}(8\Delta_{\alpha}^{(s)} + c - 2)} & \frac{8\Delta_{\alpha}^{(s)} + c + 4}{2\Delta_{\alpha}^{(s)}(8\Delta_{\alpha}^{(s)} + c - 2)} \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

После этого мы готовы продолжить вычисление матричных элементов, используя коммутационные соотношения (1.49) и (1.51)

$$\begin{aligned}\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 1 \rangle_1 &= \frac{1}{2} \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{m_1}^{(s)} \right) \times C_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} - \tilde{C}_{m_1, \alpha_1}^{\alpha}, & (1.62) \\ \langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 2 \rangle_1 &= \frac{1}{2} \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{m_1}^{(s)} \right) \times C_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} + \tilde{C}_{m_1, \alpha_1}^{\alpha}, \\ {}_1 \langle 1 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= z^{\Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} + 1} \times \left(\frac{1}{2} \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) \times C_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} - \tilde{C}_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} \right), \\ {}_1 \langle 2 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= z^{\Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} + 1} \times \left(\frac{1}{2} \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) \times C_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} + \tilde{C}_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} \right).\end{aligned}$$

Подставляя матричные элементы (1.62) и обратную матрицу Грама/Шаповалова (1.61) в (1.59) и снова проделывая некоторые вычисления, мы получаем выражения для коэффициентов конформных блоков на уровне 1:

$$\mathcal{F}_1^{(1)} = \frac{(\Delta_{\alpha}^{(s)} + \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{m_1}^{(s)})(\Delta_{\alpha}^{(s)} + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)})}{2\Delta_{\alpha}^{(s)}}, \quad (1.63)$$

$$\mathcal{F}_1^{(3)} = \frac{3}{2\Delta_{\alpha}^{(s)} \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{8} - \frac{1}{4} \right)}. \quad (1.64)$$

Заметим, что отсутствуют вклады, пропорциональные $C_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} \cdot \tilde{C}_{\alpha, \alpha_2}^{m_2}$ или $\tilde{C}_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} \cdot C_{\alpha, \alpha_2}^{m_2}$. Эти вклады исчезают из ответа из-за симметрии обратной матрицы Грама/Шаповалова. Заметим, что этот результат находится в согласии с формулой (1.44).

Уровень 7/4 Так как выражения для конформных блоков на уровне 7/4 очень громоздки, здесь мы выпишем лишь базис состояний на уровне 7/4

$$|1\rangle_{7/4} = G_{-\frac{5}{3}}^{+} |\alpha; -1\rangle, \quad (1.65)$$

$$|2\rangle_{7/4} = G_{-\frac{5}{3}}^{-} |\alpha; 1\rangle,$$

$$|3\rangle_{7/4} = L_{-1} G_{-\frac{2}{3}}^{+} |\alpha; -1\rangle,$$

$$|4\rangle_{7/4} = L_{-1} G_{-\frac{2}{3}}^{-} |\alpha; 1\rangle.$$

Мы должны вычислить следующую величину

$$\sum_{i,j=1}^4 \langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}^{(s)}(1) | i \rangle_{7/4} \times (K_{\alpha}^{-1}(7/4))_{ij} \times {}_{7/4} \langle j | W_{\alpha_2}^{(s)}(z) | m_2; 0 \rangle. \quad (1.66)$$

Выражение для матрицы Грама/Шаповалова и матричных элементов можно найти в Приложении С. Используя матрицу Грама/Шаповалова и матричные элементы из Приложения С, можно легко получить выражение для конформного блока. Заметим, что также нет вкладов, пропорциональных $\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(+)\alpha} \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(-)m_2}$ или $\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(-)\alpha} \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(+m_2}$ на этом уровне.

Уровень 2 Базис состояний на этом уровне может быть выбран следующим образом

$$\begin{aligned} |1\rangle_2 &= L_{-1} G_{-\frac{2}{3}}^{-} G_{-\frac{1}{3}}^{+} |\alpha; 0\rangle, \\ |2\rangle_2 &= L_{-1} G_{-\frac{2}{3}}^{+} G_{-\frac{1}{3}}^{-} |\alpha; 0\rangle, \\ |3\rangle_2 &= G_{-\frac{5}{3}}^{-} G_{-\frac{1}{3}}^{+} |\alpha; 0\rangle, \\ |4\rangle_2 &= G_{-\frac{5}{3}}^{+} G_{-\frac{1}{3}}^{-} |\alpha; 0\rangle, \\ |5\rangle_2 &= L_{-2} |\alpha; 0\rangle. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Мы должны вычислить следующую величину

$$\sum_{i,j=1}^5 \langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}^{(s)}(1) | i \rangle_2 \times (K_{\alpha}^{-1}(2))_{ij} \times {}_2 \langle j | W_{\alpha_2}^{(s)}(z) | m_2; 0 \rangle. \quad (1.68)$$

Можно найти выражения для матрицы Грама/Шаповалова и матричных элементов в Приложении D. Используя матрицу Грама/Шаповалова и матричные элементы из Приложения D, можно легко получить выражение для конформного блока. Заметим, что на уровне 2 вклады с $C_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} \cdot \tilde{C}_{\alpha, \alpha_2}^{m_2}$ или $\tilde{C}_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} \cdot C_{\alpha, \alpha_2}^{m_2}$ исчезают снова.

1.4 Сравнение конформных блоков в S и D модулях S_3 парафермионной алгебры с инстантонной статсуммой на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_4$

Вспоминая, что в наших обозначениях $\Delta_{P_i} = \Delta_{m_i}^{(s)}$ для $i = 1, 2$, так как $m_i = \frac{Q}{2} + P_i$, и используя уравнения для вклада конформного блока и статсуммы, мы находим, сравнивая формулы (1.15) and (1.57), что на уровне $3/4$:

$$\mathcal{Z}_{3/4}^{(4,2\text{nd series})} = -\frac{1}{8}\mathcal{F}_{3/4}^{(2)}. \quad (1.69)$$

Сравнивая формулы (1.17), (1.18) с (1.63), (1.64), мы имеем на уровне 1:

$$\mathcal{Z}_1^{(4,1\text{st series})} = \mathcal{F}_1^{(1)} - A_4, \quad (1.70)$$

$$\mathcal{Z}_1^{(4,3\text{rd series})} = \frac{1}{64}\mathcal{F}_1^{(3)}. \quad (1.71)$$

На уровне $7/4$:

$$\mathcal{Z}_{7/4}^{(4,2\text{nd series})} = -\frac{1}{8}\left(\mathcal{F}_{7/4}^{(2)} - A_4\mathcal{F}_{3/4}^{(2)}\right). \quad (1.72)$$

На уровне 2:

$$\mathcal{Z}_2^{(4,1\text{st series})} = \mathcal{F}_2^{(1)} - A_4\mathcal{F}_1^{(1)} + \frac{1}{2}A_4(A_4 - 1), \quad (1.73)$$

$$\mathcal{Z}_2^{(4,3\text{rd series})} = \frac{1}{64}\left(\mathcal{F}_1^{(3)} - A_4\mathcal{F}_0^{(3)}\right), \quad (1.74)$$

где A_4 даётся следующей формулой

$$A_4 = \frac{1}{2}\alpha_1(Q - \alpha_2). \quad (1.75)$$

Эти проверки на отдельных уровнях приводят нас к естественной гипотезе

$$\mathcal{Z}^{(4, \text{1st series})}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|P|z) = (1-z)^{A_4} \mathcal{F}^{(1)}(\Delta_{P_1}, \Delta_{\alpha_1}, \Delta_{\alpha_2}, \Delta_{P_2}|\Delta_P|z), \quad (1.76)$$

$$\mathcal{Z}^{(4, \text{2nd series})}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|P|z) = -\frac{1}{2^3}(1-z)^{A_4} \mathcal{F}^{(2)}(\Delta_{P_1}, \Delta_{\alpha_1}, \Delta_{\alpha_2}, \Delta_{P_2}|P|z), \quad (1.77)$$

$$\mathcal{Z}^{(4, \text{3rd series})}(P_1, \alpha_1, \alpha_2, P_2|P|z) = \frac{1}{2^6}(1-z)^{A_4} \mathcal{F}^{(3)}(\Delta_{P_1}, \Delta_{\alpha_1}, \Delta_{\alpha_2}, \Delta_{P_2}|\Delta_P|z). \quad (1.78)$$

Формулы (1.76), (1.77) и (1.78) являются главным результатом данной главы.

1.5 Завершающие замечания и открытые вопросы

В этой работе мы используем определённые ряды в калибровочной теории ($c_1(E) = 0$) и определённые модули (S и D) в конформной теории поля. Как было показано в работе [30], можно предположить, что для соответствия в других модулях конформной теории поля мы должны рассматривать другие наборы диаграмм Юнга в калибровочной теории.

Также следует упомянуть, что существует другая формула для инстантонной статсуммы на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ [61, 62, 63, 24]. Она может быть схематически представлена как

$$\mathcal{Z}_{\text{instanton}}^{(p)} = l_{\text{factor}} \cdot \underbrace{\mathcal{Z}_{\text{instanton}}^{(1)} \times \mathcal{Z}_{\text{instanton}}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{Z}_{\text{instanton}}^{(1)}}_p,$$

где l_{factor} – так называемый блоу-ап фактор. Эта структура имеет очень ясное объяснение с точки зрения конформной теории поля [40, 53]. Фактор l_{factor} возникает из матричных элементов векторов старшего веса p пар коммутирующих алгебр Вирасоро, которые сконструированы из других алгебр. Конструкция двух коммутирующих алгебр Вирасоро из алгебры Невьё-Шварца-Рамона и свободного фермионного поля была предложена в [64, 65]. Также,

соотношения между структурными константами парафермионной теории Лиувилля [66, 67] и структурными константами теории Лиувилля

$$C_{\text{Parafermionic Liouville}}^{(p)} = \underbrace{C_{\text{Liouville}}^{(1)} \times C_{\text{Liouville}}^{(1)} \times \dots \times C_{\text{Liouville}}^{(1)}}_p$$

в принципе могут быть проверены с использованием соотношений между Υ -функциями [53].

В заключение данного раздела стоит упомянуть о связи аналогов найденных инстантонных статсумм с волновыми функциями Мура-Рида, Рида-Резайи и их обобщений в дробном квантовом эффекте Холла. Случай инстантонных статсумм для $r = 2$ и $p = 4$ и соответствующих им найденных конформных блоков может быть полезен при исследовании волновых функций для дробного квантового эффекта Холла, изучаемых в работах [68, 6, 7, 69].

2 Косетная конформная теория поля и инстантонные вычисления на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$

В работах [39, 32, 30, 41, 31] было задано направление для исследований в данной части диссертации. Поскольку главной целью этой части диссертации является поиск доказательств верности соответствия между алгеброй $\mathcal{A}(2, p)$ и пространством модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, которое мы обозначаем как $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_p}$, то в качестве первого шага на этом пути мы проверяем соответствие между стационарными точками на пространстве модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ и векторов в представлении алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ путём сравнения производящих функций стационарных точек и характеров представлений.

При примененении дуальности уровня и ранга, алгебра $\mathcal{A}(2, p)$ может быть представлена двумя способами

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_p} & \xleftarrow{1} & \mathcal{A}(2, p) \\
 & & \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} (\mathcal{H} \times \text{Vir}^{(1)}) \times \dots \times (\mathcal{H} \times \text{Vir}^{(p)}) \\ \hat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \hat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p} / \hat{\mathfrak{sl}}(2)_n \times \mathcal{M}(3/4) \times \dots \times \mathcal{M}(p+1/p+2) \times \mathcal{H}^p \end{array} \\
 & & \begin{array}{c} \uparrow 4 \\ \downarrow 4 \end{array}
 \end{array} \tag{2.1}$$

где $\text{Vir}^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, \dots, p$ – алгебры Вирасоро со специальными центральными зарядами c_σ , \mathcal{H} – алгебра Гейзенберга, $\mathcal{M}(m/m+1)$ – Минимальная модель² и $\hat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \hat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p} / \hat{\mathfrak{sl}}(2)_n$ – косетная алгебра. В этой части работы мы изучаем связи (2.1) в подробностях.

В разделе 2.1 мы находим производящие функции для стационарных точек на пространстве модулей. В разделе 2.2 мы изучаем первую реализацию

²Здесь мы уже успользовали другую дуальность уровня и ранга, которая даёт $\hat{\mathfrak{sl}}(p)_2 = \mathcal{M}(3/4) \times \dots \times \mathcal{M}(p+1/p+2)$.

$\mathcal{A}(2, p)$, обозначаемую стрелкой 2 на (2.1) и вычисляем характеры представления $\mathcal{A}(2, p)$ в этой реализации и сравниваем их с производящими функциями стационарных точек на пространстве модулей. В разделе 2.3 мы изучаем вторую реализацию $\mathcal{A}(2, p)$ представленную стрелкой 3 на (2.1). Также мы находим соответствие между характерами первой и второй реализаций $\mathcal{A}(2, p)$ (стрелка 4 на (2.1)). В разделе 2.4 мы находим равенства между инстантонными статсуммами $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной $U(2)$ чистой калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, посчитанными для разных компактификаций пространства модулей.

2.1 Пространство модулей инстантонов и действие группы тора

Данный раздел посвящён подсчёту стационарных точек на пространстве модулей инстантонов. Для этого мы рассмотрим поднятие действия \mathbb{Z}_p на пространство модулей инстантонов на \mathbb{C}^2 . В этом случае удобно пометить стационарные точки наборами из r диаграмм Юнга с p цветами. Мы собираемся ввести производящие функции таких диаграмм Юнга изучить свойства таких производящих функций.

2.1.1 Стационарные точки действия тора на многообразии модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$

Так как мы рассматриваем $U(2)$ инстантоны на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, то в нашем случае $r = 2$, а соответствующее пространство модулей есть $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_p}$, где N – топологический заряд. Удобно нумеровать стационарные точки тора в этом случае парами диаграмм Юнга, раскрашенных в p цветов. Раскраска производится следующим образом. Мы приписываем цвет r от 0 до $p - 1$ угловой клетке и цвета $r + i - j \pmod p$ клетке с координатами (i, j) . К примеру,

диаграмма с $r = 5$ и $p = 6$

5	0	1	2	3	4
4	5	0	1	2	
3	4	5			
2	3				
1	2				
0					

В этом разделе мы подсчитываем эти стационарные точки. Так как число пар диаграмм Юнга, раскрашенных в p цветов, бесконечно, мы должны ввести градуировку этих диаграмм. Возможный способ это сделать заключается в том, чтобы подсчитать число пар диаграмм Юнга с фиксированным общим размером, фиксированными цветами угловых клеток r_1 , r_2 и разностями k_m между числом клеток с цветом $m > 0$ и числом клеток с цветом 0 в обеих диаграммах. Мы будем называть набор чисел r_1 , r_2 и k_1, \dots, k_{p-1} ($k_0 = 0$ по определению) раскраской диаграмм Юнга. Таким образом, мы определяем производящую функцию пары диаграмм Юнга следующим образом

$$\chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1} | q) = \sum_{(Y_1, Y_2) \in \nabla} q^{\frac{|Y_1| + |Y_2|}{p}}, \quad (2.2)$$

где

$$\nabla = \left\{ (Y_1, Y_2) \mid \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline r_1 & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline r_2 & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}, \#(\overline{m}) - \#(\overline{0}) = k_m \right\}. \quad (2.3)$$

и $|Y|$ – число клеток в диаграмме Юнга Y .

Следует упомянуть здесь, что параметры раскраски диаграмм Юнга связаны с топологическими характеристиками инстантонов, соответствующих стационарным точкам действия тора на пространстве модулей. Пусть $c_1(E)$ будет первым классом Черна калибровочного расслоения и $c_1(T_r)$ будет первым классом Черна векторного расслоения на ALE пространстве, тогда

$$c_1(E) = \sum_{r=1}^{p-1} c_{(r)} c_1(T_r). \quad (2.4)$$

Обозначая число диаграмм Юнга с цветом угловой клетки r через n_r , мы получаем

$$c_{(r)} = n_r + k_{r+1} - 2k_r + k_{r-1}, \quad r = 1, \dots, p-1. \quad (2.5)$$

Используя (2.5), можно перейти от описания производящих функций диаграмм Юнга в терминах раскрасок к эквивалентному описанию в терминах классов Черна.

Производящая функция пары раскрашенных диаграмм Юнга может быть получена из производящей функции одной раскрашенной диаграммы Юнга, которая может быть взята из [70]. Пусть r будет цветом угловой клетки, тогда для $r = 0, \dots, p - 1$ производящая функция одной цветной диаграммы Юнга определена как

$$\chi_r(k_1, \dots, k_{p-1}|q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{Y \in \diamond} q^{\frac{|Y|}{p}}, \quad (2.6)$$

где \diamond – набор диаграмм Юнга с определённой раскраской

$$\diamond = \left\{ Y \mid \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline r & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}, \#(\overline{m}) - \#(\overline{0}) = k_m \right\}, \quad (2.7)$$

где клетка с координатами (i, j) имеет цвет $r + i - j \pmod p$ и $\#(\overline{m}), \#(\overline{0})$ – количества клеток с цветами m и 0 соответственно. К примеру, мы имеем

$$\begin{aligned} \chi_3(1, 1, 0|q) &= q^{\frac{3}{2}} \cdot \# \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} \right\} + \\ &+ q^{\frac{5}{2}} \cdot \# \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline 0 & 1 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline 0 & & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} \right\} + O(q^{\frac{7}{2}}) = \\ &= q^{\frac{3}{2}} + 4q^{\frac{5}{2}} + O(q^{\frac{7}{2}}). \quad (2.8) \end{aligned}$$

Мы получаем производящую функцию одной цветной диаграммы Юнга (здесь мы подразумеваем $k_0 = k_p = 0$)

$$\chi_r(k_1, \dots, k_{p-1}|q) = q^{\sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 + \frac{k_i}{p} - k_i k_{i+1}) - k_r} \cdot (\chi_B(q))^p, \quad (2.9)$$

где $\chi_B(q)$ – характер представления старшего веса алгебры Гейзенберга³ \mathcal{H} и

³Алгебра Гейзенберга состоит из элементов a_k без a_0 и имеет коммутационные соотношения $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$. Представление старшего веса этой алгебры (модуль Фока) имеет вакуумное состояние $|0\rangle$: $a_n|0\rangle = 0$ для $n > 0$ и натянуто на векторы $a_{-n_1} \dots a_{-n_k}|0\rangle$, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$.

даётся формулой

$$\chi_B(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}, \quad (2.10)$$

Несложно можно получить производящую функцию пары диаграмм Юнга. Производящая функция пары диаграмм Юнга с раскраской r_1, r_2 и k_1, \dots, k_{p-1} даётся следующей формулой

$$\chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) = \sum_{\substack{m_i + n_i = k_i \\ i=1, \dots, p-1}} \chi_{r_1}(m_1, \dots, m_{p-1}|q) \chi_{r_2}(n_1, \dots, n_{p-1}|q). \quad (2.11)$$

Затем, используя формулу (2.9), мы получаем

$$\begin{aligned} & \chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) = \\ & = (\chi_B(q))^{2p} \sum_{m_1, \dots, m_{p-1} \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} ((2m_i - k_i)^2 - (2m_i - k_i)(2m_{i+1} - k_{i+1}) + k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) - m_{r_1} + m_{r_2} - k_{r_2}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

И тогда мы после некоторых несложных вычислений, воспользовавшись тем, что суммирование по k_i , равным 0 или 1, приводит к тому, что суммирование по $2m_i - k_i = 2m_i$ или $2m_i - k_i = 2m_i - 1$ можно эффективно заменить суммированием по одной переменной $n_i = 2m_i$ для чётных n_i и $n_i = 2m_i - 1$ для нечётных n_i , выводим формулу

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1, \dots, k_{p-1}=0}^1 q^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) + \frac{1}{2} (k_{r_1} + k_{r_2})} \chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) = \\ & = (\chi_B(q))^{2p} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z} \\ n_0 = n_p = 0}} q^{\frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{p-1} (n_{\sigma}^2 - n_{\sigma} n_{\sigma+1}) + \frac{1}{2} (n_{r_2} - n_{r_1})}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.1.2 Классы эквивалентности производящих функций стационарных точек

Мы называем две производящие функции эквивалентными, если они пропорциональны друг другу (по определению все производящие функции (2.9)

эквивалентны). Ниже мы показываем, что весь бесконечный набор производящих функций (2.12) может быть поделён на конечное число классов эквивалентности. Из (2.12) мы заключаем, что производящие функции имеют следующие симметрии:

- Инвариантность под действием преобразования $k_m \rightarrow k_m + 2$:

$$\begin{aligned}\chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_m + 2, \dots, k_{p-1}|q) &= \\ &= q^{2k_m - k_{m+1} - k_{m-1} + \frac{2}{p} + \delta_{m, r_1} + \delta_{m, r_2}} \chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1}|q),\end{aligned}\quad (2.14)$$

где $\delta_{m, n}$ – символ Кронекера.

- Инвариантность при перестановке $r_1 \leftrightarrow r_2$:

$$\chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) = \chi_{r_2, r_1}(k_1, \dots, k_{p-1}|q).\quad (2.15)$$

- Инвариантность при замене $r_1, r_2 \rightarrow r_1 + 1, r_2 + 1$:

$$\begin{aligned}\chi_{r_1+1, r_2+1}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) &= \\ &= q^{k_{r_1} - k_{r_1+1} - \frac{r_2 - r_1}{p}} \chi_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{r_1+1} + 1, \dots, k_{r_2} + 1, \dots, k_{p-1}|q),\end{aligned}\quad (2.16)$$

где мы предполагаем, что $r_1 \leq r_2$.

Первые две симметрии достаточно очевидны, тогда как третья нуждается в некотором комментарии. Для этого вернёмся к определению (2.12) и

преобразуем следующее выражение

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} \left((2m_i - k_i)^2 - (2m_i - k_i)(2m_{i+1} - k_{i+1}) + k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p} \right) - \\
& - m_{r_1+1} + m_{r_2+1} - k_{r_2+1} = \\
& = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k_i}{p} + \frac{(2m_1 - k_1)^2}{4} + \frac{(2m_{p-1} - k_{p-1})^2}{4} + \frac{k_1^2}{4} + \frac{k_{p-1}^2}{4} + \\
& + \sum_{i=1}^{p-2} \frac{(2m_{i+1} - 2m_i - k_{i+1} + k_i)^2 + (k_{i+1} - k_i)^2}{4} - m_{r_1+1} + m_{r_2+1} - k_{r_2+1} = \\
& = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{k'_i}{p} + \frac{(2m_1 - k'_1)^2}{4} + \frac{(2m_{p-1} - k'_{p-1})^2}{4} + \frac{k'_1{}^2}{4} + \frac{k'_{p-1}{}^2}{4} + \\
& + \sum_{i=1}^{p-2} \frac{(2m_{i+1} - 2m_i - k'_{i+1} + k'_i)^2 + (k'_{i+1} - k'_i)^2}{4} - m_{r_1+1} + m_{r_2+1} - k'_{r_2} + \\
& + k_{r_1} - k_{r_1+1} - \frac{r_2 - r_1}{p} = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} \left((2m_i - k'_i)^2 - (2m_i - k'_i)(2m_{i+1} - k'_{i+1}) + k'_i{}^2 - k'_i k'_{i+1} + \frac{2k'_i}{p} \right) - \\
& - m_{r_1} + m_{r_2} - k'_{r_2} + k_{r_1} - k_{r_1+1} - \frac{r_2 - r_1}{p}, \tag{2.17}
\end{aligned}$$

где $k'_i = k_i + 1$ для i от $r_1 + 1$ до r_2 и $k'_i = k_i$ для всех остальных i . Таким образом, применяя формулу (2.17), мы приходим к симметрии (2.16).

Применяя симметрии (2.14 - 2.16), мы делаем вывод, что произвольная производящая функция с раскраской r_1, r_2 и k_1, \dots, k_{p-1} эквивалентна одной из следующих производящих функций с $r_1 = 0$ и всеми k_m , равными 0 или 1:

$$\chi_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1} | q), \tag{2.18}$$

где $s = 0, 1, \dots, p-1$. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением производящих функций вида (2.18).

Можно показать (см. Приложение Е), что для каждого $s = 0, \dots, p-1$ производящие функции (2.18) поделены на $[s/2] + [(p-s)/2] + 1$ классов

эквивалентности⁴. Первый класс эквивалентности содержит производящие функции, эквивалентные

$$\chi_{0,s}(0, \dots, 0|q), \quad (2.19)$$

и его мощность равна $\binom{p}{s} = \frac{p!}{s!(p-s)!}$. Для каждого из следующих $\lfloor s/2 \rfloor$ классов эквивалентности удобно выбрать представителя

$$\chi_{0,s}(0, \dots, 0, \overset{s-2l+1}{1}, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, \overset{s}{0}, 0, \dots, 0|q), \quad (2.20)$$

где l принимает целые значения от 1 до $\lfloor s/2 \rfloor$, и от k_{s-2l+1} до k_s располагаются 1 и 0, а все остальные $k_i = 0$. Мощность класса эквивалентности с данным l равна $\binom{p}{s-2l}$. И для каждого из последних $\lfloor (p-s)/2 \rfloor$ классов эквивалентности мы выбираем представителя

$$\chi_{0,s}(0, \dots, 0, \overset{s}{0}, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \overset{s+2n-1}{0}, 1, 0, \dots, 0|q), \quad (2.21)$$

где n принимает значения от 1 до $\lfloor (p-s)/2 \rfloor$, и от k_s до k_{s+2n-1} расположены чередующиеся 0 и 1, а все остальные $k_i = 0$. Можно легко проверить, что сумма мощностей классов эквивалентности на самом деле равняется числу производящих функций (2.18) с данным s

$$\binom{p}{s} + \sum_{l=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \binom{p}{s-2l} + \sum_{n=1}^{\lfloor (p-s)/2 \rfloor} \binom{p}{p-s-2n} = 2^{p-1}. \quad (2.22)$$

Теперь мы видим, что произвольная производящая функция стационарных точек на пространстве модулей эквивалентна одной из производящих функ-

⁴Символ $\lfloor \dots \rfloor$ означает целую часть числа, к примеру, $\lfloor 3/2 \rfloor = 1$.

ций (2.19 - 2.21), и мы получаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_1, \dots, k_{p-1}=0}^1 q^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) + \frac{k_s}{2}} \chi_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) = \binom{p}{s} \chi_{0,s}(0, \dots, 0|q) + \\
& + \sum_{n=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \binom{p}{s-2n} q^{-\frac{n}{2} (1 + \frac{2}{p})} \chi_{0,s}(0, \dots, 0 \overset{s-2n+1}{0}, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, \overset{s}{0}, 0, \dots, 0|q) + \\
& + \sum_{n=1}^{\lfloor (p-s)/2 \rfloor} \binom{p}{s+2n} q^{-\frac{n}{2} (1 + \frac{2}{p})} \chi_{0,s}(0, \dots, 0, \overset{s}{0}, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0|q). \quad (2.23)
\end{aligned}$$

2.2 $\mathcal{A}(2, p)$ как модель с p симметриями Вирасоро

В данном разделе мы изучаем реализацию $\mathcal{A}(2, p)$ как произведения p моделей с симметрией Вирасоро. Эта реализация представлена стрелкой 2 на рисунке (2.1). Начнём с определения $\mathcal{A}(r, p)$

$$\mathcal{A}(r, p) = \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r}. \quad (2.24)$$

Следует заметить, что определение (2.24) имеет смысл только для целых положительных значений параметра n , но использование дуальности уровня и ранга позволяет нам распространить определение $\mathcal{A}(r, p)$ на случай произвольных комплексных n . Формально умножая и деля (2.24) на алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(n - \sigma + 1)_r$ с $\sigma = 1, \dots, p$, мы можем написать

$$\mathcal{A}(r, p) \supset \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p+1)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r} \times \dots \times \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-1)_r}. \quad (2.25)$$

Деля и умножая каждый множитель (2.25) на $\widehat{\mathfrak{gl}}(1)_r$ и используя дуальность уровня и ранга⁵ мы получаем

$$\mathcal{A}(r, p) \supset \left(\mathcal{H} \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p+1}} \right) \times \dots \times \left(\mathcal{H} \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-1}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n} \right). \quad (2.26)$$

⁵Здесь мы использовали следующий трюк с дуальностью уровня и ранга: $\frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(k)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(1)_r \times \widehat{\mathfrak{gl}}(k-1)_r} = \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{k-1}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_k}$, а также изоморфизм $\widehat{\mathfrak{gl}}(1)_r \cong \mathcal{H}$.

Заметим, что косеты $\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-\sigma} / \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-\sigma+1}$ для $\sigma = 1, \dots, p$ являются W_r теориями с центральными зарядами

$$c_\sigma = 1 + \frac{(r^2 - 1)(n - \sigma)}{n - \sigma + r} - \frac{(r^2 - 1)(n - \sigma + 1)}{n - \sigma + r + 1}. \quad (2.27)$$

Здесь необходимо отметить связь данной реализации с дробным квантовым эффектом Холла. В [69] можно встретить то же разложение косета в произведение моделей с симметрией Вирасоро. Данная реализация $\mathcal{A}(r, p)$ как раз соответствует алгебре симметрии косетной конформной теории поля, описывающей r неабелевы спин-синглетные волновые функции, которые являются обобщением состояний Мура-Рида и Рида-Резайи (см. [69] и [71]).

В случае $r = 2$ мы имеем для (2.26)

$$\mathcal{A}(2, p) \supset \mathcal{H}^p \times \text{Vir}^{(1)} \times \dots \times \text{Vir}^{(p)}, \quad (2.28)$$

где $\mathcal{H}^p = \mathcal{H} \times \dots \times \mathcal{H}$ и, благодаря соответствию Годдарда-Кента-Олива [3], косеты $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-\sigma} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-\sigma+1}$ являются алгебрами Вирасоро $\text{Vir}^{(\sigma)}$ со следующими центральными зарядами (см. Приложение F)

$$c_\sigma = 1 + \frac{3(n - \sigma)}{n - \sigma + 2} - \frac{3(n - \sigma + 1)}{n - \sigma + 3} = 1 + 6(Q_\sigma)^2, \quad (2.29)$$

где $Q_\sigma = b_\sigma + b_\sigma^{-1}$ и $b_\sigma^2 = -\frac{n-\sigma+3}{n-\sigma+2}$ – параметризация, которая будет полезна в дальнейшем. Легко проверить, что параметры b_σ удовлетворяют следующим соотношениям

$$b_\sigma^2 + b_{\sigma+1}^{-2} = -2, \quad \sigma = 1, \dots, p - 1. \quad (2.30)$$

Таким образом, мы имеем $p - 1$ уравнений для p переменных. Это означает, что мы можем выразить эти переменные через одну переменную b

$$b_\sigma^2 = \frac{(\sigma - 1)Q - pb}{\sigma Q - pb}, \quad \sigma = 1, \dots, p. \quad (2.31)$$

В следующем разделе мы покажем, как расширить правую часть (2.28) до полной алгебры $\mathcal{A}(2, p)$. Для того, чтобы сделать это, мы добавляем набор $p - 1$ голоморфных токов спина $1/2$ к p тензорам энергии-импульса.

