

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Э. БАУМАНА

На правах рукописи

КИКТЕНКО ЕВГЕНИЙ ОЛЕГОВИЧ

**РОЛЬ ЭНТРОПИЙНОЙ АСИММЕТРИИ В ДВУСОСТАВНЫХ
КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЯХ**

Специальность 01.04.02 —

«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Коротаев Сергей Маратович

Москва – 2017

Содержание

Введение	5
1 Энтропийная асимметрия в классических и квантовых системах	14
1.1 Классический причинный анализ	14
1.2 Энтропийная асимметрия в двусоставных квантовых состояниях	18
2 Декогеренция двух- и трехкубитных состояний	25
2.1 Модели декогеренции	26
2.2 Декогеренция чистых двухкубитных состояний	28
2.2.1 Постановка задачи	28
2.2.2 Дефазирование	30
2.2.3 Деполяризация	33
2.2.4 Диссипация	35
2.2.5 Выводы	39
2.3 Декогеренция асимметричного двухкубитного состояния специального вида	40
2.3.1 Постановка задачи	40
2.3.2 Воздействие деполяризации и диссипации	42
2.3.3 Выводы	43
2.4 Декогеренция произвольных смешанных двухкубитных состояний	45
2.4.1 Постановка задачи	45
2.4.2 Дефазирование	46
2.4.3 Деполяризация	46
2.4.4 Диссипация	48
2.4.5 Выводы	50
2.5 Декогеренция асимметричного трехкубитного состояния специального вида	51
2.5.1 Постановка задачи	51
2.5.2 Энтропийная асимметрия при различных вариантах декогеренции	52
2.5.3 Связь энтропийной асимметрии и разрушения запутанности	56

2.5.4	Выводы	58
2.6	Деполаризация произвольных чистых трехкубитных состояний	59
2.6.1	Постановка задачи	59
2.6.2	Точность воспроизведения	60
2.6.3	Взаимная информация в трёхкубитных разбиениях	61
2.6.4	Взаимная информация в двухкубитных разбиениях	62
2.6.5	Выводы	64
3	Асимметричные состояния взаимодействующих физических систем	65
3.1	Взаимодействие частиц со спином $1/2$ в неоднородном магнитном поле согласно ХУ-модели Гейзенберга	65
3.1.1	Постановка задачи	65
3.1.2	Спектр Гамильтониана и оператор эволюции	68
3.1.3	Потоки информации в стационарных состояниях	70
3.1.4	Основное состояние	73
3.1.5	Термальное состояние	79
3.1.6	Выводы	86
3.2	Взаимодействие двухуровневого атома с модой электромагнитного поля согласно модели Джейнса-Каммингса	88
3.2.1	Постановка задачи	88
3.2.2	Порождаемая Гамильтонианом эволюция	91
3.2.3	Результаты вычислений	92
3.2.4	Выводы	98
4	Энтропийная асимметрия в томографическом описании квантовых систем	100
4.1	Томографическое описание дискретных квантовых систем	100
4.1.1	Понятие томограммы	100
4.1.2	Энтропийные характеристики	102
4.1.3	Выделенные измерительные базисы	103
4.2	Томографическая энтропийная асимметрия в двухкубитных состояниях	105
4.2.1	Постановка задачи	105
4.2.2	Результаты для X -состояний	106
4.2.3	Результаты для двухкубитных матриц плотности общего вида	111
4.2.4	Выводы	114

4.3	Исследование физической реализации X -состояния	115
4.3.1	Постановка задачи	115
4.3.2	Двухкубитное приближение термальной матрицы плотности	117
4.3.3	Исследование корреляций в термальном состоянии	120
4.3.4	Выводы	125
4.4	Дальнейшее развитие: двусоставные квантовые состояния в неделимых физиче- ских системах	127
4.4.1	Использование несоставных квантовых систем в квантовой информатике	127
4.4.2	Реализация кубитных операций на четырех- и пятиуровневых системах .	129
4.4.3	Реализация алгоритма Дойча в пятиуровневой квантовой системе	131
4.4.4	Выводы	133
	Заключение	134
	Литература	136
A	Генерация случайных матриц плотности	150
A.1	Генерация чистых двухкубитных состояний	150
A.2	Генерация смешанных двухкубитных состояний заданного ранга	150
A.3	Генерация чистых трехкубитных состояний	151
A.4	Генерация двухкубитных X -состояний	152
B	Квантовый в дискорд X-состояниях	153
B.1	Матрица плотности X -состояниях	153
B.2	Вычисление квантового дискорда в X -состояниях	154

Введение

Актуальность работы. Стремительный прогресс в развитии методов манипулирования индивидуальными квантовыми объектами¹ привел к активному развитию таких технологических направлений как квантовые вычисления [1, 2], квантовая криптография [3, 4], квантовое моделирование [5] и квантовая метрология [6]. В качестве потенциальной физической платформы для реализации данных технологий активно изучаются фотоны, электроны, NV центры, ядерные спины, квантовые точки, сверхпроводящие контуры, ультрахолодные атомы и др. Изучению общих законов, которым подчиняются квантовые объекты в рамках их использования для информационных технологий вне зависимости от конкретной природы, посвящена *физика квантовой информации* [7, 8] – наука, образовавшаяся на пересечении теории информации и квантовой механики.

Одной из важнейших задач квантовой теории информации является количественное описание *квантовых корреляций* между подсистемами составных квантовых систем, являющихся ресурсом для реализации различных задач квантово-информационных технологий, среди которых отдельно стоит отметить квантовую телепортацию [9], сверхплотное кодирование [10] и квантовую криптографию [11]. Ключевую роль в этих приложениях играет *квантовая запутанность*² – не имеющее классического аналога свойство составных квантовых систем, при котором их общую волновую функцию невозможно представить в факторизованном виде (для чистых состояний) или их матрицу плотности невозможно представить в виде суммы факторизованных матриц плотности (для смешанных состояний). Несмотря на простоту формального определения выявление наличия запутанности в общем случае смешанного двусоставного состояния сопряжено с серьёзными вычислительными трудностями. На практике широко используются достаточные условия наличия запутанности – «свидетели запутанности» – среди которых наиболее известен крите-

¹Стоит отметить Нобелевскую премию по физике, присужденную в 2012 году С. Арошу и Д. Вайнленду, «за создание прорывных технологий манипулирования квантовыми системами, которые сделали возможными измерение отдельных квантовых систем и управление ими».

²От англ. entanglement. В русскоязычной литературе часто также употребляются термины сцепленность и перепутанность.

рий положительности частичного транспонирования (PPT criterion) Переса-Городецких [12, 13] (являющегося также достаточными условием для систем размерности 2×2 и 2×3). Особый интерес также представляет явление запутанности в системах неразличимых частиц [14–17].

Для характеристики полной величины корреляций (включающей как квантовую, так и классическую составляющие) используется квантовая взаимная информация, определяющая пропускную способность квантовых каналов с использованием запутанности [8]. Данная величина представляет собой обобщение классической взаимной информации на область квантовых состояний, осуществляющаяся путем замены классических энтропий Шеннона на энтропии фон Неймана.

Рассмотренные выше меры квантовых корреляций являются *симметричными* в том смысле, что для них выполняется равенство $\mathcal{M}(A, B) = \mathcal{M}(B, A)$, где A и B – подсистемы двусоставной системы AB , и \mathcal{M} – мера квантовых корреляций. Однако в работе «Являются ли квантовые корреляции симметричными?» («Are quantum correlations symmetric?») [18] группа Городецких дает отрицательный ответ на этот вопрос, показывая, что в общем случае две стороны, обладающие частями двусоставного квантового состояния не могут произвести операции обмена состояниями подсистем (swap) при помощи одних лишь локальных операций и классической коммуникации.

Важной асимметричной мерой квантовых корреляций, не обязательно включающих в себя запутанность является *квантовый дискорд* независимо предложенный Х. Олливером и В. Зурекком [19], а также независимо Л. Гендерсоном и В. Ведралом [20]. Данная величина представляет собой разницу между величиной квантовой взаимной информации исходного двусоставного состояния и локально доступной информацией [21], получаемой об одной из подсистем при оптимальном измерении другой подсистемы, и, таким образом, зависит от такого, над какой из двух подсистем производится измерение. Существует также множество других мер квантовых корреляций, построенных по аналогии с оригинальным дискордом, таких как термальный, симметричный и геометрический дискорды, квантовый дефицит (quantum deficit), дисциллируемая общая случайность (distillable common randomness), возмущение, индуцируемое измерением, (measurement induced disturbance) и др. (подробный обзор представлен в работе К. Моды, В. Ведрала и др. [22]). Операционные интерпретации квантового дискорда получены в рамках протокола слияния состояний [23] и протокола расширенного слияния состояний [24]. С точки зрения этих интерпретаций получает свое объяснение также и асимметрия дискорда, связанная с различием в объеме требуемой квантовой коммуникации при выполнении протоколов (расширенного) слияния состояний в различных направлениях.

Поведение квантовой запутанности и квантового дискорда для естественных состояний магнитоактивных материалов и спиновых цепей с различной геометрией и типом связи подробно рассмотрено в работах И.С. Доронина, С.М. Алдошина, Э.Б. Фельдмана, М.А. Юрищева и А.И. Зенчука [25–29].

Вопрос об асимметрии квантового дискорда и влияния на него физических параметров системы рассмотрен Э.Б. Фельдманом и А.И. Зенчуком для состояния термального равновесия двух частиц со спином $1/2$ в неоднородном поле, взаимодействующих в рамках XU -модели Гейзенберга [30].

Несмотря на широкую распространенность в теоретических работах, практическое использование квантового дискорда затруднено тем, что требует оптимизации по всем возможным вариантам измерений. На текущий момент получены [31–35] конструктивные выражения для вычисления квантового дискорда лишь для подмножества двухкубитных состояний с матрицей плотности X -типа [36] (свое название данные состояния получили из-за формы расположения ненулевых элементов в исходной матрице плотности).

Настоящая работа посвящена развитию альтернативного подхода к количественному описанию информационной асимметрии квантовых состояний, основанного на квантовом обобщении аппарата классического причинного анализа [37]. В основе причинного анализа лежит идея использования классической теории информации Шеннона [38–40] для формализации асимметрии между причиной и следствием. Основным преимуществом такого подхода является то, что требование запаздывания следствия относительно причины вводится после их определения. Классический причинный анализ оказался крайне плодотворным для построения моделей сложных систем с обратными связями по экспериментальным данным, а также в оценке влияния помехообразующих факторов в реальных открытых системах [37, 41–52].

Проблема определения причинной связи в квантовых системах является гораздо более нетривиальной (см., например, [53–56]). С момента своего открытия квантовая запутанность привлекает к себе внимание именно необычностью корреляций с точки зрения принципа причинности [57]. В своей транзакционной интерпретации квантовой механики Дж. Крамер [58, 59] предлагает два принципа причинности: сильной (классической) причинности, которой соответствует распространение детерминированной информации, ограниченное световым конусом будущего; и слабой причинности, при которой на распространение информации о квантовых флуктуациях не накладывается подобных ограничений. Особое значение принцип слабой причинности при обретает в контексте интерпретации экспериментов по условной квантовой телепортации группы Р. Лаффлейма [60], отложенному обмену запутанностью группы А. Цайленгера [61], запутыванию

одновременно несуществующих фотонов группы X. Эйзенберга [62], проективным замкнутым времени-подобным траекториям группы С. Ллойда [63, 64].

Подход, лежащий в основе классического причинного анализ, представляется перспективным, например, с точки зрения описания сильной и слабой причинной связи, определенной в транзакционной интерпретации Дж. Крэмера [58, 59], основанной на классической теории прямого межчастичного взаимодействия Уилера-Фейнмана [65] (общая и последовательно квантовая версия этой теории разработана в работах Ю.С. Владимирова, А.Ю. Турыгина [66] и Ф. Хойла и Дж.В. Нарликара [67]). Несмотря на это в настоящей работе причинный анализ используется исключительно как формальный метод, дающий возможность количественного описания асимметрии двусоставных состояний: вместо направления и величины причинной связи мы будем говорить о величине и направлении «энтропийной асимметрии», оставляя вопрос формализации принципов слабой и сильной причинности для дальнейших исследований. Ключевым преимуществом развиваемого подхода по сравнению с мерами асимметрии, построенными, например, на квантовом дискорде, является то, что вычисление энтропийной асимметрии не требует решения оптимизационных задач.

Необходимым условием возникновения энтропийной асимметрии в двусоставном состоянии, является смешанность, которая возникает за счет взаимодействия системы с окружением. Данное взаимодействие, называемое декогеренцией, подробно исследованное отечественными [68, 69] и зарубежными [70] учеными, выступает ключевым препятствием на пути полноценной реализации квантовых информационных технологий. Для описания процессов декогеренции в квантовой информатике используются теория квантовых каналов, разработанная в работах А.С. Холево, Н.Дж. Серфа и других авторов, и математические свойства которых продолжают активно изучаются в настоящее время [8, 71–78]. Внимание к влиянию асимметрии квантового состояния на его свойства при прохождении через квантовые каналы было впервые заострено в работе [79] К. Зайковским и группой Городецких: было получено, что воздействие каналов декогеренции на различные подсистемы существенно асимметричного «квантово-классического» состояния приводит к различным степеням разрушения запутанности. Примечательно, что в случае деполаризующего канала, эти степени ведут себя контр-интуитивным образом, и данное явление получило название «аномального разрушения запутанности». Исследование подобных вопросов с точки зрения энтропийной асимметрии позволяет изучить данную ситуацию строгим и достаточно универсальным образом.

Важным аспектом, обуславливающим актуальность настоящей работы, также является то, что рассматриваемые меры энтропийной асимметрии могут быть переформулированы в рамках томографического подхода к описанию квантовых систем, подробно рассматриваемого в работах

В.И. и М.А. Манько, Р.В. Мендеса и других ученых [80–92]. Квантовая томография представляет собой мощный аппарат экспериментального изучения квантовых состояний и квантовых процессов. Изучение энтропийной асимметрии в томографическом подходе, основанном на использовании энтропии Шеннона для классических распределений вероятностей наблюдений над квантовыми системами, оказывается напрямую связанным с симметричным дискордом [93] и возмущением, индуцированным измерениям [94–97], являющимися важными характеристиками квантовых корреляций.

Цель диссертационной работы заключалась в исследовании роли энтропийной асимметрии двусоставных квантовых состояний в различных приложениях физики квантовой информации.

В рамках диссертационной работы были поставлены и решены следующие задачи.

1. Определение поведения энтропийной асимметрии в процессе прохождения одного из кубитов чистого двухкубитного состояния через дефазирующий, деполярирующий и демпфирующий квантовые каналы.
2. Выявление роли энтропийной асимметрии в эффекте аномального разрушения запутанности «квантово-классического» состояния.
3. Установление соответствия между исходной энтропийной асимметрией смешанных двухкубитных состояний различных рангов и степенью разрушения корреляций при прохождении одного из кубитов через деполярирующий и демпфирующий квантовые каналы.
4. Определение поведения энтропийной асимметрии и её связи с со степенью разрушения корреляций при прохождении одного из кубитов чистого трехкубитного W-состояния через дефазирующий, деполярирующий и демпфирующий квантовые каналы.
5. Получение связи между исходной энтропийной асимметрией двухкубитных разбиений чистых трехкубитных состояний и разрушением когерентных свойств исходного состояния при прохождении одного из кубитов через деполярирующий квантовый канал.
6. Установление направления энтропийной асимметрии состояния термального равновесия двух частиц со спином $1/2$, находящихся в неоднородном магнитном поле и взаимодействующих в рамках XY-модели Гейзенберга. Изучение соотношения между энтропийной асимметрией, асимметрией квантового дискорда и асимметрией локально передаваемой информации.
7. Определение энтропийной асимметрии установившегося состояния атома, изначально находившегося в основном или возбужденном состоянии, и моды поля, изначально нахо-

дившегося в термальном состоянии, взаимодействующих в согласно модели Джейнса-Каммингса.

8. Изучение соотношения между мерами энтропийной асимметрии, построенными на энтропиях фон Неймана и на томографических энтропиях Шеннона, а также их связи с симметричным дискордом и возмущением, индуцированным измерением, для двухкубитных X -состояний, и состояний общего вида.
9. Демонстрация полученных соотношений для томографической энтропийной асимметрии на примере термального состояния двух LC контуров, связанных индуктивной связью.

Научная новизна.

1. Впервые продемонстрирована роль энтропийной асимметрии в явлении аномального разрушения запутанности.
2. Впервые получены выводы о влиянии энтропийной асимметрии на устойчивости корреляций в двухкубитных и трехкубитных состояниях под воздействием различных однокубитных каналов.
3. Впервые получены выводы о соответствии энтропийной асимметрии, асимметрии квантового дискорда и асимметрии локально передаваемой информации для термального состояния двух частиц со спином $1/2$, находящихся в неоднородном магнитном поле и взаимодействующих в рамках XU -модели Гейзенберга.
4. Впервые получено выражение для симметричного дискорда в X -состояниях и проведена классификация двухкубитных квантовых X -состояний на основе поведения томографической энтропийной асимметрии.

Практическая значимость. Результаты, представленные в настоящей работе, могут быть использованы для построения эффективных методов защиты квантовых состояний от деструктивного влияния окружающей среды, используемых в системах квантовой коммуникации и квантовых вычислений. Полученные результаты исследования роль энтропийной асимметрии в рамках томографического подхода могут быть использованы для экспериментального изучения томографического дискорда, и его роли в прикладных задачах квантовой теории информации.

Основные положения выносимые на защиту.

1. Продемонстрировано, что знание направления энтропийной асимметрии смешанных двухкубитных и чистых трехкубитных состояний позволяет предсказывать наиболее уязвимые и наиболее устойчивые кубиты к деструктивному воздействию демпфирующего,

деполяризующего и дефазирующего однокубитных каналов на когерентные свойства данных состояний. Точность предсказания зависит от типа декогеренции и ранга матрицы плотности рассматриваемого состояния.

2. Доказано, что термальное состояние двух частиц со спином $1/2$, находящихся в неоднородном поперечном магнитном поле и взаимодействующих согласно XU -модели Гейзенберга, является энтропийно асимметричным. Показано, что направление энтропийной асимметрии от частицы в более слабом магнитном поле к частице в более сильном поле совпадает с направлением избыточного потока локально передаваемой информации и соответствует направлению асимметрии локально доступной информации: измерение над частицей в более слабом магнитном поле обеспечивает больший уровень локально доступной информации, чем измерение частицы в более сильном магнитном поле.
3. Продемонстрировано, что при взаимодействии моды поля, изначально находящейся в термальном состоянии, и двухуровневого атома, изначально находящегося основном или возбужденном состоянии, образуется энтропийно асимметричное запутанное состояние, энтропийная асимметрия которого направлена от поля к атому. Получены асимптотические значения запутанности и энтропийной асимметрии при стремлении температуры моды поля к бесконечности.
4. Установлено существование двух типов двухкубитных X -состояний, для которых оптимальное проективное измерение, определяющее величину симметричного дискорда, дает соответственно максимальный и нулевой уровень томографической энтропийной асимметрии. Получено практическое выражение для вычисления симметричного дискорда. Продемонстрировано, что тип X -состояния, реализующегося при термальном равновесии пары LC контуров, связанных индуктивной связью, может меняться в зависимости от физических условий.

Достоверность полученных результатов гарантируется критической оценкой путем сопоставления с ранее полученными теоретическими результатами другими авторами, а также с расчетами общепринятых мер квантовой запутанности, смешанности, информации и дискорда.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях: 7-th International Symposium Honoring French Mathematical Physicist Jean-Pierre Vigiер «Search for Fundamental Theory» (Лондон, Великобритания 12-14 июля 2010 г.), 9-th International Symposium on Unified Field Mechanics in honor of Jean-Pierre Vigiер (Балтимор, США, 16-19 ноября 2014 г.), 10-th International

Conference on Computing Anticipatory Systems (Льеж, Бельгия 8-13 августа, 2011 г.), Международных конференциях–конкурсах молодых физиков, проводимых Московским Физическим Обществом (Москва, 13 февраля 2012 г.; 10 декабря 2012 г.; 3 февраля 2014; 2 марта 2015 г.), 6-ой, 7-ой и 8-ой Всероссийских конференциях «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 26-28 января 2011 г.; 29-31 января 2013 г.; 27-29 января 2015 г.), International Scientific Conferences «Physical Interpretations of Relativity Theory» (Москва, 04–07 июля, 2011 г.; 01–04 июля, 2013, 29 июня - 2 июля, 2015 г.), 20-й Всероссийской конференции студентов-физиков и молодых учёных ВНКСФ-20 (Ижевск, 27 марта – 3 апреля 2014 г.), 23-rd International Laser Physics Workshop (София, Болгария, 14-18 июля 2014 г.), 9-м семинаре им. Д.Н. Клышко (Москва, 25-27 мая 2015 г.) 22-nd Central European Workshop on Quantum Optics (Варшава, Польша, 6-10 July 2015 г.), 3-rd International Conference on Quantum Technologies (Москва, 13–17 июля, 2015 г.).

Результаты также докладывались на следующих научных семинарах: «Геометрия и Физика» (Физический факультет МГУ, 6 декабря 2012 г.), «Квантовая вероятность, статистика, информация» (МИАН им. В.А. Стеклова, 29 сентября 2014 г.), «Квантовая физика и квантовая информация» (МФТИ (ГУ), 28 октября 2014 г., 6 декабря 2016 г.), «Квантовые компьютеры и квантовые вычисления» (ФТИАН, 27 ноября 2014 г.), семинаре отдела математической физики (МИАН им. В.А. Стеклова, 24 ноября 2016), семинаре лаборатории спиновой динамики и спинового компьютеринга (ИПХФ РАН, 21 декабря 2016).

Результаты работ, проведенных в рамках диссертации, удостоены наград Международного конференции-конкурса молодых физиков, проводимых Московским Физическим Обществом в 2012, 2014 и 2015 гг., а также приза за лучший стендовый доклад в рамках Central European Workshop on Quantum Optics (Варшава, Польша, 2015 г.). Настоящее исследование удостоено стипендии Президента Российской Федерации для молодых ученых и аспирантов, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики (2013–2015 гг.).

Публикации Материалы диссертации опубликованы в 41 работе, из них 13 статей в рецензируемых журналах из перечня ведущих периодических изданий ВАК [98–110], 22 публикации в трудах конференций [111–132] и 6 публикаций в иных изданиях [133–138].

Личный вклад автора. Все теоретические результаты были получены автором самостоятельно. Постановка большей части задач выполнена научным руководителем. Часть задач была поставлена В.И. Манько. Обсуждение результатов работы проводилось совместно с соавторами.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Общий объем диссертации 144 страницы, из них 119 страниц текста, включая 54 рисунка. Библиография включает 104 наименования на 9 страницах.

Благодарности. В первую очередь автору хотелось бы выразить глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н. С.М. Кортаеву, ставшему для него учителем и наставником в области физики.

Содержание значительной части данной диссертации, посвященной томографическому подходу, во многом обязано сотрудничеству с д.ф.-м.н. В.И. Манько, которому автор искренне благодарен за всестороннюю поддержку, внимательное отношение и полезные замечания.

Особую благодарность автор выражает своему коллеге, соавтору и верному другу А.К. Федорову за его ценные комментарии, содержательные дискуссии, неоценимую моральную поддержку, а главное за жизнерадостность, энтузиазм и увлеченность теоретической физикой, ставшую мотивирующим примером для автора.

Автор признателен всем участникам семинара «Квантовая вероятность, статистика, информация» (МИАН) и лично его руководителю д.ф.-м.н. А.С. Холево за ценные комментарии и всестороннюю поддержку. Автор благодарит всех участников семинара «Квантовые компьютеры и квантовые вычисления» (ФТИАН) и его руководителя д.ф.-м.н. Ю.И. Богданова за внимательное отношение и конструктивную критику первоначальной версии настоящей работы. Автор также крайне признателен всем участникам семинара «Квантовая физика и квантовая информация» (МФТИ ГУ) под руководством д.ф.-м.н. В.И. Манько.

Автору приятно поблагодарить иностранных коллег С. Чристенсена, Э. Зутхена за ценные обсуждения, а также проф. Ю. Ползика за приглашение посетить его лабораторию.