2.2.1 Произведение p моделей

В случае, когда параметр n в $\mathcal{A}(2, p) = \widehat{\mathfrak{gl}}(n)_2 / \widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_2$ является положительным целым числом, косеты $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-\sigma} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-\sigma+1}$ в (2.26) описывают минимальные модели $\mathcal{M}(n - \sigma + 1 / n - \sigma + 2)$ и стрелка 4 схемы (2.1) в точности повторяет соответствие между минимальными моделями, которое подробно изучалось в [65]. В этом разделе в духе [65] мы конструируем первую реализацию алгебры $\mathcal{A}(2, p)$.

Вспомним, что алгебра Вирасоро состоит из бесконечного числа генераторов L_n , $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих следующему коммутационным соотношениям

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \quad (2.32)$$

где c – центральный заряд, параметризованный как $c = 1 + 6Q^2$ с $Q = b + b^{-1}$. Мы обозначаем состояние старшего веса этой алгебры как V_λ , которое уничтожается L_n с $n > 0$ и имеет следующую параметризацию конформной размерности

$$\Delta(\lambda) = \frac{Q^2}{4} - \lambda^2. \quad (2.33)$$

Состояния старшего веса вырожденного представления алгебры Вирасоро обозначены как $V_{m,n} \equiv V_{\lambda_{m,n}}$, где

$$\lambda_{m,n} = \frac{mb^{-1} + nb}{2} \quad (2.34)$$

и их размерность

$$\Delta_{m,n} = \frac{Q^2}{4} - \lambda_{m,n}^2. \quad (2.35)$$

Вдобавок к p тензорам энергии-импульса $T^{(\sigma)}$, мы определяем набор из $p - 1$ голоморфных токов

$$J^{(\sigma)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} V_{1,2}^{(\sigma)}(z)V_{2,1}^{(\sigma+1)}(z), \quad \sigma = 1, \dots, p - 1, \quad (2.36)$$

где $V_{m,n}^{(\sigma)}$ – вырожденное поле, примарное относительно $T^{(\sigma)}$. По причине соотношения (2.30) для b_σ левая конформная размерность тока $J^{(\sigma)}(z)$ дается

формулой

$$\Delta_{J^{(\sigma)}} = \Delta_{1,2}^{(\sigma)} + \Delta_{2,1}^{(\sigma+1)} = \frac{1}{2}, \quad (2.37)$$

тогда как правая конформная размерность равна нулю. Можно проверить, что токи $T^{(\sigma)}(z)$ и $J^{(\sigma)}(z)$ генерируют ассоциативную киральную алгебру [65, 72]. Мы будем называть эту алгебру первой реализацией $\mathcal{A}(2, p)$.

Теперь обратимся к конструкции представлений $\mathcal{A}(2, p)$. Первое требование для состояния старшего веса алгебры состоит в том, что оно является примарным по отношению к p тензорам энергии-импульса $T^{(\sigma)}$. Если $V_{\lambda_\sigma}^{(\sigma)}$ является примарным состоянием тензора энергии-импульса под номером σ , тогда очевидно, что состояние

$$V_{\lambda_1}^{(1)} V_{\lambda_2}^{(2)} \dots V_{\lambda_p}^{(p)} \quad (2.38)$$

является примарным относительно всех тензоров энергии-импульса.

Рассмотрим операторное разложение токов $J^{(\sigma)}(z)$ с примарным состоянием $V_{\lambda_1}^{(1)} \dots V_{\lambda_p}^{(p)}$. Из правил слияния следует, что

$$\begin{aligned} J^{(\sigma)}(z) V_{\lambda_1}^{(1)}(0) \dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0) &= \sum_{m_\sigma, m_{\sigma+1} = \pm 1} z^{m_\sigma \lambda_\sigma b_\sigma + m_{\sigma+1} \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1}} \times \\ &\times C^{(\sigma)}(m_\sigma, m_{\sigma+1}; \lambda_1, \dots, \lambda_p) \left[V_{\lambda_1}^{(1)} \dots V_{\lambda_\sigma + \frac{m_\sigma b_\sigma}{2}}^{(\sigma)} V_{\lambda_{\sigma+1} + \frac{m_{\sigma+1}}{2b_{\sigma+1}}}^{(\sigma+1)} \dots V_{\lambda_p}^{(p)} \right], \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $C^{(\sigma)}(m_\sigma, m_{\sigma+1}; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ являются структурными константами. Чтобы достичь локальности, мы должны сделать проекцию [65] и сохранить только два члена в сумме (2.39), скажем, с $m_\sigma = m_{\sigma+1} = \pm 1$ и также наложить условие $\lambda_\sigma b_\sigma + \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1} \in \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z} + 1/2$. Теперь моды $J^{(\sigma)}$, которые действуют на

состояния представления, соответственно являются целыми или полуцелыми

$$\begin{aligned}
J^{(\sigma)}(z)V_{\lambda_1}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0) &= \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} z^{n - \frac{1}{2}} J_n^{(\sigma)} V_{\lambda_1}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0), \quad \text{если } \lambda_\sigma b_\sigma + \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1} \in \mathbb{Z}, \\
J^{(\sigma)}(z)V_{\lambda_1}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0) &= \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n - \frac{1}{2}} J_n^{(\sigma)} V_{\lambda_1}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0), \quad \text{если } \lambda_\sigma b_\sigma + \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Второе требование состоит в том, что состояние (2.38) является примарным для токов $J^{(\sigma)}$, то есть оно аннигилируется модами всех токов $J^{(\sigma)}(z)$ с положительными номерами

$$J_n^{(\sigma)} V_{\lambda_1}^{(1)}(0)\dots V_{\lambda_p}^{(p)}(0) = 0, \quad n > 0, \quad \sigma = 1, \dots, p-1. \quad (2.40)$$

Это условие приводит нас к следующему соотношению для лиувиллевских импульсов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$

$$\lambda_\sigma b_\sigma + \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1} = 0, \quad (2.41)$$

если моды тока $J^{(\sigma)}(z)$ под номером σ полуцелые и

$$\lambda_\sigma b_\sigma + \lambda_{\sigma+1} b_{\sigma+1}^{-1} = \pm \frac{1}{2}, \quad (2.42)$$

если эти моды целые. По аналогии с представлениями алгебры Невьё-Шварца-Рамона будем называть примарное состояние невьё-шварцевским по отношению к току под номером σ , если (2.41) выполняется, и называть его рамоновским по отношению к току под номером σ , если выполняется (2.42) со знаком плюс или минус. В дальнейшем мы будем заинтересованы в представлениях, которые являются невьё-шварцевскими по отношению ко всем токам $J^{(\sigma)}(z)$, и в представлениях, которые являются рамоновскими по отношению к одному из токов и невьё-шварцевским по отношению ко всем остальным $p-2$ токам $J^{(\sigma)}(z)$.

В начале, мы собираемся рассматривать представление, которое является невьё-шварцевским по отношению ко всем $p - 1$ токам $J^{(\sigma)}(z)$. Будем использовать следующее обозначение примарного состояния в этом представлении

$$V_{\lambda_1^0}^{(1)} V_{\lambda_2^0}^{(2)} \cdots V_{\lambda_p^0}^{(p)}, \quad (2.43)$$

где обозначение λ_σ^0 означает, что эти лиувиллевские импульсы подчиняются условиям

$$\lambda_\sigma^0 b_\sigma + \lambda_{\sigma+1}^0 b_{\sigma+1}^{-1} = 0, \quad \sigma = 1, \dots, p - 1. \quad (2.44)$$

Таким образом, мы имеем $p - 1$ уравнений на p переменных. Это означает, что только одна из этих переменных является независимой и представление может быть пронумеровано только одной переменной λ , поэтому удобно параметризовать λ_σ^0 следующим образом

$$\lambda_\sigma^0 = \frac{\lambda}{\sqrt{(\sigma Q - pb)(pb - (\sigma - 1)Q)}}, \quad \sigma = 1, \dots, p, \quad (2.45)$$

что автоматически согласуется с (2.44). Теперь нетрудно выразить конформную размерность примарного состояния (2.43)

$$\Delta_{p,0}(\lambda) = \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \lambda^2 \right). \quad (2.46)$$

Операторные разложения всех токов $J^{(\sigma)}(z)$ с соответствующим примарным состоянием даются следующими формулами

$$\begin{aligned} J^{(\sigma)}(z) V_{\lambda_1^0}^{(1)}(0) \cdots V_{\lambda_p^0}^{(p)}(0) &= \\ &= \sum_{m=\pm 1} C^{(\sigma)}(m, m; \lambda_1, \dots, \lambda_p) \left[V_{\lambda_1^0}^{(1)} \cdots V_{\lambda_\sigma^0 + \frac{mb_\sigma}{2}}^{(\sigma)} V_{\lambda_{\sigma+1}^0 + \frac{m}{2b_{\sigma+1}}}^{(\sigma+1)} \cdots V_{\lambda_p^0}^{(p)} \right]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Рассмотрим представления, которые являются рамоновскими по отношению к току $J^{(s)}(z)$ под номером s ($s = 1, \dots, p - 1$) и невьё-шварцевским по отношению к остальным токам. Мы обозначаем представление под номером s этого типа как

$$V_{\lambda_1^s}^{(1)} V_{\lambda_2^s}^{(2)} \cdots V_{\lambda_p^s}^{(p)}, \quad (2.48)$$

где

$$\lambda_\sigma^s b_\sigma + \lambda_{\sigma+1}^s b_{\sigma+1}^{-1} = \begin{cases} 0, & \sigma \neq s, \\ -\frac{1}{2}, & \sigma = s. \end{cases} \quad (2.49)$$

Конечно, мы можем взять $+\frac{1}{2}$ вместо $-\frac{1}{2}$, но это даст нам эквивалентное представление. Заметим, что существуют, таким образом, $p-1$ представлений, которые являются рамоновскими по отношению только к одному из токов.

Для представления под номером s мы снова имеем $p-1$ уравнений (2.49) на p переменных λ_σ^s , и, таким образом, представления этого типа могут быть параметризованы только одной переменной. Можно удобно параметризовать λ_σ^s в терминах λ_σ^0 из (2.45), при этом условие (2.49) будет автоматически удовлетворено. Вводя новые переменные d_σ^s

$$d_\sigma^s = \begin{cases} \frac{1}{p}\sigma(p-s), & \text{если } \sigma \leq s \\ \frac{1}{p}s(p-\sigma), & \text{если } \sigma > s \end{cases}, \quad s = 0, \dots, p-1, \quad \sigma = 1, \dots, p, \quad (2.50)$$

мы получаем для λ_σ^s

$$\lambda_\sigma^s = \lambda_\sigma^0 + d_{\sigma-1}^s \frac{b_\sigma^{-1}}{2} + d_\sigma^s \frac{b_\sigma}{2}, \quad (2.51)$$

где λ_σ^0 даются формулой (2.45). Конформная размерность рассматриваемого примарного состояния (2.48) может быть записана как

$$\Delta_{p,s}(\lambda) = \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \lambda^2 \right) + \frac{s(p-s)}{4p}. \quad (2.52)$$

Операторные разложения токов $J^{(\sigma)}(z)$ с соответствующим примарным состоянием даются формулами

$$\begin{aligned} & J^{(\sigma)}(z) V_{\lambda_1^s}^{(1)}(0) \dots V_{\lambda_p^s}^{(p)}(0) = \\ & = \sum_{m=\pm 1} C^{(\sigma)}(m, m; \lambda_1, \dots, \lambda_p) \left[V_{\lambda_1^s}^{(1)} \dots V_{\lambda_\sigma^s + \frac{mb_\sigma}{2}}^{(\sigma)} V_{\lambda_{\sigma+1}^s + \frac{m}{2b_{\sigma+1}}}^{(\sigma+1)} \dots V_{\lambda_p^s}^{(p)} \right], \quad \sigma \neq s, \\ & J^{(s)}(z) V_{\lambda_1^s}^{(1)}(0) \dots V_{\lambda_p^s}^{(p)}(0) = \\ & = \sum_{m=\pm 1} z^{-\frac{m}{2}} C^{(s)}(m, m; \lambda_1, \dots, \lambda_p) \left[V_{\lambda_1^s}^{(1)} \dots V_{\lambda_\sigma^s + \frac{mb_\sigma}{2}}^{(\sigma)} V_{\lambda_{\sigma+1}^s + \frac{m}{2b_{\sigma+1}}}^{(\sigma+1)} \dots V_{\lambda_p^s}^{(p)} \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Теперь мы собираемся описать структуру рассмотренных представлений и вычислить их характеры. Состояния во всех представлениях генерируются p тензорами энергии-импульса и $p-1$ голоморфными токами. Структура операторных разложений этих токов с примарными состояниями (2.47) и (2.53) говорит нам, что представление, кроме вирасоровских потомков примарного состояния, содержит также состояния, чьи лиувиллевские импульсы полей под номерами σ и $\sigma+1$ смещены на $\pm b_\sigma/2$ и $\pm b_{\sigma+1}^{-1}/2$ соответственно и которые также примарны по отношению к p тензорам энергии-импульса. Таким образом, беря операторное разложение тока $J^{(\sigma)}(z)$ с этими состояниями со смещёнными импульсами λ_σ и $\lambda_{\sigma+1}$, мы сгенерируем бесконечное число состояний, которые примарны по отношению к p тензорам энергии-импульса. Для представления под номером s эти состояния даются формулой

$$V_{\lambda_1^s+n_1 \frac{b_1}{2}}^{(1)} V_{\lambda_2^s+n_1 \frac{b_2^{-1}}{2}+n_2 \frac{b_2}{2}}^{(2)} \dots V_{\lambda_p^s+n_{p-1} \frac{b_p^{-1}}{2}}^{(p)}, \quad (2.54)$$

где $n_\sigma \in \mathbb{Z}$ и $n_0 = n_p = 0$. К тому же, p тензоров энергии-импульса генерируют подпредставления Вирасоро для каждого состояния (2.54). Таким образом, представление под номером s первой реализации $\mathcal{A}(2, p)$, которое мы обозначаем как $\pi_{p,s}^{\mathbf{1}}$ даётся следующим выражением

$$\pi_{p,s}^{\mathbf{1}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z}} \left[V_{\lambda_1^s+n_1 \frac{b_1}{2}}^{(1)} \right] \times \left[V_{\lambda_2^s+n_1 \frac{b_2^{-1}}{2}+n_2 \frac{b_2}{2}}^{(2)} \right] \times \dots \times \left[V_{\lambda_p^s+n_{p-1} \frac{b_p^{-1}}{2}}^{(p)} \right], \quad (2.55)$$

где $s = 0, \dots, p-1$ и квадратные скобки обозначают модуль Вирасоро.

Характер представления $\pi_{p,s}^{\mathbf{1}}$ может быть легко вычислен. Мы имеем

$$\chi_p^s(q) = \text{tr} \left\{ q^{\sum_{\sigma=1}^p L_0^{(\sigma)}} \right\}_{\pi_{p,s}^{\mathbf{1}}}, \quad (2.56)$$

где $L_0^{(\sigma)}$ – элемент подалгебры Вирасоро, генерируемой тензором энергии-импульса $T^{(\sigma)}$. Таким образом,

$$\chi_p^s(q) = (\chi_B(q))^p \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z} \\ n_0 = n_p = 0}} q^{\sum_{\sigma=1}^p \Delta^{(\sigma)}(\lambda_\sigma^s + n_{\sigma-1} \frac{b_\sigma^{-1}}{2} + n_\sigma \frac{b_\sigma}{2})}. \quad (2.57)$$

Подсчитывая сумму конформных размерностей, мы получаем

$$\chi_p^s(q) = q^{\Delta_{p,s}(\lambda)} (\chi_B(q))^p \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z} \\ n_0 = n_p = 0}} q^{\frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{p-1} (n_\sigma^2 - n_\sigma n_{\sigma+1}) + \frac{1}{2} n_s}, \quad (2.58)$$

где $\Delta_{p,s}(\lambda) = (Q^2/4 - \lambda^2)/p + s(p-s)/(4p)$, и $\chi_B(q)$ определено в (2.10).

2.2.2 Характеры первой реализации и производящие функции стационарных точек

Как мы поясняли во Введении, причиной наличия соответствия Алдая-Гайотты-Тачикавы является утверждение, что можно построить действие алгебры симметрии $\mathcal{A}(2, p)$ на эквивариантных когомологиях пространства модулей инстантонов $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_p}$. Теперь мы очевидно замечаем из (2.13) и (2.58) совпадение производящих функций стационарных точек на пространстве модулей и характеры первой реализации $\mathcal{A}(2, p)$

$$q^{-\Delta_{p,s}(\lambda)} (\chi_B(q))^p \chi_p^s(q) = \sum_{k_1, \dots, k_{p-1}=0}^1 q^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) + \frac{k_s}{2}} \chi_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1}|q), \quad (2.59)$$

где $s = 0, \dots, p-1$ и производящая функция $\chi_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1})$ даётся в (2.12). Заметим, что полученное равенство устанавливает соответствие характеров представлений алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ в первой реализации и производящих функций стационарных точек пространства модулей, помеченных раскрашенными диаграммами Юнга. Ниже мы иллюстрируем полученное равенство, перечисляя примеры для $p = 2, 3, 4$. Применяя формулу (2.23), мы находим

Для $p = 2$:

$$\begin{aligned} q^{-\Delta_{2,0}(\lambda)} (\chi_B(q))^2 \chi_2^0(q) &= \chi_{0,0}(0|q) + q^{-1} \chi_{0,0}(1|q) \\ q^{-\Delta_{2,1}(\lambda)} (\chi_B(q))^2 \chi_2^1(q) &= 2\chi_{0,1}(0|q). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Для $p = 3$:

$$\begin{aligned} q^{-\Delta_{3,0}(\lambda)}(\chi_B(q))^3\chi_3^0(q) &= \chi_{0,0}(0, 0|q) + 3q^{-\frac{5}{6}}\chi_{0,0}(1, 0|q), \\ q^{-\Delta_{3,1}(\lambda)}(\chi_B(q))^3\chi_3^1(q) &= 3\chi_{0,1}(0, 0|q) + q^{-\frac{5}{6}}\chi_{0,1}(0, 1|q). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Для $p = 4$:

$$q^{-\Delta_{4,0}(\lambda)}(\chi_B(q))^4\chi_4^0(q) = \chi_{0,0}(0, 0, 0|q) + 6q^{-\frac{3}{4}}\chi_{0,0}(1, 0, 0|q) + q^{-\frac{3}{2}}\chi_{0,0}(1, 0, 1|q), \quad (2.62)$$

$$q^{-\Delta_{4,1}(\lambda)}(\chi_B(q))^4\chi_4^1(q) = 4\chi_{0,1}(0, 0, 0|q) + 4q^{-\frac{3}{4}}\chi_{0,1}(0, 0, 1|q),$$

$$q^{-\Delta_{4,2}(\lambda)}(\chi_B(q))^4\chi_4^2(q) = 6\chi_{0,2}(0, 0, 0|q) + 2q^{-\frac{3}{4}}\chi_{0,2}(1, 0, 0|q).$$

2.3 $\mathcal{A}(2, p)$ как произведение Минимальных Моделей и косета

Данный раздел посвящён другой реализации $\mathcal{A}(2, p)$ как произведения последовательных Минимальных Моделей и косета. Эта реализация обозначена стрелкой 3 на рисунке (2.1). Снова начнём с определения алгебры $\mathcal{A}(r, p)$

$$\mathcal{A}(r, p) = \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(n)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(n-p)_r}. \quad (2.63)$$

Использование дуальности уровня и ранга позволяет нам переписать (2.63) следующим образом

$$\mathcal{A}(r, p) \supset \mathcal{H} \times \widehat{\mathfrak{sl}}(p)_r \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n}. \quad (2.64)$$

Используя метод [65, 64], то есть формально умножая и деля (2.64) на алгебру $\widehat{\mathfrak{gl}}(k)_r$ с $k = 2, \dots, p-1$, мы имеем

$$\mathcal{A}(r, p) \supset \widehat{\mathfrak{gl}}(1)_r \times \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(2)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(1)_r} \times \dots \times \frac{\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r}{\widehat{\mathfrak{gl}}(p-1)_r} \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n}. \quad (2.65)$$

Тогда, применяя дуальность уровня и ранга, как мы делали в (2.25), мы получаем

$$\mathcal{A}(r, p) \supset \mathcal{H}^p \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_2} \times \dots \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{p-1}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p} \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n}. \quad (2.66)$$

Косеты $\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{m-1}/\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_m$ с $m = 2, \dots, p$ являются последовательными Минимальными Моделями с W_r симметрией [73] и с центральными зарядами

$$c_{r,m}^{\text{MM}} = (r-1) \left(1 - \frac{r(r+1)}{(m+r-1)(m+r)} \right), \quad m = 2, \dots, p, \quad (2.67)$$

тогда как косет $\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}/\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n$ определяет конформную теорию поля с центральным зарядом

$$c_{\text{WPF}} = \frac{p(r^2-1)}{p+r} \left(1 - \frac{r(p+r)}{(n-p+r)(n+r)} \right). \quad (2.68)$$

Снова заметим, что косет $\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{n-p}/\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_n$ был определён как алгебра симметрии конформной теории поля, описывающей r неабелевы спин-синглетные состояния [69]. В процитированной работе [69] рассматривается случай, когда уровни аффинных алгебр Ли в косете являются целыми числами. Версия АГТ соответствия для таких конформных теорий поля была рассмотрена в работе [5].

В случае $\mathcal{A}(2, p)$ или $r = 2$, косеты $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1 \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{m-1}/\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_m$ изоморфны алгебрам симметрии Минимальных Моделей $\mathcal{M}(m+1/m+2)$ [3, 4]. И мы получаем⁶

$$\mathcal{A}(2, p) \supset \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n} \times \mathcal{M}(3/4) \times \dots \times \mathcal{M}(p+1/p+2) \times \mathcal{H}^p. \quad (2.69)$$

Далее мы покажем, что характер определённой суммы представлений с правой стороны (2.69) совпадает с характером первой реализации $\mathcal{A}(2, p)$, что

⁶Симметрия \mathbb{Z}_p парафермионной теории поля Лиувилля описывается косетом $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p}/\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$ [74, 66, 25].

означает, что две реализации $\mathcal{A}(2, p)$ взаимно согласованы. Тогда, автоматически все характеры будут равны сумме производящих функций пар раскрашенных диаграмм Юнга.

2.3.1 Косет $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$

Характеры $c_s^m(q)$ представлений $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p} / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n$ даются функциями бранчинга [3, 4]. Эти характеры имеют целые параметры m и s и непрерывный параметр j и даются формулой из [75]

$$c_s^m(q) = q^{\delta_s^m(j)} \chi_B^3(q) \sum_{r,l=0}^{+\infty} (-1)^{r+l} q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1)} \times \\ \times \left(q^{l\frac{m-s}{2} + r\frac{m+s}{2}} - q^{p+1-m+l(p+1-\frac{m-s}{2})+r(p+1-\frac{m+s}{2})} \right), \quad (2.70)$$

где $0 \leq m \leq p$, $m - s = 0 \pmod{2}$, и

$$\delta_s^m(j) = \frac{j(j+1)}{n-p+2} + \frac{m(m+2)}{4(p+2)} - \frac{(2j+s)(2j+s+2)}{4(n+2)}. \quad (2.71)$$

Покажем, что характер $c_s^m(q)$ имеет следующие симметрии

$$c_{-s}^m(q) = c_s^m(q), \quad (2.72) \\ c_{s+2p}^m(q) = c_s^m(q).$$

Первая симметрия, которой обладает характер (2.70), – это симметрия относительно преобразования $s \rightarrow -s$. Сумма по r и l в характере, очевидно, инвариантна относительно этого преобразования. К тому же, легко проверить, что

$$\delta_{-s}^m(j) = \delta_s^m(j). \quad (2.73)$$

Таким образом, мы получаем равенство

$$c_{-s}^m(q) = c_s^m(q). \quad (2.74)$$

Теперь мы можем проанализировать периодичность характера при преобразовании $s \rightarrow s + 2p$. Давайте вначале рассмотрим, как преобразуется $\delta_s^m(j)$

$$\delta_{s+2p}^m(j) = \delta_s^m(j) - s - p. \quad (2.75)$$

Так, мы можем записать

$$\begin{aligned} c_{s+2p}^m(q) &= q^{\delta_s^m(j)-s-p} \chi_B^3(q) \sum_{r,l=0}^{\infty} (-1)^{r+l} \left(q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1) + rp - lp + l\frac{m-s}{2} + r\frac{m+s}{2} - \right. \\ &\quad \left. - q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1) + rp - lp + p + 1 - m + r(p+1 - \frac{m-s}{2}) + l(p+1 - \frac{m+s}{2})} \right) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Делая сдвиги $r \rightarrow r + 1$ и $l \rightarrow l - 1$, мы получаем

$$\begin{aligned} c_{s+2p}^m(q) &= q^{\delta_s^m(j)-s-p} \chi_B^3(q) \sum_{r=-1, l=1}^{\infty} (-1)^{r+l} \left(q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1) + l\frac{m-s}{2} + r\frac{m+s}{2} + s + p - \right. \\ &\quad \left. - q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1) + p + 1 - m + r(p+1 - \frac{m-s}{2}) + l(p+1 - \frac{m+s}{2}) + s + p} \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} c_{s+2p}^m(q) &= q^{\delta_s^m(j)} \chi_B^3(q) \sum_{r=-1, l=1}^{\infty} (-1)^{r+l} \left(q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1) + l\frac{m-s}{2} + r\frac{m+s}{2} - \right. \\ &\quad \left. - q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1) + p + 1 - m + r(p+1 - \frac{m-s}{2}) + l(p+1 - \frac{m+s}{2})} \right) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Тогда, вычитая $c_s^m(q)$, мы получаем

$$\begin{aligned} c_{s+2p}^m(q) - c_s^m(q) &= q^{\delta_s^m(j)} \chi_B^3(q) \left[\sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^{l-1} q^{\frac{l(l+1)}{2} - l(p+1) + l\frac{m-s}{2} - \frac{m+s}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r q^{\frac{r(r+1)}{2} + r\frac{m+s}{2}} - \sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^{l-1} q^{\frac{l(l+1)}{2} - l\frac{m+s}{2} - \frac{m+s}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r q^{\frac{r(r+1)}{2} + r(p+1 - \frac{m-s}{2}) + p + 1 - m} \right] \end{aligned} \quad (2.79)$$

Прделаем некоторые преобразования с третьим членом в предыдущей формуле

$$\sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^l q^{\frac{l(l+1)}{2} - l\frac{m+s}{2} - \frac{m+s}{2}} = \sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^l q^{\frac{1}{2} \left(l - \frac{m+s-1}{2} \right)^2 - \frac{(m+s-1)^2}{8} - \frac{m+s}{2}} \quad (2.80)$$

Так как первый ненулевой член в предыдущем ряду появляется под номером $l = m + s - 1$, мы делаем подстановку $l = m + s + l'$ с $l' = -1, 0, 1, \dots$

$$\sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^l q^{\frac{1}{2}(l - \frac{m+s-1}{2})^2 - \frac{(m+s-1)^2}{8} - \frac{m+s}{2}} = \sum_{l'=-1}^{+\infty} (-1)^{l'} q^{\frac{l'(l'+1)}{2} + l' \frac{m+s}{2}} \quad (2.81)$$

Тогда в итоге мы имеем сумму второго и третьего члена

$$- \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r q^{\frac{r(r+1)}{2} + r \frac{m+s}{2}} + \sum_{l'=-1}^{+\infty} (-1)^{l'} q^{\frac{l'(l'+1)}{2} + l' \frac{m+s}{2}} = -q^{-\frac{m+s}{2}} \quad (2.82)$$

После этого мы проделываем те же преобразования с первым членом

$$\sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^{l-1} q^{\frac{l(l+1)}{2} - l(p+1) + l \frac{m-s}{2} - \frac{m+s}{2}} = \sum_{l=1}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}(l - \frac{s-m+2p+1}{2})^2 - \frac{(s-m+2p+1)^2}{8} - \frac{m+s}{2}}. \quad (2.83)$$

Первый ненулевой член в этом ряду появляется под номером $l = s - m + 2p + 2 + l'$ с $l' = -1, 0, 1, \dots$

$$\sum_{l=1}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}(l - \frac{s-m+2p+1}{2})^2 - \frac{(s-m+2p+1)^2}{8} - \frac{m+s}{2}} = - \sum_{l'=-1}^{+\infty} (-1)^{l'} q^{\frac{l'(l'+1)}{2} + (p+1)l' + p+1 - l' \frac{m-s}{2} - m}. \quad (2.84)$$

Тогда сумма первого и четвёртого членов равна

$$- \sum_{l'=-1}^{+\infty} (-1)^{l'} q^{\frac{l'(l'+1)}{2} + (p+1)l' + p+1 - l' \frac{m-s}{2} - m} + \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r q^{\frac{r(r+1)}{2} + r(p+1 - \frac{m-s}{2}) + p+1 - m} = q^{-\frac{m+s}{2}} \quad (2.85)$$

Объединяя полученные утверждения, мы видим, что

$$c_{s+2p}^m(q) = c_s^m(q). \quad (2.86)$$

Таким образом, мы можем ограничить наше рассмотрение теми s , которые являются целыми числами от 0 до p .

Ниже мы собираемся перейти к другой параметризации состояния старшего веса и характера представления старшего веса, которое удобно в наших вычислениях. Так, мы переходим от параметров n и j к b и μ следующим

образом

$$b^2 = -\frac{n+2}{n-p+2}, \quad j = \frac{1}{Q} \left(\mu - \frac{Q}{2} - \frac{s}{2b} \right), \quad Q = b + b^{-1}. \quad (2.87)$$

А состояние старшего веса косета мы обозначаем как $\Psi_{s;\mu}^m$ и его представление как $[\Psi_{s;\mu}^m]$. Размерность состояния старшего веса и характер этого представления даётся формулой (см. приложение G)

$$\Delta_s^m(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \mu^2 \right) + \frac{s(p-s)}{2p(p+2)} + \frac{(m-s)(m+s+2)}{4(p+2)}, & m \geq s \\ \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \mu^2 \right) + \frac{s(p-s)}{2p(p+2)} + \frac{(s-m)(2p-m-s+2)}{4(p+2)}, & m < s \end{cases} \quad (2.88)$$

$$c_s^m(q) = q^{D_s^m(\mu)} \chi_B^3(q) \sum_{r,l=0}^{\infty} (-1)^{r+l} q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1)} \times \\ \times (q^{l\frac{m-s}{2} + r\frac{m+s}{2}} - q^{p+1-m+l(p+1-\frac{m-s}{2})+r(p+1-\frac{m+s}{2})}). \quad (2.89)$$

где $0 \leq m, s \leq p$, $m - s = 0 \pmod{2}$ и

$$D_s^m(\mu) = \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \mu^2 \right) + \frac{s(p-s)}{2p(p+2)} + \frac{(m-s)(m+s+2)}{4(p+2)}$$

для всех m и s .

2.3.2 Последовательные Минимальные Модели

Обратим внимание на первую часть (2.69), которая представляет из себя произведение последовательных Минимальных Моделей. Вспомним свойства Минимальной Модели $\mathcal{M}(m/m+1)$. Центральный заряд данной модели равен $c_{2,m}^{\text{MM}} = 1 - 6/(m(m+1))$, примарные поля задаются набором $\phi_{r,s}^{(m)}$ с $r = 1, 2, \dots, m-1$, и $s = 1, 2, \dots, m$ [76], а конформная размерность этих полей равна

$$h_{r,s}^{(m)} = \frac{((m+1)r - ms)^2 - 1}{4m(m+1)}. \quad (2.90)$$

Вследствие того, что размерности полей $\phi_{r,s}^{(m)}$ и $\phi_{m-r,m+1-s}^{(m)}$ совпадают, то представления, соответствующие этим примарным полям, эквивалентны, что

означает, то мы можем отождествить эти поля. Характер такого представления $M_{r,s}^{(m)}$ равен

$$\chi_{r,s}^{(m)}(q) = \text{Tr}(q^{L_0})|_{M_{r,s}^{(m)}} = \Delta_{r,s}^m(q)\chi_B(q), \quad (2.91)$$

где

$$\Delta_{r,s}^m(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (q^{\alpha_{r,s}^m(k)} - q^{\alpha_{r,-s}^m(k)}),$$

$$\alpha_{r,s}^m(k) = \frac{(2m(m+1)k - sm + r(m+1))^2 - 1}{4m(m+1)}. \quad (2.92)$$

Состояние $\phi_{1k_1}^{(3)} \times \phi_{k_1k_2}^{(4)} \times \dots \times \phi_{k_{p-2}n}^{(p+1)}$ с $k_i \in [1, i+2]$ и $n \in [1, p+1]$ имеет размерность

$$h_n(k_1, \dots, k_{p-2}) = \sum_{i=1}^{p-1} h_{k_{i-1}k_i}^{(i+2)} = \frac{(n^2 - 1)(p+1)}{4(p+2)} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-2} (k_i^2 - k_i k_{i+1}), \quad (2.93)$$

где $k_0 = 1, k_{p-1} = n$. Обозначим представление, соответствующее этому примарному состоянию, через $M_{1,k_1}^{(3)} \times M_{k_1,k_2}^{(4)} \times \dots \times M_{k_{p-2},n}^{(p+1)}$. Тогда прямая сумма следующих представлений

$$\bigoplus_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2}} M_{1,k_1}^{(3)} \times M_{k_1,k_2}^{(4)} \times \dots \times M_{k_{p-2},n}^{(p+1)} \quad (2.94)$$

имеет характер

$$\text{ch}_n(q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2, k_{p-1}=n}} \prod_{i=1}^{p-1} \chi_{k_{i-1}k_i}^{(i+2)}(q). \quad (2.95)$$

Теперь, вычислив характеры второй реализации алгебры $\mathcal{A}(2, p)$, мы можем сравнить их с характерами первой реализации $\mathcal{A}(2, p)$.

2.3.3 Сопоставление характеров представлений первой и второй реализаций алгебры $\mathcal{A}(2, p)$

Начнём с рассмотрения следующей суммы представлений косета и последовательных Минимальных Моделей

$$[\Psi_{s;\mu}^m] \times \bigoplus_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2}} M_{1, k_1}^{(3)} \times M_{k_1, k_2}^{(4)} \times \dots \times M_{k_{p-2}, n}^{(p+1)}, \quad (2.96)$$

где $1 \leq n \leq p + 1$, $0 \leq m, s \leq p$ с $m - s = 0 \pmod{2}$. Характер такого представления равен

$$c_s^m(q) \text{ch}_n(q). \quad (2.97)$$

Заметим, что представление (2.96) обозначается тремя целыми параметрами $0 \leq m, s \leq p$, $m - s = 0 \pmod{2}$, $1 \leq n \leq p + 1$ и одним непрерывным параметром μ . Вспомним, что мы ищем сумму представлений вида (2.96), характер которой совпадает с характером $\chi_p^s(q)$ представления первой реализации $\mathcal{A}(2, p)$, которое обозначается целым параметром $0 \leq s \leq p - 1$ и непрерывным параметром λ .

Характер (2.58) представления p моделей $\chi_p^s(q)$ выглядит как $q^{\Delta_{p,s}(\lambda)}$, умноженный на некоторый ряд, содержащий целые и полуцелые степени q , а характер (2.97) является суммой по k_i выражений вида $q^{\Delta_s^m(\lambda) + h_n(k_1, \dots, k_{p-2})}$, умноженных на ряды, содержащие целые степени. Так как $h_n(k_1, \dots, k_{p-2}) - h_n(k'_1, \dots, k'_{p-2}) \in \mathbb{Z}/2$, то необходимым условием для совпадения характеров будет

$$\Delta_s^m(\mu) + h_n(k_1, \dots, k_{p-2}) - \Delta_{p,s}(\lambda) \in \mathbb{Z}/2. \quad (2.98)$$

После некоторых вычислений мы получаем

$$\frac{\lambda^2 - \mu^2}{4p} + \frac{(m+1)^2 - n^2}{4(p+2)} - \frac{s}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-2} (k_i^2 - k_i k_{i+1}) \in \mathbb{Z}/2. \quad (2.99)$$

Так как левая часть выражения должна быть полуцелой и не должна зависеть от какого-либо непрерывного параметра, то естественно предположить,

что $\mu = \lambda$. Это приводит нас к следующему диофантову уравнению

$$\frac{(m+1)^2 - n^2}{4(p+2)} - \frac{s}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-2} (k_i^2 - k_i k_{i+1}) \in \mathbb{Z}/2, \quad (2.100)$$

из которого следует, что

$$\frac{(m-n+1)(m+n+1)}{p+2} \in \mathbb{Z}. \quad (2.101)$$

Так как $-p \leq m-n+1 \leq p$ и $2 \leq m+n+1 \leq p+2$, то существует две возможности

$$n = m+1, \quad n = p-m+1. \quad (2.102)$$

Таким образом, беря во внимание (2.102), мы заключаем, что мы должны взять только такие представления косета и произведения Минимальных Моделей, которые имеют вид⁷

$$\begin{aligned} [\Psi_{s;\lambda}^m] \times \bigoplus_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2}} M_{1,k_1}^{(3)} \times M_{k_1, k_2}^{(4)} \times \dots \times M_{k_{p-2}, m+1}^{(p+1)}, \\ [\Psi_{s;\lambda}^m] \times \bigoplus_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2}} M_{1,k_1}^{(3)} \times M_{k_1, k_2}^{(4)} \times \dots \times M_{k_{p-2}, p-m+1}^{(p+1)}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Таким образом, представление алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ во второй реализации

$$\pi_{p,s}^2 = \bigoplus_{\substack{0 \leq m \leq p \\ m-s=0 \pmod{2}}} [\Psi_{s;\lambda}^m] \times \bigoplus_{\substack{\{k_1, \dots, k_{p-2}\} \\ 1 \leq k_i \leq i+2}} M_{1,k_1}^{(3)} \times M_{k_1, k_2}^{(4)} \times \dots \times (M_{k_{p-2}, m+1}^{(p+1)} \oplus M_{k_{p-2}, p-m+1}^{(p+1)}). \quad (2.105)$$

Характер этого представления

$$\sum_{\substack{0 \leq m \leq p \\ m-s=0 \pmod{2}}} c_s^m(q) (\text{ch}_{m+1}(q) + \text{ch}_{p-m+1}(q)). \quad (2.106)$$

⁷Эти два решения (2.102) для n приводят к следующим уравнениями для k_i

$$\sum_{i=0}^{p-2} (k_{i+1} - k_i)^2 = \begin{cases} s, & \text{если } n = m+1 \\ p+s-2m & \text{если } n = p-m+1. \end{cases} \quad (2.103)$$

Гипотеза о том, что представление $\pi_{p,s}^2$ является другой формой представления $\mathcal{A}(2, p)$, то есть

$$\pi_{p,s}^1 \cong \pi_{p,s}^2, \quad (2.107)$$

приводит нас к следующему нетривиальному равенству

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq m \leq p \\ m-s=0 \pmod{2}}} c_s^m(q) (\text{ch}_{m+1}(q) + \text{ch}_{p-m+1}(q)) = \\ = q^{\Delta_{p,s}(\lambda)} (\chi_B(q))^p \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z} \\ n_0 = n_p = 0}} q^{\frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{p-1} (n_\sigma^2 - n_\sigma n_{\sigma+1}) + \frac{1}{2} n_s}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

где выражения для характеров даны в (2.58), (2.89), и (2.95). Мы проверили равенство (2.108) для случаев $p = 2, \dots, 8$ порядок за порядком до q^6 . Равенство (2.108) доказывает согласованность представлений алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ в первой и второй реализациях. Следует отметить, что в [77] было показано, что для случая, когда эквивариантный параметр $n = 1$ (и в принципе для всех $n \in \mathbb{Z}$), характеры представлений второй реализации $\mathcal{A}(2, p)$ могут быть переписаны как определённые ряды с использованием обобщённых равенств Роджерса-Рамануджана.

2.3.4 Трёхточечные функции косетной модели и их связь с трёхточечными функциями теории Лиувилля

В начале заметим, что из рассуждений предыдущего раздела вытекают следующие равенства для размерностей представлений

$$\begin{aligned} \Delta_s^s(\lambda) + h_{s+1}(k_1, \dots, k_{p-2}) &= \Delta_{p,s}(\lambda), \\ \Delta_s^s(\lambda) + h_{p-s+1}(k_1, \dots, k_{p-2}) &= \Delta_{p,s}(\lambda), \end{aligned} \quad (2.109)$$

при условии, что равенства (2.103) верны. Если мы также примем во внимание нашу гипотезу (2.107), мы можем предположить, что существует связь

между трёхточечными функциями в разных реализациях алгебры $\mathcal{A}(2, p)$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{s_1; \lambda_1}^{s_1}(z_1, \bar{z}_1) \Psi_{s_2; \lambda_2}^{s_2}(z_2, \bar{z}_2) \Psi_{s_3; \lambda_3}^{s_3}(z_3, \bar{z}_3) \rangle \times C_{\text{Minimal model}}(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2; z_3, \bar{z}_3) &\stackrel{?}{\cong} \\ &\cong \prod_{\sigma=1}^p \langle V_{(\lambda_1)_\sigma}^{(\sigma)}(z_1, \bar{z}_1) V_{(\lambda_2)_\sigma}^{(\sigma)}(z_2, \bar{z}_2) V_{(\lambda_3)_\sigma}^{(\sigma)}(z_3, \bar{z}_3) \rangle, \end{aligned} \quad (2.110)$$

где $C_{\text{Minimal model}}(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2; z_3, \bar{z}_3)$ – сумма по всем трёхточечным функциям Минимальных Моделей, размерности которых удовлетворяют уравнениям (2.109) и (2.103). Функциональная зависимость от $z_{ij} = z_i - z_j$ в этом равенстве выполняется благодаря тому, что есть равенство размерностей между правой и левой частями (2.109). Трёхточечные функции Минимальных Моделей лишь балансируют эту координатную зависимость и не имеют параметров, поэтому ниже мы опускаем эти функции и координатную зависимость для краткости.

Отсюда и далее мы перейдём от лиувиллевских импульсов λ к лиувиллевскому параметру α в соответствии с формулой

$$\alpha = \frac{Q}{2} + \lambda. \quad (2.111)$$

Оказывается, что не существует области значений действительного параметра b , где все b_σ и α_σ^s являются действительными числами. Выберем область параметра b лежащей в интервале $b^2 > \frac{1}{p-1}$. С этим предположением b_1 и α_1^s становятся действительными, а оставшиеся переменные – комплексными (конечно, при условии, что α и b являются действительными). Это означает, что мы имеем дело с одной теорией Лиувилля и $p - 1$ обобщёнными Минимальными Моделями. Поэтому мы вводим новые переменные $b_\sigma = -i\hat{b}_\sigma$ и $\alpha_\sigma^s = i\hat{\alpha}_\sigma^s$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\sqrt{pb}}{\sqrt{Q - pb}}, & \hat{b}_\sigma &= \sqrt{\frac{(\sigma - 1)Q - pb}{\sigma Q - pb}}, \\ \alpha_1^0 &= \frac{\alpha}{\sqrt{(Q - pb)pb}}, & \hat{\alpha}_\sigma^0 &= \frac{\alpha}{\sqrt{(\sigma Q - pb)((\sigma - 1)Q - pb)}}, \quad \sigma = 2, \dots, p, \end{aligned}$$

которые все являются действительными. Тогда правильным выражением для трёхточечной функции будет

$$\langle \Psi_{s_1; \alpha_1}^{s_1} \Psi_{s_2; \alpha_2}^{s_2} \Psi_{s_3; \alpha_3}^{s_3} \rangle \cong \langle V_{(\alpha_1)_1^{s_1}}^{(1)} V_{(\alpha_2)_1^{s_2}}^{(1)} V_{(\alpha_3)_1^{s_3}}^{(1)} \rangle \prod_{\sigma=2}^p \langle \hat{V}_{(\hat{\alpha}_1)_\sigma^{s_1}}^{(\sigma)} \hat{V}_{(\hat{\alpha}_2)_\sigma^{s_2}}^{(\sigma)} \hat{V}_{(\hat{\alpha}_3)_\sigma^{s_3}}^{(\sigma)} \rangle. \quad (2.112)$$

Трёхточечные функции косетной конформной теории поля были вычислены в [66], теории Лиувилля в [78, 79] и обобщённой Минимальной модели в [80]. Ниже мы исследуем это равенство, основываясь на явных выражениях для этих трёхточечных функций.

Определим трёхточечную корреляционную функцию полей косета $\Psi_{s; \alpha}^m$ как

$$\mathbb{C}_{(s_1, m_1), (s_2, m_2), (s_3, m_3)}^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Psi_{s_1; \alpha_1}^{m_1}(\infty) \Psi_{s_2; \alpha_2}^{m_2}(1) \Psi_{s_3; \alpha_3}^{m_3}(0) \rangle. \quad (2.113)$$

Трёхточечные функции вида $\mathbb{C}_{(s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3)}^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ были вычислены в [66]. Из-за наличия \mathbb{Z}_p симметрии эти трёхточечные функции являются ненулевыми только в двух случаях

$$\begin{aligned} (a). \quad & s_1 + s_2 + s_3 = 2s, \quad 0 \leq s_i \leq s \leq p, \\ (b). \quad & s_1 + s_2 + s_3 = p + 2s, \quad 0 \leq s \leq s_i \leq p. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Нас будет интересовать случай (a). В этом случае трёхточечная функция даётся формулой

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{(s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3)}^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \left[\pi \mu \gamma \left(\frac{bQ}{p} \right) b^{-\frac{2bQ}{p}} \right]^{\frac{Q-\alpha}{b}} \rho(s_1, s_2, s_3) \times \\ &\times \frac{\Upsilon_0^{(p)}(b) \Upsilon_{s_1}^{(p)}(2\alpha_1) \Upsilon_{s_2}^{(p)}(2\alpha_2) \Upsilon_{s_3}^{(p)}(2\alpha_3)}{\Upsilon_s^{(p)}(\alpha - Q) \Upsilon_{s-s_1}^{(p)}(\alpha_2 + 3 - 1) \Upsilon_{s-s_2}^{(p)}(\alpha_1 + 3 - 2) \Upsilon_{s-s_3}^{(p)}(\alpha_1 + 2 - 3)}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ и $\alpha_{i+j-k} = \alpha_i + \alpha_j - \alpha_k$. Функция $\Upsilon_s^{(p)}(x)$ даётся формулой

$$\Upsilon_s^{(p)}(x) = \prod_{\sigma=1}^{p-s} \Upsilon_b \left(\frac{x + sb^{-1} + (\sigma - 1)Q}{p} \right) \prod_{\sigma=p-s+1}^p \Upsilon_b \left(\frac{x + (s-p)b^{-1} + (\sigma - 1)Q}{p} \right) \quad (2.116)$$

где $\Upsilon_b(x)$ – обычная Υ -функция

$$\log \Upsilon_b(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\left(\frac{Q}{2} - x \right)^2 e^{-t} - \frac{\sinh^2\left(\left(\frac{Q}{2} - t\right)\frac{t}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{tb}{2}\right) \sinh\left(\frac{t}{2b}\right)} \right], \quad 0 < \operatorname{Re}(x) < Q. \quad (2.117)$$

Также $\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}$ и $\rho(s_1, s_2, s_3)$ – некоторая функция, которая может быть найдена в [66].

Трёхточечная функция Лиувилля была вычислена в [78, 79]. Мы имеем

$$\mathbb{C}_b^L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \stackrel{\text{def}}{=} \langle V_{\alpha_1}(\infty) V_{\alpha_2}(1) V_{\alpha_3}(0) \rangle, \quad (2.118)$$

где

$$\mathbb{C}_b^L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left[\pi \mu^L \gamma(b^2) b^{2-2b^2} \right]^{\frac{Q-\alpha}{b}} \frac{\Upsilon_b(b) \Upsilon_b(2\alpha_1) \Upsilon_b(2\alpha_2) \Upsilon_b(2\alpha_3)}{\Upsilon_b(\alpha - Q) \Upsilon_b(\alpha_2 + \alpha_3 - 1) \Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_3 - 2) \Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 - 3)}. \quad (2.119)$$

Трёхточечные функции обобщённой Минимальной модели были вычислены в [80]. Мы имеем

$$\mathbb{C}_b^{\text{GMM}}((\hat{\alpha}_1)_\sigma^0, (\hat{\alpha}_2)_\sigma^0, (\hat{\alpha}_3)_\sigma^0) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \hat{V}_{(\hat{\alpha}_1)_\sigma^0}^{(\sigma)}(\infty) \hat{V}_{(\hat{\alpha}_2)_\sigma^0}^{(\sigma)}(1) \hat{V}_{(\hat{\alpha}_3)_\sigma^0}^{(\sigma)}(0) \rangle, \quad (2.120)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_b^{\text{GMM}}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3) &= \\ &= A \frac{\Upsilon_{\hat{b}}(\hat{\alpha} - \hat{b}^{-1} + 2\hat{b}) \Upsilon_{\hat{b}}(\hat{\alpha}_1 + \alpha_2 - 3 + \hat{b}) \Upsilon_{\hat{b}}(\hat{\alpha}_2 + \alpha_3 - 1 + \hat{b}) \Upsilon_{\hat{b}}(\hat{\alpha}_1 + \alpha_3 - 2 + \hat{b})}{\Upsilon_{\hat{b}}(\hat{b}) \Upsilon_{\hat{b}}(2\hat{\alpha}_1 + \hat{b}) \Upsilon_{\hat{b}}(2\hat{\alpha}_2 + \hat{b}) \Upsilon_{\hat{b}}(2\hat{\alpha}_3 + \hat{b})}, \end{aligned} \quad (2.121)$$

а $A = \hat{b}^{\hat{b}^{-2} - \hat{b}^2 - 1} [\gamma(\hat{b}^2) \gamma(\hat{b}^{-2} - 1)]^{1/2}$. Нормировочные константы в выражениях для трёхточечных функций не важны для нашего обсуждения. Мы собираемся объяснить, что (2.112) выполняется, по крайней мере, если мы подходящим образом нормируем поля $\Psi_{s;\alpha}^s(z, \bar{z}) \rightarrow n^{(s)}(\alpha) \Psi_{s;\alpha}^s(z, \bar{z})$.

Ниже мы доказываем равенство (2.112) для случая полей Ψ_0^0 с произвольным p и для случая полей Ψ_s^s с $p = 3$.

Трёхточечная функция $\langle \Psi_{0;\alpha_1}^0 \Psi_{0;\alpha_2}^0 \Psi_{0;\alpha_3}^0 \rangle$ для произвольного p . Теперь у нас есть все компоненты для того, чтобы сформулировать нашу гипотезу. Общее утверждение заключается в следующем (мы для простоты опускаем антиголоморфную переменную в обозначении вертексного оператора примарного поля)

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{(0,0),(0,0),(0,0)}^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) n^{(0)}(\alpha_1) n^{(0)}(\alpha_2) n^{(0)}(\alpha_3) = \\ = \mathbb{C}^L((\alpha^1)_1^0, (\alpha^1)_2^0, (\alpha^1)_3^0) \prod_{\sigma=2}^p \mathbb{C}^{\text{GMM}}((\hat{\alpha})_1)_\sigma^0, (\hat{\alpha})_2)_\sigma^0, (\hat{\alpha})_3)_\sigma^0, \end{aligned} \quad (2.122)$$

где $n^{(0)}(\alpha)$ – нормировка полей косетной модели, которая явно выписаны в Приложении I.1. Как мы уже сказали, главное утверждение состоит в том, что этот фактор $n^{(0)}(\alpha)$ может быть поглощён в нормировку полей косета $\Psi_{0;\alpha}^0(z)$. Главная идея доказательства формулы (2.122) заключается в использовании следующего тождества, выведенного в Приложении H.1,

$$\frac{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0)}{\prod_{\sigma=2}^p \Upsilon_{\hat{b}_\sigma}(\hat{\alpha}_\sigma^0 + \hat{b}_\sigma)} = \kappa_p(\alpha) \Upsilon_0^{(p)}(\alpha), \quad (2.123)$$

где константа пропорциональности $\kappa_p(\alpha)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa_p(\alpha) = \frac{b_1 \Upsilon_{b_1}(b_1)}{b \Upsilon_b(b) \prod_{\sigma=1}^{p-1} \Upsilon_b\left(\sigma \frac{Q}{p}\right) \prod_{\sigma=2}^p \Upsilon_{\hat{b}_\sigma}(\hat{b}_\sigma)} \times \\ \times \left((b_1)^{\frac{p-1}{p}(b_1)^2} \prod_{\sigma=2}^p (\hat{b}_\sigma)^{\frac{(\sigma-1)(p-\sigma+1)}{p(\hat{b}_\sigma)^2} - \frac{\sigma(p-\sigma)}{p} (\hat{b}_\sigma)^2} \right)^{\Delta_0^0(\alpha)}. \end{aligned}$$

Чтобы увидеть детали доказательства формулы (2.122), следует смотреть Приложение I.1.

Трёхточечные функции $\langle \Psi_{s_1;\alpha_1}^{s_1} \Psi_{s_2;\alpha_2}^{s_2} \Psi_{s_3;\alpha_3}^{s_3} \rangle$ для случая $p = 3$. В настоящий момент сконцентрируемся на случае $p = 3$. В этом случае мы имеем 5 ненулевых трёхточечных функций этого типа Ψ_s^s

$$\langle \Psi_0^0 \Psi_0^0 \Psi_0^0 \rangle, \langle \Psi_0^0 \Psi_1^1 \Psi_1^1 \rangle, \langle \Psi_0^0 \Psi_1^1 \Psi_2^2 \rangle, \langle \Psi_1^1 \Psi_1^1 \Psi_1^1 \rangle, \langle \Psi_1^1 \Psi_2^2 \Psi_2^2 \rangle,$$

(заметим, что мы опустили параметрическую и координатную зависимость полей для простоты). Факт состоит в том, что для $p = 3$ мы не можем выбрать нормировку локальных полей косетной конформной теории поля, которая оставляет нас только с Υ -функциями во всех трёхточечных функциях одновременно. Мы не доказываем утверждение о том, что существует нормировка полей косетной конформной теории поля, в которой каждая трёхточечная функция равна произведению трёхточечной функции теории Лиувилля и двух трёхточечных функций обобщённых Минимальных Моделей. Вместо этого мы доказываем, что для каждой трёхточечной функции в косетной конформной теории поля существует нормировка, в которой эта трёхточечная функция равна произведению трёхточечной функции теории Лиувилля и двух трёхточечных функций обобщённых Минимальных Моделей.

Используя тождества для Υ -функций из Приложения Н.2, мы доказываем следующие уравнения

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{(s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3)}^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) n^{(s_1)}(\alpha_1) n^{(s_2)}(\alpha_2) n^{(s_3)}(\alpha_3) = \\ = \mathbb{C}^L((\alpha_1)_1^{s_1}, (\alpha_2)_1^{s_2}, (\alpha_3)_1^{s_3}) \prod_{\sigma=2}^3 \mathbb{C}^{\text{GMM}}((\hat{\alpha}_1)_\sigma^{s_1}, (\hat{\alpha}_2)_\sigma^{s_2}, (\hat{\alpha}_3)_\sigma^{s_3}). \end{aligned} \quad (2.124)$$

Мы проверяем формулы, приведённые выше, в Приложении I.2.

Мы аргументируем, что существует общее правило для произвольного p . Если мы возьмём трёхточечную корреляционную функцию $\mathbb{C}_{(s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3)}^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, то существует нормировка полей косетной конформной теории поля, в которой эта корреляционная функция равна произведению трёхточечной функции теории Лиувилля и $p - 1$ трёхточечных функций обобщённых Минимальных Моделей. Чтобы быть конкретными, мы также проверили, что такие же тождества выполнены для трёхточечных функций косета в случае $p = 4$. Это можно проверить, используя соотношения, подобные (Н.45).

2.4 Статсуммы Некрасова для различных построений пространства модулей инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$

Для вычисления инстантонных статсумм в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ существует два способа построения пространства модулей инстантонов. Различным в этих подходах является действие группы тора на данном пространстве. Статсуммы, получающиеся в результате применения двух различных способов вычисления, должны быть связаны между собой. Первую реализацию алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ можно связать с первым способом построения пространства модулей инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Касательно второй реализации алгебры $\mathcal{A}(2, p)$, то какая-либо его связь с геометрическими конструкциями на данный момент неизвестна.

2.4.1 Инстантоны на ALE пространстве $\widetilde{\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p}$

Фактор-пространство $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ не является гладким многообразием. Для того, чтобы построить пространство модулей инстантонов, нужно рассмотреть данное многообразие с регуляризованной сингулярностью $X_p = \widetilde{\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p}$, которое называется асимптотически локально евклидовым пространством, или ALE пространством. В работах [24, 81] инстантонная статсумма вычислена путём интегрирования по пространству модулей инстантонов $\bigsqcup_N \mathcal{M}(X_p, r, N)$. В данном способе вычисления пространство модулей инстантонов может быть разбито на p карт, для каждой из которых мы вычисляем статсумму как на обычном пространстве модулей инстантонов на \mathbb{C}^2 . Таким образом, полная статсумма представляет из себя сумму произведений статсумм по отдельным

картам на X_p , и даётся формулой

$$\begin{aligned} Z_{\text{inst}}^{p,s}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda) &= \\ &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{p-1} \in \mathbb{Z} \\ n_0 = n_p = 0}} \frac{\Lambda^{(n_i + d_i^s) C_{ij} (n_j + d_j^s)}}{l_{p,s}^{\text{vec}}(a, n_1, \dots, n_{p-1})} \prod_{\sigma=1}^p Z_{\text{inst}}^{\mathbb{C}^2}(\vec{a}_s^{(\sigma)}, \epsilon_1^{(\sigma)}, \epsilon_2^{(\sigma)} | \Lambda), \quad s = 0, \dots, p-1, \end{aligned} \quad (2.125)$$

где $\vec{a} = (a, -a)$, $\vec{a}_s^{(\sigma)} = (a_s^{(\sigma)}, -a_s^{(\sigma)})$, и $a_s^{(\sigma)} = a + (n_{\sigma+1} + d_{\sigma+1}^s) \epsilon_1^{(\sigma)} + (n_\sigma + d_\sigma^s) \epsilon_2^{(\sigma)}$, и параметры регуляризации даются формулами $\epsilon_1^{(\sigma)} = (p - \sigma) \epsilon_1 - \sigma \epsilon_2$, $\epsilon_2^{(\sigma)} = (\sigma + 1 - p) \epsilon_1 + (\sigma + 1) \epsilon_2$. Сдвиги d_σ^s даются формулой (2.50)

$$d_\sigma^s = \begin{cases} \frac{1}{p} \sigma (p - s), & \text{если } \sigma \leq s \\ \frac{1}{p} s (p - \sigma), & \text{если } \sigma > s \end{cases}, \quad s = 0, \dots, p-1, \quad \sigma = 1, \dots, p. \quad (2.126)$$

А C_{ij} является $(p-1) \times (p-1)$ матрицей Картана простой алгебры Ли A_{p-1} .

В работе [58] посчитана $SU(2)$ инстантонная статсумма на \mathbb{C}^2

$$\begin{aligned} Z_{\text{inst}}^{\mathbb{C}^2}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda) &= \\ &= \sum_{(Y_1, Y_2)} \Lambda^{|Y_1| + |Y_2|} \prod_{i,j=1}^2 \prod_{s \in Y_i} \frac{1}{E_{Y_i, Y_j}(s | a_i - a_j) (\epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{Y_i, Y_j}(s | a_i - a_j))}, \end{aligned} \quad (2.127)$$

где $|Y|$ – полное число клеток в диаграмме Юнга Y , s обозначает клетку диаграммы Юнга Y , и

$$E_{Y,W}(a | s) = a - l_W(s) \epsilon_1 + (a_Y(s) + 1) \epsilon_2, \quad (2.128)$$

где $a_Y(s)$ и $l_Y(s)$ – длины руки и ноги соответственно, то есть число клеток в Y справа и под клеткой $s \in Y$.