Автор благодарит сотрудников кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, в особенности заведующего кафедрой д.ф.-м.н. А.Н. Морозова и преподавателей к.ф.-м.н. О.С. Еркович, к.ф.-м.н. Р.Х. Хасаншина, к.ф.-м.н. В.Н. Корниенко, к.ф.-м.н. Б.Г. Скуйбина и к.ф.-м.н. В.П. Макарова, взрастивших в нем любовь к физике и математике.

Автор признателен И.Ю. Дзеве за крайне продуктивные обсуждения метода Монте-Карло, а также Н.А. Афонькиной за помощь в оформлении текста диссертации.

Наконец, автору хотелось бы выразить огромную благодарность своему школьному учителю физики В.Г. Сухненко, предопределившему выбор сферы его профессиональной деятельности.

Работа была выполнена при финансовой поддержке стипендии Президента Российской Федерации для молодых ученых и аспирантов, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики (СП-961.2013.5) и Федеральной программы Министерства науки и образования Российской Федерации (соглашение 14.579.21.0104).

Глава 1

Энтропийная асимметрия в классических и квантовых системах

В настоящей главе вводится понятие энтропийной асимметрии – дополнительной характеристики корреляций, проявления которой являются предметом исследования всей работы. Мы будем отталкиваться от разработанного вопроса об энтропийной асимметрии классических процессов, который рассматривается в существующем методе причинного анализа. Далее мы перейдем к квантовым состояниям, для которых роль энтропийной асимметрии значительно шире, а причинная связь, определенная в классике, соответствует лишь некоторым частным случаям такой асимметрии.

1.1 Классический причинный анализ

В данном параграфе рассматривается аппарат классического причинного анализа, формализующего понятия причины и следствия с помощью классической теории информации Шеннона [139–141]. Рассмотрим функциональную зависимость как простейший вариант формализации причинной связи. Пусть величина Y является следствием (с точки зрения физической интуиции) по отношению к величине X и имеет место соотношение

$$Y = f(X), \tag{1.1}$$

где f – некоторая функция.

В свою очередь, существование обратной функции f^{-1} , удовлетворяющей соотношению

$$X = f^{-1}(Y), \tag{1.2}$$

определяется видом прямой функции f . С физической точки зрения необратимым процессам обычно соответствует ситуация, когда функцию f^{-1} построить невозможно.

В основе классического причинного анализа [37] лежит идея формализации подобного рода асимметрии между прямой и обратной зависимостью с помощью классической теории информации Шеннона [38].

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^N$ и $\{y_i\}_{i=1}^M$ представляют собой возможные значения дискретных случайных величин X и Y , которые реализуются соответственно с вероятностями $p_X(x_i)$ и $p_Y(y_i)$. Безусловные энтропии Шеннона случайных величин X и Y , по определению, имеют вид

$$\begin{aligned} H_X &= - \sum_{i=1}^N p_X(x_i) \log p_X(x_i), \\ H_Y &= - \sum_{i=1}^M p_Y(y_i) \log p_Y(y_i), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где под \log здесь и далее мы будем понимать двоичный логарифм и в качестве единиц измерения энтропийных величин использовать биты.

Из условных распределений вероятностей $p_{X|Y}(x_i|y_j)$ и $p_{Y|X}(y_j|x_i)$, мы можем получить условные энтропии Шеннона:

$$\begin{aligned} H_{X|Y} &= - \sum_{j=1}^M p_Y(y_j) \sum_{i=1}^N p_{X|Y}(x_i|y_j) \log p_{X|Y}(x_i|y_j), \\ H_{Y|X} &= - \sum_{j=1}^N p_X(x_j) \sum_{i=1}^M p_{Y|X}(y_i|x_j) \log p_{Y|X}(y_i|x_j), \end{aligned} \quad (1.4)$$

которые также можно вычислить как

$$\begin{aligned} H_{X|Y} &= H_{XY} - H_Y, \\ H_{Y|X} &= H_{XY} - H_X, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где H_{XY} – энтропия совместного распределения вероятностей p_{XY} .

Важной величиной, определяющей корреляции между X и Y является взаимная информация

$$J = H_Y - H_{Y|X} = H_X - H_{X|Y} = H_X + H_Y - H_{XY}. \quad (1.6)$$

Отметим, что положительность взаимной информации является необходимым и достаточным условием наличия корреляций между двумя случайными величинами (в отличие, например, от коэффициента линейной корреляции).

Если величина Y связана с величиной X прямой функциональной зависимостью (1.1), в то время как обратной функциональной зависимости (1.2) не существует (другими словами, одному значению Y соответствует несколько значений X), то энтропия следствия Y всегда меньше

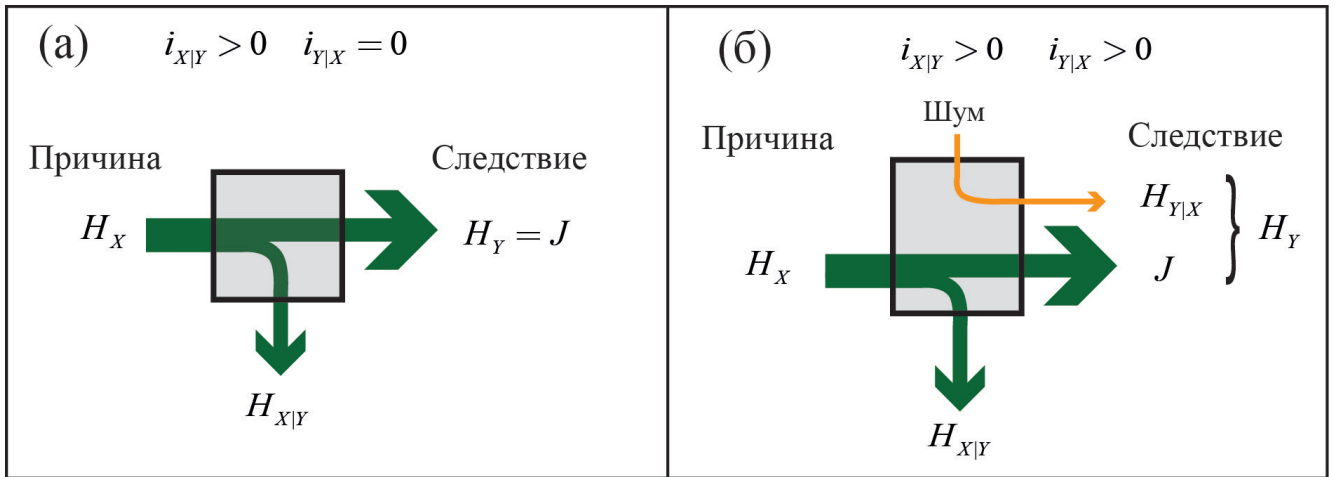


Рисунок 1.1: Энтропийные соотношения между причиной и следствием: (а) при отсутствии шума; (б) при наличии шума.

энтропии причины X (см. рис. 1.1а) и имеют место соотношения:

$$H_{Y|X} = 0, \quad H_{X|Y} = H_X - J > 0, \quad (1.7)$$

Таким образом, вычисление условных энтропий дает возможность формального разделения причины и следствия.

В реальных ситуациях, однако, экспериментальные данные всегда содержат шумовую составляющую (см. Рис. 1.1б), за счет чего условная энтропия $H_{Y|X}$ также становится положительной. Для определения направления причинности в этом случае удобно рассмотреть условные энтропии, нормированные на свои максимальные значения:

$$\begin{aligned} i_{Y|X} &= H_{Y|X}/H_Y, \\ i_{X|Y} &= H_{X|Y}/H_X, \end{aligned} \quad (1.8)$$

названные в причинном анализе *функциями независимости*.

Данные функции принимают значения на отрезке $[0, 1]$ и характеризуют степень неопределенности одной величины при условии знания другой: например, значение $i_{Y|X} = 0$ соответствует ситуации, когда Y является однозначной функцией от X , в то время, как значение $i_{Y|X} = 1$ соответствует случаю полной независимости Y от X . Важно заметить, что в общем случае $i_{X|Y}$ и $i_{Y|X}$ не обязаны быть равными друг другу.

Если уровень шума достаточно мал по сравнению с потерями информации от причины к следствию, тогда причинной связи от X к Y соответствует неравенство

$$i_{X|Y} > i_{Y|X}, \quad (1.9)$$

которое можно сформулировать следующим образом: *с информационной точки зрения причина определяет следствие сильнее, чем следствие определяет причину*.

В качестве меры силы причинной связи в классическом причинном анализе предлагается использовать величину

$$\gamma = \frac{i_{Y|X}}{i_{X|Y}}, \quad (1.10)$$

называемую *функцией причинности*. На её основе можно ввести формальное определение классической причинности.

Определение. Классическая переменная X является причиной по отношению к классической переменной Y , если $\gamma < 1$. И наоборот: если $\gamma > 1$, то переменная X является следствием по отношению к переменной Y .

Основываясь на данном формальном определении можно аксиоматически ввести требование запаздывания следствия по отношению к причине:

$$\gamma < 1 \Leftrightarrow \tau_{XY} > 0, \quad \gamma < 1 \Leftrightarrow \tau_{XY} < 0, \quad \gamma \rightarrow 1 \Leftrightarrow \tau_{XY} \rightarrow 0, \quad (1.11)$$

где τ_{XY} представляет собой промежуток времени между реализацией величин Y и X . В дальнейшем, мы будем называть соотношения (1.11) аксиомами классической причинности, т.к. они, во-первых, записаны для классических переменных, а во-вторых, представляют собой интуитивно очевидное требование запаздывания следствия по отношению к причине.

Заметим, что величину γ можно также записать в виде

$$\gamma = \frac{H_X}{H_Y} \frac{H_{Y|X}}{H_{X|Y}} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (1.12)$$

где $\alpha = H_Y/H_X$ и $\beta = H_{Y|X}/H_{X|Y}$ – отношения безусловных и условных энтропий. Примечательно, что требование $\alpha < 1$ является достаточным условием для наличия причинной связи от X к Y , однако в пределе $\alpha \rightarrow 1$ величина β (соответственно и γ) может быть как меньше, так и больше единицы.

В вышеприведенном описании мы сознательно ради наглядности, дали простейшую трактовку, где неоднозначность преобразования $X \rightarrow Y$ возникает только из-за шумов. В действительности это преобразование по природе может быть стохастическим, т.е. неоднозначным. В этом более общем случае корректность причинного анализа основана на теореме Шеннона о не возрастании энтропии сигнала в замкнутой системе [38]. В квантовой теории информации это соответствует демпфирующему каналу (появление шума является, в известной мере, классическим аналогом деполяризации).

Основным преимуществом формального причинного анализа является то, что требование запаздывания следствия относительно причины вводится после их определения. В обычном интуитивном подходе к причинности оперируют только требованием запаздывания. Поскольку запаздывание является только необходимым, но не достаточным условием причинной связи

в нетривиальных ситуациях интуитивный подход может вести к недоразумениям, а в анализе сложных систем с обратными связями – к ошибкам интерпретации.

В заключение описания классического причинного анализа, отметим, что в основе правомерности его применения лежит следующий ряд предположений о связи между исследуемыми величинами.

1. Причинная связь между парой физических величин сводится к наличию функциональной зависимости между ними.
2. Энтропия шума не превышает необратимой потери информации при превращении причины в следствие.

Тем не менее, аппарат классического причинного анализа нашел широкое применение в различных областях физики. Он был обобщен на причинную сеть в многосоставной системе [45], было проанализировано влияние на все параметры $(\alpha, \beta, \gamma, i_{X|Y}, i_{Y|X})$ различных видов помехообразующего воздействия со стороны неконтролируемого окружения, а также возможностей иных определений классической энтропии отличных от шенноновского и расслоенных пространств определения вероятностей [48]. Метод был тестирован на задачах классической электродинамики [37, 41–43] и на данных разнообразных классических экспериментов (например, [37, 41–48]). Классический причинный анализ был активно использован при обработке результатов экспериментов по обнаружению макроскопической нелокальности [49–51].

1.2 Энтропийная асимметрия в двусоставных квантовых состояниях

От классических процессов мы далее переходим к квантовым системам. Основными объектами изучения в настоящей работе будут являться квантовые состояния двусоставных систем. Как известно, математическим описанием квантового состояния является оператор плотности $\hat{\rho}$, принадлежащий множеству неотрицательных операторов с единичным следом $\mathcal{S}(\mathbb{H})$, определенных на Гильбертовом пространстве \mathbb{H} . Далее, мы почти всегда будем говорить о матрицах плотности ρ , подразумевая, что они являются записью соответствующего оператора плотности $\hat{\rho}$ в определенном (вычислительном) базисе.

Рассмотрим двусоставную систему AB , имеющую (в некоторый момент времени) матрицу плотности ρ_{AB} , удовлетворяющую следующим соотношениям:

$$\text{Tr} \rho_{AB} = 1, \quad \forall |\psi_{AB}\rangle : \langle \psi_{AB} | \rho_{AB} | \psi_{AB} \rangle \geq 0, \quad (1.13)$$

где Tr – обозначает оператор взятия следа, и $|\psi_{AB}\rangle$ – вектор состояния системы соответствующей размерности. Матрицы плотности отдельных подсистем могут быть легко получены из общей ρ_{AB} путем взятия частичного следа по пространству другой подсистемы

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}, \quad \rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}. \quad (1.14)$$

Обобщением безусловной шенноновской энтропии (1.3) в квантовой теории информации выступает энтропия фон Неймана, которая для произвольного оператора плотности ρ_{Ξ} записывается как

$$S_{\Xi} = S[\rho_{\Xi}] = -\text{Tr}[\rho_{\Xi} \log \rho_{\Xi}], \quad (1.15)$$

где под \log мы по-прежнему подразумеваем двоичный логарифм.

Вопрос об условной энтропии оказывается более нетривиальным, в связи с отсутствием экспериментальной возможности построения условных распределений вероятности для квантовых состояний (хотя теоретически построить условные матрицы плотности и непосредственно определить условную энтропию, вообще говоря, можно [142]). Используя формулу для условной энтропии на основе безусловной энтропий для совместного распределения вероятностей (1.5), мы можем ввести следующие определения

$$\begin{aligned} S_{A|B} &= S_{AB} - S_B, \\ S_{B|A} &= S_{AB} - S_A. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Важнейшим отличием между классической и квантовой теорией информации является то, что в квантовом случае величины (1.16) могут принимать отрицательные значения [142, 143], а именно, их диапазоны определяются неравенствами

$$|S_A - S_B| \leq S_{AB} \leq S_A + S_B.$$

Возможная интерпретация отрицательных значений может быть рассмотрена в рамках протокола слияния состояний («state-merging protocol») [144, 145].

Используя определение (1.16), мы получаем формулу для квантовой взаимной информации

$$I = S_A + S_B - S_{AB}, \quad (1.17)$$

представляющую собой прямой аналог классической взаимной информации (1.6). По аналогии с определениями (1.8) мы можем ввести квантовые функции независимости путем замены энтропий Шеннона на энтропии фон Неймана:

$$\begin{aligned} i_{A|B} &= S_{B|A}/S_B, \\ i_{A|B} &= S_{A|B}/S_A, \end{aligned} \quad (1.18)$$

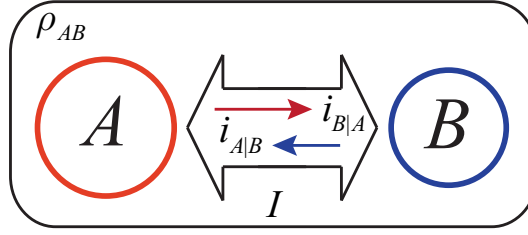


Рисунок 1.2: Функции независимости $i_{A|B}$ и $i_{B|A}$ (1.18) характеризуют несимметричный вклад подсистем A и B в общую величину корреляций внутри состояния ρ_{AB} , характеризуемую взаимной информацией I (1.17).

Данные величины могут приобретать значения на отрезке $[-1, 1]$ (напомним, что в классическом случае функции независимости принадлежали отрезку $[0, 1]$). Отрицательные значения функций независимости можно интерпретировать как наличие более глубоких по сравнению с классическими квантовых корреляций: отрицательное значение хотя бы одной из функций независимости является достаточным условием для наличия запутанности между подсистемами [146]. Предельному случаю чистого запутанного состояния соответствует $i_{A|B} = i_{B|A} = -1$.

Как и в случае с классическими процессами для квантовых состояний функции независимости не обязаны быть равными друг другу. Напомним, что для классических случайных величин X и Y неравенство $i_{X|Y} \neq i_{Y|X}$ в рамках классического причинного анализа интерпретировалось как наличие причинной связи между X и Y . В случае квантовых состояний в общем случае говорить о наличии причинной связи не корректно, т.к. корреляции между подсистемами A и B могли быть созданы в прошлом по отношению к моменту времени, в котором рассматривается матрица ρ_{AB} (а взаимодействие между A и B к рассматриваемому моменту может отсутствовать). Тем не менее, функции независимости могут играть важную роль общей характеристике и количественном описании корреляций в квантовых двусоставных состояниях, наряду со взаимной информацией, различными мерами запутанности. В отличие от последних, функции независимости характеризуют *асимметрию* роли подсистем в общей величине корреляций (см. Рис. 1.2).

Определение. Под наличием энтропийной асимметрии, направленной от подсистемы A к подсистеме B в двусоставном квантовом состоянии с матрицей плотности ρ_{AB} , мы будем понимать выполнение неравенства

$$i_{A|B} > i_{B|A}. \quad (1.19)$$

В случае выполнения обратного неравенства $i_{A|B} < i_{B|A}$, мы соответственно будем говорить о наличии в состоянии ρ_{AB} энтропийной асимметрии, направленной от B к A . Легко видеть, что определение направления энтропийной асимметрии в квантовых состояниях соответствует направлению причинной связи для классических процессов.

Вследствие разложения Шмидта для произвольных чистых состояний $\rho_{AB} = |\psi\rangle_{AB}\langle\psi|$ справедливо тождество $S_A = S_B$, что влечет за собой равенство функций независимости $i_{A|B} = i_{B|A}$. Таким образом, необходимым условием наличия энтропийной асимметрии в двусоставном квантовом состоянии является его смешанность (открытость системы в настоящем или прошлом).

В настоящей работе мы будем использовать две меры энтропийной асимметрии квантовых состояний. Первая из них основана на интерпретации открытого (смешанного) состояния ρ_{AB} как канала, по которому может распространяться информация, общий объем которой определяется выражением (1.17).

Рассматривая подсистемы A и B соответственно как вход и выход канала, мы можем получить минимальное время, необходимое для передачи объема информации, равной энтропии выхода B

$$\inf t_{A \rightarrow B} = \delta t \frac{S_B}{I}, \quad (1.20)$$

где в качестве δt в классическом случае должна стоять длительность единичного срабатывания канала, а в квантовом случае данную величину логично положить времени брахистохронной (наикратчайшей) эволюции между двумя ортогональными состояниями, которое согласно [147] выражается как

$$\delta t = \frac{\hbar\pi}{E_{\max} - E_{\min}}, \quad (1.21)$$

где E_{\max} и E_{\min} – максимальное и минимальное собственные значения гамильтониана системы.

Аналогичным образом, рассматривая A как выход и B как вход, мы можем записать

$$\inf t_{B \rightarrow A} = \delta t \frac{S_A}{I}. \quad (1.22)$$

Время приема информационного избытка определяется как

$$\Delta t = t_{B \rightarrow A} - t_{A \rightarrow B} \quad (1.23)$$

Положив характерное расстояние между подсистемами равным Δx мы можем получить скорость необратимого потока информации

$$c_2 = c_1 \frac{(1 - i_{A|B})(1 - i_{B|A})}{i_{A|B} - i_{B|A}}, \quad (1.24)$$

где величина $c_1 = \Delta x / \delta t$, обязанная быть не больше скорости света c , и соответствует скорости передачи детерминированного сигнала.

Также отметим, что подставляя определения функций независимости (1.18) через энтропии в (1.24), мы можем получить альтернативное определение

$$c_2 = c_1 \frac{I}{S_A - S_B}. \quad (1.25)$$

Выделим основные свойства полученной величины.

1. Знак c_2 определяется знаком разности $i_{A|B} - i_{B|A}$. Положительные значения $c_2 > 0$ соответствует выполнению неравенства (1.19), т.е. направлению энтропийной асимметрии от A к B согласно нашему формальному определению. С другой стороны это означает, что в нашей интерпретации за любой промежуток времени подсистема B получает больше информации подсистемы A , чем подсистема A от подсистемы B . Таким образом, направление энтропийной асимметрии совпадает с направлением распространения избыточного объёма информации
2. Вычисляя значение величины c_2 для матрицы плотности ρ_{BA} , которая получается путем перестановки подсистема A и B внутри ρ_{AB} , получаем следующее тождество $c_2[\rho_{AB}] = -c_2[\rho_{BA}]$. Таким образом отрицательные значения $c_2[\rho_{AB}]$ соответствуют обратному направлению энтропийной асимметрии от B к A .
3. Чистым и другим энтропийно симметричным состояниям соответствует равенство $i_{A|B} = i_{B|A}$ и $|c_2| \rightarrow \infty$. Таким образом, чем меньше $|c_2|$, тем сильнее асимметрия состояния. С другой стороны, из выражения (1.25) следует, что полной независимости A и B ($I = 0$) соответствует $c_2 = 0^1$.

В дальнейшем, мы будем рассматривать безразмерный аналог величины c_2 как меры энтропийной асимметрии квантовых состояний, не вдаваясь в подробности взаимодействия между подсистемами. Для этого положим $c_1 = 1$ и будем работать со следующим определением:

$$c_2 = \frac{(1 - i_{A|B})(1 - i_{B|A})}{i_{A|B} - i_{B|A}}. \quad (1.26)$$

Отметим следующее важное свойство величины (1.26). Пусть имеется упорядоченный набор квантовых систем X_1, X_2, \dots, X_n , которые могут быть произвольным образом связанными друг с другом и внешним окружением (см. Рис. 1.3). Обозначим через $I^{X_i X_j}$ и $c_2^{X_i X_j}$ – квантовую взаим-

¹Для избежания неопределенности вида $0/0$ в случае, когда взаимная информация строго равна 0, и энтропии изолированных друг от друга подсистем равны друг другу, строго говоря, мы должны были бы положить $c_2 = 0$ при $I = 0$. Однако для состояний, рассматриваемых в настоящей работе это требование не является необходимым.

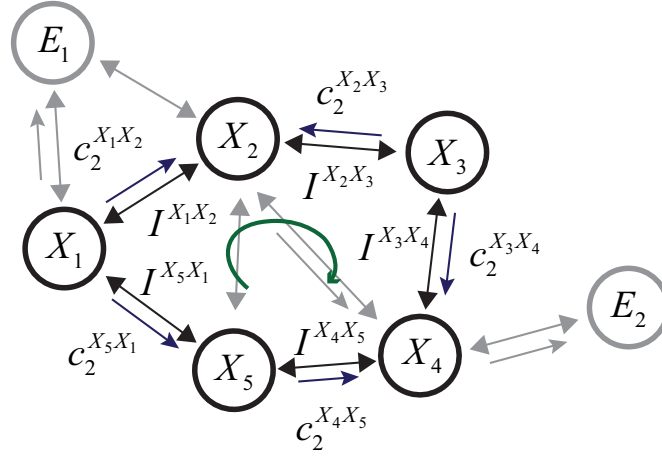


Рисунок 1.3: Иллюстрация циклического свойства (1.27) для величины c_2 . Двухнаправленными и однонаправленными стрелками обозначено наличие корреляций и энтропийной асимметрии между соответствующими подсистемами. Сумма отношений I/c_2 для всех пар подсистем на замкнутом контуре $X_1 X_2 \dots X_5$ равна 0.

ную информацию и энтропийную асимметрию пары систем X_i и X_j . Справедливо следующее соотношение:

$$\sum_{\odot} \frac{I}{c_2} = \frac{I^{X_1 X_2}}{c_2^{X_1 X_2}} + \frac{I^{X_2 X_3}}{c_2^{X_2 X_3}} + \dots + \frac{I^{X_{n-1} X_n}}{c_2^{X_{n-1} X_n}} + \frac{I^{X_1 X_n}}{c_2^{X_n X_1}} = 0. \quad (1.27)$$

Другими словами, сумма отношений вида I/c_2 всех пар подсистем на любом замкнутом контуре равна 0.