Функции $l_{p,s}^{\text{vec}}(a, n_1, \dots, n_{p-1})$ называются факторами раздутия и были вы-

числены геометрическими методами в [81] и даются формулами

$$\begin{aligned}
l_{p,s}^{\text{vec}}(a, n_1, \dots, n_{p-1}) &= \prod_{\sigma=0}^{p-1} g^{(\sigma)}(2a_s^{(\sigma)}, \epsilon_1^{(\sigma)}, \epsilon_2^{(\sigma)}, n_\sigma + d_\sigma^s, n_{\sigma+1} + d_{\sigma+1}^s) \times \\
&\quad \times g^{(\sigma)}(-2a_s^{(\sigma)}, \epsilon_1^{(\sigma)}, \epsilon_2^{(\sigma)}, -(n_\sigma + d_\sigma^s), -(n_{\sigma+1} + d_{\sigma+1}^s)),
\end{aligned} \tag{2.129}$$

где

$$g^{(\sigma)}(a, e_1, e_2, \mu, \nu) = \begin{cases} \prod_{\substack{m \geq 0, n \leq -1 \\ \sigma(\nu+m) \leq (\sigma+1)(\mu+n)}} (a + me_1 + ne_2), & \text{если } \sigma\nu < (\sigma+1)\mu \\ 1, & \text{если } \sigma\nu = (\sigma+1)\mu \\ \prod_{\substack{m \leq -1, n \geq 0 \\ \sigma(\nu+m) > (\sigma+1)(\mu+n)}} (a + me_1 + ne_2), & \text{если } \sigma\nu > (\sigma+1)\mu. \end{cases} \tag{2.130}$$

2.4.2 Компактификация путём индуцирования действия \mathbb{Z}_p на пространстве модулей инстантонов на \mathbb{C}^2

Другое построение пространства модулей инстантонов получается путём поднятия действия группы \mathbb{Z}_p из $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ на пространство модулей $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)$ на \mathbb{C}^2 . Получающееся в результате этого пространство модулей обозначается как $\bigsqcup_N \mathcal{M}(2, N)^{\mathbb{Z}_p}$ и его стационарные точки нумеруются парами диаграмм Юнга, раскрашенных в p цветов. Таким образом, в инстантонной статсумме, соответствующей этому построению пространства модулей, мы суммируем только по этим диаграммам и берём только определённые клетки диаграмм Юнга. Так же, как и в разделе 2.1, мы суммируем только по набору \diamond пар диаграмм Юнга (Y_1, Y_2)

$$\diamond = \{(Y_1, Y_2) \mid \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline r_1 & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline r_2 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \#(\overline{m}) - \#(\overline{0}) = k_m\}, \tag{2.131}$$

где $r_1 + i - j \bmod p$ – цвет клетки в Y_1 с координатами (i, j) , а $r_2 + i - j \bmod p$ – цвет клетки (i, j) в Y_2 и $\#(\overline{m}), \#(\overline{0})$ – число клеток в (Y_1, Y_2) с цветами m и 0 соответственно.

Также мы вводим формулу [56, 57, 35]

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z}_{r_1, r_2}(k_1, \dots, k_{p-1} | \vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda) = \\ & = \sum_{(Y_1, Y_2) \in \diamond} \Lambda^{\frac{|Y_1| + |Y_2|}{p}} \prod_{i,j=1}^2 \prod_{s \in Y_i}^{\sim} \frac{1}{E_{Y_i, Y_j}(s | a_i - a_j) (\epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{Y_i, Y_j}(s | a_i - a_j))}, \end{aligned} \quad (2.132)$$

где произведение \prod^{\sim} идёт только по тем $s \in Y_i$, которые удовлетворяют $l_{Y_j}(s) + a_{Y_i}(s) + 1 \equiv r_j - r_i \pmod{p}$. После введения всех обозначений, мы можем выписать формулу для инстантонной статсуммы для второго построения пространства модулей

$$Z_{\text{inst}}^{p,s}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda) = \sum_{k_1, \dots, k_{p-1}=0}^1 \Lambda^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) + \frac{k_s}{2}} \mathcal{Z}_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1} | \vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2 | \Lambda). \quad (2.133)$$

В работах [81, 82] было показано, что два выражения для инстантонной статсуммы (2.125) и (2.133) равны друг другу. В следующем разделе мы приводим аргументы в пользу этого равенства с точки зрения конформной теории поля.

2.4.3 Базисы в конформной теории поля и равенство инстантонных статсумм

Для случаев $r = 2, p = 1$ [83, 84] и $r = 2, p = 2$ [20] было показано, что инстантонная статсумма $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории без материи равна норме вектора Уиттекера. В упомянутых случаях $r = 2$ и $p = 1, 2$ этот вектор Уиттекера определён как собственный вектор верхней нильпотентной подалгебры алгебры симметрии (Вирасоро в случае $p = 1$ и Невьё-Шварца-Рамона в случае $p = 2$). В ситуации с произвольным p и $r = 2$ аналогом алгебры Вирасоро и Невьё-Шварца-Рамона является косет

$$\frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_p \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{n-p}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_n}. \quad (2.134)$$

Таким образом, предположим, что для произвольного p вектор Уиттекера – это собственный вектор для верхней нильпотентной части косета (2.134). Заметим, что мы предполагаем, что оставшая часть алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ действует нулём на этот вектор Уиттекера. Итак, мы предполагаем, что для произвольного p мы можем представить статсумму как норму вектора Уиттекера $|W\rangle$

$$Z_{\text{inst}} = \langle W|W\rangle. \quad (2.135)$$

Как было упомянуто во Введении, существует два способа сконструировать пространство модулей инстантонов $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной $U(r)$ калибровочной теории на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. И для каждой компактификации пространства модулей имеется базис геометрического происхождения, который находится в однозначном соответствии со стационарными точками действия тора. Таким образом, чтобы посчитать инстантонную статсумму, мы можем использовать базис, пронумерованный раскрашенными диаграммами Юнга, который был явно построен в [41] для случаев $r = 1, 2$ и $p = 2$, или пронумерованный p наборами из r обычных диаграмм Юнга, который был явно построен в [40, 20] для $r = 2$ и $p = 1, 2$. Несмотря на то, что для $r = 2$ и произвольного p базис для обеих компактификаций пространства модулей не был построен, мы предполагаем его существование.

Вставляя полный набор состояний в каждом базисе в норму вектора Уиттекера, мы можем установить равенство между инстантонными статсуммами для чистой калибровочной теории, вычисленными для разных компактификаций пространства модулей. Заметим, что мы уже установили соответствие между стационарными точками пространства модулей в разных компактификациях, или, что равносильно, между двумя базисами геометрического происхождения, соответствующими этим компактификациям. Вид этого соответствия даётся равенством (2.59). Таким образом, беря базисные векторы, соответствующие стационарным точкам, пронумерованным диаграммами Юнга, раскрашенными в p цветов, с одной стороны и беря базисные векторы,

соответствующие стационарным точкам в другой компактификации, пронумерованным p наборами из r диаграмм Юнга и $p - 1$ r -мерными векторами, с другой стороны, после вставки полного набора состояний в норму вектора Уиттекера, мы получаем формулу, связывающую инстантонные статсуммы в разных компактификациях.

3 Спектр ILW иерархии в косетной конформной теории поля

В данной главе мы рассматриваем p -параметрическую интегрируемую систему, которая интерполирует между $\text{CS}(r, p)$ и $\text{qKdV}(r, p)$. А именно, мы утверждаем, что существует коммутативное семейство из бесконечного числа операторов $\mathbf{I}_k \in \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \mathcal{G}(r, p))$ спинов $k = 1, 2, \dots$, зависящее от p дополнительных параметров (q_1, \dots, q_p) , которые совпадают с системой $\text{CS}(r, p)$ при $(q_1, \dots, q_p) = (0, \dots, 0)$ и вырождается до $\text{qKdV}(r, p)$ в пределе

$$(q_1, \dots, q_p) \rightarrow (1, \dots, 1). \quad (3.1)$$

Мы называем эту интегрируемую систему квантовой системой промежуточных длинных волн типа (r, p) или $\text{qILW}(r, p)$ для краткости. Причина для этого та же, что и выше: для $p = 1$ эта система известна как квантовая $\mathfrak{gl}(r)$ система промежуточных длинных волн.

Главным результатом нашей работы является то, что общий спектр $\mathbf{I}_k \in \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \mathcal{G}(r, p))$ определяется уравнениями Бете. Для того, чтобы записать эти уравнения, мы введём три функции

$$\mathbb{S}_0(x) = \frac{x + Q}{x - Q}, \quad \mathbb{S}_+(x) = \frac{x - b}{x + b^{-1}}, \quad \mathbb{S}_-(x) = \frac{x - b^{-1}}{x + b}. \quad (3.2)$$

Тогда, для данных r и p пусть (N_1, \dots, N_p) будет набором неотрицательных целых чисел, а $\mathbb{A}_k(x)$ ($k = 1, \dots, p$) будет набором полиномов степени d_k

$$\mathbb{A}_k(x) = \prod_{j=1}^{d_k} (x + iP_j^{(k)}), \quad (3.3)$$

таких, что $\sum_{k=1}^p d_k = r$ и $\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{d_k} P_j^{(k)} = 0$. Все эти параметры определённым образом соответствуют данным представления алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r \times \mathcal{G}(r, p)$. А именно, числа (d_1, \dots, d_p) параметризуют старший вес $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r$, непрерывные

параметры $P_j^{(k)}$ соответствуют нулевым модам бозонного поля φ в (0.6) и набор (N_1, \dots, N_p) соответствует уровню. С каждым N_k ассоциируется набор переменных

$$x_j^{(k)}, \quad j = 1, \dots, N_k,$$

где предполагается циклическая симметрия $x_j^{(k)} = x_j^{(p+k)}$, $N_k = N_{p+k}$. Тогда наша гипотеза утверждает, что:

Гипотеза: Спектр $q\text{ILW}(r, p)$ определяется уравнениями анзаца Бете

$$\frac{\mathbb{A}_k(x_j^{(k)} - \frac{Q}{2})}{\mathbb{A}_k(x_j^{(k)} + \frac{Q}{2})} \prod_{i=1}^{N_k} \mathbb{S}_0(x_j^{(k)} - x_i^{(k)}) \prod_{i=1}^{N_{k+1}} \mathbb{S}_+(x_j^{(k)} - x_i^{(k+1)}) \prod_{i=1}^{N_{k-1}} \mathbb{S}_-(x_j^{(k)} - x_i^{(k-1)}) = -q_k, \quad (3.4)$$

для $j = 1, \dots, N_k$, $k = 1, \dots, p$.

Для того, чтобы сделать нашу гипотезу более конкретной, нам нужно сконструировать интегралы движения \mathbf{I}_k явно и установить соответствие между их собственными значениями и корнями (3.4). Сложно сделать это в максимальной общности. Поэтому мы рассматриваем только отдельные случаи нашей гипотезы в следующих разделах. А именно, в разделе 3.1 мы рассматриваем случай $p = 1$ и общего r , которое соответствует W_r алгебрам, в разделе 3.2 мы рассматриваем "ортогональное" направление: $r = 1$ и общее p , соответствующее теории свободного фермиона $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_1$ и, наконец, в разделе 3.3 мы рассматриваем специальный случай $p = r = 2$, который соответствует NSR алгебре Невьё-Шварца-Рамона.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, как объяснялось выше, физически интересная ситуация соответствует пределу (3.1). В этом пределе $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r$ часть алгебры симметрии отцепляется и система (3.4) описывает спектр интегралов движения косетной конформной теории поля (0.3) (система $q\text{KdV}(r, p)$). Однако, для численных целей удобно держать параметры q_k (параметры твиста) вдали от критической области. Во-вторых, существует соотношение меж-

ду квантовой интегрируемой системой типа промежуточных длинных волн и квантовой когомологией [85, 86, 87, 88, 89]. Вывод уравнений анзатца Бете (3.4) из первых принципов является открытой задачей. Мы обсуждаем эту задачу, также как и другие интересные вопросы, в заключительном разделе 3.3.

3.1 Случай $p = 1$ и общего r : W -алгебры

В этом случае мы имеем $\widehat{\mathfrak{gl}}(1)_r \times \mathcal{G}(r, 1) = \mathcal{H} \times W_r$. Алгебра $\mathcal{G}(r, 1) = W_r$ порождается голоморфными токами $T(z)$ и $W(z)$ спина 2 и 3. Токи с высшими спинами от 4 до r возникают в операторном разложении $W(z)$. Мы фиксируем $W(z)$ как обычно: это примарное поле спина 3 нормированное как

$$W(\xi)W(z) = \frac{c}{3(\xi - z)^6} + \dots \quad (3.5)$$

с $c = (r - 1)(1 + r(r + 1)Q^2)$ (см. (0.5)). Коммутационные соотношения компонентов этих токов довольно громоздки. Для $r = 3$ их можно найти в [46]. Алгебра Гейзенберга \mathcal{H} задаётся коммутационными соотношениями (мы полагаем $a_0 = 0$ для удобства)

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m, -n}. \quad (3.6)$$

При работе с W_r алгебрами удобно использовать обозначения $\mathfrak{sl}(r)$ алгебры Ли: e_k – простые корни $\mathfrak{sl}(r)$, ω_k – фундаментальные веса, h_k – веса фундаментального представления и ρ – вектор Вейля. Мы определяем состояние старшего веса $|\mathcal{P}\rangle$, где \mathcal{P} – $(r - 1)$ -компонентный импульс, как состояние, которое уничтожается положительной частью алгебры $\mathcal{H} \times W_r$ и является собственным состоянием для подалгебры Картана:

$$\begin{aligned} a_n|\mathcal{P}\rangle = L_n|\mathcal{P}\rangle = W_n|\mathcal{P}\rangle = \dots = 0 \quad n > 0, \\ L_0|\mathcal{P}\rangle = \Delta(\mathcal{P})|\mathcal{P}\rangle, \quad W_0|\mathcal{P}\rangle = w(\mathcal{P})|\mathcal{P}\rangle, \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь L_n, W_n, \dots – компоненты токов $T(z), W(z), \dots$ и $(\Delta(\mathcal{P}), w(\mathcal{P}), \dots)$ – некоторые функции переменной \mathcal{P} , инвариантные относительно преобразования Вейля. В частности,

$$\Delta(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} (\mathcal{Q} + i\mathcal{P}, \mathcal{Q} - i\mathcal{P}) = \frac{r(r^2 - 1)Q^2}{24} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r P_k^2, \quad \text{где } \mathcal{Q} = Q\rho \text{ и } P_k = (\mathcal{P}, h_k). \quad (3.8)$$

Представления старшего веса $\pi_{\mathcal{P}}$ алгебры $\mathcal{H} \oplus W_r$ формируется из $|\mathcal{P}\rangle$ операторами рождения. Если импульс \mathcal{P} произвольный, тогда соответствующее представление неприводимо. Число состояний на данном уровне N (собственное значение оператора $L_0^{\text{total}} - \Delta$) есть $\mathbf{p}(r, N)$, где $\mathbf{p}(r, N)$ – число разбиений числа N по r .

Мы определяем систему интегралов движения $\mathbf{I}_k \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \oplus W_r)$, которая зависит от дополнительного параметра $q_1 = q$. Первые два интеграла движения имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= L_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} a_k - \frac{c+1}{24}, \quad (3.9) \\ \mathbf{I}_2 &= \sqrt{\frac{r(r^2 - 4)Q^2}{2} + 2(r-2)W_0} + 2 \sum_{k \neq 0} L_{-k} a_k + \\ &+ ir\sqrt{r}Q \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1+q^k}{1-q^k} a_{-k} a_k + \frac{1}{3} \sum_{i+j+k=0} a_i a_j a_k. \end{aligned}$$

Оставшиеся интегралы \mathbf{I}_k могут быть в принципе определены из условия взаимной коммутативности с \mathbf{I}_1 и \mathbf{I}_2 (см. в [42] выражения для высших интегралов движения для $r = 2$). Иногда удобно переписать интегралы движения как функции плотности. К примеру, мы можем записать \mathbf{I}_2 как

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\frac{r(r^2 - 4)Q^2}{2} + 2(r-2)W(x) + 2T(x)J(x)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{ir\sqrt{r}Q}{2} J(x) \mathcal{D}J(x) + \frac{1}{3} J(x)^3 \right) dx, \quad (3.10) \end{aligned}$$

где $J(x) - U(1)$ ток $J(x) = \sum_k a_k e^{-ikx}$ и \mathcal{D} – оператор, чей Фурье-образ есть $k \frac{1+q^k}{1-q^k}$.

Мы рассматриваем спектральную задачу для интегрируемой системы (3.9). Наша общая гипотеза (3.4) применительно к этому случаю утверждает, что спектр (3.9) на уровне N даётся уравнениями анзатца Бете

$$\frac{\mathbb{A}\left(x_i - \frac{Q}{2}\right)}{\mathbb{A}\left(x_i + \frac{Q}{2}\right)} \prod_{j \neq i} \mathbb{S}(x_i - x_j) = q, \quad \text{for } i = 1, \dots, N, \quad (3.11)$$

где

$$\mathbb{S}(x) = \frac{(x-b)(x-b^{-1})(x+Q)}{(x+b)(x+b^{-1})(x-Q)}, \quad \mathbb{A}(x) = \prod_{k=1}^r (x + iP_k).$$

На самом деле, мы можем сформулировать утверждение более точно и выразить собственные значения операторов \mathbf{I}_k в терминах корней Бете. К примеру, собственные значения оператора \mathbf{I}_2 даются следующей формулой

$$\mathbf{I}_2 \sim \mathbf{I}_2^{\text{vac}} + 2i\sqrt{r} \sum_{k=1}^N x_k, \quad (3.12)$$

где $\mathbf{I}_2^{\text{vac}}$ – собственное значение для примарного состояния $|\mathcal{P}\rangle$. Собственные значения для остальных интегралов движения даются симметрическими полиномами большей степени (другие собственные значения для случая $r = 2$ могут быть найдены в [42]).

Прокомментируем локальный предел $q \rightarrow 1$. В этом пределе гейзенберговская часть алгебры симметрии отцепляется и система (3.11) описывает спектр локальных интегралов движения в W_r алгебре или $q\text{KdV}(r, 1)$ в наших обозначениях. Первые два интеграла движения имеют вид

$$\mathbf{I}_1^{\text{local}} = L_0 - \frac{c}{24}, \quad \mathbf{I}_2^{\text{local}} = W_0. \quad (3.13)$$

С другой стороны, предел $q \rightarrow 1$ интеграла \mathbf{I}_2 из (3.9) формально сингулярен. На самом деле, сингулярность сокращается, если ограничить действие

оператора \mathbf{I}_2 на подпространства W_r подалгебры (набор состояний $|\lambda\rangle \in \pi_{\mathcal{P}}$: $a_n|\lambda\rangle = 0$ для $n > 0$). На этом подпространстве

$$\mathbf{I}_2^{\text{local}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r(r^2-4)Q^2}{2} + 2(r-2)}} \mathbf{I}_2. \quad (3.14)$$

То же самое верно для интегралов \mathbf{I}_k высших порядков. Мы также заметим, что для $r = 1$ ничего не остаётся от алгебры симметрии в локальном пределе. Технически, это эквивалентно утверждению, что уравнения анзатца Бете (3.11) не имеют решений для $r = 1$ и $q = 1$. Мы также упомянём, что спектр системы qKdV(2, 1) был посчитан в [90] с использованием соответствия между обыкновенными дифференциальными уравнениями и интегрируемыми моделями. Наши уравнения отличаются от тех, что написаны в работе [90] (см. обсуждение в [42]).

3.2 Случай $r = 1$ и общего p : $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_1$ алгебра

В этом случае $\mathcal{G}(1, p) = 0$. Оставшаяся часть алгебры симметрии $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_1$ может быть представлена p комплексными фермионами

$$\psi^a(x) = \sum_s \psi_s^a e^{-isx}, \quad \bar{\psi}^a(x) = \sum_s \bar{\psi}_s^a e^{-isx}, \quad a = 1, \dots, p, \quad (3.15)$$

с антикоммутиационными соотношениями

$$\{\psi_s^a, \psi_r^b\} = \{\bar{\psi}_s^a, \bar{\psi}_r^b\} = 0, \quad \{\psi_s^a, \bar{\psi}_r^b\} = \delta^{a,b} \delta_{r,-s}. \quad (3.16)$$

Здесь мы рассматриваем лишь сектор Невьё-Шварца, то есть $s, r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Представление старшего веса \mathcal{F} фермионной алгебры (3.16) получается обычным образом из вакуумного состояния $|0\rangle$, определяемого $\psi_s^a|0\rangle = \bar{\psi}_s^a|0\rangle = 0$ для $s > 0$. Это представление естественно распадается в прямую сумму $\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{F}_l$, где \mathcal{F}_l – фермионный фоковский модуль заряда l

$$\mathcal{F}_l = \text{Span} \left\{ \prod_{a=1}^p \psi_{-s_1^a}^a \dots \psi_{-s_{n_a}^a}^a \bar{\psi}_{-r_1^a}^a \dots \bar{\psi}_{-r_{m_a}^a}^a |0\rangle : \sum_{a=1}^p n_a - \sum_{a=1}^p m_a = l \right\}. \quad (3.17)$$

Каждый фоковский модуль \mathcal{F}_l является неприводимым представлением $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_1$. Все они изоморфны друг другу. Для простоты, мы рассматриваем только \mathcal{F}_0 .

В соответствии с нашей гипотезой, существует интегрируемая система в $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_1)$, которая зависит от p внешних параметров q_1, \dots, q_p , чей спектр описывается (3.4). Будет удобно ввести остальные параметры q и $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ с помощью формулы

$$q_1 = \frac{q}{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}, \quad q_2 = \alpha_1, \quad \dots, \quad q_p = \alpha_{p-1}. \quad (3.18)$$

Тогда первые два интеграла движения нашей интегрируемой системы есть (здесь $::$ обозначает упорядочение Вика)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} : \bar{\psi}^a \partial \psi^a : dx, \\ \mathbf{I}_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} : \left(\frac{i(b-b^{-1})}{2} \bar{\psi}^a \partial^2 \psi^a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{iQ}{2p} : (\partial \psi^a \bar{\psi}^a + \partial \bar{\psi}^a \psi^a) : \mathbf{H} : \bar{\psi}^b \psi^b : + \frac{iQ}{2p} : \bar{\psi}^a \psi^b : \mathbf{D}^{ab} : \bar{\psi}^b \psi^a : \right) : dx, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где Фурье-образы операторов \mathbf{H} и \mathbf{D}^{ab} есть

$$\mathbf{H}(k) = \text{sgn}(k), \quad (3.20)$$

$$\mathbf{D}^{ab}(k) = k \frac{1 + \alpha_a \dots \alpha_{b-1} q^k}{1 - \alpha_a \dots \alpha_{b-1} q^k} \quad \text{для} \quad a \leq b \quad \text{and} \quad \mathbf{D}^{ba}(k) = \mathbf{D}^{ab}(-k),$$

и предполагается сумма по повторяющимся индексам. В принципе, можно найти высшие интегралы движения из условия взаимной коммутативности с \mathbf{I}_1 и \mathbf{I}_2 , но их явная форма более громоздкая.

Пространство \mathcal{F}_0 имеет естественную градуировку: уровень N и фермионные числа ν_a определяются формулами

$$N = \sum_{a=1}^p \left(\sum_{i=1}^{n_a} s_i^a + \sum_{j=1}^{m_a} r_j^a \right), \quad \nu_a = n_a - m_a. \quad (3.21)$$

Таким образом, это пространство трансформируется в прямую сумму $\mathcal{F}_0 =$

$\oplus \mathcal{F}_0^{(N, \vec{\nu})}$, где

$$\mathcal{F}_0^{(N, \vec{\nu})} = \text{Span} \left\{ \prod_{a=1}^p \psi_{-s_1^a}^a \cdots \psi_{-s_{n_a}^a}^a \bar{\psi}_{-r_1^a}^a \cdots \bar{\psi}_{-r_{m_a}^a}^a |0\rangle : \sum_{a=1}^p \left(\sum_{i=1}^{n_a} s_i^a + \sum_{j=1}^{m_a} r_j^a \right) = N, \right. \\ \left. n_a - m_a = \nu_a \right\}. \quad (3.22)$$

Ясно, что интегралы \mathbf{I}_k сохраняют градуировки. Таким образом, наша спектральная задача распадается во множество конечномерных спектральных задач на $\mathcal{F}_0^{(N, \vec{\nu})}$. Мы утверждаем, что спектр на $\mathcal{F}_0^{(N, \vec{\nu})}$ определяется уравнениями анзатца Бете (3.4) с

$$A_1(x) = x, \quad A_2(x) = \cdots = A_p(x) = 1, \quad N_k = N + \sum_{a=1}^{k-1} \nu_a. \quad (3.23)$$

В частности, спектр интеграла \mathbf{I}_2 даётся суммой

$$\mathbf{I}_2 \sim \frac{2i}{p} \sum_{j=1}^{N_1} x_j^{(1)}. \quad (3.24)$$

Заметим, что в пределе $(q_1, \dots, q_p) \rightarrow (0, \dots, 0)$ интеграл \mathbf{I}_2 совпадает с гамильтонианом спиновой модели Калоджеро [54], написанной во вторично-квантованном виде (см. [91]). Можно легко увидеть, что спектр вырожден в этом пределе. Причина этого вырождения хорошо известна из [92]: интегралы движения спиновой модели Калоджеро коммутируют с янгианом $Y(\mathfrak{gl}(p))$. Мы не можем понять, является ли это частью этой симметрии, которая выживает при возмущении (включении параметров q_k).

3.3 Случай $r = p = 2$: квантовая суперсимметричная система Кортвега-де-Фриза

Здесь, для простоты, мы рассматриваем только локальный случай $q_1 = q_2 = 1$. В соответствии с нашей гипотезой $\widehat{\mathfrak{gl}}(2)_2$ часть алгебры (0.8) отцепляется в этом пределе. Тогда мы используем тот факт, что $\mathcal{G}(2, 2) = \text{NSR}$,

где NSR – суперконформная алгебра (алгебра Невьё-Шварца-Рамона). Эта алгебра генерируется токами $T(z)$ и $G(z)$ спинов 2 и 3/2. Их компоненты L_n и G_r удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{8}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \\ \{G_r, G_s\} &= 2L_{r+s} + \frac{1}{2}c\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}, \quad [L_n, G_r] = \left(\frac{1}{2}n - r\right)G_{n+r}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где согласно (0.5): $c = 1 + 2Q^2$. Ниже мы рассматриваем только сектор Невьё-Шварца, так что индексы r и s в (3.25) принимают полуцелые значения. Представление старшего веса π_P (3.25) определяется вакуумным состоянием $|P\rangle$

$$L_n|P\rangle = G_r|P\rangle = 0 \quad \text{для } n, r > 0, \quad L_0|P\rangle = \Delta(P)|P\rangle, \quad (3.26)$$

где $\Delta(P) = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{4} + P^2\right)$, и состоит из векторов вида

$$L_{-n_1} \dots L_{-n_k} G_{-s_1} \dots G_{-s_l} |P\rangle, \quad \text{где } n_1 \geq n_2 \dots, s_1 > s_2 > \dots \quad (3.27)$$

Интегрируемая система в этом случае совпадает с квантовой суперсимметричной системой Кортвега-де-Фриза [93], чьи локальные интегралы движения имеют вид⁸

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T dx, \quad \mathbf{I}_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(T^2 + \frac{i}{4} GG' \right) dx, \quad \dots \quad (3.28)$$

Спектральная задача для квантовой суперсимметричной системы Кортвега-де-Фриза была рассмотрена в [95, 96]. Мы предлагаем другой подход в той же задаче. Для нас будет важно, что существует также набор нелокальных интегралов движения с целым спином, которые коммутируют с локальными. Первый из них имеет вид

$$\tilde{\mathbf{I}}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (G\partial^{-1}G) dx. \quad (3.29)$$

⁸Здесь все поля предполагаются регуляризованными аналитически. См., например, [94].

Выражения для высших нелокальных интегралов известны только в классическом пределе [97], но нет сомнений в том, что можно найти квантовые аналоги.

Мы утверждаем, что спектр квантовой суперсимметричной системы Кортвега-де-Фриза в секторе Невьё-Шварца определяется уравнениями анзаца Бете (3.4) с $p = r = 2$, $q_1 = q_2 = 1$ и

$$A_1(x) = x^2 + P^2, \quad A_2(x) = 1. \quad (3.30)$$

Точные выражения для собственных значений зависят от значения уровня $N = \sum_k n_k + \sum_r s_r$ в (3.27), которое может быть как целым, так и полуцелым. А именно, мы получаем

- Для целых N мы берём $N_1 = N_2 = N$ в (3.4). Тогда собственные значения оператора $\mathbf{I}_3 + \frac{9}{16}i\tilde{\mathbf{I}}_1$ даются следующей формулой

$$\mathbf{I}_3 + \frac{9}{16}i\tilde{\mathbf{I}}_1 \sim \mathbf{I}_3^{\text{vac}}(\Delta + N) + 4N\Delta + 2N(N - 2) + 6 \sum_{k=1}^N (x_k^{(1)})^2. \quad (3.31)$$

- Для полуцелых N мы берём $N_1 = N + \frac{1}{2}$, $N_2 = N - \frac{1}{2}$ в (3.4), тогда

$$\mathbf{I}_3 - \frac{15}{16}i\tilde{\mathbf{I}}_1 \sim \mathbf{I}_3^{\text{vac}}(\Delta + N) + 4\left(N + \frac{3}{2}\right)\Delta + 2\left(N + \frac{3}{2}\right)\left(N - \frac{1}{2}\right) + 6 \sum_{k=1}^{N+\frac{1}{2}} (x_k^{(1)})^2, \quad (3.32)$$

здесь $\mathbf{I}_3^{\text{vac}}(\Delta)$ – собственное значение на примарном состоянии. Мы замечаем здесь явление, которое не имело места в случаях, рассмотренных перед этим. А именно, только специальные комбинации локальных и нелокальных интегралов движения имеют собственные значения, которые полиномиально зависят от корней Бете. На нижних уровнях мы обнаруживаем, что собственные значения локальных интегралов \mathbf{I}_3 являются некоторыми симметричными функциями $x_k^{(1)}$, но их общий вид неизвестен.

Заключение

В завершение данной работы мы хотели бы ещё раз кратко описать полученные результаты и сделать несколько замечаний относительно вопросов, оставшихся открытыми.

Первая глава данной работы устанавливает явный вид соответствия между $SU(2)$ статсуммой Некрасова на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_4$ и четырёхточечными конформными блоками в S и D модулях S_3 парафермионной алгебры. Это соответствие может быть схематично записано как $\mathcal{Z}_{\text{instanton}}(z) = (1-z)^{A_4} \mathcal{F}_{\text{conformal block}}(z)$.

Можно заметить, что четырёхточечные косетные конформные блоки зависят от размерностей примарных полей в корреляционной функции и параметра P , который обозначает промежуточный параметр в конформном блоке. Как обычно, конформные размерности Δ_i параметризуются импульсами P_i как $\Delta_i = \frac{1}{p}(\frac{Q^2}{4} - P_i^2)$. Таким образом, косетные конформные блоки являются функциями параметров P_i^2 и P , то есть $\mathcal{F}_{\text{conformal block}} = f(P_i^2, P|z)$. С другой стороны, инстантонная статсумма на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ является функцией параметров P_i, P . Мы проделали явные проверки для случаев $p = 2, \dots, 7$, что комбинация

$$(1-z)^{-A_p} \mathcal{Z}_{\text{instanton}}^{(p)}(P_i, P|z) = \phi(P_i^2, P|z),$$

где ϕ – некоторая функция, которая зависит от P_i^2 , а не от P_i ! Таким образом, можно предположить, что соотношение

$$\mathcal{Z}_{\text{instanton}}^{(p)}(P_i, P|z) = (1-z)^{A_p} \mathcal{F}_{\text{conformal block}}(\Delta_i, P|z)$$

выполняется для всех p ($A_p = \frac{2}{p}(Q/2 + P_2)(Q/2 - P_3)$).

Во второй главе нашей работы рассматривается алгебра $\mathcal{A}(2, p)$ и её связь с пространством модулей $U(2)$ инстантонов в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории поля на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. В начале мы нашли производящие функции стационарных точек действия абелевой группы (тора) на пространстве модулей $U(2)$ инстантонов на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Далее мы рассмотрели две ре-

лизации алгебры $\mathcal{A}(2, p)$, отвечающие двум разным компактификациям пространства модулей инстантонов. Мы вычислили характеры представлений алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ в этих двух реализациях и вывели формулы, связывающие их друг с другом и с производящими функциями стационарных точек на пространстве модулей инстантонов. Также были получены выражения, которые связывают трёхточечные функции в конформных теориях поля с алгебрами симметрии, представленными двумя разными реализациями алгебры $\mathcal{A}(2, p)$. Установленное соответствие между двумя реализациями алгебры $\mathcal{A}(2, p)$ и пространством модулей $U(2)$ инстантонов в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории поля на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ позволили нам также написать формулы, связывающие инстантонные статсуммы, отвечающие разным компактификациям пространства модулей инстантонов.

В третьей главе нашей работы мы изучили спектр локальных интегралов движения в косетной конформной теории поля (0.3). На самом деле, мы заметили, что довольно естественно расширить косетную алгебру $\mathcal{G}(r, p)$ алгеброй $\widehat{\mathfrak{gl}}(p)_r$. Мы предположили, что существует система интегралов движения в универсальной обёртывающей алгебре, при этом эта система интегралов движения зависит от p внешних параметров. Мы назвали эту систему $\text{qILW}(r, p)$ системой и выдвинули утверждение, что её спектр даётся уравнениями анзатца Бете (3.4). Мы проверили нашу гипотезу для отдельных значений r и p . Сделаем несколько комментариев, которые представляются важными.

1. В настоящий момент ясно, что интегрируемая система, рассмотренная в нашей работе, происходит от определённой R -матрицы с параметрами твиста q_k . Она может быть представлена как R -матрица для янгиана $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}(p))$ [98]. Что неизвестно, так это цепочка рассуждений, приводящая от этой R -матрицы к уравнениям Бете (3.4). Другими словами, мы не знаем, как вывести анзатц Бете (алгебраический, функциональный или какой-либо другой) в этом случае.

2. Как мы объяснили во Введении, описание косетной конформной теории поля (0.3) с помощью киральной алгебры слишком сложно для анализа из-за присутствия токов с неабелевой монодромией. Считается, что существует описание той же конформной теории поля с помощью локальной симметрии. Такое описание было найдено в [99, 100] для $r = 2$. Соответствующая киральная алгебра генерируется током W спина 4 и может быть реализована в терминах трёх бозонных полей. Одно из преимуществ этого описания состоит в том, что оно непрерывно по обоим параметрам косета (0.3). В нашем подходе один из параметров косета (0.3) с необходимостью является целым (мы считаем p целым и n непрерывным). Было бы интересно найти способ обобщить уравнения анзатца Бете (3.4) для нецелых значений p . Заметим, что спектр локальных интегралов движения в трёхполевой теории (также известной как модель Фатеева) был вычислен в [101, 102] с использованием соответствия между обыкновенными дифференциальными уравнениями и интегрируемыми моделями. Связь между соответствием между обыкновенными дифференциальными уравнениями и интегрируемыми моделями и нашим подходом не ясна.

В заключение необходимо прокомментировать ещё раз физическую мотивацию к изучению рассмотренных косетных конформных теорий поля с точки зрения АГТ соответствия. Как было указано во Введении, исследование АГТ соответствия для косетных конформных теорий поля и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий поля на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ может значительно помочь в понимании и вычислении волновых функций состояний в дробном квантовом эффекте Холла. Несмотря на то, что данным волновым функциям соответствует случай косета с целыми уровнями аффинных алгебр Ли, рассмотренный в диссертации общий случай может быть обобщён и на ситуацию, когда все уровни косета целые [5]. Рассмотренные в диссертации косетные конформ-

ные теории поля с алгеброй $\mathcal{A}(r, p)$ описывают r неабелевы спин-синглетные состояния в дробном квантовом эффекте Холла, о которых можно узнать в [69, 71]. Поэтому мы считаем, что полученные соотношения между инстантонными статсуммами в разных компактификациях могут привести к аналогичным соотношениям между волновыми функциями в эффекте Холла. В целом, можем констатировать, что изучение конформных блоков косетных конформных теорий поля с помощью АГТ соответствия представляет интерес для вычисления всего многообразия волновых функций квантовых состояний дробного квантового эффекта Холла.

Автор благодарит своего научного руководителя А.В. Леонидова за научное руководство, полезные обсуждения и деятельную поддержку на протяжении всего времени выполнения данной работы. Также автор хотел бы особо отметить вклад в настоящую работу своих соавторов – А.А. Белавина, А.В. Литвинова и Г.М. Тарнопольского. К тому же автор выражает искреннюю благодарность А.Б. Замолодчикову, С.Л. Лукьянову, В.А. Фатееву, Я.П. Пугаю, М.Ю. Лашкевичу и особенно М.А. Берштейну за интересные и содержательные дискуссии.

Приложения

А Коммутационные соотношения в S -модуле

Пусть $W_\alpha^{(s)}(z)$ – состояние старшего веса в S -модуле, и $V_\alpha^{(s)\pm}(z) = G_{-1/3}^\pm W_\alpha^{(s)}(z)$ – его первый дробный потомок. В работе [60] можно найти операторные разложения для операторов $T(z)$ и $G^\pm(z)$ с вершинными операторами в S -модуле

$$T(u)W_\alpha^{(s)}(z) = \frac{\Delta_\alpha^{(s)}}{(u-z)^2}W_\alpha^{(s)}(z) + \frac{1}{u-z}\partial W_\alpha^{(s)}(z) + \dots, \quad (\text{A.1})$$

$$T(u)V_\alpha^{(s)\pm}(z) = \frac{\Delta_\alpha^{(s)} + \frac{1}{3}}{(u-z)^2}V_\alpha^{(s)\pm}(z) + \frac{1}{u-z}\partial V_\alpha^{(s)\pm}(z) + \dots, \quad (\text{A.2})$$

$$G^\pm(u)W_\alpha^{(s)}(z) = \frac{1}{u-z}V_\alpha^{(s)\pm}(z) + \dots, \quad (\text{A.3})$$

$$G^\pm(u)V_\alpha^{(s)\pm}(z) = \frac{\lambda^\pm}{2(u-z)^{\frac{4}{3}}}V_\alpha^{(s)\mp}(z) + \dots, \quad (\text{A.4})$$

$$+ \frac{1}{(u-z)^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{\lambda^\pm}{3\Delta_\alpha^{(s)} + 1} \partial V_\alpha^{(s)\mp}(z) + \tilde{V}_\alpha^{(s)\mp}(z) \right) + \dots,$$

$$G^\pm(u)V_\alpha^{(s)\mp}(z) = \frac{\Delta_\alpha^{(s)}}{(u-z)^{\frac{5}{3}}}W_\alpha^{(s)}(z) + \frac{1}{(u-z)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{1}{2} \partial W_\alpha^{(s)}(z) \pm \tilde{W}_\alpha^{(s)}(z) \right) \dots, \quad (\text{A.5})$$

где вершинные операторы $\tilde{W}_\alpha^{(s)}(z)$ и $\tilde{V}_\alpha^{(s)\pm}(z)$ соответствуют состояниям

$$|\tilde{W}_\alpha^{(s)}\rangle = \left(G_{-\frac{2}{3}}^+ G_{-\frac{1}{3}}^- - G_{-\frac{2}{3}}^- G_{-\frac{1}{3}}^+ \right) |W_\alpha^{(s)}\rangle, \quad (\text{A.6})$$

$$|\tilde{V}_\alpha^{(s)\pm}\rangle = G_{-1}^\mp |V_\alpha^{(s)\mp}\rangle - \frac{\lambda^\mp}{3h_s + 1} L_{-1} |V_\alpha^{(s)\pm}\rangle. \quad (\text{A.7})$$

Тогда по причине того факта, что операторные разложения (A.1), (A.2) и (A.3) содержат только целые степени, легко вычислить соответствующие ком-

мутационные соотношения

$$[L_m, W_\alpha^{(s)}(z)] = \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{m+1} T(u) W_\alpha^{(s)}(z) = \quad (\text{A.8})$$

$$= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{m+1} \left(\frac{\Delta_\alpha^{(s)}}{(u-z)^2} W_\alpha^{(s)}(z) + \frac{1}{u-z} \partial W_\alpha^{(s)}(z) + \dots \right) =$$

$$= z^m \partial W_\alpha^{(s)}(z) + (m+1) \Delta_\alpha^{(s)} W_\alpha^{(s)}(z),$$

$$[L_m, V_\alpha^{(s)\pm}(z)] = \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{m+1} T(u) V_\alpha^{(s)\pm}(z) = \quad (\text{A.9})$$

$$= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{m+1} \left(\frac{\Delta_\alpha^{(s)} + \frac{1}{3}}{(u-z)^2} V_\alpha^{(s)\pm}(z) + \frac{1}{u-z} \partial V_\alpha^{(s)\pm}(z) + \dots \right) =$$

$$= z^m \partial V_\alpha^{(s)\pm}(z) + (m+1) \left(\Delta_\alpha^{(s)} + \frac{1}{3} \right) V_\alpha^{(s)\pm}(z),$$

$$[G_r^\pm, W_\alpha^{(s)}(z)] = \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} G^\pm(u) W_\alpha^{(s)}(z) = \quad (\text{A.10})$$

$$= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{V_\alpha^{(s)\pm}(z)}{u-z} + \dots \right) = z^{r+\frac{1}{3}} V_\alpha^{(s)\pm}(z).$$

Хотя по причине присутствия дробных степеней в операторных разложениях (A.4) и (A.5) невозможно вывести коммутационные соотношения для вершинных операторов, тем не менее возможно вывести обобщённые коммутационные соотношения по аналогии с модами $G^\pm(u)$. Чтобы это сделать, рассмотрим интеграл с $p \in \mathbb{Z}$ с точками z и 0 внутри контура интегрирования

$$\oint_{\text{incl. } z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{1}{3}} G^\pm(u) V_\alpha^{(s)\pm}(z) = \quad (\text{A.11})$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{1}{3})} z^l \oint \frac{du}{2\pi i} u^{r+p+\frac{2}{3}-l} G^\pm(u) V_\alpha^{(s)\pm}(z) =$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{1}{3})} z^l G_{r+p-l+\frac{1}{3}}^\pm V_\alpha^{(s)\pm}(z) = (\text{for } p = -1)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(-\frac{2}{3})} z^l G_{r-l-\frac{2}{3}}^\pm V_\alpha^{(s)\pm}(z).$$

С другой стороны, этот интеграл может быть разделён на интеграл вокруг точки z , который вычисляется с помощью операторного разложения (A.4), и

интеграл вокруг 0 с z внутри контура

$$\begin{aligned} & \oint_{incl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{1}{3}} G^\pm(u) V_\alpha^{(s)\pm}(z) = \\ & = \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{1}{3}} G^\pm(u) V_\alpha^{(s)\pm}(z) + \oint_{excl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{1}{3}} G^\pm(u) V_\alpha^{(s)\pm}(z). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Мы выполняем дальнейшие вычисления для $p = -1$. Первый интеграл с правой стороны может быть легко вычислен с использованием операторного разложения (A.4)

$$\begin{aligned} & \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{-\frac{2}{3}} G^\pm(u) V_\alpha^{(s)\pm}(z) = \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{\lambda^\pm}{2(u-z)^2} V_\alpha^{(s)\mp}(z) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{u-z} \left(\frac{\lambda^\pm}{3\Delta_\alpha^{(s)} + 1} \partial V_\alpha^{(s)\mp}(z) + \tilde{V}_\alpha^{(s)\mp}(z) \right) + \dots \right) = \\ & = z^{r-\frac{2}{3}} \frac{\lambda^\pm}{2} \left(r + \frac{1}{3} \right) V_\alpha^{(s)\mp}(z) + z^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{\lambda^\pm}{3h_s + 1} \partial V_\alpha^{(s)\mp}(z) + \tilde{V}_\alpha^{(s)\mp}(z) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Второй интеграл с правой стороны должен вычисляться с использованием абелевой перестановки G^\pm и V_s^\pm , что даёт множитель $e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$$\begin{aligned} & \oint_{excl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{1}{3}} G^\pm(u) V_\alpha^{(s)\pm}(z) = \\ & = e^{i\pi(p+\frac{1}{3})} e^{\frac{2i\pi}{3}} \oint_{excl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (z-u)^{p+\frac{1}{3}} V_\alpha^{(s)\pm}(z) G^\pm(u) = \\ & = (-1)^{p+1} \oint_{excl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (z-u)^{p+\frac{1}{3}} V_\alpha^{(s)\pm}(z) G^\pm(u) = \\ & = (-1)^{p+1} \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{1}{3})} z^{p-l+\frac{1}{3}} \oint_{excl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+l+\frac{1}{3}} V_\alpha^{(s)\pm}(z) G^\pm(u) = \\ & = (-1)^{p+1} \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{1}{3})} z^{p-l+\frac{1}{3}} V_\alpha^{(s)\pm}(z) G_{r+l}^\pm = (\text{for } p = -1) \\ & = \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(-\frac{2}{3})} z^{-l-\frac{2}{3}} V_\alpha^{(s)\pm}(z) G_{r+l}^\pm. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Объединяя (A.11), (A.13) и (A.14), мы можем записать обобщённые коммутационные соотношения для $p = -1$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(-\frac{2}{3})} \left(z^l G_{r-l-\frac{2}{3}}^{\pm} V_{\alpha}^{(s)\pm}(z) - z^{-l-\frac{2}{3}} V_{\alpha}^{(s)\pm}(z) G_{r+l}^{\pm} \right) = \\ & = z^{r-\frac{2}{3}} \frac{\lambda^{\pm}}{2} \left(r + \frac{1}{3} \right) V_{\alpha}^{(s)\mp}(z) + z^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{\lambda^{\pm}}{3h_s + 1} \partial V_{\alpha}^{(s)\mp}(z) + \tilde{V}_{\alpha}^{(s)\mp}(z) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

где потомок $V_{\alpha}^{(s)\pm}(z)$ даётся формулой (A.7).

Тогда с противоположными \mathbb{Z}_3 -зарядами

$$\begin{aligned} & \oint_{incl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{2}{3}} G^{\pm}(u) V_{\alpha}^{(s)\mp}(z) = \quad (\text{A.16}) \\ & = \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{2}{3})} z^l \oint_{incl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+p+1-l} G^{\pm}(u) V_{\alpha}^{(s)\mp}(z) = \\ & = \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{2}{3})} z^l G_{r+p-l+\frac{2}{3}}^{\pm} V_{\alpha}^{(s)\mp}(z) = (\text{for } p = -1) \\ & = \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(-\frac{1}{3})} z^l G_{r-l-\frac{1}{3}}^{\pm} V_{\alpha}^{(s)\mp}(z). \end{aligned}$$

С другой стороны, этот интеграл может быть разделён на интеграл вокруг точки z , который вычисляется с помощью операторного разложения (A.5), и интеграл вокруг 0 с z вне этого контура

$$\begin{aligned} & \oint_{incl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{2}{3}} G^{\pm}(u) V_{\alpha}^{(s)\mp}(z) = \\ & = \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{2}{3}} G^{\pm}(u) V_{\alpha}^{(s)\mp}(z) + \oint_{excl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{2}{3}} G^{\pm}(u) V_{\alpha}^{(s)\mp}(z). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Чтобы вычислить первый член с правой стороны (A.17), мы используем опе-

раторное разложение (1.21) (мы снова полагаем $p = -1$)

$$\begin{aligned}
\oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{-\frac{1}{3}} G^\pm(u) V_\alpha^{(s)\mp}(z) &= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{\Delta_\alpha^{(s)}}{(u-z)^2} W_\alpha^{(s)}(z) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{u-z} \left(\partial W_\alpha^{(s)}(z) \pm \tilde{W}_\alpha^{(s)}(z) \right) + \dots \right) = \\
&= z^{r-\frac{2}{3}} \left(r + \frac{1}{3} \right) \Delta_\alpha^{(s)} W_\alpha^{(s)}(z) + z^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} \partial W_\alpha^{(s)}(z) \pm \tilde{W}_\alpha^{(s)}(z) \right). \tag{A.18}
\end{aligned}$$

Абелева перестановка полей $G^\pm(u)$ и $V^{(s)\mp}(z)$ даёт множитель $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

$$\begin{aligned}
\oint_{\text{excl } z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{2}{3}} G^\pm(u) V_\alpha^{(s)\mp}(z) &= \tag{A.19} \\
&= e^{i\pi(p+\frac{2}{3})} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \oint_{\text{excl } z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (z-u)^{p+\frac{2}{3}} V_\alpha^{(s)\mp}(z) G^\pm(u) = \\
&= (-1)^p \oint_{\text{excl } z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (z-u)^{p+\frac{2}{3}} V_\alpha^{(s)\mp}(z) G^\pm(u) = \\
&= (-1)^p \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{2}{3})} z^{p-l+\frac{2}{3}} \oint_{\text{excl } z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+l+\frac{1}{3}} V_\alpha^{(s)\mp}(z) G^\pm(u) = \\
&= (-1)^p \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{2}{3})} z^{p-l+\frac{2}{3}} V_\alpha^{(s)\mp}(z) G_{r+l}^\pm = (\text{for } p = -1) \\
&= - \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(-\frac{1}{3})} z^{-l-\frac{1}{3}} V_\alpha^{(s)\mp}(z) G_{r+l}^\pm.
\end{aligned}$$

После этого, объединяя (A.16), (A.18) и (A.19), мы можем написать обобщённые коммутационные соотношения

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(-\frac{1}{3})} \left(z^l G_{r-l-\frac{1}{3}}^\pm V_\alpha^{(s)\mp}(z) + z^{-l-\frac{1}{3}} V_\alpha^{(s)\mp}(z) G_{r+l}^\pm \right) &= \\
&= z^{r-\frac{2}{3}} \left(r + \frac{1}{3} \right) \Delta_\alpha^{(s)} W_\alpha^{(s)}(z) + z^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} \partial W_\alpha^{(s)}(z) \pm \tilde{W}_\alpha^{(s)}(z) \right), \tag{A.20}
\end{aligned}$$

где потомок $\tilde{W}_\alpha^{(s)}(z)$ даётся формулой (A.6).

В Коммутационные соотношения в D -модуле

Пусть $W_\alpha^{(d)\pm}(z)$ будет вершинным оператором состояния старшего веса в D -модуле. Чтобы найти коммутационные соотношения, нам нужны операторные разложения [60] полей $W_\alpha^{(d)\pm}(z)$ и их первые конформные потомки $V_\alpha^{(d)(\pm)}$

$$T(u)W_\alpha^{(d)\pm}(z) = \frac{\Delta_\alpha^{(d)}}{(u-z)^2}W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \frac{1}{u-z}\partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \dots, \quad (\text{B.1})$$

$$T(u)V_\alpha^{(d)(\pm)}(z) = \frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{2}{3}}{(u-z)^2}V_\alpha^{(d)(\pm)}(z) + \frac{1}{u-z}\partial V_\alpha^{(d)(\pm)}(z) + \dots, \quad (\text{B.2})$$

$$G^\pm(u)W_\alpha^{(d)\pm}(z) = \frac{\Lambda^\pm}{(u-z)^{\frac{4}{3}}}W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \frac{1}{(u-z)^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{2\Lambda^\pm}{3\Delta_\alpha^{(d)}}\partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z)\right) + \dots, \quad (\text{B.3})$$

$$G^\pm(u)W_\alpha^{(d)\mp}(z) = \frac{1}{2(u-z)^{\frac{2}{3}}}\left(V_\alpha^{(d)(+)}(z) \pm V_\alpha^{(d)(-)}(z)\right) + \dots, \quad (\text{B.4})$$

$$G^\pm(u)V_\alpha^{(d)(+)}(z) = \frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} + \lambda^\pm\Lambda^\mp}{(u-z)^2}W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \frac{1}{u-z}\left(\frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} + \lambda^\pm\Lambda^\mp}{3\Delta_\alpha^{(s)}}\partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) - \left(\Lambda^\pm - \frac{1}{2}\lambda^\pm\right)\tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z)\right) + \dots. \quad (\text{B.5})$$

$$G^\pm(u)V_\alpha^{(d)(-)}(z) = \mp\frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} - \lambda^\pm\Lambda^\mp}{(u-z)^2}W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \frac{1}{u-z}\left(\mp\frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} - \lambda^\pm\Lambda^\mp}{3\Delta_\alpha^{(s)}}\partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) \pm \left(\Lambda^\pm + \frac{1}{2}\lambda^\pm\right)\tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z)\right) + \dots, \quad (\text{B.6})$$

где вершинные операторы $V_\alpha^{(d)(\pm)}(z)$ и $\tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z)$ соответствуют состояниям

$$|V_\alpha^{(d)(\pm)}\rangle = G_{-\frac{2}{3}}^+|W_\alpha^{(d)-}\rangle \pm G_{-\frac{2}{3}}^-|W_\alpha^{(d)+}\rangle, \quad (\text{B.7})$$

$$|\tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}\rangle = G_{-1}^\mp|W_\alpha^{(d)\mp}\rangle - \frac{2\Lambda^\mp}{3\Delta_\alpha^{(d)}}L_{-1}|W_\alpha^{(d)\pm}\rangle. \quad (\text{B.8})$$

Из-за того, что операторные разложения (B.1), (B.2), (B.5) и (B.6) содержат только целые степени $u - z$, мы можем записать коммутационные соотношения

$$\begin{aligned}
[L_m, W_\alpha^{(d)\pm}(z)] &= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{m+1} T(u) W_\alpha^{(d)\pm}(z) = \\
&= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{m+1} \left(\frac{\Delta_\alpha^{(d)}}{(u-z)^2} W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \frac{1}{u-z} \partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \dots \right) = \\
&= z^m \partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) + (m+1) \Delta_\alpha^{(d)} W_\alpha^{(d)\pm}(z)
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
[L_m, V_\alpha^{(d)(\pm)}(z)] &= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{m+1} T(u) V_\alpha^{(d)(\pm)}(z) = \\
&= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{m+1} \left(\frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{2}{3}}{(u-z)^2} V_\alpha^{(s)(\pm)}(z) + \frac{1}{u-z} \partial V_\alpha^{(d)(\pm)}(z) + \dots \right) = \\
&= z^m \partial V_\alpha^{(d)(\pm)}(z) + (m+1) \left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{2}{3} \right) V_\alpha^{(d)(\pm)}(z),
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
[G_r^\pm, V_\alpha^{(d)+}(z)] &= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} G^\pm(u) V_\alpha^{(d)+}(z) = \\
&= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} + \lambda^\pm \Lambda^\mp}{(u-z)^2} W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{u-z} \left(\frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} + \lambda^\pm \Lambda^\mp}{3\Delta_\alpha^{(s)}} \partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) - \left(\Lambda^\pm - \frac{1}{2} \lambda^\pm \right) \tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z) \right) + \dots \right) = \\
&= z^{r-\frac{2}{3}} \left(r + \frac{1}{3} \right) \left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} + \lambda^\pm \Lambda^\mp \right) W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \\
&+ z^{r+\frac{1}{3}} \frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} + \lambda^\pm \Lambda^\mp}{3\Delta_\alpha^{(d)}} \partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) - z^{r+\frac{1}{3}} \left(\Lambda^\pm - \frac{1}{2} \lambda^\pm \right) \tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z),
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
[G_r^\pm, V_\alpha^{(d)-}(z)] &= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} G^\pm(u) V_\alpha^{(d)-}(z) = \\
&= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} \left(\mp \frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} - \lambda^\pm \Lambda^\mp}{(u-z)^2} W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{u-z} \left(\mp \frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} - \lambda^\pm \Lambda^\mp}{3\Delta_\alpha^{(s)}} \partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) \pm \left(\Lambda^\pm + \frac{1}{2} \lambda^\pm \right) \tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z) \right) + \dots \right) = \\
&\quad \mp z^{r-\frac{2}{3}} \left(r + \frac{1}{3} \right) \left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} - \lambda^\pm \Lambda^\mp \right) W_\alpha^{(d)\pm}(z) \mp \\
&\quad \mp z^{r+\frac{1}{3}} \frac{\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12} - \lambda^\pm \Lambda^\mp}{3\Delta_\alpha^{(d)}} \partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) \pm z^{r+\frac{1}{3}} \left(\Lambda^\pm + \frac{1}{2} \lambda^\pm \right) \tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z),
\end{aligned} \tag{B.12}$$

где потомок $\tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z)$ даётся формулой (B.8).

Аналогично в случае S -модуля

$$\begin{aligned}
&\oint_{incl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{1}{3}} G^\pm(u) W_\alpha^{(d)\pm}(z) = \\
&= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{1}{3}} G^\pm(u) W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \oint_{excl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{1}{3}} G^\pm(u) W_\alpha^{(d)\pm}(z).
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Контуры, окружающие начало координат, могут быть легко вычислены с использованием абелевой перестановки $G^\pm(u)$ с $W_\alpha^{(d)\pm}(z)$, что даёт в этом случае множитель $e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$$\oint_{incl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{1}{3}} G^\pm(u) W_\alpha^{(d)\pm}(z) = \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{1}{3})} z^l G_{r+p-l+\frac{1}{3}}^\pm W_\alpha^{(d)\pm}(z), \tag{B.14}$$

$$\oint_{excl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{1}{3}} G^\pm(u) W_\alpha^{(d)\pm}(z) = (-1)^{p+1} \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{1}{3})} z^{p-l+\frac{1}{3}} W_\alpha^{(d)\pm}(z) G_{r+l}^\pm. \tag{B.15}$$

Член в интеграле с контуром, окружающим точку z , вычисляется исполь-

зую операторное разложение (B.3) в D -модуле (мы снова полагаем $p = -1$)

$$\begin{aligned}
& \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{-\frac{2}{3}} G^\pm(u) W_\alpha^{(d)\pm}(z) = \\
& = \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{\Lambda^\pm}{(u-z)^2} W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{u-z} \left(\frac{2\Lambda^\pm}{3\Delta_\alpha^{(d)}} \partial W_\alpha^{(d)\pm}(z) + \tilde{W}_\alpha^{(d)\pm}(z) \right) + \dots \right) = \\
& = z^{r-\frac{2}{3}} \left(r + \frac{1}{3} \right) \Lambda^\pm W_\alpha^{(d)\mp}(z) + z^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{2\Lambda^\pm}{3\Delta_\alpha^{(d)}} \partial W_\alpha^{(d)\mp}(z) + \tilde{W}_\alpha^{(d)\mp}(z) \right).
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Объединяя выведенные уравнения (B.14), (B.15) и (B.16), мы получаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(-\frac{2}{3})} \left(z^l G_{r-l-\frac{2}{3}}^\pm W_\alpha^{(d)\pm}(z) - z^{-l-\frac{2}{3}} W_\alpha^{(d)\pm}(z) G_{r+l}^\pm \right) = \\
& = z^{r-\frac{2}{3}} \left(r + \frac{1}{3} \right) \Lambda^\pm W_\alpha^{(d)\mp}(z) + z^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{2\Lambda^\pm}{3\Delta_\alpha^{(d)}} \partial W_\alpha^{(d)\mp}(z) + \tilde{W}_\alpha^{(d)\mp}(z) \right).
\end{aligned} \tag{B.17}$$

То же самое с противоположными знаками \mathbb{Z}_3 -зарядов

$$\begin{aligned}
& \oint_{incl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{2}{3}} G^\pm(u) W_\alpha^{(d)\mp}(z) = \\
& = \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{2}{3}} G^\pm(u) W_\alpha^{(d)\mp}(z) + \oint_{excl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{2}{3}} G^\pm(u) W_\alpha^{(d)\mp}(z).
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Контурные интегралы вокруг начала координат могут быть легко вычислены с использованием абелевой перестановки $G^\pm(u)$ с $W_\alpha^{(d)\mp}(z)$, что даёт в этом случае множитель $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

$$\oint_{incl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{2}{3}} G^\pm(u) W_d^\mp(z) = \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{2}{3})} z^l G_{r+p-l+\frac{2}{3}}^\pm W_d^\pm(z), \tag{B.19}$$

$$\oint_{excl\ z} \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{p+\frac{2}{3}} G^\pm(u) W_d^\mp(z) = (-1)^p \sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(p+\frac{2}{3})} z^{p-l+\frac{2}{3}} W_d^\mp(z) G_{r+l}^\pm. \tag{B.20}$$

Член с контуром вокруг точки z вычисляется с использованием операторного

разложения (В.4) в D -модуле (мы снова полагаем $p = -1$)

$$\begin{aligned}
\oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} (u-z)^{-\frac{1}{3}} G^\pm(u) W_\alpha^{(d)\mp}(z) &= \\
= \oint_z \frac{du}{2\pi i} u^{r+\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2(u-z)} \left(V_\alpha^{(d)(+)}(z) \pm V_\alpha^{(d)(-)}(z) \right) + \dots \right) &= \\
= \frac{1}{2} z^{r+\frac{1}{3}} \left(V_\alpha^{(d)(+)}(z) \pm V_\alpha^{(d)(-)}(z) \right). & \quad (\text{В.21})
\end{aligned}$$

После вычислений, проведённых выше, объединяя (В.19), (В.20) и (В.21), мы можем записать обобщённые коммутационные соотношения

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{+\infty} C_l^{(-\frac{1}{3})} \left(z^l G_{r-l-\frac{1}{3}}^\pm W_\alpha^{(d)\mp}(z) + z^{-l-\frac{1}{3}} W_\alpha^{(d)\mp}(z) G_{r+l}^\pm \right) &= \\
= \frac{1}{2} z^{r+\frac{1}{3}} \left(V_\alpha^{(d)(+)}(z) \pm V_\alpha^{(d)(-)}(z) \right), & \quad (\text{В.22})
\end{aligned}$$

где потомки $V_\alpha^{(d)(\pm)}(z)$ даются формулой (В.7).