Свойство (1.27) легко получается, если переписать $c_2^{X_i X_j}$ в виде

$$c_2^{X_i X_j} = \frac{I^{X_i X_j}}{S_{X_i} - S_{X_j}}, \quad (1.28)$$

где S_{X_k} – энтропия фон Неймана состояния подсистемы X_k . Тогда все слагаемые суммы (1.27) преобразуются в разность соответствующих энтропий, каждая из которых будет входить в итоговую сумму дважды с разными знаками, в результате получается 0. Возвращаясь, к интерпретации энтропийной асимметрии как наличия причинной связи между подсистемами, данное свойство можно интерпретировать как невозможность существования замкнутых причинных цепей.

В качестве альтернативной и более простой меры энтропийной асимметрии квантовых состояний можно рассмотреть величину

$$d = i_{A|B} - i_{B|A}, \quad (1.29)$$

которая при подстановке определений функций независимости (1.18) может быть переписана в виде $d = I(S_A - S_B)/(S_A S_B)$.

Перечислим основные свойства данной величины.

1. Знак d определяет направление энтропийной асимметрии. Согласно неравенству (1.19) $d > 0$ соответствует направленности энтропийной асимметрии от A к B , $d < 0$ – в обратную сторону.
2. Тожество $d = 0$ выполняется в двух случаях: (i) когда отсутствует энтропийная асимметрия ($S_A = S_B$), (ii) когда корреляции между A и B отсутствуют ($I = 0$).
3. Чем больше модуль величины d , тем, очевидно, сильнее энтропийная асимметрия. Абсолютное значение d ограничено неравенством $|d| < 2$.

В заключение, обратим внимание на тот факт, что величинам c_2 и d соответствует различное влияние уровня взаимной информации на уровень энтропийной асимметрии при фиксированных значениях энтропий подсистем: обе величины (см. (1.25) и (1.29)) пропорциональны взаимной информации, однако их модули связаны с уровнем энтропийной асимметрии противоположным образом (асимметрия тем сильнее, чем меньше $|c_2|$ и больше d). Тем не менее, в предельном случае квантовой асимметрии с позиции величины d мы получаем соответствующий предел $|c_2| \rightarrow 0$. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пусть пара частиц XY находится в чистом запутанном состоянии

$$|\psi\rangle_{XY} = \sqrt{1 - \epsilon^2} |\psi_1\rangle_X \otimes |\phi_1\rangle_Y + \sqrt{\epsilon} |\psi_2\rangle_X \otimes |\phi_2\rangle_Y, \quad (1.30)$$

где $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ и $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ – пары ортогональных состояний в пространствах частиц X и Y . Вследствие чистоты, энтропии фон Неймана состояний частиц X и Y равны между собой (обозначим эту энтропию как S_0), а взаимная информация между X и Y имеет значение $I_{XY} = 2S_0$. Пусть также имеется независимая от X и Y частица Z в смешанном состоянии ρ_Z с конечной энтропией фон Неймана $S_Z = S_1$.

Введем подсистемы $A = XZ$, $B = Y$ и рассмотрим предел $\epsilon \rightarrow 0$. В этом случае, очевидно, имеем $S_0 \rightarrow 0$, при этом энтропия всей системы будет иметь значение $S_{AB} = S_1$. Предельные значения функций независимости примут вид

$$\begin{aligned} i_{A|B} &= \frac{S_{AB} - S_B}{S_A} = \frac{S_1 - S_0}{S_1 + S_0} \rightarrow 1, \\ i_{B|A} &= \frac{S_{AB} - S_A}{S_B} = \frac{S_1 - S_1 - S_0}{S_0} \rightarrow -1. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Таким образом, мы получаем максимальную квантовую энтропийную асимметрию с позиции обеих величин: $c_2 \rightarrow +0$, $|d| \rightarrow 2$. Как будет показано в параграфе 2.2.3 ситуации $|c_2| \rightarrow 0$, однако, может соответствовать $|d| \rightarrow 0$.

В дальнейшем мы будем пользоваться как величиной c_2 , так и величиной d (или обеими) в зависимости от стоящей задачи.

Глава 2

Декогеренция двух- и трехкубитных состояний

Как было показано в предыдущей главе, энтропийная асимметрия возможна лишь в смешанных двусоставных состояниях. Источником смешанности, в свою очередь, может являться взаимодействие исходно чистого квантового состояния с окружающей средой, т.е. процесс декогеренции. С точки зрения составных систем взаимодействие с окружением обычно сопровождается разрушением корреляций между подсистемами, что в свою очередь является ключевым препятствием на пути реализации квантово-информационных технологий.

В настоящей главе подробно рассматривается вопрос связи между разрушением корреляций и возможным появлением энтропийной асимметрии в различных двух- и трехкубитных состояниях. Двухкубитные состояния представляют собой простейший вариант двусоставных систем, в то время как чистое трехкубитное состояние представляет собой дополненное до чистого смешанное двухкубитное состояния ранга 2.

В качестве вычислительного базиса в пространстве чистых состояний каждого отдельного кубита будем рассматривать векторы $|0\rangle$ и $|1\rangle$. В целях упрощения записи для составных векторов будем использовать сокращение $|ij\rangle = |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$, $|ijk\rangle = |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \otimes |k\rangle_C$ (буквами A , B и C будем обозначать названия отдельных кубитов).

Введем также дополнительную пару ортогональных векторов, соответствующую дополнительному «знаковому» базису

$$|\pm\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle \pm |1\rangle), \quad (2.1)$$

связанному с вычислительным базисом преобразованием Адамара

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Также введем стандартные матрицы Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Все матрицы здесь и далее договоримся записывать в вычислительном базисе.

Кроме того, отметим, что говоря об устойчивости корреляций к декогеренции, мы будем иметь в виду именно «робастность», а не устойчивость в строгом математическом смысле.

2.1 Модели декогеренции

Далее мы будем рассматривать три типичных варианта взаимодействия кубита с окружающей средой: *дефазирование*, *деполяризацию* и *диссипацию*.

Процесс декогеренции сводится к прохождению кубита через квантовый канал Φ , действие которого в общем случае можно записать в представлении Крауса [8] как

$$\Phi[\rho] = \sum_j A_j \rho A_j^\dagger, \quad (2.4)$$

где ρ – матрица плотности кубита, $\{A_j\}$ – набор операторов, характеризующих действие канала и удовлетворяющих соотношению $\sum_j A_j^\dagger A_j = \mathbf{1}$ (здесь $\mathbf{1}$ – единичный оператор).

Степень декогеренции в каждом из вариантов будем характеризовать параметром $p \in [0, 1]$ таким образом, что $p = 0$ будет соответствовать отсутствию декогеренции, а $p = 1$ – полной декогеренции.

Под действием дефазирования будем понимать прохождения кубита через канал

$$\Phi^{\text{deph}}(p)[\rho] = p \{|0\rangle\langle 0| \rho |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \rho |1\rangle\langle 1|\} + (1 - p)\rho, \quad (2.5)$$

что эквивалентно следующей трансформации матричных элементов [148, 149]:

$$\begin{aligned} |0\rangle\langle 0| &\rightarrow |0\rangle\langle 0|, \\ |1\rangle\langle 1| &\rightarrow |1\rangle\langle 1|, \\ |0\rangle\langle 1| &\rightarrow (1 - p)|0\rangle\langle 1|, \\ |1\rangle\langle 0| &\rightarrow (1 - p)|1\rangle\langle 0|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, процесс дефазирования сводится к уничтожению недиагональных элементов исходной матрицы плотности кубита, записанной в вычислительном базисе.

Под деполяризацией будем понимать процесс

$$\Phi^{\text{depol}}(p)[\rho] = p\rho^{\text{mix}} + (1 - p)\rho, \quad (2.7)$$

где $\rho^{\text{mix}} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ – максимально смешанное однокубитное состояние. Действие данного канала эквивалентно следующей трансформации матричных элементов:

$$\begin{aligned} |0\rangle\langle 0| &\rightarrow (1 - p/2)|0\rangle\langle 0| + p/2|1\rangle\langle 1|, \\ |1\rangle\langle 1| &\rightarrow (1 - p/2)|1\rangle\langle 1| + p/2|0\rangle\langle 0|, \\ |0\rangle\langle 1| &\rightarrow (1 - p)|0\rangle\langle 1|, \\ |1\rangle\langle 0| &\rightarrow (1 - p)|1\rangle\langle 0|. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, деполяризация представляет собой перетекание исходного состояния в максимально смешанное ρ^{mix} .

Важно отметить, что у процесса деполяризации отсутствует какое-либо «предпочтение» в базисе или, говоря строгим математическим языком, данный канал является *ковариантным* [8]. Действительно, действие произвольного унитарного оператора U на входное состояние аналогично действию этого же оператора на выходное состояние:

$$\Phi^{\text{depol}}(p)[U\rho U^\dagger] = p\rho^{\text{mix}} + (1 - p)U\rho U^\dagger = pU\rho^{\text{mix}}U^\dagger + (1 - p)U\rho U^\dagger = U(\Phi^{\text{depol}}(p)[\rho])U^\dagger \quad (2.9)$$

(мы использовали факт инвариантности матрицы ρ^{mix} по отношению к унитарным преобразованиям, вследствие ее пропорциональности единичной матрице).

Дефазирование и деполяризация относятся к *унитальным* однокубитным каналам, т.е. не изменяющим максимально смешанное состояние:

$$\Phi^{\text{deph}}[\rho^{\text{mix}}] = \Phi^{\text{depol}}[\rho^{\text{mix}}] = \rho^{\text{mix}}. \quad (2.10)$$

Как известно, для данных каналов справедлива квантовая H -теорема [8, 150]: энтропия фон Неймана входного состояния не превышает энтропию выходного, т.е.

$$S[\Phi^{\text{deph}}[\rho]] \geq S[\rho], \quad S[\Phi^{\text{depol}}[\rho]] \geq S[\rho]. \quad (2.11)$$

Под диссипацией будем понимать прохождение кубита через демпфирующий канал

$$\Phi^{\text{diss}}(p)[\rho] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

сводящийся к трансформации

$$\begin{aligned} |0\rangle\langle 0| &\rightarrow |0\rangle\langle 0|, \\ |1\rangle\langle 1| &\rightarrow (1 - p)|1\rangle\langle 1| + p|0\rangle\langle 0|, \\ |0\rangle\langle 1| &\rightarrow \sqrt{1-p}|0\rangle\langle 1|, \\ |1\rangle\langle 0| &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 0|. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Данный процесс можно интерпретировать следующим образом: пусть $|1\rangle$ – возбужденное состояние некоторой двухуровневой системы, а $|0\rangle$ – основное. Тогда трансформация (2.13) соответствует взаимодействию с окружающей средой, сопровождающемуся оттоком энергии из системы (взаимодействию с термостатом, температура которого намного ниже разности энергий состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$).

2.2 Декогеренция чистых двухкубитных состояний

2.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим воздействие различных моделей декогеренции на чистые двухкубитные состояния. Согласно разложению Шмидта любое такое состояние можно представить в виде

$$|\Psi\rangle = \sqrt{1-\lambda}|uv\rangle + \sqrt{\lambda}|u^\perp v^\perp\rangle, \quad (2.14)$$

где $\lambda \in [0, 1]$, а наборы векторов $\{|u\rangle, |u^\perp\rangle\}$ и $\{|v\rangle, |v^\perp\rangle\}$ образуют ортонормированные базисы в пространствах кубитов.

Среди рассмотренных ранее моделей декогеренции в случае дефазирования и диссипации явно выделяется вычислительный базис $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. С другой стороны, матрица плотности кубита характеризуется базисом её собственных векторов. Для того, чтобы охватить все возможные варианты соответствия между этими базисами, выберем исходный вектор состояния системы в виде

$$\begin{aligned} |\Psi^{(\lambda, \theta)}\rangle &= (U(\theta) \otimes \mathbf{1}_2) \left(\sqrt{1-\lambda}|01\rangle + \sqrt{\lambda}|10\rangle \right) = \\ &= \sqrt{\lambda} \sin \frac{\theta}{2} |00\rangle + \sqrt{1-\lambda} \cos \frac{\theta}{2} |01\rangle - \sqrt{\lambda} \cos \frac{\theta}{2} |01\rangle + \sqrt{1-\lambda} \sin \frac{\theta}{2} |11\rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\mathbf{1}_2$ – единичная матрица 2×2 и

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим свойства матрицы плотности $\rho_{AB}^{(\lambda, \theta)} = |\Psi^{(\lambda, \theta)}\rangle\langle\Psi^{(\lambda, \theta)}|$. Его редуцированные матрицы принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_A^{(\lambda, \theta)} &= \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} & -\frac{1}{2}\lambda_1 \sin \theta \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 \sin \theta & \lambda_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \lambda + 1 \end{pmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\rho_B^{(\lambda, \theta)} = \rho_B^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

где принято обозначение $\lambda_1 = 2\lambda - 1$. Таким образом, параметр θ отвечает за базис собственных векторов редуцированного состояния кубита A . При $\theta = 0$ имеем исходный вычислительный базис $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, при $\theta = \pi/2$ – дополнительный к вычислительному базис $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ (заметим, что $U(\pi/2)$ совпадает с преобразованием Адамара (2.2), а $U(\pi)$ – оператору инверсии σ_x (2.3)).

Вследствие чистоты состояния и локальности оператора $U(\theta)$, имеем следующие энтропийные характеристики

$$S[\rho_{AB}^{(\lambda, \theta)}] = 0, \quad S[\rho_A^{(\lambda, \theta)}] = S[\rho_B^{(\lambda)}] = h_b(\lambda), \quad I[\rho_{AB}^{(\lambda, \theta)}] = 2h_b(\lambda), \quad (2.18)$$

где

$$h_b(\xi) = -\xi \log_2 \xi - (1 - \xi) \log_2(1 - \xi) \quad (2.19)$$

– бинарная энтропийная функция.

В качестве меры запутанности между кубитами произвольного состояния ρ_{AB} будем рассматривать согласованность [151], которую можно вычислить по формуле

$$C[\rho_{AB}] = \max(0, \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_4), \quad (2.20)$$

где упорядоченное множество $\{\tilde{\lambda}_i\}$ представляет собой убывающие по абсолютным значениям собственные числа матрицы

$$\tilde{\rho}_{AB} = \sqrt{\sqrt{\rho_{AB}}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho_{AB}^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)\sqrt{\rho_{AB}}} \quad (2.21)$$

(* обозначает комплексное сопряжение, σ_y – стандартная y -матрица Паули (2.3)).

Для исходного состояния (2.15) величина согласованности имеет вид

$$C[\rho_{AB}^{(\lambda, \theta)}] = 2\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}. \quad (2.22)$$

Как и следовало ожидать, её максимальный уровень соответствует значению $\lambda = 1/2$ при котором состояние (2.15) становится максимально запутанным. Кроме того, при $\lambda = 1/2$ и значениях $\theta = 0, \pi$ мы соответственно получаем

$$\begin{aligned} |\Psi^{(1/2, 0)}\rangle &= |\Psi_{\text{Bell}}^-\rangle = 2^{-1/2}(|01\rangle - |10\rangle), \\ |\Psi^{(1/2, \pi)}\rangle &= |\Phi_{\text{Bell}}^+\rangle = 2^{-1/2}(|00\rangle + |11\rangle) \end{aligned} \quad (2.23)$$

– два из четырех состояний Белла. Как известно, для двусоставного максимально запутанного состояния редуцированные матрицы плотности становятся пропорциональными единичной, поэтому в нашем случае в матрице кубита A исчезает зависимость от параметра θ :

$$\rho_A^{(1/2, \theta)} = \rho_B^{(1/2)} = \rho^{\text{mix}}, \quad (2.24)$$

таким образом, имеет смысл рассматривать зависимость влияния декогеренции кубита A от параметра θ только при $\lambda \neq 1/2$.

Итак, перейдем к изучению влияния прохождения кубита A через различные каналы декогеренции на возникновение энтропийной асимметрии внутри исходного симметричного чистого состояния (2.15) и соответствующее ему разрушение запутанности. Влияние дефазирования (2.5), деполяризации (2.7) и диссипации (2.12) рассматриваются соответственно в разделах 2.2.2, 2.2.3 и 2.2.4. Основные выводы представлены в разделе 2.2.5.

2.2.2 Дефазирование

В результате прохождения кубита A через дефазирющий канал исходное состояние (2.15) принимает вид

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^{(\lambda,\theta)\text{deph}A}(p) &= (\Phi^{\text{deph}}(p) \otimes \text{Id}_2)[\rho_{AB}^{(\lambda,\theta)}] = \\ &= \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta}{2} \lambda & -\frac{1}{2} \lambda_2 \sin \theta & -\frac{1}{2} (1-p) \lambda \sin \theta & -\lambda_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (1-p) \\ -\frac{1}{2} \lambda_2 \sin \theta & \cos^2 \frac{\theta}{2} (1-\lambda) & (1-p) \cos^2 \theta \lambda_2 & \frac{1}{2} (1-\lambda) (1-p) \sin \theta \\ -\frac{1}{2} (1-p) \lambda \sin \theta & (1-p) \cos^2 \frac{\theta}{2} \lambda_2 & \cos^2 \frac{\theta}{2} \lambda & \frac{1}{2} \sin \theta \lambda_2 \\ -\lambda_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (1-p) & \frac{1}{2} (1-\lambda) (1-p) \sin \theta & \frac{1}{2} \sin \theta \lambda_2 & \sin^2 \frac{\theta}{2} (1-\lambda) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $\text{Id}_2[\rho] = \rho$ – тождественный кубитный канал, и принято обозначение $\lambda_2 = \sqrt{\lambda(1-\lambda)}$. Редуцированное состояние прошедшего через канал кубита A принимает вид

$$\rho_A^{(\lambda,\theta)\text{deph}A}(p) = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} & -(1-p) \frac{1}{2} \lambda_1 \sin \theta \\ -(1-p) \frac{1}{2} \lambda_1 \sin \theta & \lambda_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \lambda + 1 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Согласованность, вычисленная для состояния (2.25), имеет линейную зависимость от степени декогеренции p

$$C[\rho_{AB}^{(\lambda,\theta)\text{deph}A}(p)] = 2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}(1-p) \quad (2.27)$$

и не имеет зависимости от параметра θ .

Остановимся подробно на значениях $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$, при которых собственные векторы кубита A совпадают с вычислительным и дополнительным ($\{|+\rangle, |-\rangle\}$) базисом соответственно. В первом случае, матрица кубита A не изменяется под действием декогеренции ($\rho_A^{(0)\text{deph}A} = \rho_A^{(0)}$) и состояние остается симметричным с точки зрения энтропий его подсистем

$$S[\rho_A^{(\lambda,0)\text{deph}A}] = S[\rho_B^{(\lambda)}] = h_b(\lambda), \quad (2.28)$$

в тоже время энтропия полной системы

$$S[\rho_{AB}^{(\lambda,0)\text{deph}A}(p)] = h_b \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 8p\lambda(1-\lambda)(1-p/2)} \right) \quad (2.29)$$

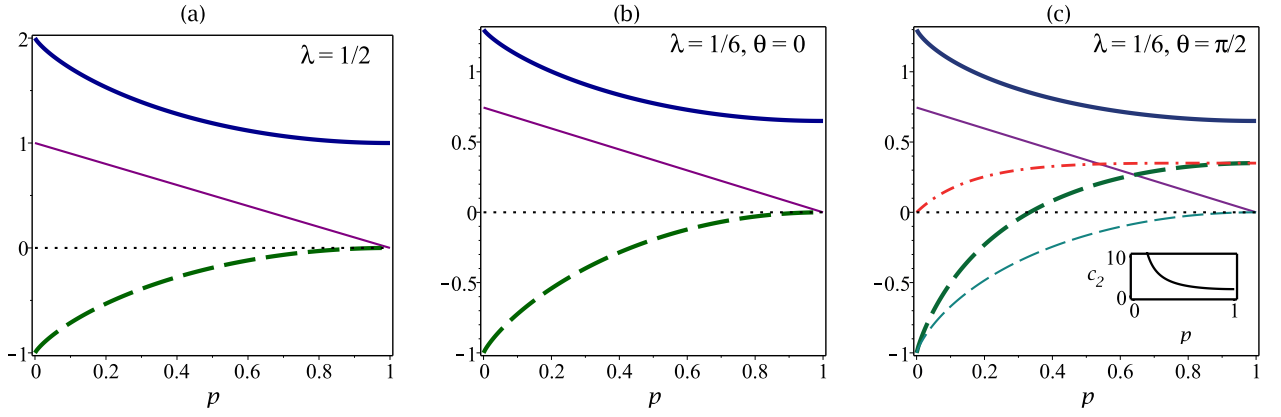


Рисунок 2.1: Характеристики состояния (2.25) как функции степени декогеренции p при различных значениях параметров λ и θ : $\lambda = 1/2$, θ – произвольное (a), $\lambda = 1/6$, $\theta = 0$ (b) и $\lambda = 1/6$, $\theta = \pi/2$ (c). Жирная сплошная линия – взаимная информация; тонкая сплошная линия – согласованность, жирная и тонкая пунктирные линии – функции независимости $i_{A|B}$ и $i_{B|A}$ соответственно; штрихпунктирная линия – энтропийная асимметрия d . На вложенном графике представлено поведение c_2 .

возрастает с ростом степени декогеренции p от исходного нулевого значения до $S[\rho_{AB}^{(0)\text{deph}A}(1)] = h_b(\lambda)$. Таким образом, полное дефазирование полностью уничтожает запутанность ($C[\rho_{AB}^{(\lambda,\theta)\text{deph}A}(1)] = 0$), оставляя максимально возможные при данном значении λ классические корреляции

$$I[\rho_{AB}^{(\lambda,0)\text{deph}A}(1)] = \frac{1}{2}I[\rho_{AB}^{(\lambda,\theta)}] = h_b(\lambda). \quad (2.30)$$

На Рис. 2.1a,b представлены различные характеристики корреляций для исходно максимально запутанного состояния $\rho_{AB}^{(1/2)\text{deph}A}(p)$ (напомним, что для него зависимость от θ исчезает) и состояния $\rho_{AB}^{(1/6,0)\text{deph}A}(p)$. Вследствие симметрии состояний (см. (2.28)) функции независимости $i_{A|B}[\rho_{AB}^{(\lambda,0)\text{deph}A}(p)]$ и $i_{B|A}[\rho_{AB}^{(\lambda,0)\text{deph}A}(p)]$ равны друг другу при всех значения параметра p , и в процессе декогеренции возрастают от минимально возможного квантового значения -1, соответствующего максимальным квантовым корреляциям, до минимального классического нулевого значения, соответствующего максимальным классическим корреляциям. Различие между случаями $\lambda = 1/2$ и $\lambda = 1/6$, как мы видим, сводится лишь к начальным и конечным значениям взаимной информации.

В случае $\theta = \pi/2$ энтропия дефазированного кубита

$$S[\rho_A^{(\lambda,\pi/2)\text{deph}A}(p)] = h_b\left(\lambda(1-p) + \frac{1}{2}p\right), \quad (2.31)$$

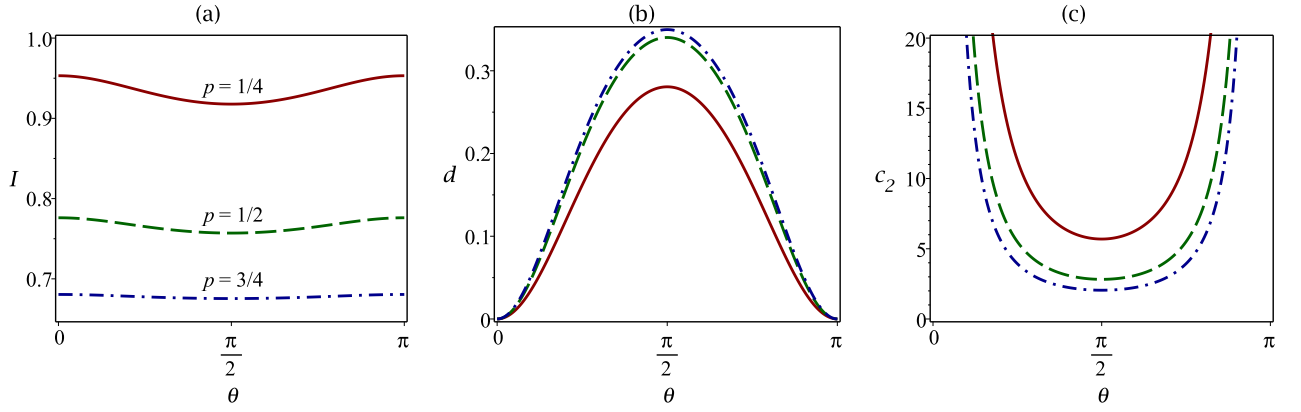


Рисунок 2.2: Поведение взаимной информации (a) и мер асимметрии d (b) и c_2 (c) для состояния $\rho_{AB}^{(1/6, \theta)\text{deph}A}(p)$ как функций параметра θ при фиксированных значениях $p = 1/4$ (сплошные линии), $p = 1/2$ (пунктирные линии) и $p = 3/4$ (штрих-пунктирные линии).

как и энтропия полной системы

$$S[\rho_{AB}^{(\lambda, \pi/2)\text{deph}A}(p)] = h_b(p/2) \quad (2.32)$$

будут возрастать до своего максимального значения, равного одному биту. Таким образом, при $p = 1$ величина взаимной информации останется прежней:

$$I[\rho_{AB}^{(\lambda, \pi/2)\text{deph}A}(1)] = I[\rho_{AB}^{(\lambda, 0)\text{deph}A}(1)] = h_b(\lambda), \quad (2.33)$$

однако теперь при $\lambda \neq 1/2$ процесс дефазирования будет сопровождаться возникновением энтропийной асимметрии. Вследствие возрастания энтропии кубита подвергнутого декогеренции (в согласии с квантовой H -теоремой (2.11)), энтропийная асимметрия направлена от кубита A к кубиту B . Отметим, что в случае исходно максимально запутанного состояния ($\lambda = 1/2$) зависимость энтропийных характеристик от θ исчезает и энтропийная асимметрия в состоянии не возникает.

На Рис. 2.1с представлено поведение различных мер корреляций между подсистемами, а также поведение обеих мер асимметрии (c_2 и d) для состояния $\rho_{AB}^{(1/6, \pi/2)\text{deph}A}(p)$. Полное дефазирование приводит к тому, что состояние кубита B становится аналогично однозначной функции состояния кубита A ($i_{B|A}[\rho_{AB}^{(1/6, \pi/2)\text{deph}A}(1)] = 0$), в то время как полная информация о состоянии B не дает полных сведений о состоянии A ($i_{A|B}[\rho_{AB}^{(1/6, \pi/2)\text{deph}A}(1)] \approx 0.35 > 0$). Также стоит отметить, что обе меры энтропийной асимметрии $c_2[\rho_{AB}^{(1/6, \pi/2)\text{deph}A}(p)]$ и $d[\rho_{AB}^{(1/6, \pi/2)\text{deph}A}(p)]$ демонстрируют усиление асимметрии с ростом степени декогеренции p : $|c_2|$ уменьшается, в то время как $|d|$ увеличивается.

Наибольший интерес представляет собой устойчивость состояния к декогеренции, характеризуемая поведением взаимной информации $I[\rho_{AB}^{(\lambda, \theta)\text{deph}A}(p)]$ как функции θ при фиксированных значениях λ и p . Результаты для $\lambda = 1/6$ и набора значений $p = 1/4, 1/2$ и $3/4$ представлены на Рис. 2.2а. На Рис. 2.2б, с показано соответствующее поведение энтропийной асимметрии. Мы видим, что степень деструктивности процесса дефазирования тем больше, чем значительнее различие между базисом дефазирования и базисом собственных векторов соответствующего кубита. Одновременно с этим, чем больше разница в базисах, тем большая энтропийная асимметрия индуцируется в состоянии (согласно обоим мерам). Таким образом, мы можем сделать заключение о деструктивности возникающей энтропийной асимметрии в смысле сохранения корреляций в квантовом состоянии.

2.2.3 Деполяризация

Как было показано в разделе 2.1 у деполяризующего канала отсутствует какое-либо «предпочтение» в базисе. Таким образом, действие унитарного оператора не влияет на энтропийные характеристики результирующего состояния, и нам достаточно рассмотреть начальный вектор

$$|\Psi^{(\lambda)}\rangle = |\Psi^{(\lambda, 0)}\rangle = \sqrt{1-\lambda}|01\rangle + \sqrt{\lambda}|10\rangle. \quad (2.34)$$

Деполяризация кубита A состояния (2.34) приводит к матрице плотности

$$\rho_{AB}^{(\lambda)\text{depol}A}(p) = \Phi^{\text{depol}}(p)[|\Psi^{(\lambda)}\rangle\langle\Psi^{(\lambda)}|] = \begin{pmatrix} p(1-\lambda)/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1-p/2) & (1-p)\sqrt{\lambda(1-\lambda)} & 0 \\ 0 & (1-p)\sqrt{\lambda(1-\lambda)} & (1-\lambda)(1-p/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p\lambda/2 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

с энтропией

$$S[\rho_{AB}^{(\lambda)\text{depol}A}(p)] = h_q\left(\frac{1}{2}p\lambda, \frac{1}{2}p(1-\lambda), \frac{1}{4}(2-p) + \frac{1}{4}\sqrt{(2-p)^2 - 4p\lambda(4-3p)(1-\lambda)}\right), \quad (2.36)$$

где

$$h_q(p_1, p_2, p_3) = -\sum_{j=1}^3 p_j \log_2 p_j - \left(1 - \sum_{k=1}^3 p_k\right) \log_2 \left(1 - \sum_{k=1}^3 p_k\right) \quad (2.37)$$

– энтропийная функция для четырехкомпонентного распределения вероятностей.

Матрица плотности кубита A принимает вид

$$\rho_A^{(\lambda)\text{depol}A} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda(1-p) - p/2 & 0 \\ 0 & \lambda(1-p) + p/2 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

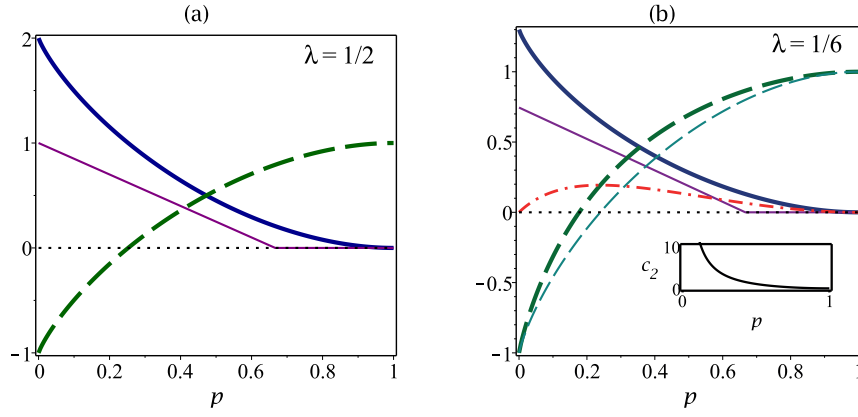


Рисунок 2.3: Различные меры корреляций между подсистемами состояния $\rho_{AB}^{\text{depol}A}(p)$ при $\lambda = 1/2$ (a) и $\lambda = 1/6$ (b) как функции степени декогеренции p : жирная сплошная линия – взаимная информация; тонкая сплошная линия – согласованность, жирная и тонкая пунктирные линии – функции независимости $i_{A|B}$ и $i_{B|A}$ соответственно; штрихпунктирная линия – асимметрия d . На вложенном графике показано поведение c_2 .

с соответствующей энтропией

$$S[\rho_A^{(\lambda)\text{depol}A}] = h_b(\lambda(1-p) + p/2). \quad (2.39)$$

Таким образом, деполяризация в соответствии с квантовой H -теоремой (2.11) увеличивает энтропию кубита, подверженного декогеренции, до максимального значения, что в случае чистых не максимально запутанных состояний ведет к возникновению энтропийной асимметрии, направленной от деполяризованного кубита к недеполяризованному.

Согласованность для состояния (2.35) принимает значение

$$C[\rho_{AB}^{(\lambda)\text{depol}A}(p)] = \max\left(0, 2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\left(1 - \frac{3}{2}p\right)\right), \quad (2.40)$$

и таким образом, полностью исчезает при $p = 2/3$.

На Рис. 2.3a,b представлено поведение различных характеристик состояний $\rho_{AB}^{(1/2)\text{depol}A}(p)$ и $\rho_{AB}^{(1/6)\text{depol}A}(p)$ соответственно. При $\lambda = 1/2$ состояние остается энтропийно симметричным при всех значениях p . Сравнение Рис. 2.3b с схожей ситуацией дефазирования, представленной на Рис. 2.1b, демонстрирует ряд ключевых отличий. Во-первых, деполяризация полностью разрушает как квантовые, так и классические корреляции: как было показано, согласованность разрушается при $p = 2/3$, в то время как взаимная информация полностью исчезает лишь при полной деполяризации $p = 1$. Во-вторых, изначально равные друг другу функции независимости $i_{A|B}[\rho_{AB}^{\text{depol}A}(0)] = i_{B|A}[\rho_{AB}^{\text{depol}A}(0)] = -1$ возрастают до максимальных значений $i_{A|B}[\rho_{AB}^{\text{depol}A}(1)] = i_{B|A}[\rho_{AB}^{\text{depol}A}(1)] = 1$, причем на всем промежутке $0 < p < 1$, соблюдается

неравенство $i_{A|B} > i_{B|A}$, определяющие наличие энтропийной асимметрии, направленной от A к B . Важно отметить, что на промежутке $1/4 < p < 2/3$ обе функции независимости положительны (корреляции с точки зрения энтропий неотличимы от классических) одновременно с присутствием запутанности $C > 0$. В-третьих, меры асимметрии d и c_2 ведут себя качественно отличающимся образом: d сначала возрастает и достигает экстремума при $p \approx 0.23$, а затем убывает к нулю при $p = 1$, в то время как c_2 монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Направленность энтропийной асимметрии от A к B легко может быть понята интуитивно. Действие деполяризующего канала соответствует взаимодействию с высокотемпературным термостатом (температура которого много больше разности собственных энергий состояний кубита). Таким образом, направление энтропийной асимметрии при деполяризации в общем случае совпадает с направлением распространения энтропии, поступающей от термостата¹.

2.2.4 Диссипация

Процесс диссипации, является демпфирующим неунитарным каналом, и вследствие этого ключевым образом отличается от двух рассмотренных ранее моделей декогеренции. Среди всех чистых состояний для данного канала явно выделяется состояние $|0\rangle$, принципиально отличное от ортогонального к нему состояния $|1\rangle$ (напомним, что одним из вариантов интерпретации воздействия данного канала является сопоставление с векторами $|0\rangle$ и $|1\rangle$ основного и возбужденного состояний некоторой двухуровневой системы). Как и в случае дефазирования рассмотрим декогеренцию чистого состояния $|\Psi^{(\lambda, \theta)}\rangle$ (2.15).

Матрица плотности результирующего состояния при диссипации кубита A принимает вид

$$\rho_{AB}^{(\lambda, \theta)\text{diss}A}(p) = (\Phi^{\text{diss}}(p) \otimes \text{Id}_2)[\rho_{AB}^{(\lambda, \theta)}] = \begin{pmatrix} \lambda(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \bar{p}) & -\frac{1}{2} \lambda_2 \sin \theta \bar{p} & -\frac{1}{2} \lambda \sin \theta \sqrt{\bar{p}} & -\lambda_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\bar{p}} \\ -\frac{1}{2} \lambda_2 \sin \theta \bar{p} & (1 - \lambda)(p(\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) - \cos^2 \frac{\theta}{2}) & \cos^2 \theta \lambda_2 \sqrt{\bar{p}} & \frac{1}{2}(1 - \lambda) \sin \theta \sqrt{\bar{p}} \\ -\frac{1}{2} \lambda \sin \theta \sqrt{\bar{p}} & \cos^2 \theta \lambda_2 \sqrt{\bar{p}} & \lambda \cos^2 \frac{\theta}{2} \bar{p} & \frac{1}{2} \lambda_2 \sin \theta \bar{p} \\ -\lambda_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\bar{p}} & \frac{1}{2}(1 - \lambda) \sin \theta \sqrt{\bar{p}} & \frac{1}{2} \lambda_2 \sin \theta \bar{p} & \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - \lambda) \bar{p} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

где принято обозначение $\bar{p} = 1 - p$. Редуцированное состояние диссипирующего кубита принимает вид

$$\rho_A^{(\lambda, \theta)\text{diss}A}(p) = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} + p(\lambda_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \lambda + 1) & -\frac{1}{2} \lambda_1 \sin \theta \sqrt{1 - p} \\ -\frac{1}{2} \lambda_1 \sin \theta \sqrt{1 - p} & (\lambda_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \lambda + 1)(1 - p) \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

¹Отметим, правда, что в нашей модели говорить именно о распространении энтропии от кубита A к кубиту B не совсем корректно, т.к. мы явно не определили взаимодействие между подсистемами.

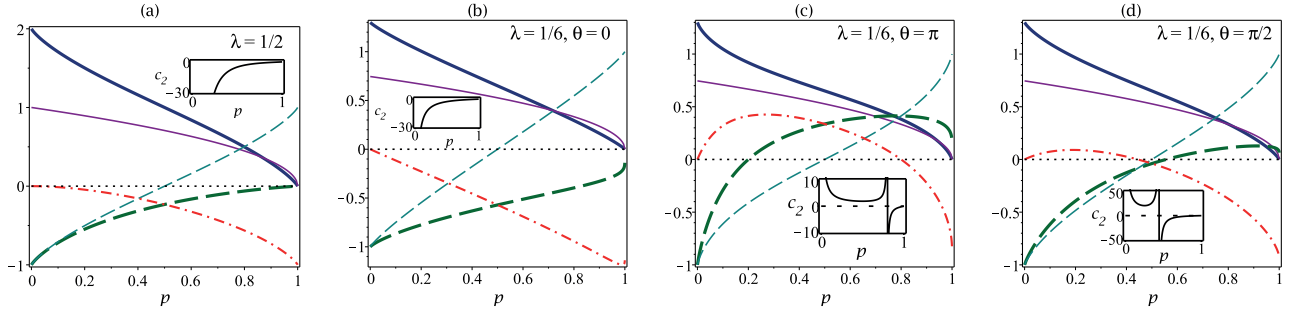


Рисунок 2.4: Различные меры корреляций между подсистемами состояния (2.41) как функции степени декогеренции p при значениях параметров: $\lambda = 1/2$, (θ – любое) (a); $\lambda = 1/6$, $\theta = 0$ (b); $\lambda = 1/6$, $\theta = \pi$ (c); $\lambda = 1/6$, $\theta = \pi/2$ (d). Жирная сплошная линия – взаимная информация; тонкая сплошная линия – согласованность, жирная и тонкая пунктирные линии – функции независимости $i_{A|B}$ и $i_{B|A}$ соответственно; штрихпунктирная линия – асимметрия d . На вложенных графиках показано поведение c_2

Величина согласованности для состояния (2.41) принимает значение

$$C[\rho_{AB}^{(\lambda,\theta)\text{diss}A}(p)] = 2\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-p)}, \quad (2.43)$$

и, как и в случае ранее рассмотренных моделей декогеренции, не зависит от параметра θ .

Рассмотрим три характерных значения параметра θ : $\theta = 0$, $\theta = \pi$ и $\theta = \pi/2$. Первый и второй варианты связаны инверсией $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, в то время как последний занимает промежуточное положение между ним (и соответствует дополнительному базису (2.1)).

В случае $\theta = 0$ энтропии полной системы и диссипирующего кубита имеют значения

$$S[\rho_{AB}^{(\lambda,0)\text{diss}A}(p)] = h_b(p\lambda), \quad S[\rho_A^{(\lambda,0)\text{diss}A}(p)] = h_b(\lambda(1-p)). \quad (2.44)$$

Напомним, что бинарная энтропийная функция $h_b(\xi)$ непрерывна принимает максимальное значение при $\xi = 1/2$ и нулевые значения при $\xi = 0, 1$. Таким образом, при $\lambda \leq 1/2$ обе энтропии монотонно убывают к нулевым значениям, а при $\lambda > 1/2$ энтропии сперва достигают максимальных значений, и лишь потом убывают к нулю.

На Рис. 2.4а, б представлены различные меры корреляций при $\lambda = 1/2$ и $\lambda = 1/6$. Как и следовало ожидать, монотонное убывание энтропии кубита A при неизменной энтропии кубита B , равной исходной энтропии кубита A , ведет к возникновению энтропийной асимметрии, направленной от B к A . Примечательно, что предельные значения функций независимости при полной диссипации равны соответственно

$$\lim_{p \rightarrow 1} i_{A|B}[\rho_{AB}^{(\lambda,0)\text{diss}A}(p)] = 0, \quad \lim_{p \rightarrow 1} i_{B|A}[\rho_{AB}^{(\lambda,0)\text{diss}A}(p)] = 1. \quad (2.45)$$

что дает предельное классически-возможное значение абсолютной величины $|d[\rho_{AB}^{(\lambda,0)\text{diss}A}(p)]| = 1$. Отметим, что в отличие от величины c_2 , величина d имеет экстремум при $p \approx 0.99$.

Теперь рассмотрим значение $\theta = \pi$, которое фактически сводится к замене $\lambda \rightarrow 1 - \lambda$ в формулах для энтропий ранее рассмотренного состояния:

$$S[\rho_{AB}^{(\lambda,\pi)\text{diss}A}(p)] = h_b(p(1 - \lambda)), \quad S[\rho_A^{(\lambda,\pi)\text{diss}A}(p)] = h_b((1 - \lambda)(1 - p)). \quad (2.46)$$

Данное изменение приводит к тому, что теперь при $\lambda < 1/2$, вследствие прохождения $S[\rho_A^{(\pi)\text{diss}A}(p)]$ через экстремум, будет происходить изменение направления индуцированной энтропийной асимметрии.

Конкретные результаты при $\lambda = 1/6$ показаны на Рис. 2.4с. При $p < 0.8$ энтропийная асимметрия направлена от кубита A , однако далее с ростом p происходит инверсия исходного направления энтропийной асимметрии. Отметим, что предельные значения функций независимости остаются прежними, и величина d стремится к предельному значению -1, соответствующему максимально возможной классической энтропийной асимметрии.

Наконец, в случае $\theta = \pi/2$ мы получаем следующие выражения для энтропий:

$$\begin{aligned} S[\rho_{AB}^{(\lambda,\pi/2)\text{diss}A}(p)] &= h_b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - p + p^2 - 4p\lambda + 4p\lambda^2}\right), \\ S[\rho_A^{(\lambda,\pi/2)\text{diss}A}(p)] &= h_b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + (1 - p)(4\lambda^2 - p - 4\lambda)}\right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Результаты для $\lambda = 1/6$ представлены на Рис. 2.4d. Видно, что качественно поведение характеристик напоминает ситуацию $\theta = \pi$, представленную на Рис. 2.4с: имеет место изменение направления энтропийной асимметрии в ходе декогеренции, однако оно происходит при меньшем значении степени декогеренции $p \approx 0.44$, и общее изменение энтропийной асимметрии носит более плавный характер как с точки зрения d , так и с точки зрения c_2 .

Рассмотрим вопрос о том, при каких значениях параметров θ и λ в процессе диссипации происходит изменение направления энтропийной асимметрии, а при каких – нет. Необходимым и достаточным условием обращения энтропийной асимметрии состояния $\rho_{AB}^{(\lambda,\theta)\text{diss}A}(p)$ является прохождение энтропии $S[\rho_A^{(\lambda,\theta)\text{diss}A}(p)]$ через экстремум в ходе декогеренции. В свою очередь, наличие этого экстремума связано с положительной производной по p энтропии диссипирующего кубита. Таким образом, критические значения параметров θ и λ , определяющие наличие или отсутствие изменения направления энтропийной асимметрии определяются уравнением

$$\left. \frac{d}{dp} S[\rho_A^{(\lambda,\theta)\text{diss}A}(p)] \right|_{p=0} = 0 \quad (2.48)$$

совместно с разграничительным условием $\lambda = 1/2$.

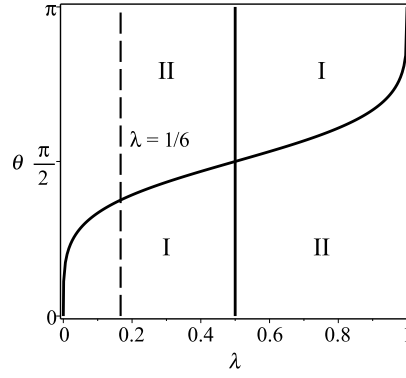


Рисунок 2.5: Решение уравнения (2.48), разделяющие область определения параметров λ и θ на две области: I – где в ходе диссипации энтропийная асимметрия сохраняет постоянное направление от кубита B к кубиту A ; II – где в ходе диссипации происходит изменение направление энтропийной асимметрии от направленной к кубиту B к направленной к кубиту A .

Численное решение уравнения (2.48) представлено на Рис. 2.5. Отметим, что при значениях параметров, принадлежащих непосредственно границе – изменение направления энтропийной асимметрии не происходит. Как и следовало ожидать, точки $\lambda = 1/6$, $\theta = \pi/2$, π , соответствующие рассмотренным на Рис. 2.4b-d состояниям попадают в область II, характеризующуюся наличием изменения направления энтропийной асимметрии в ходе декогеренции.

Наконец, рассмотрим вопрос о влиянии собственных векторов редуцированного состояния кубита A (задаваемых параметром θ) на устойчивость корреляций к диссипации. Как мы видели, разрушение согласованности (2.43) не зависит от θ и определяется исключительно степенью декогеренции p . Вопрос об устойчивости взаимной информации к диссипации является более нетривиальным.

Для того, чтобы изучить зависимость взаимной информации $I[\rho_{AB}^{(\lambda,\theta)\text{diss}A}(p)]$ от θ при фиксированных λ и p введем вспомогательную величину

$$I_{\text{rel}}^{(\lambda,\theta)}(p) = I[\rho_{AB}^{(\lambda,\theta)\text{diss}A}(p)] - I[\rho_{AB}^{(\lambda,\pi/2)\text{diss}A}(p)], \quad (2.49)$$

представляющую собой разницу между взаимной информации при данных значениях λ , θ , p и взаимной информации при тех же λ и p , но фиксированном $\theta = \pi/2$. На Рис. 2.6 представлено поведение данной величины для трех значений степени декогеренции: $p = 1/4$, $p = 1/2$, $p = 3/4$ (необходимость искусственного введения (2.49) обусловлена тем, что если бы мы просто рассмотрели графики $I[\rho_{AB}^{(\lambda,\theta)\text{diss}A}(p)]$ при фиксированных p как функции λ и θ , то зависимость от θ была бы практически не различима на фоне доминирующей зависимости от λ).

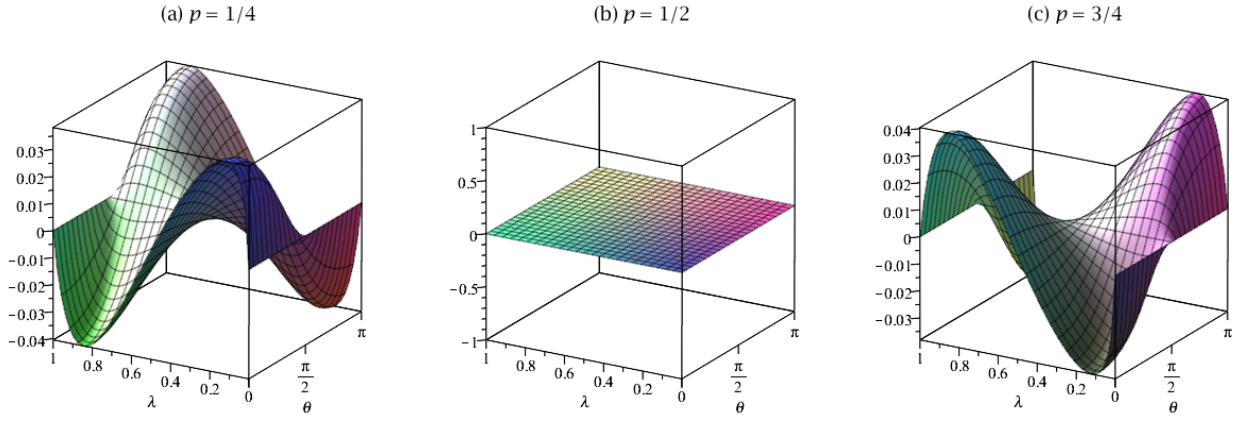


Рисунок 2.6: Влияние собственного базиса матрицы плотности диссипирующего кубита состояния (2.41), характеризуемое величиной $I_{\text{rel}}^{(\lambda, \theta)}(p)$ (2.49), как функция параметров λ и θ для значений степени декогеренции $p = 1/4$ (a), $p = 1/2$ (b) и $p = 3/4$ (c).