С Матрица Грама/Шаповалова и матричные элементы на уровне $7/4$

Матрица Грама/Шаповалова на уровне 1

$$\left(\begin{array}{cccc}
-\left(\frac{2}{3}\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{5c}{9}\right) & \frac{4}{3}\sqrt{\frac{c-8}{6}}\sqrt{\frac{c}{24} - \Delta_\alpha^{(d)}} & -2\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12}\right) & 2\sqrt{\frac{c-8}{6}}\sqrt{\frac{c}{24} - \Delta_\alpha^{(d)}} \\
\frac{4}{3}\sqrt{\frac{c-8}{6}}\sqrt{\frac{c}{24} - \Delta_\alpha^{(d)}} & -\left(\frac{2}{3}\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{5c}{9}\right) & 2\sqrt{\frac{c-8}{6}}\sqrt{\frac{c}{24} - \Delta_\alpha^{(d)}} & -2\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12}\right) \\
-2\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12}\right) & 2\sqrt{\frac{c-8}{6}}\sqrt{\frac{c}{24} - \Delta_\alpha^{(d)}} & -2\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{2}{3}\right)\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12}\right) & 2\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{c-8}{6}}\sqrt{\frac{c}{24} - \Delta_\alpha^{(d)}} \\
2\sqrt{\frac{c-8}{6}}\sqrt{\frac{c}{24} - \Delta_\alpha^{(d)}} & -2\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12}\right) & 2\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{c-8}{6}}\sqrt{\frac{c}{24} - \Delta_\alpha^{(d)}} & -2\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{2}{3}\right)\left(\Delta_\alpha^{(d)} + \frac{c}{12}\right)
\end{array} \right). \quad (\text{С.1})$$

Соответствующие матричные элементы

$$\begin{aligned}
\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 1 \rangle_{7/4} &= - \left(\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(+)\alpha} + \mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(-)\alpha} \right), \\
\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 2 \rangle_{7/4} &= - \left(\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(+)\alpha} - \mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(-)\alpha} \right), \\
\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 3 \rangle_{7/4} &= \left(\Delta_{m_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha}^{(d)} - \frac{2}{3} \right) \times \left(\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(+)\alpha} + \mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(-)\alpha} \right), \\
\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 4 \rangle_{7/4} &= \left(\Delta_{m_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha}^{(d)} - \frac{2}{3} \right) \times \left(\mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(+)\alpha} - \mathbb{C}_{m_1, \alpha_1}^{(-)\alpha} \right), \\
{}_{7/4} \langle 1 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= -z^{\Delta_{\alpha}^{(d)} + \frac{5}{3} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)}} \times \left(\mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(+)\alpha} + \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(-)\alpha} \right), \\
{}_{7/4} \langle 2 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= -z^{\Delta_{\alpha}^{(d)} + \frac{5}{3} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)}} \times \left(\mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(+)\alpha} - \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(-)\alpha} \right), \\
{}_{7/4} \langle 3 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= - \left(\Delta_{\alpha}^{(d)} + \frac{2}{3} + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) z^{\Delta_{\alpha}^{(d)} + \frac{5}{3} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)}} \times \\
&\times \left(\mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(+)\alpha} + \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(-)\alpha} \right), \\
{}_{7/4} \langle 4 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= - \left(\Delta_{\alpha}^{(d)} + \frac{2}{3} + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) z^{\Delta_{\alpha}^{(d)} + \frac{5}{3} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)}} \times \\
&\times \left(\mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(+)\alpha} - \mathbb{C}_{\alpha, \alpha_2}^{(-)\alpha} \right).
\end{aligned} \tag{C.2}$$

D Матрица Грама/Шаповалова и матричные элементы на уровне 2

Соответствующая матрица Грама/Шаповалова

$$\left(\begin{array}{ccc}
\frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (\Delta_{\alpha}^{(s)} + 1) (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} + 1) + (\Delta_{\alpha}^{(s)})^2 & -\frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (\Delta_{\alpha}^{(s)} + 1) (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} - 2) + (\Delta_{\alpha}^{(s)})^2 & \\
-\frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (\Delta_{\alpha}^{(s)} + 1) (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} - 2) + (\Delta_{\alpha}^{(s)})^2 & \frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (\Delta_{\alpha}^{(s)} + 1) (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} + 1) + (\Delta_{\alpha}^{(s)})^2 & \dots \\
\frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} + 1) & -\frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} - 2) & \\
-\frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} - 2) & \frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} + 1) & \\
& 3\Delta_{\alpha}^{(s)} & 3\Delta_{\alpha}^{(s)}
\end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{ccc}
\frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} + 1) & -\frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} - 2) & 3\Delta_{\alpha}^{(s)} \\
-\frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} - 2) & \frac{2}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} (2\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{4} + 1) & 3\Delta_{\alpha}^{(s)} \\
\dots & \frac{\Delta_{\alpha}^{(s)}}{9} (5\Delta_{\alpha}^{(s)} + 5c + 2) & -\frac{\Delta_{\alpha}^{(s)}}{9} (\Delta_{\alpha}^{(s)} + c - 8) & \frac{7}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} \\
-\frac{\Delta_{\alpha}^{(s)}}{9} (\Delta_{\alpha}^{(s)} + c - 8) & \frac{\Delta_{\alpha}^{(s)}}{9} (5\Delta_{\alpha}^{(s)} + 5c + 2) & \frac{7}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} \\
& \frac{7}{3} \Delta_{\alpha}^{(s)} & 4 (\Delta_{\alpha}^{(s)} + \frac{c}{8})
\end{array} \right) \tag{D.1}$$

Матричные элементы имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 1 \rangle_2 &= \frac{1}{2} \left(\Delta_{m_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha}^{(s)} \right) \left(\Delta_{m_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha}^{(s)} - 1 \right) \times C_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} + \\
&+ \left(\Delta_{m_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha}^{(s)} - 1 \right) \times \tilde{C}_{m_1, \alpha_1}^{\alpha}, \\
\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 2 \rangle_2 &= \frac{1}{2} \left(\Delta_{m_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha}^{(s)} \right) \left(\Delta_{m_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha}^{(s)} - 1 \right) \times C_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} - \\
&- \left(\Delta_{m_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha}^{(s)} - 1 \right) \times \tilde{C}_{m_1, \alpha_1}^{\alpha}, \\
\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 3 \rangle_2 &= -\frac{1}{2} \left(\Delta_{m_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha}^{(s)} \right) \times C_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} - \tilde{C}_{m_1, \alpha_1}^{\alpha}, \\
\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 4 \rangle_2 &= -\frac{1}{2} \left(\Delta_{m_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha_1}^{(s)} - \Delta_{\alpha}^{(s)} \right) \times C_{m_1, \alpha_1}^{\alpha} - \tilde{C}_{m_1, \alpha_1}^{\alpha}, \\
\langle m_1; 0 | W_{\alpha_1}(1) | 5 \rangle_2 &= \left(2\Delta_{\alpha_1}^{(s)} + \Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{m_1}^{(s)} \right) \times C_{m_1, \alpha_1}^{\alpha},
\end{aligned} \tag{D.2}$$

$$\begin{aligned}
{}_2\langle 1 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= z^{\Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} + 2} \left(\frac{1}{2} \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + 1 + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) \times \right. \\
&\times \left. \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) \times C_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} - \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + 1 + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) \times \tilde{C}_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} \right), \\
{}_2\langle 2 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= z^{\Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} + 2} \left(\frac{1}{2} \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + 1 + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) \times \right. \\
&\times \left. \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) \times C_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} + \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + 1 + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) \times \tilde{C}_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} \right), \\
{}_2\langle 3 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= z^{\Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} + 2} \left(\frac{1}{2} \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) \times C_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} - \tilde{C}_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} \right), \\
{}_2\langle 4 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= z^{\Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} + 2} \left(\frac{1}{2} \left(\Delta_{\alpha}^{(s)} + \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) \times C_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} + \tilde{C}_{\alpha, \alpha_2}^{m_2} \right), \\
{}_2\langle 5 | W_{\alpha_2}(z) | m_2; 0 \rangle &= z^{\Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{\alpha_2}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} + 2} \left(2\Delta_{\alpha_2}^{(s)} + \Delta_{\alpha}^{(s)} - \Delta_{m_2}^{(s)} \right) \times C_{\alpha, \alpha_2}^{m_2}.
\end{aligned}$$

Е Симметрии производящих функций

Цель данного приложения состоит в анализе производящих функций диаграмм Юнга $\chi_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1}|q)$ с $s = 0, 1, \dots, p-1$ и k_i , равными 0 или 1. Вспомним формулу (2.12) для производящей функции и запишем её в более

удобной форме для дальнейшего рассмотрения

$$\begin{aligned} \chi_{0,s}(k_1, \dots, k_{p-1}|q) &= (\chi_B(q))^{2p} q^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (k_i^2 - k_i k_{i+1} + \frac{2k_i}{p}) - \frac{1}{2} k_s} \times \\ &\times \sum_{\{m_i\} \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{4} \sum_{i=0}^{s-1} (2m_{i+1} - 2m_i - k_{i+1} + k_i + 1)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=s-1}^{p-1} (2m_{i+1} - 2m_i - k_{i+1} + k_i)^2 - \frac{s}{4}}. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Беря некоторое $j \neq s$ и предполагая $k_j = 0$ и $k_{j-1} = 0$, $k_{j+1} = 1$, мы делаем подстановку переменной суммирования m_j в (E.1)

$$m_j = m_{j+1} + m_{j-1} - \tilde{m}_j, \quad (\text{E.2})$$

что эффективно приводит к $k_j = 0 \rightarrow k_j = 1$. После некоторых вычислений мы получаем

$$\chi_{0,s}(\dots, 0, \overset{j}{0}, 1, \dots |q) = q^{-\frac{1}{p}} \chi_{0,s}(\dots, 0, \overset{j}{1}, 1, \dots |q), \quad j \neq s. \quad (\text{E.3})$$

Такая же подстановка, как в (E.2), доказывает, что

$$\chi_{0,s}(\dots, 1, \overset{j}{0}, 0, \dots |q) = q^{-\frac{1}{p}} \chi_{0,s}(\dots, 1, \overset{j}{1}, 0, \dots |q), \quad j \neq s. \quad (\text{E.4})$$

Далее мы должны рассмотреть ситуацию, когда $k_s = 0$. Предполагая, что $k_{s-1} = 0$ и $k_{s+1} = 0$, мы делаем подстановку для переменной суммирования m_s в (E.1)

$$m_s = m_{s+1} + m_{s-1} - \tilde{m}_s, \quad (\text{E.5})$$

что эффективно приводит к $k_s = 0 \rightarrow k_s = 1$. После некоторых вычислений мы получаем

$$\chi_{0,s}(\dots, 0, \overset{s}{0}, 0, \dots |q) = q^{-\frac{1}{p}} \chi_{0,s}(\dots, 0, \overset{s}{1}, 0, \dots |q). \quad (\text{E.6})$$

Если $k_{s-1} = 1$ и $k_{s+1} = 1$, то подходящей подстановкой будет

$$m_s = m_{s+1} + m_{s-1} - \tilde{m}_s - 1, \quad (\text{E.7})$$

что опять эффективно приводит к $k_s = 0 \rightarrow k_s = 1$. После некоторых вычислений мы получаем

$$\chi_{0,s}(\dots, 1, \overset{s}{0}, 1, \dots |q) = q^{1-\frac{1}{p}} \chi_{0,s}(\dots, 1, \overset{s}{1}, 1, \dots |q). \quad (\text{E.8})$$

Следующая задача состоит в том, чтобы определить классы неэквивалентных производящих функций для каждого s с k_i , равными 0 или 1.

Начнём со случая $s = 0$. Как мы помним, массив из k_i является рядом из $p - 1$ нулей и единиц. Мы можем смотреть на этот массив как на островки единиц в море нулей. Затем, мы можем легко видеть, что симметрии (Е.3) и (Е.4) запрещают островкам сливаться (по крайней мере один 0 должен быть между ними), но позволяют менять их размер. Таким образом, класс эквивалентности определяется числом островков n , которое принимает значения $0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$. Удобно выбрать следующего представителя n -го класса

$$\chi_{0,0}(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, 0, \dots, 0|q). \quad (\text{Е.9})$$

Тогда для $s = 0$ мощность n -го класса равна $\binom{p}{2n}$ (число способов распределить $2n$ границ островков между p позициями).

Теперь мы продолжим с тем же вычислением для случая $s > 0$. Смотри снова на массив из k_i , который состоит из 0 и 1, мы замечаем, что если имеется остров из единиц, содержащий позицию номер s , мы можем уничтожить этот островок, получая при этом производящую функцию, эквивалентную $\chi_{0,s}$. Тогда из-за симметрий (Е.6) и (Е.8) мы можем аннигилировать островки слева от позиции s с островками справа от позиции s . Это означает, что после этих преобразований мы останемся с некоторым числом островков только с одной стороны (справа или слева). Это приводит нас к выводу о том, что класс эквивалентности в этом случае определяется разностью между числом островков слева и справа от позиции s . Тогда, число классов эквивалентности равно

$$\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \lfloor \frac{p-s}{2} \rfloor + 1. \quad (\text{Е.10})$$

Обозначим через l разность числа островков слева и справа от s -той позиции. Тогда число производящих функций в соответствующем классе эквивалент-

ности с $k_s = 0$ даётся формулой

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor - l} \binom{s}{2n+2j} \binom{p-s}{2j}. \quad (\text{E.11})$$

Число производящих функций в том же классе с $k_s = 1$ (что эффективно приводит к добавлению одной границы островка с каждой стороны) даётся формулой

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor - l} \binom{s}{2l+2j+1} \binom{p-s}{2j+1}. \quad (\text{E.12})$$

Суммируя оба вклада, мы получаем, используя тождество Вандермонда

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor - n} \left(\binom{s}{2l+2j} \binom{p-s}{2j} + \binom{s}{2l+2j+1} \binom{p-s}{2j+1} \right) = \binom{p}{s-2l}. \quad (\text{E.13})$$

Удобный выбор представителя l -го класса является следующим

$$\chi_{0,s}(0, \dots, 0, \overset{s-2l+1}{1}, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, \overset{s}{0}, 0, \dots, 0). \quad (\text{E.14})$$

Ситуация аналогична, когда у нас есть n островков с правой стороны, за исключением того, что мы должны заменить s на $p-s$, что даёт мощность $\binom{p}{p-s-2n}$. Удобным выбором представителя будет

$$\chi_{0,s}(0, \dots, 0, \overset{s}{0}, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0, \overset{s+2n-1}{1}, 0, \dots, 0). \quad (\text{E.15})$$

F Конформные теории поля, основанные на косете

В данном приложении мы представим некоторую информацию о конформных теориях поля, основанных на косете

$$\frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{l_1} \times \widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{l_2}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(r)_{l_1+l_2}}. \quad (\text{F.1})$$

В случае произвольного целого $r \geq 2$ и произвольных комплексных l_1 и l_2 косет (F.1) описывает конформную теорию поля с центральным зарядом

$$c(r, l_1, l_2) = (r^2 - 1) \left(\frac{l_1}{r+l_1} + \frac{l_2}{r+l_2} - \frac{l_1+l_2}{r+l_1+l_2} \right). \quad (\text{F.2})$$

В случае $l_1 = 1$ мы имеем конформную теорию поля с центральным зарядом

$$c(r, 1, l_2) = (r - 1) \frac{l_2(2r + l_2 + 1)}{(r + l_2)(r + l_2 + 1)}, \quad (\text{F.3})$$

которая имеет W_r -симметрию [47]. Тогда, если l_2 – положительное целое число, центральный заряд даётся формулой (F.3) и косет описывает Минимальную Модель с W_r -симметрией.

Теперь рассмотрим случай ранга $r = 2$, который изучается в данной работе. Косет (F.1) принимает вид

$$\frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{l_1} \times \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{l_2}}{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{l_1+l_2}}. \quad (\text{F.4})$$

В случае произвольного комплексного l_1 и l_2 косет (F.4) описывает конформную теорию поля с центральным зарядом

$$c(2, l_1, l_2) = 3 \left(\frac{l_1}{l_1 + 2} + \frac{l_2}{l_2 + 2} - \frac{l_1 + l_2}{l_1 + l_2 + 2} \right). \quad (\text{F.5})$$

В случае $l_1 = 1$ мы имеем конформную теорию поля с центральным зарядом

$$c(2, 1, l_2) = \frac{l_2(l_2 + 5)}{(l_2 + 2)(l_2 + 3)} = 1 - \frac{6}{(l_2 + 2)(l_2 + 3)}, \quad (\text{F.6})$$

которая обладает симметрией Вирасоро. Тогда, если l_2 – положительное целое число, центральный заряд даётся той же формулой (F.6) и косет описывает Минимальную Модель $\mathcal{M}(l_2 + 1/l_2 + 2)$, как показано в [3, 4].

G Размерность состояний старшего веса представления

$$[\Psi_s^m(\mu)]$$

В данном Приложении мы задаёмся целью определить правильные формулы для размерностей рассматриваемых представлений. Для этого нужно вычислить степень переменной q , с которой начинается ряд в формуле (2.70),

по модулю $\delta_s^m(j)$ в формуле

$$\sum_{r,l=0}^{\infty} (-1)^{r+l} \left(q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1) + l\frac{m-s}{2} + r\frac{m+s}{2} - q^{\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1) + p+1 - m + l(p+1 - \frac{m-s}{2}) + r(p+1 - \frac{m+s}{2})} \right) \quad (\text{G.1})$$

Сначала мы рассмотрим случай $m \geq s$. Можно легко заметить, что в этом случае все коэффициенты перед r^2 , l^2 , rl , r и l неотрицательны. Таким образом, очевидно, что минимальная степень в первом члене равна 0 и минимальная степень во втором члене равна $p + 1 - m$, что реализуется, если $r = l = 0$.

А теперь рассмотрим случай $m < s$. Чему равна минимальная степень во втором члене, очевидно, так как снова коэффициенты перед r^2 , l^2 , rl , r и l неотрицательны. Таким образом, второй член даёт минимальную степень, равную $p + 1 - m$. Ситуация с первым членом не столь проста. Наша цель состоит в том, чтобы минимизировать квадратичную форму

$$\frac{l(l+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + rl(p+1) + l\frac{m-s}{2} + r\frac{m+s}{2} \quad (\text{G.2})$$

при условии, что $r, l \in \mathbb{Z}$ неотрицательны. Немного преобразуя квадратичную форму, мы получаем

$$\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}l^2 + (p+1)rl + \frac{m+s+1}{2}r + \frac{m-s+1}{2}l. \quad (\text{G.3})$$

Посмотрим на эту квадратичную форму как на функцию переменной r с параметром l . Так как $(p+1)l \geq 0$ и $\frac{m+s+1}{2} \geq 0$, мы можем сделать вывод о том, что для произвольного $l \geq 0$ минимум этой функции достигается при $r = 0$. Тогда, единственное, что остаётся, – это минимизировать

$$\frac{1}{2}l^2 + \frac{m-s+1}{2}l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{m-s+1}{2} \right)^2 - \frac{(m-s+1)^2}{8}. \quad (\text{G.4})$$

С первого взгляда можно подумать, что минимум этого выражения достигается при $l_1 = \frac{s-m}{2}$ и $l_2 = \frac{s-m}{2} - 1$. Но это не так просто. Вспомним коэффициент

$(-1)^{r+l}$ в (G.1). Мы уже взяли $r = 0$. Можно видеть, что $(-1)^{l_1} = -(-1)^{l_2}$ и коэффициент ряда, соответствующий минимальной степени, равен нулю. Тогда мы итерируем эту процедуру, беря $l_1 = \frac{s-m}{2} + 1$ и $l_2 = \frac{s-m}{2} - 2$ и так далее, но мы снова получаем $(-1)^{l_1} = -(-1)^{l_2}$. Эта ситуация продолжается, пока мы не достигаем значения $l_2 = -1$. Это значение $l < 0$ и находится вне разрешённого диапазона l . Тем не менее, l_1 по-прежнему необходимо принять во внимание

$$l_1 = \frac{s-m}{2} + k, \quad (\text{G.5})$$

$$l_2 = \frac{s-m}{2} - k - 1 = -1, \quad (\text{G.6})$$

что даёт $l_1 = s - m$. Отсюда следует, что минимальная степень q в первом члене (G.1) равна

$$\frac{1}{2} \left(s - m + \frac{m - s + 1}{2} \right)^2 - \frac{(m - s + 1)^2}{8} = \frac{s - m}{2}. \quad (\text{G.7})$$

Это позволяет вычислить правильную размерность представления в случае $m < s$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \mu^2 \right) + \frac{s(p-s)}{2p(p+2)} + \frac{(m-s)(m+s+2)}{4(p+2)} + \frac{s-m}{2} = \\ & = \frac{1}{p} \left(\frac{Q^2}{4} - \mu^2 \right) + \frac{s(p-s)}{2p(p+2)} + \frac{(s-m)(2p-m-s+2)}{4(p+2)}. \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Н Доказательство тождеств для Υ -функций

Н.1 Тождества для Υ -функций для произвольного p

Цель этого Приложения состоит в выводе ключевой формулы

$$\frac{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0)}{\prod_{j=2}^p \Upsilon_{\hat{b}_j}(\hat{\alpha}_j^0 + \hat{b}_j)} = \kappa_p(\alpha) \prod_{j=1}^p \Upsilon \left(\frac{\alpha + (j-1)Q}{p} \right). \quad (\text{H.1})$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_p(\alpha) &= \frac{\Upsilon_{b_1}(b_1)}{\Upsilon_b(b) \prod_{j=1}^{p-1} \Upsilon\left(j\frac{Q}{p}\right) \prod_{j=2}^p \Upsilon_{\hat{b}_j}(\hat{b}_j)} \frac{b_1}{b} \times \\ &\times \left(b_1^{\frac{p-1}{p}} b_1^2 \prod_{j=2}^p \hat{b}_j^{\frac{(j-1)(p-j+1)}{p} \hat{b}_j^{-2} - \frac{j(p-j)}{p} \hat{b}_j^2} \right)^{\frac{\alpha(Q-\alpha)}{p}}. \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

Заметим, что формулы (H.1) и (H.2) написаны для случая $b^2 > \frac{1}{p-1}$.

Общая стратегия доказательства формулы (H.1) состоит в сдвиге переменной α в (H.1) к $\alpha + pb$ и делении (H.1) со смещённым α на то же тождество с несмещённым α . Для этих сдвигов мы получаем простые формулы

$$(\alpha + pb)_1^0 = \alpha_1^0 + b_1, \quad (\text{H.3})$$

$$(\alpha + \hat{p}b)_j^0 = \hat{\alpha}_j^0 + (j-1)\hat{b}_j^{-1} - j\hat{b}_j, \quad j = 2, \dots, p. \quad (\text{H.4})$$

Таким образом смещённое соотношение (H.1) выглядит так

$$\frac{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0 + b_1)}{\prod_{j=2}^p \Upsilon_{\hat{b}_j}(\hat{\alpha}^{(j)} + (j-1)(\hat{b}_j)^{-1} - (j-1)\hat{b}_j)} = \kappa_p(\alpha + pb) \prod_{j=1}^p \Upsilon\left(\frac{\alpha + (j-1)Q}{p} + b\right). \quad (\text{H.5})$$

Тогда можно легко видеть, что, чтобы поделить (H.5) на (H.1), нужно вычислить следующие объекты

$$\frac{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0 + b_1)}{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0)}, \quad (\text{H.6})$$

$$\frac{\Upsilon_{b_j}(\alpha^{(j)} + b_j)}{\Upsilon_{b_j}(\alpha^{(j)} + (j-1)(\hat{b}_j)^{-1} - (j-1)\hat{b}_j)}, \quad j = 2, \dots, p, \quad (\text{H.7})$$

$$\prod_{k=1}^p \frac{\Upsilon\left(\frac{\alpha + (k-1)Q}{p} + b\right)}{\Upsilon\left(\frac{\alpha + (k-1)Q}{p}\right)}. \quad (\text{H.8})$$

Используя сдвиговые соотношения для Υ -функций

$$\Upsilon_b(x + b) = b^{1-2bx} \gamma(2bx) \Upsilon(x), \quad (\text{H.9})$$

$$\Upsilon_b(x + b^{-1}) = b^{2b^{-1}x-1} \gamma(2b^{-1}x) \Upsilon(x).$$

где $\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}$, последнее отношение (Н.8) может быть легко вычислено для произвольного p

$$\prod_{k=1}^p \frac{\Upsilon\left(\frac{\alpha+(k-1)Q}{p} + b\right)}{\Upsilon\left(\frac{\alpha+(k-1)Q}{p}\right)} = b^{1-2\alpha b-(p-1)b^2} \prod_{k=1}^p \gamma\left(b^{\frac{\alpha+(k-1)Q}{p}}\right). \quad (\text{Н.10})$$

Произведённые вычисления дадут нам отношение

$$\frac{\kappa_p(\alpha + pb)}{\kappa_p(\alpha)}, \quad (\text{Н.11})$$

которое позволяет нам определить $\kappa_p(\alpha)$ по модулю некоторой мультипликативной константы. Эту константу можно определить, беря $\alpha = pb$ в (Н.1) и извлекая $\kappa_p(pb)$ их полученного отношения. Это определяет интересующую нас мультипликативную константу.

В этом приложении мы не собираемся выводить (Н.1) для произвольного p . Вместо этого мы приведём детальный вывод соотношения (Н.1) для случаев $p = 3$ и $p = 4$ и угадаем общую формулу для произвольного p . Соотношение для $p = 2$ было выведено в [39].