Анализируя поведение $I_{\text{rel}}^{(\lambda, \theta)}(p)$ в сечениях $\lambda = \text{const}$ мы приходим к заключению, что для $p < 1/2$ наиболее устойчивыми оказываются состояния $\rho_{AB}^{(\lambda, 0)\text{diss}A}$ при $\lambda < 1/2$ и $\rho_{AB}^{(\lambda, \pi)\text{diss}A}$ при $\lambda > 1/2$, которым, как мы увидели соответствует отсутствие обращения энтропийной асимметрии. При $p = 1/2$ зависимость от θ исчезает, и для $p > 1/2$ наиболее устойчивым оказываются состояния с потенциальным обращением энтропийной асимметрии: $\rho_{AB}^{(\lambda, \pi)\text{diss}A}$ при $\lambda < 1/2$ и $\rho_{AB}^{(\lambda, 0)\text{diss}A}$ при $\lambda > 1/2$.

2.2.5 Выводы

Мы рассмотрели процессы возникновения энтропийной асимметрии и разрушения корреляций в чистом двухкубитном состоянии общего вида (2.15), при воздействии трех различных вариантов декогеренции: дефазирования (2.5), деполяризации (2.7) и диссипации (2.12). Сформулируем основные выводы.

1. Процесс дефазирования приводит к возникновению энтропийной асимметрии в чистом не максимально запутанном двухкубитном состоянии, направленной от дефазированного кубита, в случае если базис дефазирования отличается от базиса собственных векторов декогерирующего кубита. Возникающая асимметрия тем больше, чем больше различие между эти базисами. Одновременно с этим, чем больше возникающая асимметрия (согласно обеим мерам), тем ниже уровень взаимной информации при фиксированном значении степени декогеренции.

2. Процесс деполяризации приводит к возникновению энтропийной асимметрии в чистом не максимально запутанном двухкубитном состоянии, направленной от деполяризованного кубита. Меры силы энтропийной асимметрии при этом ведут себя различным образом: величина $|d|$ в процессе деполяризации проходит через экстремум, в то время как $|c_2|$ монотонно убывает от ∞ до 0. Деструктивность воздействия процесса деполяризации не зависит от собственного базиса матрицы кубита, подверженного декогеренции.
3. Процесс диссипации кубита в чистом двухкубитном состоянии приводит к тому, что на завершающей стадии декогеренции $p \rightarrow 1$ энтропийная асимметрия становится направленной к диссипирующему кубиту. В зависимости от начального состояния диссипирующего кубита, вышеописанная асимметрия может возникать либо сразу, либо ей может предшествовать возникновение энтропийной асимметрии, направленной в противоположную сторону. Устойчивость взаимной информации к диссипации зависит от значения степени декогеренции p . При $p < 1/2$ наиболее устойчивым оказывается состояние в котором базис собственных векторов диссипирующего кубита совпадает с «базисом диссипации» $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ и обращение энтропийной асимметрии не происходит. При $p > 1/2$ наиболее устойчивым оказывается состояние, в котором базисом собственных векторов диссипирующего кубита также является $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, но происходит обращение энтропийной асимметрии в ходе декогеренции.
4. Во всех трех рассмотренных моделях декогеренции поведение согласованности не зависит от собственного базиса декогерирующего кубита.

Основные результаты проведенного исследования представлены в публикациях [109, 110, 113, 131, 132] и представляют интерес с точки зрения возможности защиты квантовых состояний от деструктивного влияния окружающей среды.

2.3 Декогеренция асимметричного двухкубитного состояния специального вида

2.3.1 Постановка задачи

Перейдем к рассмотрению декогеренции смешанного состояния фиксированного вида, изначально обладающего явной асимметрией. В работе [79] авторами анализируется состояние

$$\rho_{AB} = q|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + (1 - q)|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|, \quad (2.50)$$

представляющее собой смесь векторов

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \sqrt{1-a}|01\rangle + \sqrt{a}|10\rangle, \\ |\Psi_2\rangle &= \sqrt{a}|00\rangle + \sqrt{1-a}|11\rangle, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где $a \in [0, 1]$ и $q \in [0, 1]$ – два независимых параметра.

В явном виде матрица плотности (2.50) принимает вид

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} qa & 0 & 0 & q\sqrt{a(1-a)} \\ 0 & (1-q)(1-a) & (1-q)\sqrt{a(1-a)} & 0 \\ 0 & (1-q)\sqrt{a(1-a)} & (1-q)a & 0 \\ q\sqrt{a(1-a)} & 0 & 0 & q(1-a) \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

а ее редуцированные матрицы

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 1 - (a - 2aq + q) & 0 \\ 0 & a - 2aq + q \end{pmatrix}, \quad \rho_B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 - a \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Из ортогональности векторов $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_2\rangle$, а также диагональности редуцированных матриц, легко получить значения для энтропий всех состояний:

$$S_{AB} = S[\rho_{AB}] = h_b(q), \quad S_A = S[\rho_A] = h_b(a - 2aq + q), \quad S_B = S[\rho_B] = h_b(a). \quad (2.54)$$

Из симметричности бинарной энтропийной функции (2.19) относительно значения $1/2$ ($h_b(1/2 + \xi) = h_b(1/2 - \xi)$) легко видеть, что

$$S_A \geq \max(S_{AB}, S_B)$$

при всех допустимых значениях параметров a и q . Кроме того, при выполнении условия $|1/2 - q| \leq |1/2 - a|$ имеет место более строгое неравенство

$$S_A \geq S_{AB} \geq S_B. \quad (2.55)$$

Вслед за авторами работы [79] договоримся называть подсистемы, энтропия которых больше энтропии полной системы – «квантовыми», в противовес «классическим» – энтропия которых меньше или равна энтропии целой системы. В работе [79] рассматривалась эволюция «квантово-классического» экземпляра состояния (2.50), включающая в себя взаимодействие кубитов между собой и деполяризацию одного из кубитов. В результате численного расчета было получено, что запутанность разрушается быстрее в случае взаимодействия «классического» кубита с окружающей средой. Данный результат, находящийся в противоречии с интуитивным представлением о

меньшей устойчивости «квантовой» подсистемы по сравнению с «классической» с точки зрения разрушения корреляций, был назван *аномальным разрушением запутанности*.

Рассмотрим задачу об исследовании явления аномального разрушения запутанности с точки зрения энтропийной асимметрии. Для этого положим характерное время взаимодействия кубитов между собой гораздо большим, по сравнению с характерным временем декогеренции (так, что его можно не учитывать), и наряду с деполяризующим каналом (2.7) рассмотрим также действие демпфирующего канала (2.12). В качестве исследуемого состояния будем рассматривать состояние (2.50) при значении параметров $a^2 = 3/4$, $q = 3/5$ (данные значения использовались в исходной работе [79] и соответствуют выполнению неравенства (2.55)). В качестве мер энтропийной асимметрии и запутанности в данной задаче будем использовать величину c_2 (1.24) и согласованность (2.20) соответственно.

Результаты расчетов представлены в разделе 2.3.2, основные выводы формулируются в разделе 2.3.3.

2.3.2 Воздействие деполяризации и диссипации

Подставляя значения $a^2 = 3/4$, $q = 3/5$ в выражения (2.54) мы получаем значения $S_B = 0.562$, $S_{AB} = 0.673$, $S_A = 0.688$, которым соответствует значение энтропийной асимметрии $c_2 = 4.590 > 0$. Таким образом, мы заключаем, что энтропийная асимметрия изначально направлена от «квантовой» подсистемы A к «классической» подсистеме B . Согласованность для состояния (2.50) оказывается равной

$$C[\rho_{AB}] = |1/2 - q| \sqrt{a(1-a)}, \quad (2.56)$$

и для исследуемых параметров a и q её величина равна 0.173.

Теперь последовательно рассмотрим воздействие диссипации (2.12) и деполяризации (2.7) на каждую из подсистем. Мы опускаем выражения для четырех получающихся матриц плотности, зависящих от параметра p , в связи с их громоздкостью. На Рис. 2.7а изображено поведение энтропийной асимметрии как функции от степени декогеренции при диссипации подсистем ($c_2^{\text{diss},A}$) и B ($c_2^{\text{diss},B}$). Как мы видим, на завершающих стадиях декогеренции энтропийная асимметрия направлена к диссипирующей подсистеме в полном соответствии с тем, что диссипация минимизирует энтропию соответствующей подсистемы. В случае диссипации кубита B мы наблюдаем лишь монотонное усиление энтропийной асимметрии (напомним, что чем меньше модуль $|c_2|$, тем сильнее энтропийная асимметрия), а случае же диссипации кубита A мы наблюдаем изменение направления энтропийной асимметрии с последующим ее усилением до максимального значения.

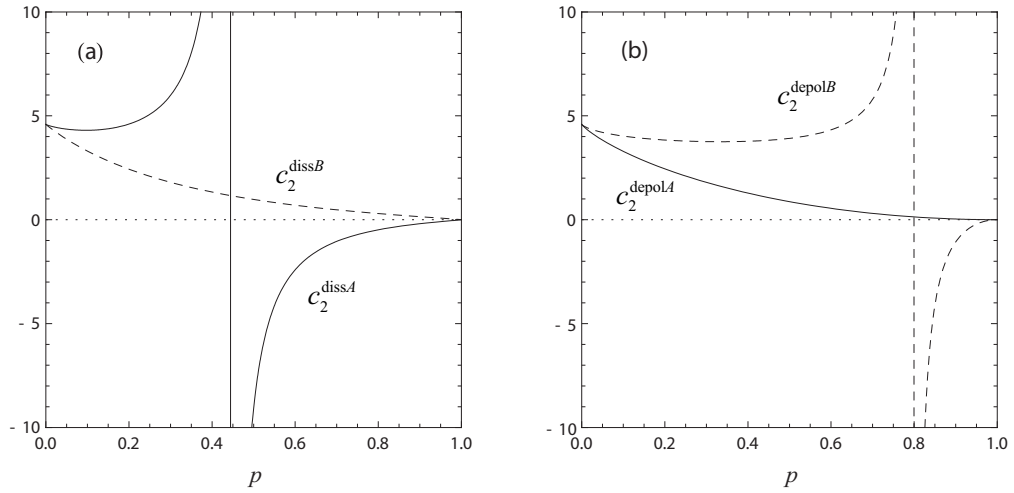


Рисунок 2.7: Величины энтропийной асимметрии c_2 при различных вариантах декогеренции: (a) при диссипации (2.12) подсистемы A (сплошная линия) и подсистемы B (пунктирная линия); (b) при деполяризации (2.7) подсистемы A (сплошная линия) и подсистемы B (пунктирная линия)

Поведение энтропийной асимметрии при деполяризации подсистемы ($c_2^{\text{depol}A}$) и B ($c_2^{\text{depol}B}$) представлено на Рис. 2.7b. Как мы видим, ситуация противоположна предыдущему случаю: в случае деполяризации мы наблюдаем монотонное усиление энтропийной асимметрии, а в случае деполяризации B – изменение ее направления с последующим усилением. На завершающих стадиях декогеренции энтропийная асимметрия направлена от подсистемы, подверженной деполяризации, в полном соответствии с тем, что деполяризация максимизирует энтропию соответствующей подсистемы.

Теперь рассмотрим поведение запутанности в четырех, рассмотренных выше, вариантах декогеренции. На Рис. 2.8a представлено поведение величин согласованности $C^{\text{diss}A}$ и $C^{\text{diss}B}$ под действием диссипации кубитов A и B соответственно. В обоих случаях происходит разрушение запутанности, но при диссипации A оно идет интенсивнее: $C^{\text{diss}A} < C^{\text{diss}B}$ при $p > 0$. Таким образом, мы приходим к заключению, что при диссипации более уязвимой к декогеренции является «квантовая» подсистема A .

В случае деполяризации, представленном на Рис. 2.8b ситуация противоположна: при $p > 0$ мы имеем $C^{\text{depol}A} > C^{\text{depol}B}$. Таким образом, более уязвимой для деполяризации является «классическая» подсистема, и мы сталкиваемся с явлением аномального разрушения запутанности, ранее полученным в работе [79] для более сложной модели деполяризации.

2.3.3 Выводы

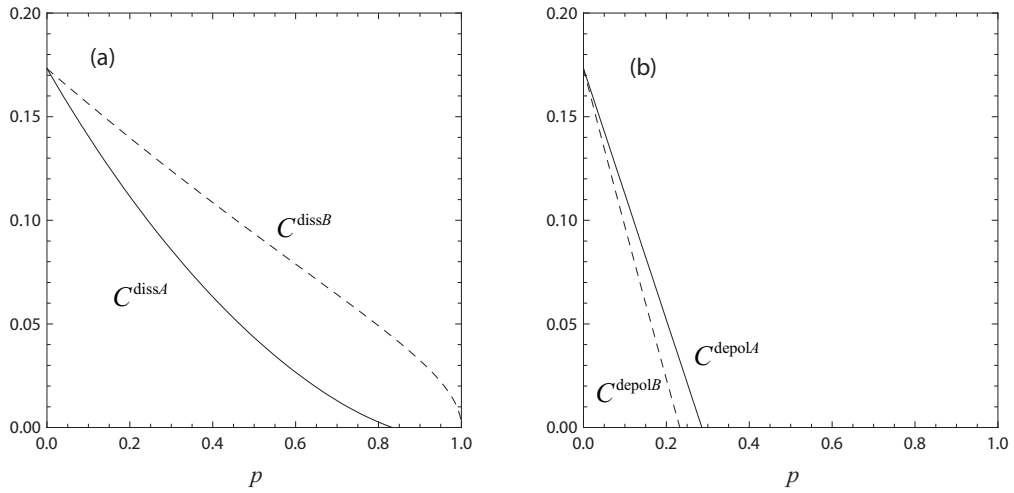


Рисунок 2.8: Величины энтропийной асимметрии c_2 при различных вариантах декогеренции. (a) При диссипации (2.12) подсистемы A (сплошная линия) и подсистемы B (пунктирная линия); (b) при деполяризации (2.7) подсистемы A (сплошная линия) и подсистемы B (пунктирная линия)

Мы рассмотрели поведение энтропийной асимметрии (Рис. 2.7) и согласованности (Рис. 2.8) при диссипации (2.12) и деполяризации (2.7) кубитов A и B состояния (2.50) при фиксированных значениях параметров $a^2 = 3/4$ и $q = 3/5$. Из анализа полученных результатов вытекает следующее правило: с точки зрения разрушения запутанности для асимметричного состояния более деструктивным выступает процесс декогеренции, при котором происходит изменение направления исходной энтропийной асимметрии, чем в случае ее сохранения. Именно такая ситуация обращения исходной энтропийной асимметрии имеет место при диссипации «квантовой» подсистемы A и деполяризации «классической» подсистемы B . Таким образом, относительная уязвимость кубитов к декогеренции определяется соответствием исходного направления энтропийной асимметрии внутри асимметричного состояния и направления энтропийной асимметрии, создаваемой данным вариантом декогеренции. Образно говоря, декогеренция менее разрушительна для запутанности, если она «гладит систему не против шерсти». Выполнение данного правила в случае деполяризации ведет к возникновению эффекта аномального разрушения запутанности обнаруженного в работе [79]

Результаты данного исследования представлены в публикациях [107, 128, 138]. Отметим, что мы ограничились изучением конкретного асимметричного состояния. Случай произвольных двухкубитных состояний рассматривается в следующем параграфе.

2.4 Декогеренция произвольных смешанных двухкубитных состояний

2.4.1 Постановка задачи

Мы рассмотрели, каким образом влияние декогеренции, воздействующей на одиночные кубиты асимметричного двухкубитного состояния специального вида, связано с исходной энтропийной асимметрией и поведением данной асимметрии непосредственно в процессе декогеренции. Встает естественный вопрос о применимости выявленных закономерностей к произвольным смешанным двухкубитным состояниям.

Основной трудностью на пути изучения этого вопроса является большое число параметров, определяющих состояние общего вида: так для задания двухкубитной матрицы 4×4 необходимо 15 параметров. Типичным выходом из этой ситуации является генерация состояний случайным образом, равномерно с точки зрения меры Хаара во всем пространстве состояний [79, 152].

В этом параграфе мы будем рассматривать генерацию двухкубитных состояний в виде

$$\rho_{AB}^{(r)} = \sum_{i=1}^r p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (2.57)$$

где $r = 2, 3, 4$ – параметр, определяющий ранг матрицы плотности, а также размерность очищающей системы [8] (случай $r = 1$ соответствует чистым состояниям, и нам уже не интересен), векторы $\{|\Psi_i\rangle\}$ образуют ортонормированную систему, а набор $\{p_i\}$ образует симплекс ($\sum_{i=1}^r p_i = 1$). Подробное описание равномерной генерации случайных состояний и симплексов приведено в Приложении A.2.

Без ограничения общности, будем полагать, что $S[\rho_A^{(r)}] \geq S[\rho_B^{(r)}]$, т.е. энтропийная асимметрия направлена от A к B . Как и в предыдущем параграфе, для каждой модели декогеренции будем рассматривать два случая: воздействие соответствующего канала на кубит A и на кубит B . Мы будем исследовать связь величин относительной асимметрии разрушения взаимной информации

$$\Delta I = \frac{I[\rho_{AB}^{(r)\text{dec}A}] - I[\rho_{AB}^{(r)\text{dec}B}]}{I[\rho_{AB}^{(r)}]} \quad (2.58)$$

и относительной асимметрии разрушения согласованности

$$\Delta C = \frac{C[\rho_{AB}^{(r)\text{dec}A}] - C[\rho_{AB}^{(r)\text{dec}B}]}{C[\rho_{AB}^{(r)}]} \quad (2.59)$$

в зависимости от исходной энтропийной асимметрии состояния d . В выражениях (2.58) и (2.59) $\rho_{AB}^{(r)\text{dec}A}$ и $\rho_{AB}^{(r)\text{dec}B}$ представляют собой состояния полученные при декогеренции кубитов A и B соответственно. В качестве декогеренции мы будем рассматривать модели дефазирования (2.5),

деполяризации (2.7) и диссипации (2.12). Мы остановимся на относительно низкой степени декогеренции $p = 0.1$, обусловленной тем, что для случайно сгенерированных состояний величина ΔC при больших p будет слишком часто равна 0, просто потому, что в обоих вариантах декогеренции запутанность будет разрушаться полностью.

Результаты трёх различных вариантов декогеренции представлены в разделах 2.4.2, 2.4.3 и 2.4.4. Основные выводы приводятся в разделе 2.4.5

2.4.2 Дефазирование

Можно ожидать, что дефазирование кубита, от которого направлена энтропийная асимметрия, является менее деструктивным с точки зрения сохранения корреляций, чем дефазирование кубита, к которому направлена энтропийная асимметрия ($\Delta I, \Delta C > 0$). Данное предположение объясняется тем, что дефазирование, не уменьшает энтропию соответствующего кубита, и мы таким образом имеем сохранение исходного направления энтропийной асимметрии при декогеренции кубита A , и её возможное обращение при декогеренции кубита B . Проверим справедливость этого правила в общем случае.

Результаты для двухкубитных состояний различных рангов представлены на Рис. 2.9. Мы видим, что наше правило не универсально (если бы это было так, то все точки лежали бы в первой четверти). Тем не менее, явно выявляется тенденция стремления к его выполнению тем в большей степени, чем ниже ранг состояния r .

Другой интересной особенностью является то, что согласованность оказывается более чувствительной к энтропийной асимметрии, чем взаимная информации: для запутанности наше эмпирическое правило работает явно лучше. Кроме того поведение запутанности, более «асимметрично»: для сгенерированных состояний $|\Delta C|$ может достигать гораздо больших значений, чем $|\Delta I|$.

2.4.3 Деполяризация

Далее рассмотрим процесс деполяризации, также являющийся унитарным каналом, и для которого в ходе рассмотрения поведения состояния (2.50) был сделан вывод о большей устойчивости к декогеренции частицы, от которой направлена энтропийная асимметрия, т.к. в этом случае не происходит изменения её направления.

Результаты для случайно сгенерированного массива состояний представлены на Рис. 2.10.

Основной вывод, который мы можем сделать из полученных данных, заключается в том, что для состояний ранга $r = 2$ правило о том, что менее деструктивна деполяризация частицы, от

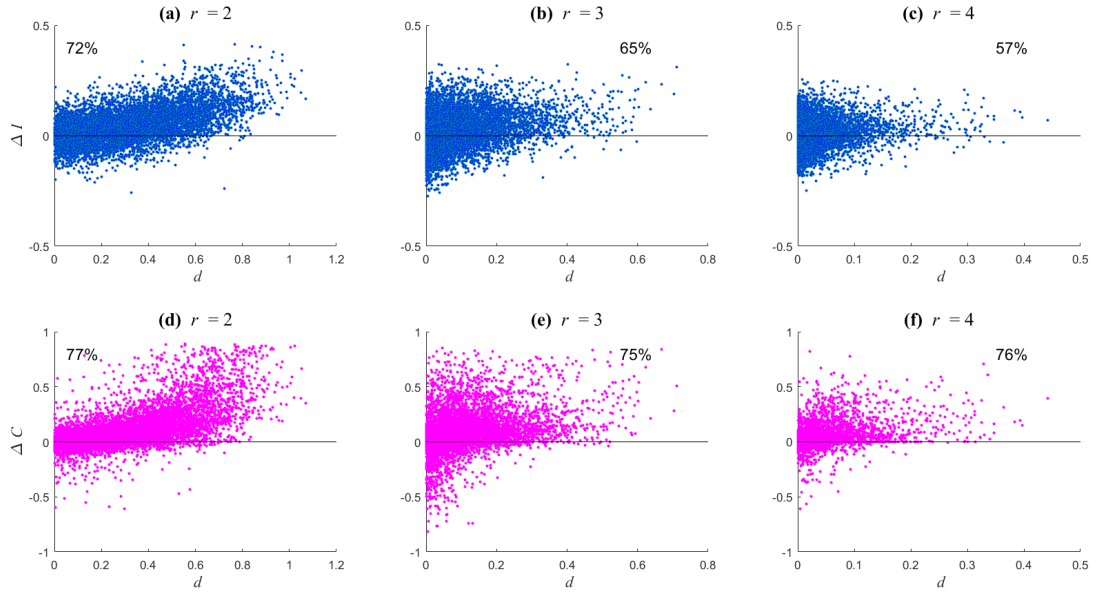


Рисунок 2.9: Асимметрия разрушения взаимной информации (2.58) (а-с) и запутанности (2.59) (d-f) как функции исходной асимметрии d при дефазировании ($p = 0.1$) кубитов случайно сгенерированных двухкубитных состояний рангов $r = 2, 3, 4$. Для каждого ранга объем массива состояний $N = 10^4$. Числами указан процент точек, попавших в верхнюю полуплоскость.

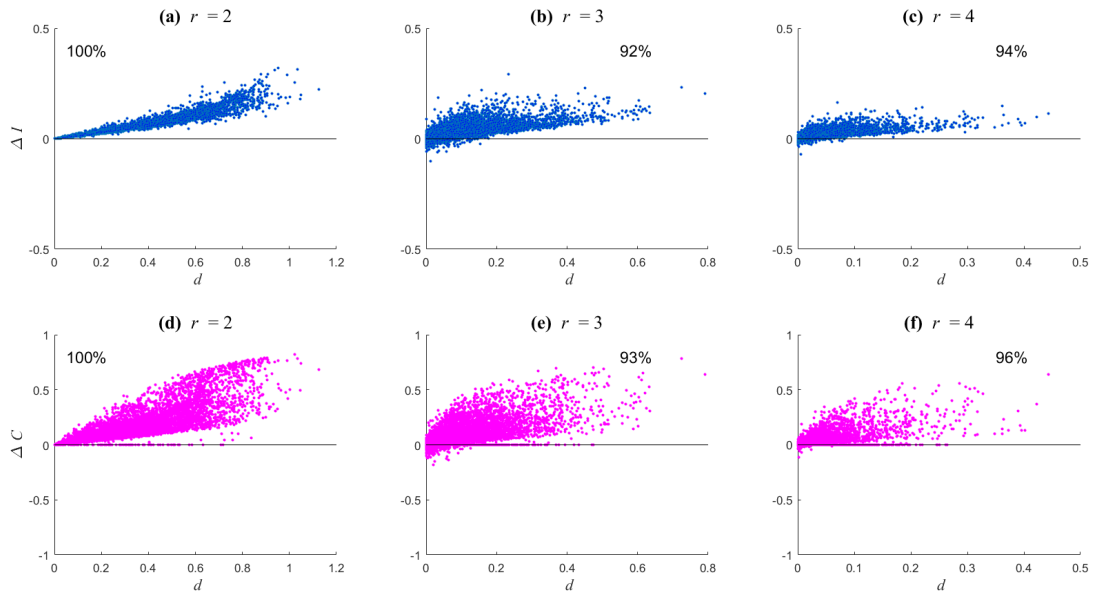


Рисунок 2.10: Асимметрия разрушения взаимной информации (2.58) (а-с) и запутанности (2.59) (d-f) как функции исходной асимметрии d при деполяризации ($p = 0.1$) кубитов случайно сгенерированных двухкубитных состояний рангов $r = 2, 3, 4$. Для каждого ранга объем массива состояний $N = 10^4$. Числами указан процент точек, попавших в верхнюю полуплоскость.

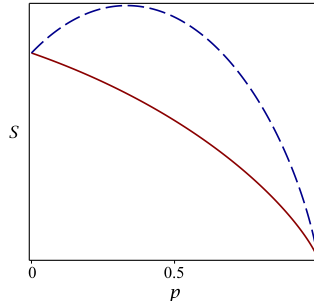


Рисунок 2.11: Типичные виды поведения энтропии диссипирующего кубита: монотонное убывание (\searrow) – сплошная линия, и стремление к нулевому значению через экстремум (\curvearrowright) – пунктирная линия.

которой направлена энтропийная асимметрия, имеет универсальный характер. При $r = 3$ и $r = 4$ появляются исключения, которые, однако, не столь явно выражены, как в случае дефазирования. Примечательно, что для $r = 4$ наше правило работает лучше, чем для $r = 3$. Также отметим, что вновь, разрушение запутанности проявляет большую зависимость от энтропийной асимметрии и большую «асимметричность» в целом.

2.4.4 Диссипация

С точки зрения диссипации все состояния $\rho_{AB}^{(r)}$ можно разделить на четыре подкласса, которые мы будем обозначать как $A \searrow B \searrow$, $A \curvearrowright B \searrow$, $A \searrow B \curvearrowright$ и $A \curvearrowright B \curvearrowright$. Знак \searrow , стоящий рядом с обозначением кубита означает, что диссипация этого кубита приводит к монотонному уменьшению его энтропии, в то время как знак \curvearrowright – соответствует стремлению энтропии к нулевому значению через прохождения максимума (см. Рис. 2.11). С данным разделением на подклассы мы фактически уже сталкивались при рассмотрении диссипации чистых запутанных состояний в разделе 2.2.4. Также, напомним, что в разделе 2.3.2 для состояния (2.50) с энтропийной асимметрией вида $A \rightarrow B$, принадлежащего классу $A \searrow B \searrow$, мы получили, что диссипация влияет на корреляции деструктивнее в случае декогеренции кубита A , при которой происходило изменение исходного направления энтропийной асимметрии.

Результаты для случайно сгенерированного набора состояний рангов $r = 2$ и $r = 4$, распределенных под вышеописанным подклассам, представлены на Рис. 2.12 (случай $r = 3$ опущен, т.к. качественно ничем не выделяется).

Наиболее явная взаимосвязь между энтропийной асимметрией асимметрий разрушения корреляций прослеживается для состояний классов $A \curvearrowright B \searrow$ и $A \searrow B \curvearrowright$ (см. Рис. 2.12В,С). Для под-

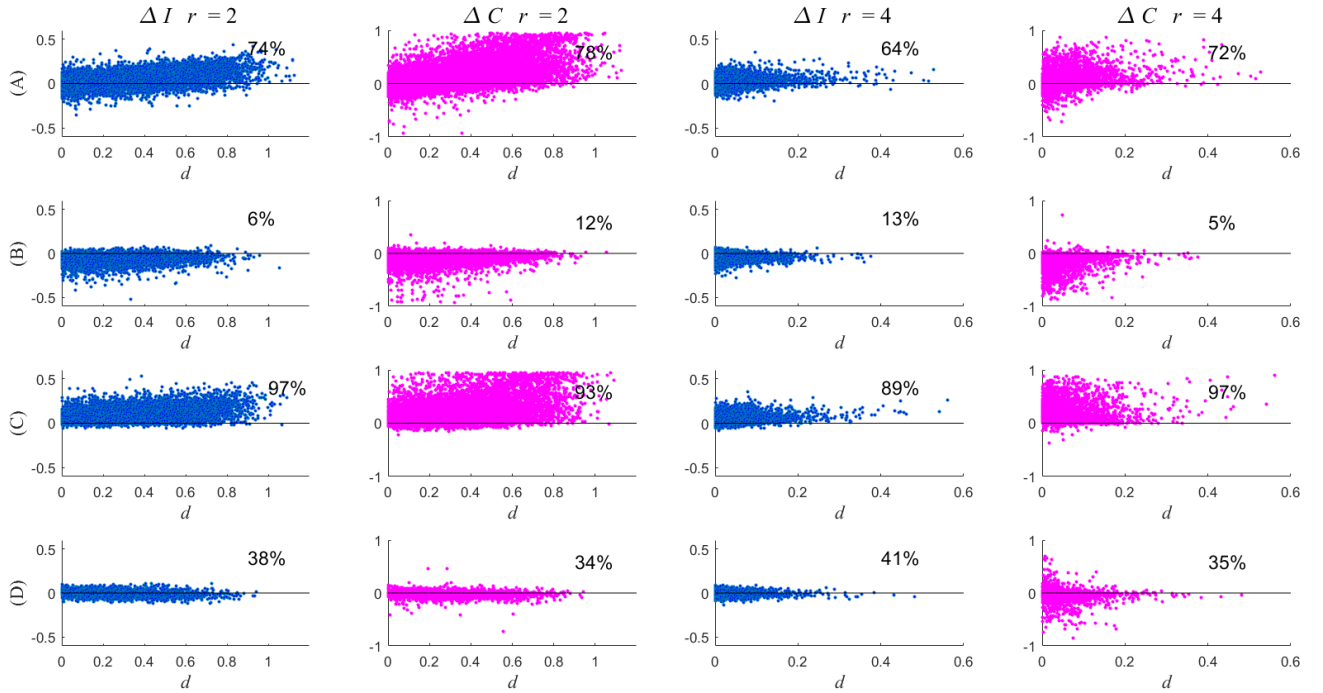


Рисунок 2.12: Асимметрия разрушения взаимной информации (2.58) и запутанности (2.59) как функции исходной энтропийной асимметрии d при диссипации ($p = 0.1$) кубитов случайно сгенерированных двухкубитных состояний рангов $r = 2, 4$. Каждый ряд графиков соответствует своему подклассу с точки зрения энтропийного поведения: (A) $A^{\curvearrowright}B^{\curvearrowright}$, (B) $A^{\curvearrowright}B^{\curvearrowleft}$, (C) $A^{\curvearrowleft}B^{\curvearrowright}$, (D) $A^{\curvearrowleft}B^{\curvearrowleft}$. Для каждого ранга (до разделения по подклассам) объем массива состояний составляет $N = 4 \cdot 10^4$. Числами указан процент состояний, попавших в верхнюю полуплоскость.

класса $A \curvearrowright B \searrow$ мы имеем обращение энтропийной асимметрии в случае диссипации кубита A и монотонное усиление асимметрии в случае диссипации B . Таким образом, большая устойчивость корреляций в случае диссипации B выглядит вполне закономерной.

Для подкласса $A \searrow B \curvearrowright$ энтропийная асимметрия может менять свое направление в обоих вариантах декогеренции. Однако в случае диссипации B изменение направления асимметрии может происходить два раза, в случае если экстремальное значение энтропии B выше, чем исходное значение энтропии A . Как мы видим, такое интенсивное изменение энтропийной асимметрии оказывается более деструктивным для исходных корреляций, по сравнению со случаем, когда происходит монотонное уменьшение энтропии кубита A , при котором также неизбежно происходит изменение исходного направления энтропийной асимметрии.

Менее явной оказывается связь между энтропийной асимметрией и асимметрией разрушения корреляций для подкласса $A \curvearrowright B \curvearrowright$ (см. Рис. 2.12A), для которого в обоих случаях декогеренции может происходить обращение исходного направления энтропийной асимметрии. Однако в отличие от подкласса $A \searrow B \curvearrowright$ в случае диссипации кубита A , его энтропия ведет себя не монотонно образом.

Наименее явный результат демонстрирует подкласс $A \searrow B \searrow$ (см. Рис. 2.12D), в котором обе энтропии ведут себя монотонно образом.

В целом, мы можем заключить, что для подклассов $A \curvearrowright B \curvearrowright$ и $A \searrow B \curvearrowright$ более устойчивым оказывается кубит A , в то время как для подклассов $A \curvearrowright B \searrow$ и $A \searrow B \searrow$ более устойчивым оказывается кубит B . Таким образом, асимметрия разрушения корреляций при диссипации во многом определяется поведением энтропии кубита, к которому направлена исходная энтропийная асимметрия.

Также, отметим, что как и в случае других вариантов декогеренции, разрушение запутанности оказывается гораздо более чувствительно к исходной энтропийной асимметрии по сравнению с разрушением взаимной информации.

2.4.5 Выводы

Мы рассмотрели воздействие различных моделей декогеренции на разрушение корреляций в исходно асимметричных двухкубитных состояниях различных рангов с исходным направлением энтропийной асимметрии $A \rightarrow B$. В качестве основного метода исследования использовалась случайная генерация матриц плотности. Сформулируем основные выводы.

1. Наиболее строгий результат демонстрирует деполяризация двухкубитных состояний ранга $r = 2$. Для 100% случайно сгенерированных состояний деполяризация кубита A приводит

к большому разрушению корреляций, по сравнению со деполяризацией кубита B . Для всех остальных вариантов декогеренции мы можем говорить только о наиболее типичной связи исходной асимметрии и асимметрии разрушения корреляций.

2. При дефазировании и деполяризации типична большая устойчивость кубита A , при декогеренции которого происходит усиление исходной энтропийной асимметрии. Данное правило тем типичнее, чем ниже ранг состояния.
3. При диссипации обычно наиболее устойчивым оказывается кубит A в случае, если диссипация кубита B идет с прохождением через экстремум его энтропии (подклассы $A \curvearrowright B \curvearrowright$ и $A \searrow B \curvearrowright$), и кубит B , если имеет место монотонное убывание его энтропии (подклассы $A \curvearrowright B \searrow$ и $A \searrow B \searrow$).
4. При всех вариантах декогеренции разрушение согласованности (меры запутанности) демонстрирует больший уровень асимметрии по сравнению с аналогичным разрушением взаимной информации.

2.5 Декогеренция асимметричного трехкубитного состояния специального вида

2.5.1 Постановка задачи

Перейдем к изучению взаимосвязи между энтропийной асимметрией и устойчивостью к декогеренции в трехкубитных состояниях. В настоящем параграфе рассмотрим фиксированное чистое трехкубитное WRr состояние [153]

$$|WRr\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|001\rangle + |010\rangle - 2|100\rangle), \quad (2.60)$$

в котором, напомним, первый, второй и третий кубиты мы будем обозначать соответственно буквами A , B и C .

Договоримся об обозначениях, которые будут использоваться в данном параграфе. В качестве меры энтропийной асимметрии будем использовать величину c_2 , причем названия подсистем, для которых она вычисляется будем давать в виде пары аргументов. Влияние канала декогеренции на один из кубитов будем обозначать верхним индексом вида $\text{dec}X$, где в качестве модели декогеренции dec будет рассматриваться дефазирование (deph), деполяризация (depol) или диссипация (diss), и $X = A, B, C$ – название кубита.

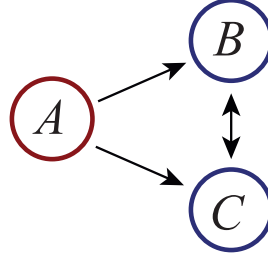


Рисунок 2.13: Структура энтропийной асимметрии WRr-состояния (2.60)

В качестве меры запутанности будем использовать негативность [154], которую можно вычислить для двусоставной системы XY по формуле

$$N(X, Y) = \frac{1}{2} (\|\rho_{XY}^{\Gamma_X}\|_1 - 1), \quad (2.61)$$

где $\|\bullet\|_1$ – стандартная l_1 норма, а Γ_X – частичное транспонирование по подсистеме X .

Из формы вектора (2.60) следует, что кубиты B и C находятся в одинаковых состояниях, вследствие чего энтропийная асимметрия в редуцированной подсистеме BC отсутствует: $|c_2(B, C)| \rightarrow \infty$. Энтропийная асимметрия редуцированных подсистем AB и AC направлена от кубита A к кубитам B и C (см. Рис. 2.13): $c_2(A, C) = c_2(B, C) \approx 3.43$.

В качестве моделей декогеренции будем рассматривать дефазирование (2.5), деполяризацию (2.7) и диссипацию (2.12). Вследствие симметрии состояния (2.60) относительно перестановки $B \leftrightarrow C$, достаточно рассмотреть декогеренцию подсистем C и A . Двум этим вариантам соответственно посвящены разделы 2.5.2 и 2.5.3. Основные выводы представлены в разделе 2.5.4

2.5.2 Энтропийная асимметрия при различных вариантах декогеренции

Под действием диссипации, деполяризации и дефазирования кубит C исходное трехкубитное состояние (2.60) становится смешанным, и его матрицы плотности приобретают вид

$$\begin{aligned} \rho_{ABC}^{\text{diss}C} = & \frac{1}{6}|010\rangle\langle 010| - \frac{1}{3}|010\rangle\langle 100| - \frac{1}{3}|100\rangle\langle 010| + \frac{2}{3}|100\rangle\langle 100| + \frac{1-p}{6}|001\rangle\langle 001| + \\ & + \frac{p}{6}|000\rangle\langle 000| + \frac{\sqrt{1-p}}{6} (|001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| - 2|001\rangle\langle 100| - 2|100\rangle\langle 001|), \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \rho_{ABC}^{\text{depol}C} = & \frac{1}{3}(1-p) \left(\frac{1}{2}(|001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001|) - |001\rangle\langle 100| - |100\rangle\langle 001| \right) + \\ & + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{p}{2} \right) \left(\frac{1}{2}(|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) - |010\rangle\langle 100| - |100\rangle\langle 010| + 2|100\rangle\langle 100| \right) + \\ & + \frac{p}{3} \left(\frac{1}{4}(|000\rangle\langle 000| + |011\rangle\langle 011|) - \frac{1}{2}(|011\rangle\langle 101| + |101\rangle\langle 011| + |101\rangle\langle 101|) \right), \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\rho_{ABC}^{\text{deph}C} = \frac{1}{6} (|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| - 2(|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010|) + 4|100\rangle\langle 100|) + \frac{1}{6}(1-p)(|001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| - 2(|001\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001|)). \quad (2.64)$$

Используя эти матрицы, мы можем легко вычислить безусловные и условные энтропии, функции независимости и соответствующие величины энтропийной асимметрии c_2 . В случае декогеренции кубита C нас будут интересовать пять двусоставных разбиений системы ABC : два двухкубитных разбиения $B - C$ и $A - C$; и три трехкубитных разбиения $AB - C$, $AC - B$ и $BC - A$. Поведение энтропийной асимметрии c_2 для всех этих разбиений и различных моделей декогеренции представлено на Рис. 2.14.

В изначально симметричном разбиении $B - C$ (см. Рис. 2.14а) диссипация и деполяризация приводят к противоположным направлениям индуцированной энтропийной асимметрии: в случае диссипации мы имеем направление $B \rightarrow C$, а при деполяризации противоположное направление $C \rightarrow B$. Отметим, что в данном случае мы имеем дело монотонным уменьшением энтропии кубита C при воздействии на него диссипации. Процесс дефазирования не изменяет энтропию кубита C , и, таким образом, не приводит к возникновению энтропийной асимметрии.

Для разбиения $A - C$ (см. Рис. 2.14b) те же самые процессы приводят к иной картине. Диссипация и дефазирование C усиливают исходную асимметрию $A \rightarrow C$ в то время, как деполяризация C приводит к изменению исходного знака c_2 при $p = 1/2$. Наиболее сильная асимметрия наблюдается в случае диссипации.

В случае разбиения $AB - C$ (см. Рис. 2.14c) мы имеем интуитивно ожидаемый результат, наблюдаемый также для чистых двухкубитных состояний, а также схожий с результатом для разбиения $B - C$: диссипация кубита C приводит к возникновению энтропийной асимметрии $AB \rightarrow C$, в то время как деполяризация приводит к возникновению противоположного направления энтропийной асимметрии $C \rightarrow AB$.

Если декогерирующий кубит C находится внутри двухкубитного объединения AC , то мы наблюдаем возникновение энтропийной асимметрии $AC \rightarrow B$ для всех рассматриваемых вариантов декогеренции (см. Рис. 2.14d). Случай разбиения $A - BC$ демонстрирует аналогичные результаты для деполяризации и дефазирования, однако при диссипации мы получаем противоположное направление индуцируемой энтропийной асимметрии $B \rightarrow AC$. Данную особенность диссипации легко объяснить тем, что ее воздействие при $p = 1$ соответствует «исчезновению» кубита C из рассмотрения, вследствие обнуления его энтропии. В результате при $p = 1$ имеем $c_2^{\text{diss}C}(AC, B) = c_2^{\text{diss}C}(A, BC) = c_2(A, B) \approx 3.43$, где последнее значение соответствует исходному состоянию.

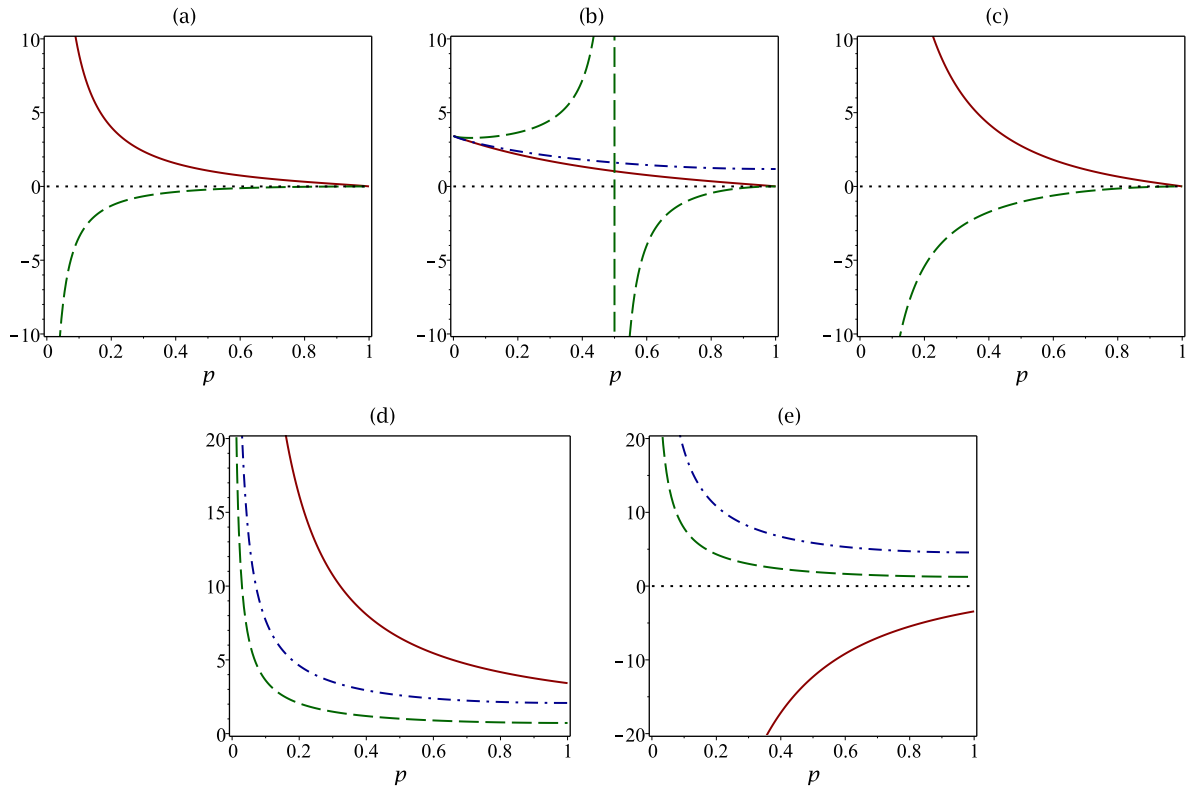


Рисунок 2.14: Энтропийная асимметрия c_2 для различных двусоставных разбиений WRr состояния (2.60), в котором кубит C подвержен одному из вариантов декогеренции: диссипации (сплошные линии), деполяризации (пунктирные линии) и дефазированию (штрихпунктирные линии). Исследуемые разбиения: (a) $B - C$, (b) $A - C$, (c) $AB - C$, (d) $AC - B$, (e) $BC - A$.

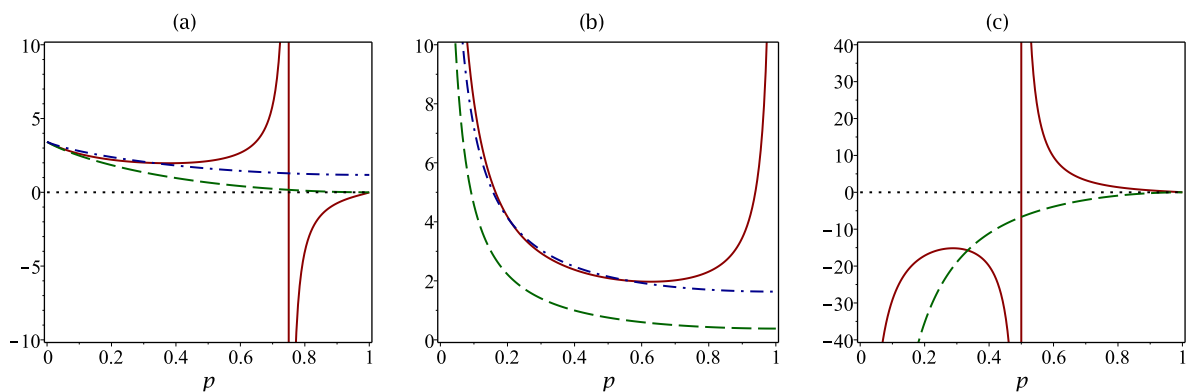


Рисунок 2.15: Энтропийная асимметрия c_2 для различных двусоставных разбиений WRr состояния (2.60), в котором кубит A подвержен одному из вариантов декогеренции: диссипации (сплошные линии), деполяризации (пунктирные линии) и дефазированию (штрихпунктирные линии). Исследуемые разбиения: (a) $A - C$ и $A - B$ (b) $AB - C$ и $AC - B$, (c) $BC - A$.

В случае различных видов декогеренции частицы C мы получаем следующие матрицы плотности

$$\rho_{ABC}^{\text{diss}A} = \frac{1}{6} (|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + \frac{2(1-p)}{3} |100\rangle\langle 100| + \frac{2p}{3} |000\rangle\langle 000| - \frac{\sqrt{1-p}}{3} (|001\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|), \quad (2.65)$$

$$\rho_{ABC}^{\text{depol}A} = \frac{(p-1)}{3} (|001\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{p}{2}\right) \left(\frac{1}{2} (|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) + 2|100\rangle\langle 100|\right) + \frac{p}{3} \left(|000\rangle\langle 000| + \frac{1}{4} (|101\rangle\langle 101| + |101\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 110|)\right), \quad (2.66)$$

$$\rho_{ABC}^{\text{deph}A} = \frac{1}{6} (|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 100|) - \frac{1-p}{3} (|001\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|), \quad (2.67)$$

имеющие качественно иное поведение энтропийной асимметрии в зависимости от степени декогеренции p (см. Рис. 2.15). Заметим, что нам достаточно рассмотреть только три разбиения: $A - C$, $AB - C$ и $AC - B$.