Случай $p = 3$. После обсуждения случая произвольного p единственная вещь, которую остаётся вычислить, это набор из трёх отношений Υ -функций. В случае $p = 3$ сдвиг переменной α – это $\alpha + 3b$ и сдвиги α_1^0 , $\hat{\alpha}_2^0$ и $\hat{\alpha}_3^0$ даются формулами

$$\begin{aligned} (\alpha + 3b)_1^0 &= \alpha_1^0 + b_1, \\ (\alpha + \hat{3}b)_2^0 &= \hat{\alpha}_2^0 + (\hat{b}_2)^{-1} - 2\hat{b}_2, \\ (\alpha + \hat{3}b)_3^0 &= \hat{\alpha}_3^0 + 2(\hat{b}_3)^{-1} - 3\hat{b}_3. \end{aligned} \quad (\text{Н.12})$$

Таким образом, мы получаем уравнение для отношения $\frac{\kappa_3(\alpha+3b)}{\kappa_3(\alpha)}$

$$\begin{aligned} & \frac{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0 + b_1) \Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{\alpha}_2^0 + \hat{b}_2) \Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{\alpha}_3^0 + \hat{b}_3)}{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0) \Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{\alpha}_2^0 + (\hat{b}_2)^{-1} - \hat{b}_2) \Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{\alpha}_3^0 + 2(\hat{b}_3)^{-1} - 2\hat{b}_3)} = \\ & = \frac{\kappa_3(\alpha + 3b)}{\kappa_3(\alpha)} \prod_{k=1}^3 \frac{\Upsilon\left(\frac{\alpha+(k-1)Q}{3} + b\right)}{\Upsilon\left(\frac{\alpha+(k-1)Q}{3}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

Тогда мы можем записать результаты для отношений Υ -функций

$$\begin{aligned} & \frac{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0 + b_1)}{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0)} = \gamma(\alpha_1^0 b_1) (b_1)^{1-2b_1\alpha_1^0} \\ & \frac{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{\alpha}_2^0 + \hat{b}_2)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{\alpha}_2^0 + (\hat{b}_2)^{-1} - \hat{b}_2)} = \frac{\gamma(\hat{\alpha}_2^0 \hat{b}_2) \gamma(\hat{\alpha}_2^0 \hat{b}_2 - (\hat{b}_2)^2)}{\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}_2^0}{\hat{b}_2} - 1\right)} (\hat{b}_2)^{-\frac{2\hat{\alpha}_2^0}{\hat{b}_2} - 4\hat{\alpha}_2^0 \hat{b}_2 + 5 + 2(\hat{b}_2)^2} \\ & \frac{\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{\alpha}_3^0 + \hat{b}_3)}{\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{\alpha}_3^0 + 2(\hat{b}_3)^{-1} - 2\hat{b}_3)} = \frac{\gamma(\hat{\alpha}_3^0 \hat{b}_3) \gamma(\hat{\alpha}_3^0 \hat{b}_3 - (\hat{b}_3)^2) \gamma(\hat{\alpha}_3^0 \hat{b}_3 - 2(\hat{b}_3)^2)}{\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}_3^0}{\hat{b}_3} - 2\right) \gamma\left(\frac{\hat{\alpha}_3^0}{\hat{b}_3} - 2 + (\hat{b}_3)^{-2}\right)} \times \\ & \times (\hat{b}_3)^{-\frac{4\hat{\alpha}_3^0}{\hat{b}_3} - 6\hat{\alpha}_3^0 \hat{b}_3 - 2(\hat{b}_3)^{-2} + 13 + 6(\hat{b}_3)^2}. \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

Произведение γ -функций в (H.14) может быть значительно упрощено

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma(\alpha_1^0 b_1) \gamma(\hat{\alpha}_2^0 \hat{b}_2) \gamma(\hat{\alpha}_2^0 \hat{b}_2 - (\hat{b}_2)^2) \gamma(\hat{\alpha}_3^0 \hat{b}_3) \gamma(\hat{\alpha}_3^0 \hat{b}_3 - (\hat{b}_3)^2) \gamma(\hat{\alpha}_3^0 \hat{b}_3 - 2(\hat{b}_3)^2)}{\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}_2^0}{\hat{b}_2} - 1\right) \gamma\left(\frac{\hat{\alpha}_3^0}{\hat{b}_3} - 2\right) \gamma\left(\frac{\hat{\alpha}_3^0}{\hat{b}_3} - 2 + (\hat{b}_3)^{-2}\right)} = \\ & = \left(\frac{3}{1-2b^2}\right)^2 \left(\frac{3}{2-b^2}\right)^4 \gamma\left(b\frac{\alpha}{3}\right) \gamma\left(b\frac{\alpha+Q}{3}\right) \gamma\left(b\frac{\alpha+2Q}{3}\right). \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

Также нам нужна следующая формула (которая получена с использованием соотношения $b_1 \hat{b}_2 \hat{b}_3 = b$)

$$\begin{aligned} & (b_1)^{1-2b_1\alpha_1^0} (\hat{b}_2)^{-\frac{2\hat{\alpha}_2^0}{\hat{b}_2} - 4\hat{\alpha}_2^0 \hat{b}_2 + 5 + 2(\hat{b}_2)^2} (\hat{b}_3)^{-\frac{4\hat{\alpha}_3^0}{\hat{b}_3} - 6\hat{\alpha}_3^0 \hat{b}_3 - 2(\hat{b}_3)^{-2} + 13 + 6(\hat{b}_3)^2} = \\ & = b^{-\frac{2\alpha b - 1 + 2b^2}{1-2b^2}} \left(\frac{3}{1-2b^2}\right)^{\frac{2\alpha b - 5 + 4b^2}{2-b^2}} \left(\frac{2-b^2}{3}\right)^{\frac{2\alpha b^3 + 4 - 9b^2 + 2b^4}{1-2b^2}}. \end{aligned} \quad (\text{H.16})$$

После проведённых вычислений, объединяя (H.10), (H.14), (H.15) и (H.16), мы получаем сдвиговое соотношение для $\kappa_3(\alpha)$

$$\frac{\kappa_3(\alpha + 3b)}{\kappa_3(\alpha)} = \left(\left(\frac{3}{1-2b^2}\right)^{\frac{1}{2-b^2}} \left(\frac{2-b^2}{3b^2}\right)^{\frac{b^2}{1-2b^2}} \right)^{2\alpha b - 1 + 2b^2}, \quad (\text{H.17})$$

которое позволяет нам угадать $\kappa_3(\alpha)$ с точностью до мультипликативной константы

$$\kappa_3(\alpha) = C_3 \left(\left(\frac{3}{1-2b^2} \right)^{\frac{1}{2-b^2}} \left(\frac{2-b^2}{3b^2} \right)^{\frac{b^2}{1-2b^2}} \right)^{-\frac{\alpha(b+b^{-1}-\alpha)}{3}}. \quad (\text{H.18})$$

С этого момента единственная вещь, которую остаётся сделать, – это определить коэффициент C_3 . Как было сказано в начале Приложения А, нам следует определить значение C_3 из $\kappa_3(3b)$

$$\kappa_3(3b) = \frac{\Upsilon_{\hat{b}_1}(\hat{b}_1)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{b}_3)\Upsilon_b(b)\Upsilon_b^2\left(\frac{Q}{3}\right)} \left(\frac{3}{1-2b^2} \right)^{\frac{3b^2}{2(2-b^2)}} \left(\frac{2-b^2}{3b^2} \right)^{-b^2} \quad (\text{H.19})$$

$$\kappa_3(3b) = C_3 \left(\frac{3}{1-2b^2} \right)^{\frac{-1+2b^2}{2-b^2}} \left(\frac{2-b^2}{3b^2} \right)^{-b^2}. \quad (\text{H.20})$$

После некоторых утомительных вычислений мы получаем результат

$$C_3 = \frac{\Upsilon_{\hat{b}_1}(\hat{b}_1)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{b}_3)\Upsilon_b(b)\Upsilon_b^2\left(\frac{Q}{3}\right)} \left(\frac{3}{1-2b^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{H.21})$$

Мы готовы записать конечный результат

$$\begin{aligned} \kappa_3(\alpha) &= \frac{\Upsilon_{\hat{b}_1}(\hat{b}_1)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{b}_3)\Upsilon_b(b)\Upsilon_b^2\left(\frac{Q}{3}\right)} \left(\frac{3}{1-2b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \left(\left(\frac{3}{1-2b^2} \right)^{\frac{1}{2-b^2}} \left(\frac{2-b^2}{3b^2} \right)^{\frac{b^2}{1-2b^2}} \right)^{-\frac{\alpha(Q-\alpha)}{3}}. \end{aligned} \quad (\text{H.22})$$

Однако он может быть записан в более элегантной форме (мы сделали небольшое преобразование с использованием тождества $\Upsilon_b(Q-x) = \Upsilon_b(x)$)

$$\begin{aligned} \kappa_3(\alpha) &= \frac{\Upsilon_{b_1}(b_1)b_1}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{b}_3)\Upsilon_b(b)\Upsilon_b\left(\frac{Q}{3}\right)\Upsilon_b\left(\frac{2Q}{3}\right)b} \times \\ &\quad \times \left((b_1)^{\frac{2}{3}}(b_1)^2(\hat{b}_2)^{\frac{2}{3}}(\hat{b}_2)^{-2-\frac{2}{3}}(\hat{b}_2)^2(\hat{b}_3)^{\frac{2}{3}}(\hat{b}_3)^{-2} \right)^{\frac{1}{3}\alpha(Q-\alpha)}. \end{aligned} \quad (\text{H.23})$$

Случай $p=4$. Согласно нашим рассуждениям для произвольного p единственная вещь, которую остаётся вычислить, – это набор из четырёх отношений Υ -функций. В случае $p = 4$ сдвиг переменной α даёт $\alpha + 4b$, а сдвиги α_1^0 , $\hat{\alpha}_2^0$, $\hat{\alpha}_3^0$ и $\hat{\alpha}^{(4)}$ даются формулами

$$\begin{aligned}(\alpha + 4b)_1^0 &= \alpha_1^0 + b_1, \\(\alpha + \hat{4}b)_2^0 &= \hat{\alpha}_2^0 + (\hat{b}_2)^{-1} - 2\hat{b}_2, \\(\alpha + \hat{4}b)_3^0 &= \hat{\alpha}_3^0 + 2(\hat{b}_3)^{-1} - 3\hat{b}_3, \\(\alpha + \hat{4}b)_4^0 &= \hat{\alpha}^{(4)} + 3(\hat{b}_4)^{-1} - 4\hat{b}_4.\end{aligned}\tag{H.24}$$

Заметим, что $\alpha^{(i)}$ для $p = 3$ и для $p = 4$ не одинаковы. Уравнение для отношения $\frac{\kappa_4(\alpha+4b)}{\kappa_4(\alpha)}$ даётся формулой

$$\begin{aligned}&\frac{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0 + b_1)\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{\alpha}_2^0 + \hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{\alpha}_3^0 + \hat{b}_3)\Upsilon_{\hat{b}_4}(\hat{\alpha}^{(4)} + \hat{b}_4)}{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0)\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{\alpha}_2^0 + (\hat{b}_2)^{-1} - \hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{\alpha}_3^0 + 2(\hat{b}_3)^{-1} - 2\hat{b}_3)\Upsilon_{\hat{b}_4}(\hat{\alpha}^{(4)} + 3(\hat{b}_4)^{-1} - 3\hat{b}_4)} = \\&= \frac{\kappa_4(\alpha + 4b)}{\kappa_4(\alpha)} \prod_{k=1}^4 \frac{\Upsilon\left(\frac{\alpha+(k-1)Q}{4} + b\right)}{\Upsilon\left(\frac{\alpha+(k-1)Q}{4}\right)}\end{aligned}\tag{H.25}$$

Отношения Υ -функций с параметрами b_1 , \hat{b}_2 и \hat{b}_3 остаются такими же, как и в (H.14). Единственное недостающее выражение для Υ -функции с параметром \hat{b}_4 выглядит как

$$\begin{aligned}&\frac{\Upsilon_{\hat{b}_4}(\hat{\alpha}^{(4)} + \hat{b}_4)}{\Upsilon_{\hat{b}_4}(\hat{\alpha}^{(4)} + 3(\hat{b}_4)^{-1} - 3\hat{b}_4)} = \\&= \frac{\gamma(\hat{\alpha}^{(4)}\hat{b}_4)\gamma(\hat{\alpha}^{(4)}\hat{b}_4 - (\hat{b}_4)^2)\gamma(\hat{\alpha}^{(4)}\hat{b}_4 - 2(\hat{b}_4)^2)\gamma(\hat{\alpha}^{(4)}\hat{b}_4 - 3(\hat{b}_4)^2)}{\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}^{(4)}}{\hat{b}_4} - 3\right)\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}^{(4)}}{\hat{b}_4} - 3 + (\hat{b}_4)^{-2}\right)\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}^{(4)}}{\hat{b}_4} - 3 + 2(\hat{b}_4)^{-2}\right)} \times \\&\times (\hat{b}_4)^{-\frac{6\hat{\alpha}^{(4)}}{\hat{b}_4} - 8\hat{\alpha}^{(4)}\hat{b}_4 - 6(\hat{b}_4)^{-2} + 25 + 12(\hat{b}_4)^2}.\end{aligned}\tag{H.26}$$

Произведение γ -функций может быть также упрощено в этом случае

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma(b_1\alpha_1^0)\gamma(\hat{\alpha}_2^0\hat{b}_2)\gamma(\hat{\alpha}_2^0\hat{b}_2 - (\hat{b}_2)^2)\gamma(\hat{\alpha}_3^0\hat{b}_3)\gamma(\hat{\alpha}_3^0\hat{b}_3 - (\hat{b}_3)^2)\gamma(\hat{\alpha}_3^0\hat{b}_3 - 2(\hat{b}_3)^2)}{\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}_2^0}{\hat{b}_2} - 1\right)\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}_3^0}{\hat{b}_3} - 2\right)\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}_3^0}{\hat{b}_3} - 2 + (\hat{b}_3)^{-2}\right)} \times \\
& \times \frac{\gamma(\hat{\alpha}^{(4)}\hat{b}_4)\gamma(\hat{\alpha}^{(4)}\hat{b}_4 - (\hat{b}_4)^2)\gamma(\hat{\alpha}^{(4)}\hat{b}_4 - 2(\hat{b}_4)^2)\gamma(\hat{\alpha}^{(4)}\hat{b}_4 - 3(\hat{b}_4)^2)}{\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}^{(4)}}{\hat{b}_4} - 3\right)\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}^{(4)}}{\hat{b}_4} - 3 + (\hat{b}_4)^{-2}\right)\gamma\left(\frac{\hat{\alpha}^{(4)}}{\hat{b}_4} - 3 + 2(\hat{b}_4)^{-2}\right)} = \\
& = \left(\frac{4}{1-3b^2}\right)^2 \left(\frac{4}{2-2b^2}\right)^4 \left(\frac{4}{3-b^2}\right)^6 \times \\
& \times \gamma\left(b\frac{\alpha}{4}\right)\gamma\left(b\frac{\alpha+Q}{4}\right)\gamma\left(b\frac{\alpha+2Q}{4}\right)\gamma\left(b\frac{\alpha+3Q}{4}\right). \tag{H.27}
\end{aligned}$$

После проведённых вычислений, объединяя (H.10), (H.14), (H.26), (H.27), мы получаем сдвиговое соотношение для $\kappa_4(\alpha)$

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_4(\alpha + 4b)}{\kappa_4(\alpha)} = \\
& = \left(2^{-\frac{3}{3-b^2}}(2b)^{\frac{3b^2}{1-3b^2}}(1-3b^2)^{\frac{1}{2-2b^2}}(2-2b^2)^{-\frac{1}{2(1-3b^2)}+\frac{3}{2(3-b^2)}}(3-b^2)^{-\frac{b^2}{2-2b^2}}\right)^{1-3b^2-2\alpha b}, \tag{H.28}
\end{aligned}$$

которое даёт нам $\kappa_4(\alpha)$ с точностью до мультипликативной константы

$$\kappa_4(\alpha) = C_4 \left(2^{-\frac{3}{3-b^2}}(2b)^{\frac{3b^2}{1-3b^2}}(1-3b^2)^{\frac{1}{2-2b^2}}(2-2b^2)^{-\frac{1}{2(1-3b^2)}+\frac{3}{2(3-b^2)}}(3-b^2)^{-\frac{b^2}{2-2b^2}}\right)^{\frac{\alpha(Q-\alpha)}{4}}. \tag{H.29}$$

С этого момента единственная вещь, которую остаётся сделать, – это определить коэффициент C_4 . Как было сказано в начале Приложения А, мы должны определить значение C_4 из $\kappa_4(4b)$. Мы легко извлекаем $\kappa_4(4b)$ из (H.25), используя соотношения (H.14) и (H.26) с $\alpha = 0$

$$\kappa_4(4b) = (1-3b^2)^{-\frac{2b^2}{2-2b^2}}(2-2b^2)^{-\frac{4b^2}{3-b^2}}(3-b^2)^{-b^2\frac{1-3b^2}{2-2b^2}}2^{b^2\frac{17-3b^2}{3-b^2}}\frac{\Upsilon_{b_1}(b_1)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{b}_3)\Upsilon_{\hat{b}_4}(\hat{b}_4)}, \tag{H.30}$$

$$\kappa_b(4b) = C_4 2^{-\frac{3(1-6b^2+b^4)}{3-b^2}} b^{3b^2} (1-3b^2)^{\frac{1-3b^2}{2-2b^2}} (2-2b^2)^{-\frac{4b^2}{3-b^2}} (3-b^2)^{-b^2\frac{1-3b^2}{2-2b^2}} \Upsilon_b(b) \Upsilon^2\left(\frac{Q}{4}\right). \tag{H.31}$$

Из (Н.30) после некоторых преобразований мы получаем

$$C_4 = \frac{\Upsilon_{b_1}(b_1)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{b}_3)\Upsilon_{\hat{b}_4}(\hat{b}_4)\Upsilon_b(b)\Upsilon^2\left(\frac{Q}{4}\right)} \left(\frac{4}{1-3b^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{Н.32})$$

Объединяя (Н.29) и (Н.32), мы получаем

$$\begin{aligned} \kappa_4(\alpha) &= \frac{\Upsilon_{b_1}(b_1)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{b}_3)\Upsilon_{\hat{b}_4}(\hat{b}_4)\Upsilon_b(b)\Upsilon^2\left(\frac{Q}{4}\right)} \left(\frac{4}{1-3b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(2^{-\frac{3}{3-b^2}}(2b)^{\frac{3b^2}{1-3b^2}}(1-3b^2)^{\frac{1}{2-2b^2}}(2-2b^2)^{-\frac{1}{2(1-3b^2)}+\frac{3}{2(3-b^2)}}(3-b^2)^{-\frac{b^2}{2-2b^2}}\right)^{\frac{\alpha(Q-\alpha)}{4}}. \end{aligned} \quad (\text{Н.33})$$

В более элегантной форме (мы сделали небольшие преобразования с использованием тождества $\Upsilon_b(Q-x) = \Upsilon_b(x)$)

$$\begin{aligned} \kappa_4(\alpha) &= \frac{\Upsilon_{b_1}(b_1)b_1}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{b}_3)\Upsilon_{\hat{b}_4}(\hat{b}_4)\Upsilon_b(b)\Upsilon\left(\frac{Q}{4}\right)\Upsilon\left(\frac{Q}{2}\right)\Upsilon\left(\frac{3Q}{4}\right)b} \times \\ &\times \left((b_1)^{\frac{3}{4}}(b_1)^2(\hat{b}_2)^{\frac{3}{4}}(\hat{b}_2)^{-2}-(\hat{b}_2)^2(\hat{b}_3)^{(\hat{b}_3)^{-2}-\frac{3}{4}}(\hat{b}_3)^2(\hat{b}_4)^{\frac{3}{4}}(\hat{b}_4)^{-2}\right)^{\frac{\alpha(Q-\alpha)}{4}}. \end{aligned} \quad (\text{Н.34})$$

Случай произвольного p Выпишем $\kappa_2(\alpha)$, $\kappa_3(\alpha)$ и $\kappa_4(\alpha)$ чтобы угадать $\kappa_p(\alpha)$ для всех p

$$\kappa_2(\alpha) = \frac{\Upsilon_{b_1}(b_1)b_1}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{b}_2)\Upsilon_b(b)b} \left((b_1)^{\frac{(b_1)^2}{2}}(\hat{b}_2)^{\frac{(\hat{b}_2)^{-2}}{2}}\right)^{\frac{1}{2}\alpha(Q-\alpha)}, \quad (\text{Н.35})$$

$$\begin{aligned} \kappa_3(\alpha) &= \frac{\Upsilon_{b_1}(b_1)b_1}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{b}_3)\Upsilon_b(b)\Upsilon_b\left(\frac{Q}{3}\right)\Upsilon_b\left(\frac{2Q}{3}\right)b} \times \\ &\times \left((b_1)^{\frac{2}{3}}(b_1)^2(\hat{b}_2)^{\frac{2}{3}}(\hat{b}_2)^{-2}-\frac{2}{3}(\hat{b}_2)^2(\hat{b}_3)^{\frac{2}{3}}(\hat{b}_3)^{-2}\right)^{\frac{1}{3}\alpha(Q-\alpha)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_4(\alpha) &= \frac{\Upsilon_{b_1}(b_1)b_1}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{b}_3)\Upsilon_{\hat{b}_4}(\hat{b}_4)\Upsilon_b(b)\Upsilon\left(\frac{Q}{4}\right)\Upsilon\left(\frac{Q}{2}\right)\Upsilon\left(\frac{3Q}{4}\right)b} \times \\ &\times \left((b_1)^{\frac{3}{4}}(b_1)^2(\hat{b}_2)^{\frac{3}{4}}(\hat{b}_2)^{-2}-(\hat{b}_2)^2(\hat{b}_3)^{(\hat{b}_3)^{-2}-\frac{3}{4}}(\hat{b}_3)^2(\hat{b}_4)^{\frac{3}{4}}(\hat{b}_4)^{-2}\right)^{\frac{\alpha(Q-\alpha)}{4}}. \end{aligned} \quad (\text{Н.36})$$

Можно заметить, что структура степени $\hat{b}_j \frac{k_{j-1}}{p}(\hat{b}_j)^{-2} - \frac{k_j}{p}(\hat{b}_j)^2$ и для $p = 2, 3, 4$ k_j совпадают с диагональной матрицей сдвигов параметров $\hat{\alpha}^{(i)}$. Тогда

естественное предположение для k_j можно записать так

$$k_j = j(p - j). \quad (\text{H.37})$$

Полученный результат позволяет нам написать предполагаемое выражение для $\kappa_p(\alpha)$, что является целью данного Приложения

$$\begin{aligned} \kappa_p(\alpha) &= \frac{\Upsilon_{b_1}(b_1)}{\Upsilon_b(b) \prod_{j=1}^{p-1} \Upsilon\left(j\frac{Q}{p}\right) \prod_{j=2}^p \Upsilon_{\hat{b}_j}(\hat{b}_j)} \frac{b_1}{b} \times \\ &\times \left((b_1)^{\frac{p-1}{p}(b_1)^2} \prod_{j=2}^p (\hat{b}_j)^{\frac{(j-1)(p-j+1)}{p}(\hat{b}_j)^{-2} - \frac{j(p-j)}{p}(\hat{b}_j)^2} \right)^{\frac{\alpha(Q-\alpha)}{p}}. \end{aligned} \quad (\text{H.38})$$

Выведенная формула (H.38) была проверена с помощью Mathematica для широкого набора численных значений α и b .

Н.2 Тождества для Υ -функций со сдвинутыми аргументами для $p = 3$

Цель данного раздела Приложения состоит в том, чтобы обобщить формулу (H.1) для $p = 3$ с целью получить функции $\Upsilon_1^{(3)}$ и $\Upsilon_2^{(3)}$ с правой стороны. Чтобы это сделать, давайте вспомним тождество для Υ -функций в случае $p = 3$

$$\frac{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{\alpha}_2^0 + \hat{b}_2) \Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{\alpha}_3^0 + \hat{b}_3)} = \kappa_3(\alpha, b) \Upsilon_0^{(3)}(\alpha). \quad (\text{H.39})$$

Чтобы обобщить эту формулу, мы делаем сдвиг $\alpha \rightarrow \alpha + b^{-1}$ для $\Upsilon_1^{(3)}$ и $\alpha \rightarrow \alpha + b$ для $\Upsilon_2^{(3)}$

$$\begin{aligned} (\alpha + b^{-1})_1^0 &= \alpha_1^0 + \frac{2}{3}b_1 + (b_1)^{-1} & (\alpha + b)_1^0 &= \alpha_1^0 + \frac{1}{3}b_1 \\ (\alpha + \hat{b}^{-1})_2^0 &= \hat{\alpha}_2^0 + \frac{2}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{3}\hat{b}_2 & (\alpha + \hat{b})_2^0 &= \hat{\alpha}_2^0 + \frac{1}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{2}{3}\hat{b}_2 \\ (\alpha + \hat{b}^{-1})_3^0 &= \hat{\alpha}_3^0 + \frac{1}{3}(\hat{b}_3)^{-1} & (\alpha + \hat{b})_3^0 &= \hat{\alpha}_3^0 + \frac{2}{3}(\hat{b}_3)^{-1} - \hat{b}_3 \end{aligned} \quad (\text{H.40})$$

Эти рассуждения приводят нас к формулам

$$\frac{\Upsilon_{b_1}((\alpha + b^{-1})_1^0)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}((\alpha + \hat{b}^{-1})_2^0 + \hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}((\alpha + \hat{b}^{-1})_3^0 + \hat{b}_3)} = \kappa_3(\alpha + b^{-1}, b)\Upsilon_0^{(3)}(\alpha + b^{-1}),$$

$$\frac{\Upsilon_{b_1}((\alpha + b)_1^0)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}((\alpha + \hat{b})_2^0 + \hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}((\alpha + \hat{b})_3^0 + \hat{b}_3)} = \kappa_3(\alpha + b, b)\Upsilon_0^{(3)}(\alpha + b).$$

Тогда мы используем формулы

$$\Upsilon_0^{(3)}(\alpha + b^{-1}) = \gamma\left(\frac{\alpha}{3b} + \frac{2}{3}\right) b^{\frac{2\alpha}{3b} + \frac{1}{3}} \Upsilon_1^{(3)}(\alpha), \quad (\text{H.41})$$

$$\Upsilon_0^{(3)}(\alpha + 2b^{-1}) = \gamma\left(\frac{\alpha}{3b} + \frac{1}{3}\right) \gamma\left(\frac{\alpha}{3b} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}b^{-2}\right) b^{\frac{4\alpha}{3b} + \frac{2}{3}b^{-2}} \Upsilon_2^{(3)}(\alpha), \quad (\text{H.42})$$

$$\Upsilon_0^{(3)}(\alpha + b) = \gamma\left(\frac{\alpha b}{3} + \frac{2}{3}\right) b^{-\frac{2\alpha b}{3} - \frac{1}{3}} \Upsilon_2^{(3)}(\alpha). \quad (\text{H.43})$$

Два других вспомогательных уравнения

$$\Upsilon_{b_1}((\alpha + b^{-1})_1^0) = \gamma\left(\frac{\alpha}{3b} + \frac{2}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{3}b}{\sqrt{1-2b^2}}\right)^{\frac{2\alpha}{3b} + \frac{1}{3}} \Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0 + \frac{2}{3}b_1), \quad (\text{H.44})$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{b_1}((\alpha + 2b^{-1})_1^0) &= \gamma\left(\frac{\alpha}{3b} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}b^{-2}\right) \gamma\left(\frac{\alpha}{3b} + \frac{4}{3}\right) \gamma\left(\frac{\alpha b + b^2}{1-2b^2}\right) \times \\ &\times (b_1)^{\frac{4\alpha_1^0}{b_1} - 2\alpha_1^0 b_1 + \frac{13}{3} + 2(b_1)^{-2} - \frac{2}{3}(b_1)^2} \Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0 + \frac{1}{3}b_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\hat{b}_2}((\alpha + \hat{2}b^{-1})_2^0 + \hat{b}_2) &= \gamma\left(\frac{\alpha b + b^2}{1-2b^2} + 1\right) (\hat{b}_2)^{\frac{2\alpha_2^0}{\hat{b}_2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\hat{b}_2)^{-2}} \times \\ &\times \Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{\alpha}_2^0 + \frac{1}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{2}{3}\hat{b}_2 + \hat{b}_2), \end{aligned}$$

$$\Upsilon_{\hat{b}_3}((\alpha + \hat{b})_3^0 + \hat{b}_3) = \gamma^{-1} \left(\frac{\alpha b}{3} + \frac{2}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{2-b^2}}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2\alpha b}{3} + \frac{1}{3}} \Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{\alpha}_3^0 + \frac{2}{3}(\hat{b}_3)^{-1} + \hat{b}_3).$$

После утомительных вычислений получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0 + \frac{2}{3}b_1)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{\alpha}_2^0 + \frac{2}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{3}\hat{b}_2 + \hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{\alpha}_3^0 + \frac{1}{3}(\hat{b}_3)^{-1} + \hat{b}_3)} = \left(\frac{\sqrt{1-2b^2}}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{2\alpha}{3b} + \frac{1}{3}} \times \\
& \times \kappa_3(\alpha + b^{-1}, b)\Upsilon_1^{(3)}(\alpha), \\
& \frac{\Upsilon_{b_1}(\alpha_1^0 + \frac{1}{3}b_1)}{\Upsilon_{\hat{b}_2}(\hat{\alpha}_2^0 + \frac{1}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{2}{3}\hat{b}_2 + \hat{b}_2)\Upsilon_{\hat{b}_3}(\hat{\alpha}_3^0 + \frac{2}{3}(\hat{b}_3)^{-1} + \hat{b}_3)} = \left(\frac{\sqrt{2-b^2}}{\sqrt{3b}} \right)^{\frac{2\alpha b}{3} + \frac{1}{3}} \times \\
& \times \kappa_3(\alpha + b, b)\Upsilon_2^{(3)}(\alpha). \tag{H.45}
\end{aligned}$$

I Вывод тождеств для трёхточечных функций.