Диссипация кубита A в отличие от диссипации C характеризуется предварительным прохождением энтропии через максимум. Вследствии этого, мы можем наблюдать локальный минимум $c_2^{\text{diss}A}(A, C) \approx 2.12$ при $p \approx 0.377$ (см. Рис. 2.15a). Далее, при $p = 3/4$ происходит закономерное обращение исходного направления энтропийной асимметрии с $A \rightarrow C$ на $C \rightarrow A$. Деполяризация A как процесс увеличивающий энтропию декогерирующего кубита приводит к монотонному усилению исходной энтропийной асимметрии $A \rightarrow C$. Таким образом, воздействия диссипации и деполяризации на направление энтропийной асимметрии в случае декогеренции кубитов A и C меняются местами: то, что приводило к изменению исходного направления энтропийной асимметрии, теперь ее сохраняет, и наоборот (см. (см. Рис. 2.14b и Рис. 2.15a).

В отличие от диссипации и деполяризации дефазирование кубитов C и A приводит к одинаковому воздействию на энтропийную асимметрию в звене $A - C$. Данное явление объясняется тем, что в двух вариантах дефазирования энтропии кубитов A и C остаются неизменными, и уровень взаимной информации изменяется одинаковым образом.

В разбиении $AB - C$ (см. Рис. 2.15b) энтропийная асимметрия имеет направление $AB \rightarrow C$ для всех вариантов декогеренции. Величина c_2 ведет себя монотонным образом, в то время как в случае диссипации наблюдается локальный минимум $c_2^{\text{diss}A}(AB, C) \approx 1.97$ при $p \approx 0.627$.

Причиной, по которой $c_2^{\text{diss}A}(AB, C)$ стремится к бесконечности при $p \rightarrow \infty$ является то, что при диссипации A разбиение $AB - C$ по своим энтропийным характеристикам превращается в симметричное разбиение $B - C$.

В разбиении $AC - B$ (см. Рис. 2.15с) при диссипации A при $p = 1/2$ происходит изменение направления энтропийной асимметрии с $A \rightarrow BC$ на $BC \rightarrow A$, что объясняется уже отмеченным прохождением энтропии A через максимум. Экстремальное значение $c_2^{\text{diss}A}(BC, A) \approx -15.2$ наблюдается при $p \approx 0.288$. В случае деполяризации вновь наблюдается лишь появление энтропийной асимметрии, направленной от части разбиения, в которой находится кубит A , подверженный декогеренции. Дефазирование, в свою очередь не приводит к возникновению энтропийной асимметрии, т.к. энтропия кубита A остается равной совместной энтропии кубитов B и C , и изменяется лишь уровень взаимной информации между ними.

2.5.3 Связь энтропийной асимметрии и разрушения запутанности

Переходя к рассмотрению вопроса о разрушении запутанности, в первую очередь отметим, что все двусоставные разбиения исходного состояния (2.60) находятся в запутанном состоянии. Результаты вычисления поведения запутанности для случаев декогеренции кубитов C и A представлены соответственно на Рис. 2.16 и Рис. 2.17.

Для разбиения $A - C$ (см. Рис. 2.16b и Рис. 2.17a), вследствие одинаковости редуцированных матриц плотности $\rho_{AC}^{\text{deph}C} = \rho_{BC}^{\text{deph}A}$ мы имеем тождество $N^{\text{deph}C}(A, C) = N^{\text{deph}A}(A, C)$. Для диссипации и деполяризации выполняются неравенства $N^{\text{diss}C}(A, C) \geq N^{\text{diss}A}(A, C)$ и $N^{\text{depol}C}(A, C) \leq N^{\text{depol}A}(A, C)$. Сопоставляя данный результат с поведением энтропийной асимметрии (см. Рис. 2.14b и Рис. 2.15a) мы можем прийти к заключению, что вариант декогеренции, сохраняющий исходное направление энтропийной асимметрии, разрушает запутанность слабее, чем вариант декогеренции, приводящий к изменению ее направления. Напомним, что аналогичный результат был получен ранее при рассмотрении двухкубитных состояний в параграфах 2.3 и 2.4.

Для разбиения $AB - C$ (см. Рис. 2.16с и Рис. 2.17b) интуитивно можно ожидать выполнение неравенства $N^{\text{dec}A}(AB, C) \geq N^{\text{dec}C}(AB, C)$ объясняющееся тем, что декогеренция C одновременно разрушает его связь с кубитам A и B , в то время, при декогеренции A запутанность между B и C остается на прежнем уровне. Однако, оказывается, что данное утверждение справедливо только для деполяризации и дефазирования. В случае диссипации оно начинает работать только при $p > 0.916$ (на. Рис. 2.16с и Рис. 2.17b об этом можно судить по направлению выпуклостей кривых для диссипации).

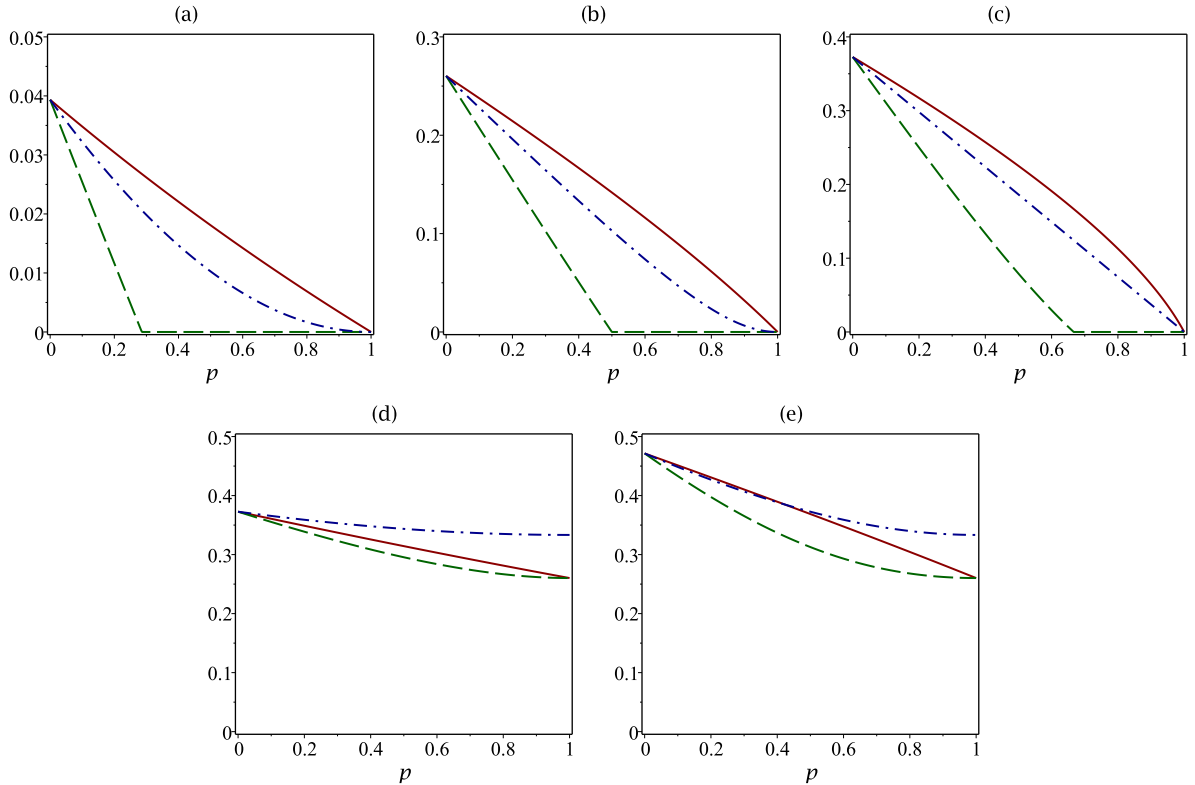


Рисунок 2.16: Негативность N для различных двусоставных разбиений WRr состояния (2.60), в котором кубит C подвержен одному из вариантов декогеренции: диссипации (сплошные линии), деполаризации (пунктирные линии) и дефазированию (штрихпунктирные линии). Исследуемые разбиения: (a) $B - C$, (b) $A - C$, (c) $AB - C$, (d) $AC - B$, (e) $BC - A$.

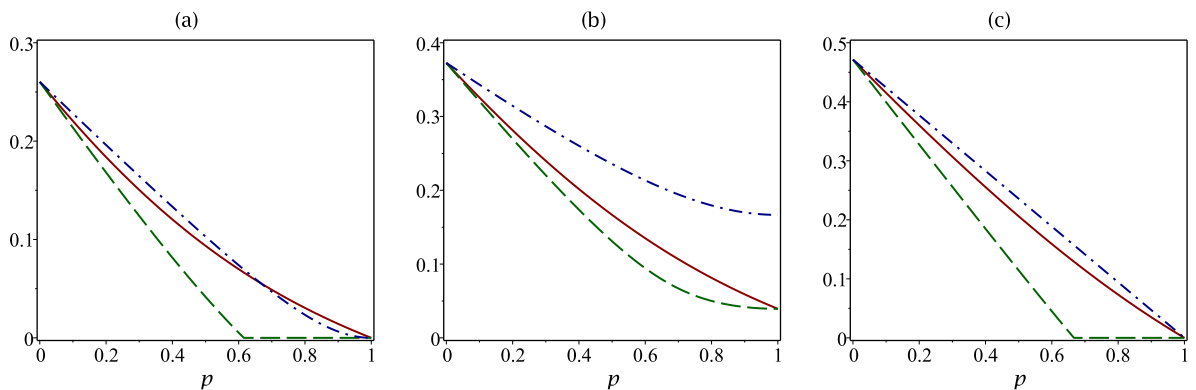


Рисунок 2.17: Негативность N для различных двусоставных разбиений WRr состояния (2.60), в котором кубит A подвержен одному из вариантов декогеренции: диссипации (сплошные линии), деполаризации (пунктирные линии) и дефазированию (штрихпунктирные линии). Исследуемые разбиения: (a) $A - C$ и $A - B$, (b) $AB - C$ и $AC - B$, (c) $BC - A$.

Интересно, что для аналогичного случая разбиения $BC - A$ (см. Рис. 2.16e и Рис. 2.17c), однако, соответствующее неравенство $N^{\text{dec}C}(BC, A) \geq N^{\text{dec}A}(BC, A)$ выполняется для всех трех вариантов декогеренции.

Наибольший интерес представляет собой поведение запутанности в разбиении $AC - B$ (см. Рис. 2.16d и Рис. 2.17b), в котором декогерирующие кубиты A и C находятся в одной части разбиения. Таким образом, мы имеем дело с влиянием внутренней энтропийной асимметрии разбиения $A - C$ на разрушение корреляций в разбиения $AC - B$. Легко видеть, что для всех вариантов декогеренции выполняется соотношение $N^{\text{dec}C}(AC, B) \geq N^{\text{dec}A}(AC, B)$. Его можно объяснить следующим образом: исходная энтропийная асимметрия $A \rightarrow C$ подразумевает бóльшую роль подсистемы A двусоставной системы AC в образовании корреляций с очищающей подсистемой B (для исходного чистого состояния). Вследствие этого, именно через взаимодействие окружающей среды с кубитом A (а не кубита C) корреляции в разбиении $AC - B$ разрушаются быстрее.

2.5.4 Выводы

Мы рассмотрели влияние трех видов декогеренции: диссипации (2.12), деполяризации (2.7) и дефазирования (2.5) – на энтропийную асимметрию и разрушение запутанности чистого трехкубитного WRt состояния (2.60). Сформулируем основные выводы.

1. Процессы диссипации и деполяризации приводят к возникновению энтропийной асимметрии в исходно симметричных разбиениях. При этом диссипация создает энтропийную асимметрию, направленную к декогерирующему кубиту, а деполяризация, наоборот, создает энтропийную асимметрию от декогерирующего кубита.
2. Процесс диссипации может приводить к временному появлению энтропийной асимметрии таким образом, что энтропийная асимметрия исчезает при $p \rightarrow 1$.
3. Процессы диссипации и деполяризации, индуцирующие энтропийную асимметрию в направлении исходной асимметрии двусоставного состояния, менее деструктивны с точки зрения разрушения запутанности, по сравнению с ситуацией, когда они изменяют исходное направление асимметрии.
4. В случае, когда сравниваются варианты декогеренции двух подсистем, находящихся в одной части двусоставного разбиения (A и C внутри $AC - B$), более деструктивным оказывается декогеренция кубита, от которого направлена энтропийная асимметрия.

Результаты данного исследования представлены в работах [106, 108]. В работах [106, 108, 116, 120, 123, 134] также представлены результаты исследования взаимосвязи между энтропийной асимметрией и разрушением запутанности для других трехкубитных состояний (например, состояния Гринберга-Хорна-Цайлингера [155], W-состояния [156] и состояния Коффмана-Кунду-Вутерса [157]). Отметим, что эти состояния представляют меньший интерес по сравнению с рассмотренным WRr-состоянием, в связи с тем, что обладают большей исходной симметрией.

2.6 Деполяризация произвольных чистых трехкубитных состояний

2.6.1 Постановка задачи

В разделе 2.4 было получено, что наиболее сильную связь между энтропийной асимметрией и асимметрией разрушения корреляций демонстрируют двухкубитные состояния ранга 2. В свою очередь, данные состояния могут рассматриваться как части чистых трехкубитных состояний. Вследствие этого, имеет смысл рассмотреть поведение корреляций в чистых трехкубитных состояниях при деполяризации его отдельных кубитов в целом. Чтобы охватить общий случай, вновь воспользуемся методом случайной генерации состояний, а в качестве меры силы энтропийной асимметрии будем использовать величину d .

Договоримся об обозначениях. Исходное чистое состояние будем обозначать как $\rho_{ABC} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, а энтропии его подсистем соответственно как S_A , S_B и S_C . Матрицы плотности, получающиеся в результате декогеренции кубитов, будем обозначать с помощью соответствующих верхних индексов в круглых скобках:

$$\begin{aligned}\rho_{ABC}^{(A)}(p) &= (\Phi^{\text{depol}}(p) \otimes \text{Id}_2 \otimes \text{Id}_2)[\rho_{ABC}], \\ \rho_{ABC}^{(B)}(p) &= (\text{Id}_2 \otimes \Phi^{\text{depol}}(p) \otimes \text{Id}_2)[\rho_{ABC}], \\ \rho_{ABC}^{(C)}(p) &= (\text{Id}_2 \otimes \text{Id}_2 \otimes \Phi^{\text{depol}}(p))[\rho_{ABC}].\end{aligned}\tag{2.68}$$

В трехсоставном состоянии мы можем выделить шесть различных двусоставных разбиений (три трехкубитных и три двухкубитных), которые будем обозначать с использованием разделительного знака «—» (например, $AB - C$, $AC - B$, $B - C$ и т.д.). Эти же обозначения будем использовать для взаимной информации: например, $I_{X-Y}^{(Z)}$ обозначает взаимную информацию в разбиении $X - Y$ состояния $\rho_{ABC}^{(Z)}$. Отсутствие верхнего индекса будет соответствовать исходному чистому состоянию ρ_{ABC} . Величину асимметрии произвольного разбиения $X - Y$ исходного состояния будем обозначать как d_{X-Y} .

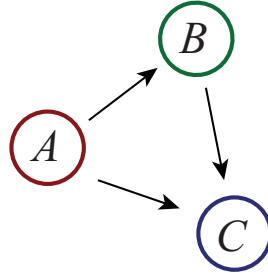


Рисунок 2.18: Структура энтропийной асимметрии рассматриваемых трехкубитных состояний

Без ограничения общности будем полагать

$$S_A \geq S_B \geq S_C, \quad (2.69)$$

таким образом, структура энтропийной асимметрии состояния приобретает вид, представленный на Рис. 2.18. Отметим, что вследствие чистоты состояния, энтропийная асимметрия в трехкубитных разбиениях отсутствует: $d_{AB-C} = d_{AC-B} = d_{BC-A} = 0$.

Рассмотрим следующий ряд характеристик состояний (2.68).

1. Точность воспроизведения исходного чистого состояния.
2. Взаимная информация в исходно энтропийно симметричных трехкубитных разбиениях.
3. Взаимная информация в асимметричных двухкубитных разбиениях.

Исследованию поведения этих характеристик в зависимости от исходной энтропийной асимметрии соответственно посвящены разделы 2.6.2, 2.6.3 и 2.6.4. Основные выводы приводятся в разделе 2.6.5.

2.6.2 Точность воспроизведения

Под точностью воспроизведения («fidelity») [7] входного состояния $|\Psi\rangle$ по одному из состояний (2.68) будем понимать величину

$$F^{(X)} = \langle \Psi | \rho_{ABC}^{(X)} | \Psi \rangle, \quad X = A, B, C. \quad (2.70)$$

Фактически, данная величина равна вероятности получить состояние $|\Psi\rangle$ при измерении $\rho_{ABC}^{(X)}$ в ортогональном базисе, одним из векторов которого является само состояние $|\Psi\rangle$. Таким образом, точность воспроизведения характеризует, насколько деполяризация отдельных кубитов портит состояние в целом.

На Рис. 2.19 продемонстрировано поведение асимметрий точности воспроизведения

$$\Delta F^{(B-A)} = F^{(B)} - F^{(A)}, \quad \Delta F^{(C-B)} = F^{(C)} - F^{(B)} \quad (2.71)$$

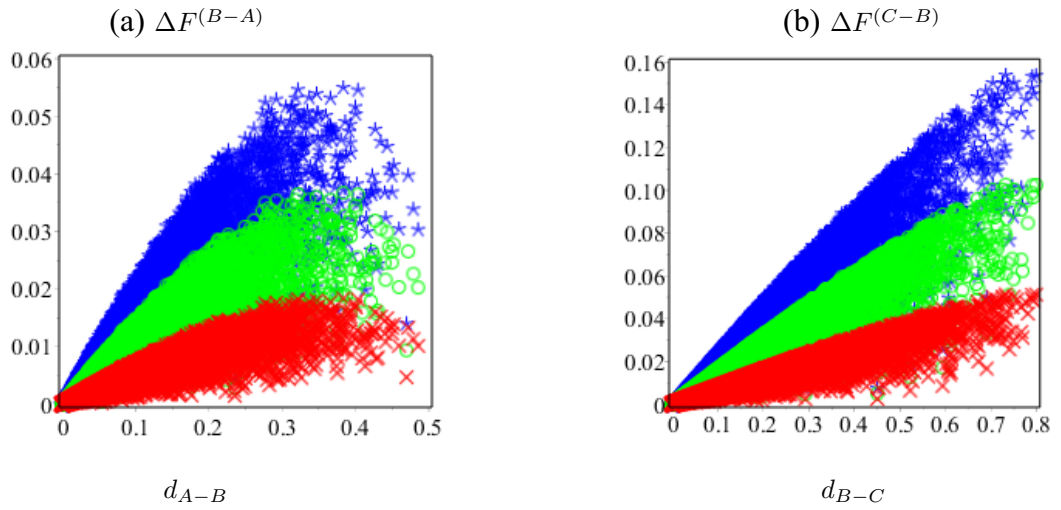


Рисунок 2.19: Асимметрии точности воспроизведения (2.71) для подсистем A и B (а) и подсистем B и C (б) для массива $N = 3000$ случайно сгенерированных трехкубитных состояний при $p = 1/4$ (\times), $p = 1/2$ (\circ), $p = 3/4$ (\star).

для трех различных значений степени декогеренции p . Мы видим, что все точки находятся выше нулевого уровня, из чего можно заключить, что для состояний с рассматриваемой структурой энтропийной асимметрии (Рис. 2.18) имеет место неравенство

$$F^{(A)} \leq F^{(B)} \leq F^{(C)}. \quad (2.72)$$

Таким образом, асимметрия точности воспроизведения напрямую связана с исходной энтропийной асимметрией и проявляет себя тем в большей степени, чем выше степень декогеренции.

Данный результат можно легко интерпретировать: чем больше энтропия кубита, тем больше он несет в себе информации, и тем деструктивнее влияние его декогеренции на общий «портрет» исходного состояния.

2.6.3 Взаимная информация в трёхкубитных разбиениях

Рассмотрим поведение взаимной информации в изначально энтропийно симметричных разбиениях $AB - C$, $AC - B$ и $AB - C$. Пусть $XY - Z$ одно из таких разбиений, причем, благодаря нашим соглашениям (см. (2.69)), внутри разбиения $X - Y$ энтропийная асимметрия имеет направление $X \rightarrow Y$.

На Рис. 2.20 представлено поведение асимметрий разрушения взаимной информации

$$\begin{aligned} \Delta I_{XY-Z}^{(Y-X)} &= \frac{I_{XY-Z}^{(Y)} - I_{XY-Z}^{(X)}}{I_{XY-Z}} \\ \Delta I_{XY-Z}^{(X-Z)} &= \frac{I_{XY-Z}^{(X)} - I_{XY-Z}^{(Z)}}{I_{XY-Z}} \end{aligned} \quad (2.73)$$

для всех трех разбиений и различных значениях параметра p .

Легко видеть, что представленные на графиках численные данные свидетельствуют о выполнении неравенства

$$I_{XY-Z}^{(Y)} \geq I_{XY-Z}^{(X)} \geq I_{XY-Z}^{(Z)}. \quad (2.74)$$

Другими словами, самой уязвимой подсистемой с точки зрения разрушения взаимной информации в разбиении $XY - Z$ оказывается одиночная подсистема Z , за ней по степени устойчивости следует кубит X , и самой устойчивым оказывается кубит Y .

Данный результат легко интерпретировать, если учесть, что вследствие чистоты исходного состояния, имеет место соотношение $I_{XY-Z} = I_{X-Z} + I_{Y-Z}$. Таким образом воздействие на Z приводит к уменьшению как I_{X-Z} , так и I_{Y-Z} , что, очевидно, более деструктивно сказывается на общей величине I_{XY-Z} по сравнению с ситуацией, когда воздействию подвергается лишь одно слагаемое I_{X-Z} или I_{Y-Z} . Отметим, что в верхнем ряду графиков на Рис. 2.20 в качестве оси абсцисс рассматривается отношение I_{X-Z}/I_{XY-Z} . Таким образом, асимметрия разрушения корреляций тем меньше, чем больше доля взаимной информации I_{X-Z} в общей величине I_{XY-Z} . В предельном случае $S_Y = 0$ имеем $I_{XY-Z} = I_{X-Z}$, что соответствует одинаковой роли кубитов X и Z в связи $XY - Z$

С другой стороны, рассматриваемая энтропийная асимметрия состояния подразумевает выполнение неравенства $I_{X-Z} \geq I_{Y-Z}$ которое объясняет большую уязвимость X по сравнению с Y . В заключение отметим, что как и в случае с точностью воспроизведения, асимметрия разрушения корреляций растет с ростом параметра p .

2.6.4 Взаимная информация в двухкубитных разбиениях

Как было получено в пункте 2.4.3 для двухкубитных разбиений $X - Y$, с направлением энтропийной асимметрии $X \rightarrow Y$ (в нашем случае это $A - B$, $A - C$ и $B - C$) имеет место правило

$$I_{X-Y}^{(X)} \geq I_{X-Y}^{(Y)}. \quad (2.75)$$

На Рис. 2.21 это правило продемонстрировано с использованием величин

$$\Delta I_{X-Y}^{(X-Y)} = \frac{I_{X-Y}^{(X)} - I_{X-Y}^{(Y)}}{I_{X-Y}} \quad (2.76)$$

для множеств случайно сгенерированных состояний.

Отметим, что в отличие рассмотренных ранее величин асимметрия разрушения взаимной информации в двухкубитных разбиениях убывает с ростом степени декогеренции.