I.1 Доказательство равенства трёхточечных функций для произвольного p

Используя (2.123), мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^L(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \prod_{\sigma=2}^p \mathbb{C}^{\text{GMM}}((\hat{\alpha}_1)_\sigma^0, (\hat{\alpha}_2)_\sigma^0, (\hat{\alpha}_3)_\sigma^0) &= \mathbb{C}_{(0,0),(0,0),(0,0)}^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \times \\
&\times \frac{\kappa_p(2\alpha_1)\kappa_p(2\alpha_2)\kappa_p(2\alpha_3)}{\kappa_p(\alpha_{1+2+3}-Q)\kappa_p(\alpha_{1+2-3})\kappa_p(\alpha_{2+3-1})\kappa_p(\alpha_{1+3-2})}. \tag{I.1}
\end{aligned}$$

Оказывается, что константа в правой части может быть поглощена в нормировку примарных полей в трёхточечной функции. Чтобы доказать это, достаточно показать, что константа, состоящая из κ_p в (I.1) факторизуется в три одинаковые функции, зависящие от α_1 , α_2 и α_3 по отдельности. Мы получаем формулу

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_p(2\alpha_1)\kappa_p(2\alpha_2)\kappa_p(2\alpha_3)}{\kappa_p(\alpha_{1+2+3}-Q)\kappa_p(\alpha_{1+2-3})\kappa_p(\alpha_{2+3-1})\kappa_p(\alpha_{1+3-2})} = \\
& = \frac{\Upsilon_b(b) \prod_{\sigma=1}^{p-1} \Upsilon\left(\frac{\sigma Q}{p}\right) \prod_{\sigma=2}^p \Upsilon_{\hat{b}(\sigma)}(\hat{b}(\sigma))}{\Upsilon_{b_1}(b_1)} \frac{b}{b_1} \times \\
& \times \left((b_1)^{\frac{p-1}{p}} (b_1)^2 \prod_{\sigma=2}^p (\hat{b}(\sigma))^{\frac{(\sigma-1)(p-\sigma+1)}{p}} (\hat{b}(\sigma))^{-2 - \frac{\sigma(p-\sigma)}{p}} (\hat{b}(\sigma))^2 \right)^{\frac{2}{p}Q(Q-\alpha_{1+2+3})}, \tag{I.2}
\end{aligned}$$

где степень $\frac{2}{p}Q(Q - \alpha)$ была выведена из выражения

$$\sum_{i=1}^3 \Delta_p(2\alpha_i) - \Delta_p(\alpha_{1+2+3} - Q) - \Delta_p(\alpha_{1+2-3}) - \Delta_p(\alpha_{2+3-1}) - \Delta_p(\alpha_{1+3-2}) = \frac{2}{p}Q(Q - \alpha_{1+2+3}), \quad (I.3)$$

где

$$\Delta_p(\alpha) = \frac{1}{p}\alpha(Q - \alpha). \quad (I.4)$$

Из формулы (I.2) мы видим, что коэффициент, состоящий из κ_p в (I.1) действительно может быть представлен в форме $f(\alpha_1)f(\alpha_2)f(\alpha_3)$ с

$$f(\alpha) = \left(\frac{\Upsilon_b(b) \prod_{\sigma=1}^{p-1} \Upsilon\left(\sigma \frac{Q}{p}\right) \prod_{\sigma=2}^p \Upsilon_{\hat{b}(\sigma)}(\hat{b}(\sigma)) b}{\Upsilon_{b_1}(b_1) b_1} \right)^{\frac{1}{3}} \times \left((b_1)^{\frac{p-1}{p}} (b_1)^2 \prod_{\sigma=2}^p (\hat{b}(\sigma))^{\frac{(\sigma-1)(p-\sigma+1)}{p}} (\hat{b}(\sigma))^{-2 - \frac{\sigma(p-\sigma)}{p}} (\hat{b}(\sigma))^2 \right)^{\frac{2}{p}Q(\frac{Q}{3}-\alpha)}. \quad (I.5)$$

I.2 Доказательство равенства трёхточечных функций в других секторах для $p = 3$

Умножая трёхточечные функции Лиувилля и трёхточечные функции обобщённых Минимальных Моделей, мы получаем следующие тождества

$$\mathbb{C}_{b_1}^L(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)} + \frac{1}{3}b_1, \alpha_3^{(1)} + \frac{1}{3}b_1) \mathbb{C}_{\hat{b}_2}^{\text{GMM}}(\hat{\alpha}_1^{(2)}, \hat{\alpha}_2^{(2)} + \frac{1}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{6}\hat{b}_2, \hat{\alpha}_3^0 + \frac{1}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{6}\hat{b}_2) \times \mathbb{C}_{\hat{b}_3}^{\text{GMM}}(\hat{\alpha}_1^{(3)}, \hat{\alpha}_2^{(3)} + \frac{1}{6}(\hat{b}_3)^{-1}\hat{\alpha}_3^{(3)} + \frac{1}{6}(\hat{b}_3)^{-1}) = \quad (I.6)$$

$$= \mathbb{C}_{(0,0),(1,1),(1,1)}^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \times \left(\frac{b}{b_1} \right)^{\frac{Q}{3b}} \frac{\kappa_3(2\alpha_1)\kappa_3(2\alpha_2 + b^{-1})\kappa_3(2\alpha_3 + b^{-1})}{\kappa_3(\alpha - b)\kappa_3(\alpha_{2+3-1} + b^{-1})\kappa_3(\alpha_{1+3-2})\kappa_3(\alpha_{1+2-3})},$$

$$\mathbb{C}_{b_1}^L(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)} + \frac{1}{3}b_1, \alpha_3^{(1)} + \frac{1}{6}b_1) \mathbb{C}_{\hat{b}_2}^{\text{GMM}}(\hat{\alpha}_1^{(2)}, \hat{\alpha}_2^{(2)} + \frac{1}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{6}\hat{b}_2, \hat{\alpha}_3^0 + \frac{1}{6}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{3}\hat{b}_2) \times \mathbb{C}_{\hat{b}_3}^{\text{GMM}}(\hat{\alpha}_1^{(3)}, \hat{\alpha}_2^{(3)} + \frac{1}{6}(\hat{b}_3)^{-1}\hat{\alpha}_3^{(3)} + \frac{1}{3}(\hat{b}_3)^{-1}) = \quad (I.7)$$

$$= \mathbb{C}_{(0,0),(1,1),(2,2)}^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \left(\frac{b}{b_1} \right)^{\frac{\alpha_{2+3-1}}{3b}} \left(\frac{\hat{b}_3}{b} \right)^{\frac{\alpha_{2+3-1}b}{3}} \times$$

$$\times \frac{\kappa_3(2\alpha_1)\kappa_3(2\alpha_2 + b^{-1})\kappa_3(2\alpha_3 + b)}{\kappa_3(\alpha - Q)\kappa_3(\alpha_{2+3-1})\kappa_3(\alpha_{1+3-2} + b)\kappa_3(\alpha_{1+2-3} + b^{-1})},$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{C}_{b_1}^L(\alpha_1^{(1)} + \frac{1}{3}b_1, \alpha_2^{(1)} + \frac{1}{3}b_1, \alpha_3^{(1)} + \frac{1}{3}b_1) \times \\
& \times \mathbb{C}_{\hat{b}_2}^{\text{GMM}}(\hat{\alpha}_1^{(2)} + \frac{1}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{6}\hat{b}_2, \hat{\alpha}_2^{(2)} + \frac{1}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{6}\hat{b}_2, \hat{\alpha}_3^0 + \frac{1}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{6}\hat{b}_2) \times \\
& \times \mathbb{C}_{\hat{b}_3}^{\text{GMM}}(\hat{\alpha}_1^{(3)}, \hat{\alpha}_2^{(3)} + \frac{1}{6}(\hat{b}_3)^{-1}\hat{\alpha}_3^{(3)} + \frac{1}{3}(\hat{b}_3)^{-1}) =
\end{aligned} \tag{I.8}$$

$$\begin{aligned}
& = \mathbb{C}_{(1,1),(1,1),(1,1)}^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \left(\frac{b}{b_1}\right)^{\frac{2\alpha}{3b}+1} \left(\frac{\hat{b}_3}{b}\right)^{-\frac{\alpha b}{3}-1} \times \\
& \times \frac{\kappa_3(2\alpha_1 + b^{-1})\kappa_3(2\alpha_2 + b^{-1})\kappa_3(2\alpha_3 + b^{-1})}{\kappa_3(\alpha - Q)\kappa_3(\alpha_{2+3-1} + b)\kappa_3(\alpha_{1+3-2} + b)\kappa_3(\alpha_{1+2-3} + b)}, \\
& \mathbb{C}_{b_1}^L(\alpha_1^{(1)} + \frac{1}{3}b_1, \alpha_2^{(1)} + \frac{1}{6}b_1, \alpha_3^{(1)} + \frac{1}{6}b_1) \times \\
& \times \mathbb{C}_{\hat{b}_2}^{\text{GMM}}(\hat{\alpha}_1^{(2)} + \frac{1}{3}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{6}\hat{b}_2, \hat{\alpha}_2^{(2)} + \frac{1}{6}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{3}\hat{b}_2, \hat{\alpha}_3^0 + \frac{1}{6}(\hat{b}_2)^{-1} - \frac{1}{3}\hat{b}_2) \times \\
& \times \mathbb{C}_{\hat{b}_3}^{\text{GMM}}(\hat{\alpha}_1^{(3)} + \frac{1}{6}(\hat{b}_3)^{-1}, \hat{\alpha}_2^{(3)} + \frac{1}{3}(\hat{b}_3)^{-1}\hat{\alpha}_3^{(3)} + \frac{1}{3}(\hat{b}_3)^{-1}) = \\
& = \mathbb{C}_{(1,1),(2,2),(2,2)}^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \left(\frac{b}{b_1}\right)^{\frac{Q-\alpha_{2+3-1}}{3b}} \left(\frac{\hat{b}_3}{b}\right)^{\frac{\alpha_{2+3-1}b}{3}} \times \\
& \times \frac{\kappa_3(2\alpha_1 + b^{-1})\kappa_3(2\alpha_2 + b)\kappa_3(2\alpha_3 + b)}{\kappa_3(\alpha - b)\kappa_3(\alpha_{2+3-1})\kappa_3(\alpha_{1+3-2} + b)\kappa_3(\alpha_{1+2-3} + b)}.
\end{aligned} \tag{I.9}$$

Ключевое свойство предыдущих тождеств состоит в том, что множители в правых частях могут быть расфакторизованы в произведения $f_{i,j_1}(\alpha_1)f_{i,j_2}(\alpha_2)f_{i,j_3}(\alpha_3)$ благодаря следующим уравнениям на конформные размерности

$$\begin{aligned}
& \Delta_3(2\alpha_1) + \Delta_3(2\alpha_2 + b^{-1}) + \Delta_3(2\alpha_3 + b^{-1}) - \\
& - (\Delta_3(\alpha_{1+2+3} - b) - \Delta_3(\alpha_{2+3-1} + b^{-1}) - \Delta_3(\alpha_{1+3-2}) - \Delta_3(\alpha_{1+2-3})) = \frac{2}{3}Q(b - \alpha_{1+2+3}), \\
& \Delta_3(2\alpha_1) + \Delta_3(2\alpha_2 + b^{-1}) + \Delta_3(2\alpha_3 + b) - \\
& - (\Delta_3(\alpha_{1+2+3} - Q) - \Delta_3(\alpha_{2+3-1}) - \Delta_3(\alpha_{1+3-2} + b) - \Delta_3(\alpha_{1+2-3} + b^{-1})) = \frac{2}{3}Q(Q - 2\alpha_2 - 2\alpha_3), \\
& \Delta_3(2\alpha_1 + b^{-1}) + \Delta_3(2\alpha_2 + b^{-1}) + \Delta_3(2\alpha_3 + b^{-1}) - \\
& - (\Delta_3(\alpha_{1+2+3} - Q) - \Delta_3(\alpha_{2+3-1} + b) - \Delta_3(\alpha_{1+3-2} + b) - \Delta_3(\alpha_{1+2-3} + b)) = \frac{2}{3}(Q^2 - 3b^{-1}\alpha_{1+2+3}), \\
& \Delta_3(2\alpha_1 + b^{-1}) + \Delta_3(2\alpha_2 + b) + \Delta_3(2\alpha_3 + b) - \\
& - (\Delta_3(\alpha_{1+2+3} - b) - \Delta_3(\alpha_{2+3-1}) - \Delta_3(\alpha_{1+3-2} + b) - \Delta_3(\alpha_{1+2-3} + b)) = \\
& = \frac{2}{3b}((b^2 - 2)\alpha_1 + b^2(Q - 3\alpha_2 - 3\alpha_3)),
\end{aligned}$$

Заметим, что правые части уравнений выше являются некоторыми линейными комбинациями α_1 , α_2 и α_3 . Этот факт доказывает, что множители с правой стороны (I.6), (I.7), (I.8) и (I.8) факторизуются в произведение вида $f_{i,j_1}(\alpha_1)f_{i,j_2}(\alpha_2)f_{i,j_3}(\alpha_3)$.

Публикации по теме диссертации

- [1] M. N. Alfimov and A. V. Litvinov, “On spectrum of ILW hierarchy in conformal field theory II: coset CFT’s,” JHEP **1502**, 150 (2015) [arXiv:1411.3313 [hep-th]].
- [2] M. N. Alfimov, A. A. Belavin and G. M. Tarnopolsky, “Coset conformal field theory and instanton counting on C^2/Z_p ,” JHEP **1308**, 134 (2013) [arXiv:1306.3938 [hep-th]].
- [3] M. N. Alfimov and G. M. Tarnopolsky, “Parafermionic Liouville field theory and instantons on ALE spaces,” JHEP **1202**, 036 (2012) [arXiv:1110.5628 [hep-th]].

Список литературы

- [1] N. Read and G. W. Moore, *Fractional quantum Hall effect and nonAbelian statistics*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **107** (1992) 157–166, [hep-th/9202001].
- [2] N. Read and E. Rezayi, *Beyond paired quantum Hall states: Parafermions and incompressible states in the first excited Landau level*, *Phys. Rev.* **B59** (1999) 8084, [cond-mat/9809384].
- [3] P. Goddard, A. Kent, and D. I. Olive, *Virasoro Algebras and Coset Space Models*, *Phys.Lett.* **B152** (1985) 88.
- [4] P. Goddard, A. Kent, and D. I. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and Supervirasoro algebras*, *Commun. Math. Phys.* **103** (1986) 105–119.
- [5] V. Belavin, O. Foda, and R. Santachiara, *AGT, N -Burge partitions and \mathcal{W}_N minimal models*, *JHEP* **10** (2015) 073, [arXiv:1507.0354].
- [6] R. Santachiara and A. Tanzini, *Moore-Read Fractional Quantum Hall wavefunctions and $SU(2)$ quiver gauge theories*, *Phys. Rev.* **D82** (2010) 126006, [arXiv:1002.5017].
- [7] B. Estienne, B. A. Bernevig, and R. Santachiara, *Electron-Quasihole Duality and Second Order Differential Equation for Read-Rezayi and Jacks Wavefunctions*, *Phys. Rev.* **B82** (2010) 205307, [arXiv:1005.3475].
- [8] L. F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, *Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories*, *Lett. Math. Phys.* **91** (2010) 167–197, [arXiv:0906.3219].

- [9] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, *On AGT conjecture*, *JHEP* **02** (2010) 014, [arXiv:0912.0504].
- [10] L. Hadasz, Z. Jaskolski, and P. Suchanek, *Proving the AGT relation for $N_f = 0, 1, 2$ antifundamentals*, *JHEP* **06** (2010) 046, [arXiv:1004.1841].
- [11] R. Poghossian, *Recursion relations in CFT and $N=2$ SYM theory*, *JHEP* **12** (2009) 038, [arXiv:0909.3412].
- [12] A. Mironov and A. Morozov, *The power of Nekrasov functions*, *Phys. Lett.* **B680** (2009) 188–194, [arXiv:0908.2190].
- [13] A. Mironov and A. Morozov, *Proving AGT relations in the large- c limit*, *Phys. Lett.* **B682** (2009) 118–124, [arXiv:0909.3531].
- [14] R. Dijkgraaf and C. Vafa, *Toda theories, matrix models, topological strings, and $N=2$ gauge systems*, arXiv:0909.2453.
- [15] M. C. Cheng, R. Dijkgraaf, and C. Vafa, *Non-perturbative topological strings and conformal blocks*, *JHEP* **1109** (2011) 022, [arXiv:1010.4573].
- [16] A. Mironov, A. Morozov, and S. Shakirov, *A direct proof of AGT conjecture at $\beta = 1$* , *JHEP* **1102** (2011) 067, [arXiv:1012.3137].
- [17] A. Mironov, A. Morozov, and S. Shakirov, *Towards a proof of AGT conjecture by methods of matrix models*, *Int. J. Mod. Phys.* **A27** (2012) 1230001, [arXiv:1011.5629].
- [18] A. Braverman, B. Feigin, M. Finkelberg, and L. Rybnikov, *A finite analog of the AGT relation I: finite W -algebras and quasimaps' spaces*, *Commun. Math. Phys.* (2011) [arXiv:1008.3655].
- [19] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi, and S. Yanagida, *Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture*, arXiv:1106.4088.

- [20] V. Belavin and B. Feigin, *Super Liouville conformal blocks from $N=2$ $SU(2)$ quiver gauge theories*, *JHEP* **1107** (2011) 079, [arXiv:1105.5800].
- [21] T. Nishioka and Y. Tachikawa, *Central charges of para-Liouville and Toda theories from M -5-branes*, *Phys.Rev.* **D84** (2011) 046009, [arXiv:1106.1172].
- [22] G. Bonelli, K. Maruyoshi, and A. Tanzini, *Instantons on ALE spaces and Super Liouville Conformal Field Theories*, *JHEP* **1108** (2011) 056, [arXiv:1106.2505].
- [23] A. Belavin, V. Belavin, and M. Bershtein, *Instantons and 2d Superconformal field theory*, *JHEP* **1109** (2011) 117, [arXiv:1106.4001].
- [24] G. Bonelli, K. Maruyoshi, and A. Tanzini, *Gauge Theories on ALE Space and Super Liouville Correlation Functions*, *Lett. Math. Phys.* **101** (2012) 103–124, [arXiv:1107.4609].
- [25] N. Wyllard, *Coset conformal blocks and $N=2$ gauge theories*, arXiv:1109.4264.
- [26] N. Wyllard, *A_{N-1} conformal Toda field theory correlation functions from conformal $N = 2$ $SU(N)$ quiver gauge theories*, *JHEP* **11** (2009) 002, [arXiv:0907.2189].
- [27] A. Mironov and A. Morozov, *On AGT relation in the case of $U(3)$* , *Nucl. Phys.* **B825** (2010) 1–37, [arXiv:0908.2569].
- [28] L. F. Alday and Y. Tachikawa, *Affine $SL(2)$ conformal blocks from 4d gauge theories*, *Lett. Math. Phys.* **94** (2010) 87–114, [arXiv:1005.4469].
- [29] M.-C. Tan, *M -Theoretic Derivations of 4d-2d Dualities: From a Geometric Langlands Duality for Surfaces, to the AGT Correspondence, to Integrable Systems*, *JHEP* **07** (2013) 171, [arXiv:1301.1977].

- [30] Y. Ito, *Ramond sector of super Liouville theory from instantons on an ALE space*, *Nucl. Phys.* **B861** (2012) 387–402, [arXiv:1110.2176].
- [31] A. Belavin and B. Mukhametzhanov, *$N=1$ superconformal blocks with Ramond fields from AGT correspondence*, *JHEP* **01** (2013) 178, [arXiv:1210.7454].
- [32] M. N. Alfimov and G. M. Tarnopolsky, *Parafermionic Liouville field theory and instantons on ALE spaces*, *JHEP* **02** (2012) 036, [arXiv:1110.5628].
- [33] V. Belavin and N. Wyllard, *$N=2$ superconformal blocks and instanton partition functions*, *JHEP* **06** (2012) 173, [arXiv:1205.3091].
- [34] N. Nekrasov and A. Okounkov, *Seiberg-Witten theory and random partitions*, hep-th/0306238.
- [35] R. Flume and R. Poghossian, *An algorithm for the microscopic evaluation of the coefficients of the Seiberg-Witten prepotential*, *Int. J. Mod. Phys.* **A18** (2003) 2541, [hep-th/0208176].
- [36] H. Nakajima, *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces*, *Ann. of Math.* **145** (1997) 379–388, [alg-geom/9507012].
- [37] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, *Duke Math. J.* **91** (1998) 515–560, [math/9912158].
- [38] M. Atiyah and R. Bott, *The Moment map and equivariant cohomology*, *Topology* **23** (1984) 1–28.
- [39] A. A. Belavin, M. A. Bershtein, B. L. Feigin, A. V. Litvinov, and G. M. Tarnopolsky, *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory*, arXiv:1111.2803.

- [40] V. A. Alba, V. A. Fateev, A. V. Litvinov, and G. M. Tarnopolsky, *On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture*, *Lett. Math. Phys.* **98** (2011) 33–64, [arXiv:1012.1312].
- [41] A. A. Belavin, M. A. Bershtein, and G. M. Tarnopolsky, *Bases in coset conformal field theory from AGT correspondence and Macdonald polynomials at the roots of unity*, *JHEP* **03** (2013) 019, [arXiv:1211.2788].
- [42] A. V. Litvinov, *On spectrum of ILW hierarchy in conformal field theory*, *JHEP* **11** (2013) 155, [arXiv:1307.8094].
- [43] C. Ahn, D. Bernard, and A. LeClair, *Fractional Supersymmetries in Perturbed Coset Cfts and Integrable Soliton Theory*, *Nucl. Phys.* **B346** (1990) 409–439.
- [44] A. B. Zamolodchikov, *Higher Order Integrals of Motion in Two-Dimensional Models of the Field Theory with a Broken Conformal Symmetry*, *JETP Lett.* **46** (1987) 160–164. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.46,129(1987)].
- [45] A. B. Zamolodchikov, *Infinite Additional Symmetries in Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory*, *Theor. Math. Phys.* **65** (1985) 1205–1213.
- [46] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, *Conformal quantum field theory models in two-dimensions having $Z(3)$ symmetry*, *Nucl. Phys.* **B280** (1987) 644–660.
- [47] V. A. Fateev and S. L. Lukyanov, *The models of two-dimensional conformal quantum field theory with $Z(n)$ symmetry*, *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988) 507.

- [48] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, *Representations of the algebra of parafermion currents of spin $4/3$ in two-dimensional conformal field theory. Minimal models and the tricritical Potts $Z(3)$ model*, *Theor. Math. Phys.* **71** (1987) 451–462.
- [49] A. LeClair, D. Nemeschansky, and N. P. Warner, *S matrices for perturbed $N=2$ superconformal field theory from quantum groups*, *Nucl. Phys.* **B390** (1993) 653–680, [[hep-th/9206041](#)].
- [50] D. Gepner, *New Conformal Field Theories Associated with Lie Algebras and their Partition Functions*, *Nucl. Phys.* **B290** (1987) 10.
- [51] B. A. Kupershmidt and P. Mathieu, *Quantum Korteweg-de Vries Like Equations and Perturbed Conformal Field Theories*, *Phys. Lett.* **B227** (1989) 245.
- [52] M. N. Alfimov, A. A. Belavin, and G. M. Tarnopolsky, *Coset conformal field theory and instanton counting on C^2/Z_p* , *JHEP* **08** (2013) 134, [[arXiv:1306.3938](#)].
- [53] A. A. Belavin, M. A. Bershtein, B. L. Feigin, A. V. Litvinov, and G. M. Tarnopolsky, *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory*, *Commun. Math. Phys.* **319** (2013) 269–301, [[arXiv:1111.2803](#)].
- [54] Z. N. C. Ha and F. D. M. Haldane, *Models with inverse-square exchange*, *Phys. Rev.* **B46** (1992) 9359–9368.
- [55] D. Uglov, *Yangian Gelfand-Zetlin bases, $gl(N)$ Jack polynomials and computation of dynamical correlation functions in the spin Calogero-Sutherland model*, *Commun. Math. Phys.* **193** (1998) 663–696, [[hep-th/9702020](#)]. [[Commun. Math. Phys.191,663\(1998\)](#)].

- [56] F. Fucito, J. F. Morales, and R. Poghossian, *Multi instanton calculus on ALE spaces*, *Nucl.Phys.* **B703** (2004) 518–536, [hep-th/0406243].
- [57] F. Fucito, J. F. Morales, and R. Poghossian, *Instanton on toric singularities and black hole countings*, *JHEP* **12** (2006) 073, [hep-th/0610154].
- [58] N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten Prepotential From Instanton Counting*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2004) 831–864, [hep-th/0206161].
- [59] G. W. Moore, N. Nekrasov, and S. Shatashvili, *Integrating over Higgs branches*, *Commun. Math. Phys.* **209** (2000) 97–121, [hep-th/9712241].
- [60] P. C. Argyres and S. H. Tye, *Tree scattering amplitudes of the spin $4/3$ fractional superstring. 1. The Untwisted sectors*, *Phys.Rev.* **D49** (1994) 5326–5348, [hep-th/9310131].
- [61] U. Bruzzo, R. Poghossian, and A. Tanzini, *Poincare polynomial of moduli spaces of framed sheaves on (stacky) Hirzebruch surfaces*, *Commun. Math. Phys.* **304** (2011) 395–409, [arXiv:0909.1458].
- [62] U. Bruzzo, F. Fucito, J. F. Morales, and A. Tanzini, *Multi-instanton calculus and equivariant cohomology*, *JHEP* **05** (2003) 054, [hep-th/0211108].
- [63] T. Sasaki, *$O(-2)$ blow-up formula via instanton calculus on $C^{**2}/Z(2)$ -hat and Weil conjecture*, hep-th/0603162.
- [64] M. Lashkevich, *Superconformal 2-D minimal models and an unusual coset construction*, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993) 851–860, [hep-th/9301093].
- [65] C. Crnkovic, R. Paunov, G. Sotkov, and M. Stanishkov, *Fusions of conformal models*, *Nucl.Phys.* **B336** (1990) 637.

- [66] M. A. Bershtein, V. A. Fateev, and A. V. Litvinov, *Parafermionic polynomials, Selberg integrals and three-point correlation function in parafermionic Liouville field theory*, *Nucl. Phys.* **B847** (2011) 413–459, [arXiv:1011.4090].
- [67] R. G. Pogosian, *Operator algebra in two-dimensional conformal quantum field theory containing spin 4/3 parafermionic conserved currents.*, *Int. J. Mod. Phys.* **A6** (1991) 2005–2023.
- [68] B. Estienne and R. Santachiara, *Relating Jack wavefunctions to $WA(k-1)$ theories*, *J. Phys.* **A42** (2009) 445209, [arXiv:0906.1969].
- [69] B. Estienne and B. A. Bernevig, *Spin-singlet quantum Hall states and Jack polynomials with a prescribed symmetry*, *Nuclear Physics B* **857** (Apr., 2012) 185–206, [arXiv:1107.2534].
- [70] S. Fujii and S. Minabe, *A Combinatorial Study on Quiver Varieties*, *ArXiv Mathematics e-prints* (2005) [math/0510].
- [71] E. Ardonne, *A conformal field theory description of fractional quantum Hall states*. PhD thesis, Amsterdam U., 2002.
- [72] L. Spodyneiko, “Implicit symmetries of the composite models of conformal field theory.” unpublished.
- [73] S. L. Lukyanov and V. Fateev, *EXACTLY SOLVABLE MODELS OF CONFORMAL QUANTUM THEORY ASSOCIATED WITH SIMPLE LIE ALGEBRA $D(N)$. (IN RUSSIAN)*, *Sov.J.Nucl.Phys.* **49** (1989) 925–932.
- [74] P. Baseilhac and V. Fateev, *Fermion boson duality in integrable quantum field theory*, *Mod.Phys.Lett.* **A13** (1998) 2807–2818, [hep-th/9905221].

- [75] Z. Kakushadze and S. Tye, *Kac and new determinants for fractional superconformal algebras*, *Phys.Rev.* **D49** (1994) 4122–4138, [hep-th/9310160].
- [76] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, *Nucl. Phys.* **B241** (1984) 333–380.
- [77] A. Belavin and D. Gepner, *Generalized Rogers Ramanujan Identities from AGT Correspondence*, *Lett. Math. Phys.* **103** (2013) 1399–1407, [arXiv:1212.6600].
- [78] H. Dorn and H. J. Otto, *Two and three point functions in Liouville theory*, *Nucl. Phys.* **B429** (1994) 375–388, [hep-th/9403141].
- [79] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory*, *Nucl. Phys.* **B477** (1996) 577–605, [hep-th/9506136].
- [80] Al. B. Zamolodchikov, *Three-point function in the minimal Liouville gravity*, *Theor. Math. Phys.* **142** (2005) 183–196, [hep-th/0505063].
- [81] G. Bonelli, K. Maruyoshi, A. Tanzini, and F. Yagi, *$N=2$ gauge theories on toric singularities, blow-up formulae and W -algebras*, *JHEP* **01** (2013) 014, [arXiv:1208.0790].
- [82] Y. Ito, K. Maruyoshi, and T. Okuda, *Scheme dependence of instanton counting in ALE spaces*, *JHEP* **05** (2013) 045, [arXiv:1303.5765].
- [83] D. Gaiotto, *Asymptotically free $\mathcal{N} = 2$ theories and irregular conformal blocks*, *J. Phys. Conf. Ser.* **462** (2013), no. 1 012014, [arXiv:0908.0307].
- [84] A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, *On non-conformal limit of the AGT relations*, *Phys. Lett.* **B682** (2009) 125–129, [arXiv:0909.2052].

- [85] N. A. Nekrasov and S. L. Shatashvili, *Supersymmetric vacua and Bethe ansatz*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **192-193** (2009) 91–112, [arXiv:0901.4744].
- [86] A. Okounkov and R. Pandharipande, *The quantum differential equation of the Hilbert scheme of points in the plane*, *Transform. Groups* **15** (2010) 965–982, [arXiv:0906.3587].
- [87] D. Maulik and A. Oblomkov, *Quantum cohomology of the Hilbert scheme of points on A_n -resolutions*, *Journal of the AMS* **22** (2009) 1055–1091, [arXiv:0802.2737].
- [88] G. Bonelli, A. Sciarappa, A. Tanzini, and P. Vasko, *Six-dimensional supersymmetric gauge theories, quantum cohomology of instanton moduli spaces and $gl(N)$ Quantum Intermediate Long Wave Hydrodynamics*, *JHEP* **07** (2014) 141, [arXiv:1403.6454].
- [89] S. Nawata, *Givental J -functions, Quantum integrable systems, AGT relation with surface operator*, arXiv:1408.4132.
- [90] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, and A. B. Zamolodchikov, *Higher level eigenvalues of Q operators and Schroedinger equation*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2004) 711–725, [hep-th/0307108].
- [91] I. Aniceto and A. Jevicki, *Notes on Collective Field Theory of Matrix and Spin Calogero Models*, *J. Phys.* **A39** (2006) 12765–12792, [hep-th/0607152].
- [92] D. Bernard, M. Gaudin, F. D. M. Haldane, and V. Pasquier, *Yang-Baxter equation in spin chains with long range interactions*, hep-th/9301084.
- [93] P. Mathieu, *Integrability of Perturbed Superconformal Minimal Models*, *Nucl. Phys.* **B336** (1990) 338.

- [94] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, and A. B. Zamolodchikov, *Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz*, *Commun. Math. Phys.* **177** (1996) 381–398, [[hep-th/9412229](#)].
- [95] P. P. Kulish and A. M. Zeitlin, *Superconformal field theory and SUSY $N=1$ KdV hierarchy. 1. Vertex operators and Yang-Baxter equation*, *Phys. Lett.* **B597** (2004) 229–236, [[hep-th/0407154](#)].
- [96] P. P. Kulish and A. M. Zeitlin, *Superconformal field theory and SUSY $N=1$ KdV hierarchy II: The Q -operator*, *Nucl. Phys.* **B709** (2005) 578–591, [[hep-th/0501019](#)].
- [97] S. Andrea, A. Restuccia, and A. Sotomayor, *Infinite sequence of new conserved quantities for $N=1$ SKdV and the supersymmetric cohomology*, [arXiv:0811.1246](#).
- [98] D. Maulik and A. Okounkov, *Quantum Groups and Quantum Cohomology*, [arXiv:1211.1287](#).
- [99] V. A. Fateev, *The sigma model (dual) representation for a two-parameter family of integrable quantum field theories*, *Nucl. Phys.* **B473** (1996) 509–538.
- [100] B. L. Feigin and A. M. Semikhatov, *The $sl(2) + sl(2)/sl(2)$ coset theory as a Hamiltonian reduction of $D(2|1 : \alpha)$* , *Nucl. Phys.* **B610** (2001) 489–530, [[hep-th/0102078](#)].
- [101] S. L. Lukyanov, *ODE/IM correspondence for the Fateev model*, *JHEP* **12** (2013) 012, [[arXiv:1303.2566](#)].
- [102] V. V. Bazhanov and S. L. Lukyanov, *Integrable structure of Quantum*

Field Theory: Classical flat connections versus quantum stationary states,
JHEP **09** (2014) 147, [arXiv:1310.4390].