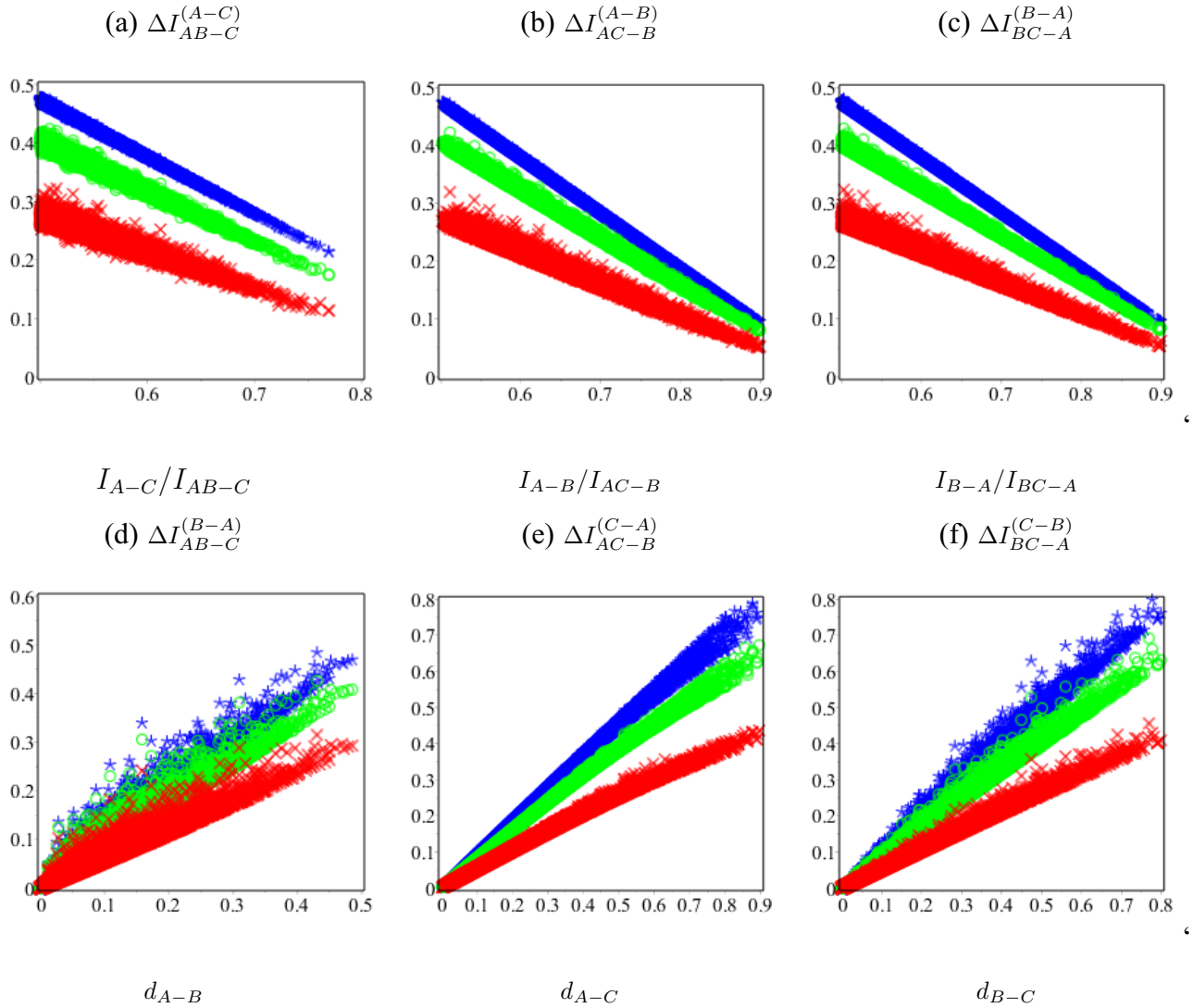


Рисунок 2.20: Асимметрии разрушения взаимной информации (2.73) в трехкубитных разбиениях для массива $N = 3000$ случайно сгенерированных чистых трехкубитных состояний при $p = 1/4$ (\times), $p = 1/2$ (\circ), $p = 3/4$ (\star). На графиках (a)-(c) рассмотрено сравнение ситуаций, когда деполаризованный кубит целиком является частью разбиения и когда он находится внутри составной части разбиения. На графиках (d)-(e) деполаризованные кубиты находятся внутри составной части разбиения.

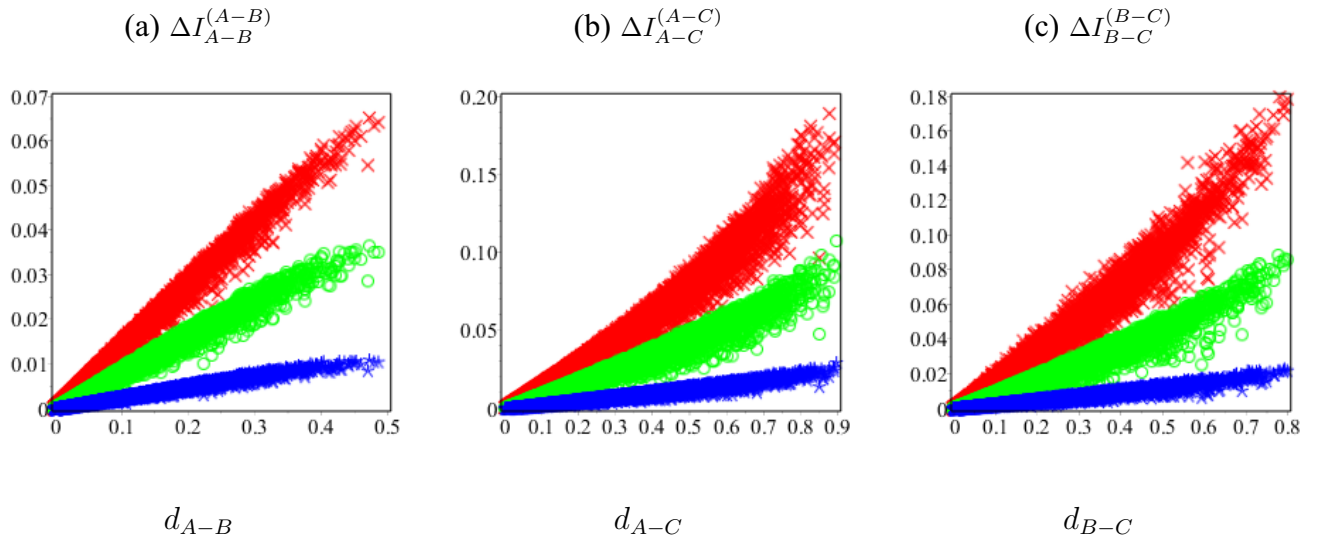


Рисунок 2.21: Асимметрии разрушения взаимной информации (2.76) в двухкубитных разбиениях $A - B$ (a), $A - C$ (b) и $B - C$ (c) для массива $N = 3000$ случайно сгенерированных чистых трехкубитных состояний при степенях декогеренции $p = 1/4$ (\times), $p = 1/2$ (\circ), $p = 3/4$ (\star).

2.6.5 Выводы

Сформулируем основные выводы из изучения деполяризации кубитов чистых асимметричных трехкубитных состояний с энтропийной асимметрией вида $A \rightarrow B \rightarrow C$ методом случайной генерации.

1. С точки зрения точности воспроизведения исходного состояния наиболее устойчивым к деполяризации оказывается кубит C , а наиболее уязвимым – кубит A .
2. С точки зрения сохранения взаимной информации в трехкубитных разбиениях типа $XY - Z$, в которых присутствует энтропийная асимметрия $X \rightarrow Y$, наиболее устойчивым к деполяризации оказывается кубит Y , а наиболее уязвимым – кубит Z .
3. С точки зрения взаимной информации в асимметричных двухкубитных разбиениях $X \rightarrow Y$ наиболее устойчивым к деполяризации оказывается кубит X (данный результат, фактически, получен ранее в разделе 2.4.3).

Результаты данного исследования представлены в работах [126, 127]. В заключение, подчеркнем, что среди всех рассмотренных состояний и их возможных вариантов декогеренции случай деполяризации кубитов чистых трехкубитных состояний демонстрирует наиболее сильную взаимосвязь между исходной энтропийной асимметрией

Полученные в разделах 2.2.5, 2.3.3, 2.4.5, 2.5.4 и 2.6.5 выводы обосновывают защищаемое положение №1.

Глава 3

Асимметричные состояния взаимодействующих физических систем

В настоящей главе рассматриваются примеры реализации асимметричных двусоставных состояний в рамках конкретных видов физического взаимодействия между подсистемами. Учет порождаемой Гамильтонианом динамики позволяет раскрыть новые аспекты роли энтропийной асимметрии квантовых состояний.

3.1 Взаимодействие частиц со спином 1/2 в неоднородном магнитном поле согласно XY-модели Гейзенберга

3.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из двух частиц со спином 1/2, находящихся в неоднородном магнитном поле и взаимодействующих друг с другом согласно XY-модели Гейзенберга. Гамильтониан исследуемой системы имеет вид

$$\mathcal{H} = B_1 S_z \otimes \mathbf{1}_2 + B_2 \mathbf{1}_2 \otimes S_z + g (S_x \otimes S_x + S_y \otimes S_y) \quad (3.1)$$

где $S_\alpha = \sigma_\alpha/2$ ($\alpha = x, y, z$) – операторы проекций спина 1/2, σ_α – стандартные матрицы Паули (2.3), g – константа взаимодействия между частицами, B_1 и B_2 – величины магнитных полей, выраженных в энергетических единицах с учетом величины магнитных моментов. В качестве вариантов физической реализации систем, описываемых данной моделью, можно рассматривать пару зарядовых кубитов с фазовой связью за счет Джозефсоновских переходов [158, 159], электронные спины в полупроводниковых квантовых точках [160, 161], а также ядерный магнитный резонанс в жидких кристаллах [162].

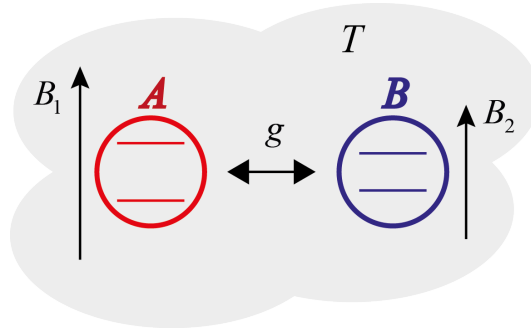


Рисунок 3.1: Схема исследуемого состояния: две частицы со спином $1/2$, связанные XY -взаимодействием Гейзенберга с константой связи g , помещены в различные магнитные поля B_1 и B_2 , а также находятся в контакте с термостатом температуры T

Для состояний частиц со спинами, направленным вдоль и противоположно оси z договоримся использовать квантово-информационные обозначения

$$|\uparrow_z\rangle = |0\rangle, \quad |\downarrow_z\rangle = |1\rangle.$$

В качестве основного объекта исследования будем рассматривать состояние термального равновесия (см. Рис. 3.1)

$$\rho_{AB} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{k_B T}\right), \quad Z = \text{Tr} \left[\exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{k_B T}\right) \right], \quad (3.2)$$

где T и k_B – температура и константа Больцмана соответственно. Особый интерес представляет собой основное состояние Гамильтониана (3.1), получающееся из состояния (3.2) в пределе $T \rightarrow 0$.

Для удобства представления результатов перейдем к безразмерным величинам, положив $\hbar = k_B = g = 1$. Таким образом, рассматриваемая система в общем случае термального состояния определяется тремя независимыми безразмерными параметрами B_1 , B_2 и T , характеризующими отношение соответствующих видов энергии к энергии взаимодействия между частицами.

В качестве дополнительной величины, характеризующей квантовые корреляции в настоящем параграфе мы рассмотрим квантовый дискорд [19, 20], представляющий собой разницу между взаимной информацией в двусоставном состоянии и локально доступной информацией, получаемой оптимальным измерением одной из подсистем. В случае, когда измерение производится над подсистемой A двусоставной системы с матрицей плотности ρ_{AB} и редуцированными матрицами ρ_A и ρ_B , квантовый дискорд может быть соответственно записан как

$$D^{(A)} = I - J^{(A)}, \quad (3.3)$$

где I – квантовая взаимная информация, и $J^{(A)}$ – локально доступная информация, определяющаяся как

$$J^{(A)} = \max_{\{\Pi_i^A\}} \left(S[\rho_B] - \sum_i p_i S[\rho_B^i] \right), \quad (3.4)$$

где $\{\Pi_i^A\}$ – положительная операторно-значная мера (ПОЗМ), соответствующая измерению над подсистемой A , $p_i = \text{Tr}[\rho_A \Pi_i^A]$ – вероятности исходов этого измерения, $\rho_B^i = \text{Tr}_A[\rho_{AB} \Pi_i^A]/p_i$ – матрицы плотности, в которые схлопывается исходная матрица ρ_B в результате измерения над подсистемой A .

Аналогичным образом можно ввести величину квантового дискорда $D^{(B)}$, определенного для измерения на подсистемой B . Важно отметить, что в общем случае дискорд несимметричен: $D^{(A)} \neq D^{(B)}$. В работе [30] продемонстрировано, что применительно к рассматриваемой системе частиц со спином $1/2$ в неоднородном магнитном поле наличие неоднородности поля приводит к появлению асимметрии квантового дискорда. В качестве количественного описания асимметрии дискорда мы будем использовать безразмерную величину

$$\Delta D = \frac{D^{(B)} - D^{(A)}}{I} = \frac{J^{(A)} - J^{(B)}}{I}, \quad (3.5)$$

сводящуюся к разности значений локально доступной информации при измерении над подсистемами B и A .

С другой стороны, в работе [163] показано, что сильный градиент магнитного поля ($B_1 \neq B_2$), особенно в случае противоположной направленности полей, оказывает благотворное влияние на сохранение корреляций между частицами при повышении температуры. Мы, рассмотрим связь этих явлений с соответствующим поведением энтропийной асимметрии, являющейся центральным объектом интереса всей работы. Кроме того, мы введем новые величины, описывающие классические корреляции между двумя подсистемами в различные моменты времени, предполагая, что между двумя этими моментами времени состояние эволюционирует в соответствии с Гамильтонианом (3.1), а декогеренцией из-за взаимодействия с внешним резервуаром на временах порядка характерного времени взаимодействия можно пренебречь.

Сформулируем основные вопросы, связанные с изучением роли энтропийной асимметрии в состоянии термального равновесия двух частиц со спином $1/2$, находящихся в неоднородном магнитном поле и взаимодействующих в рамках XU -модели Гейзенберга.

1. Построить количественные информационные характеристики, описывающие корреляции между частицами, обусловленные локальной передачей информации за счет взаимодействия.

2. Исследовать поведение энтропийной асимметрии и ее связи с асимметрией квантового дискорда и локально передаваемой информацией в зависимости от величин магнитных полей в основном состоянии Гамильтониана (3.1).
3. Исследовать поведение энтропийной асимметрии и ее связи с асимметрией квантового дискорда и локально передаваемой информацией в зависимости от магнитных полей и температуры в состоянии термального равновесия (3.2).

Основные свойства исследуемого Гамильтониана и порождаемого им оператора эволюции рассматриваются в разделе 3.1.2. В разделе 3.1.3 рассматривается вопрос о количественных характеристиках, описывающих локальный перенос информации между частицами. Свойства основного и термального состояний рассматриваются в разделах 3.1.4 и 3.1.5 соответственно. Основные выводы представлены в разделе 3.1.6.

3.1.2 Спектр Гамильтониана и оператор эволюции

В результате решения задачи на собственные векторы и собственные значения Гамильтониана (3.1)

$$\mathcal{H}|\psi^{(i)}\rangle = E^{(i)}|\psi^{(i)}\rangle, \quad i = 1..4, \quad (3.6)$$

имеем

$$\begin{aligned} |\psi^{(1)}\rangle &= |00\rangle, & E^{(1)} &= (B_1 + B_2)/2; \\ |\psi^{(2)}\rangle &= |11\rangle, & E^{(2)} &= -(B_1 + B_2)/2; \\ |\psi^{(3)}\rangle &= |\psi^+\rangle, & E^{(3)} &= K/2; \\ |\psi^{(4)}\rangle &= |\psi^-\rangle, & E^{(4)} &= -K/2; \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{N^\pm} [|01\rangle + (\Delta B \pm K)|10\rangle], \quad (3.8)$$

и приняты следующие обозначения:

$$\Delta B = B_2 - B_1, \quad K = \sqrt{\Delta B^2 + 1}, \quad N^\pm = \sqrt{1 + (\Delta B \pm \sqrt{K})^2}. \quad (3.9)$$

Сравнивая значения энергий $E^{(i)}$ в зависимости от проложенных полей B_1 и B_2 легко получить фазовую диаграмму основного состояния, представленную на Рис. 3.2. Гипербола

$$B_2 = \frac{1}{4B_1} \quad (3.10)$$

разделяет пространство на три области: при $B_1 B_2 < 1/4$ основному состоянию соответствует чистое запутанное состояние $|\psi^-\rangle$, при $B_1 B_2 > 1/4$ основное состояние является чистым и сепарабельным ($|00\rangle$ при положительных B_1 и B_2 и $|11\rangle$ при отрицательных).

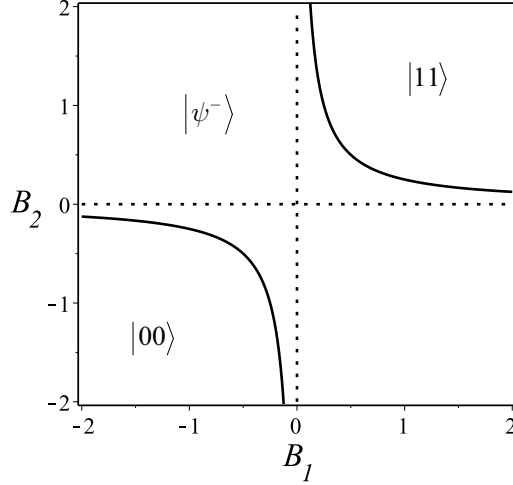


Рисунок 3.2: Фазовая диаграмма основного состояния гамильтониана (3.1)

Для удобства дальнейших вычислений перепишем векторы $|\psi^\pm\rangle$ в виде

$$|\psi^+\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |01\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |10\rangle, \quad |\psi^-\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} |01\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |10\rangle \quad (3.11)$$

где параметр θ определяется как

$$\theta = 2 \arctan(\Delta B + K) = 2 \arctan(\Delta B + \sqrt{\Delta B^2 + 1}). \quad (3.12)$$

Тогда матрица оператора эволюции системы

$$U(t) = e^{-i\mathcal{H}t} = \sum_{j=1}^4 e^{-iE^{(j)}t} |\psi^{(j)}\rangle \langle \psi^{(j)}| \quad (3.13)$$

будет иметь в вычислительном базисе вид

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i(B_1+B_2)t}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-\frac{iKt}{2}} + \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\frac{iKt}{2}} & -i \sin \theta \sin \frac{Kt}{2} & 0 \\ 0 & -i \sin \theta \sin \frac{Kt}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-\frac{iKt}{2}} + \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\frac{iKt}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{i(B_1+B_2)t}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

В дальнейших рассуждениях важную роль будет играть время, необходимое для локального обмена информацией между взаимодействующими подсистемами. Исходя из вида оператора (3.14) для рассматриваемой системы его можно ввести как минимальное время, максимизирующее амплитуды недиагональных элементов $|\langle 01|U(t)|10\rangle| = |\langle 10|U(t)|01\rangle|$

$$t_{\text{loc}} = \pi/K. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.14), имеем

$$U(t_{\text{loc}}) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i(B_1+B_2)\pi}{2K}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i \cos \theta & -i \sin \theta & 0 \\ 0 & -i \sin \theta & i \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{i(B_1+B_2)\pi}{2K}} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Как мы можем убедиться, наиболее эффективный локальный обмен информацией осуществляется в случае резонанса $B_1 = B_2 = B_0$, при котором $K = 1$, $\theta = \pi/2$ и

$$U(t_{\text{loc}}) = \begin{pmatrix} e^{iB_0t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-iB_0t} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

что соответствует действию оператора обмена iSWAP совместно с действием локальных фазовых операторов на каждую из частиц. Появление неоднородности поля ΔB ведет к отстройке от резонанса, уменьшению значения $\sin \theta$ и ухудшению локального обмена информацией.

3.1.3 Поток информации в стационарных состояниях

Рассмотрим вопрос о локальной передаче информации в стационарных состояниях квантовых систем. Пусть имеется некоторое стационарное двусоставное состояние ρ_{AB} (см. Рис. 3.3), инвариантное к действию оператора собственной эволюции

$$U(t)\rho_{AB}U^\dagger(t) = \rho_{AB}. \quad (3.18)$$

Обозначим его редуцированные состояния как

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}, \quad \rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}, \quad (3.19)$$

а также введем локальные базисы $\{|i\rangle_A\}$ и $\{|j\rangle_B\}$ в пространствах подсистем, в которых редуцированные матрицы плотности имеют диагональный вид

$$\rho_A = \sum_i p_A^i |i\rangle_A \langle i|, \quad \rho_B = \sum_j p_B^j |j\rangle_B \langle j|. \quad (3.20)$$

Без ограничения общности будем рассматривать вопрос о локальной передаче информации в направлении от A к B . Для того, чтобы получить сведения о корреляциях между состоянием подсистемы A в момент времени $t = 0$ и состоянием подсистемы B в момент времени $t = t_{\text{loc}}$ введем дополнительную подсистему A' , имеющую такую же размерность и набор базисных

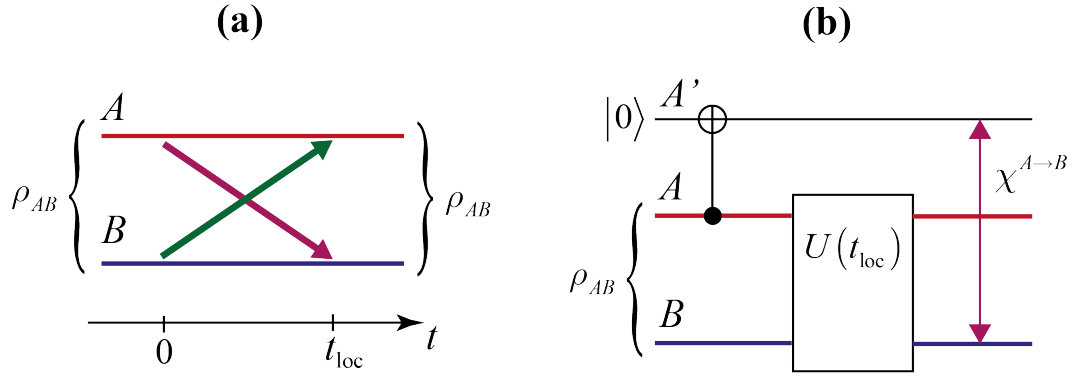


Рисунок 3.3: (а) Схематичное изображение локальных потоков информации в стационарном двух-составном состоянии. (б) Эквивалентное представление потоков информации в квантово информ-мационных обозначениях для двухкубитных состояний: вертикальной линией обозначен вентиль CNOT, связывающий контролирующий (●) и контролируемый (⊕) кубиты.

состояний, что и A , и приготовленную изначально в состоянии $|0\rangle_{A'}$. Пусть в момент времени $t = 0$ происходит проецирующее измерение подсистемы A с записью результатов измерения на подсистему A' в соответствии с преобразованием

$$|0i\rangle_{A'A} \rightarrow |ii\rangle_{A'A}. \quad (3.21)$$

В случае кубитов это преобразование соответствует действию вентиль CNOT (см. Рис. 3.3), в котором контролирующим является кубит A . Другими словами, в момент времени $t = 0$ мы производим копирование состояния A на A' . Данное утверждение не противоречит известной теореме о запрете квантового клонирования [164], вследствие изначальной договоренности о диагональности матрицы ρ_A в рассматриваемом базисе $\{|i\rangle_A\}$ (см. (3.20)). С точки зрения всего ансамбля возможных результатов измерения преобразование (3.21) оставляет состояние подсистемы A неизменным в то время, как общее состояние всей системы ρ_{AB} деформируется. В конкретном случае получения i -го результата измерения, реализующегося с вероятностью p_i^A , матрица плотности ρ_{AB} претерпевает следующее изменение:

$$\rho_{AB} \rightarrow \frac{1}{p_i^A} |i\rangle_A \langle i| \otimes \langle i|_A \rho_{AB} |i\rangle_A. \quad (3.22)$$

Далее, если оставить систему эволюционировать в соответствии с её оператором эволюции $U(t)$, состояние подсистемы B в зависимости от времени при условии реализации i -го результата измерения будет иметь вид

$$\tilde{\rho}_B^i(t) = \frac{1}{p_i^A} \text{Tr}_A [U(t) (|i\rangle_A \langle i| \otimes \langle i|_A \rho_{AB} |i\rangle_A) U^\dagger(t)]. \quad (3.23)$$

Величину взаимной информации между подсистемой A' , хранящей память о подсистеме в момент времени $t = 0$, и подсистемой B в произвольный момент времени t можно вычислить как разницу безусловной и условных энтропий

$$\chi^{A \rightarrow B}(t) = S \left[\sum_i p_A^i \tilde{\rho}_B^i(t) \right] - \sum_i p_A^i S[\tilde{\rho}_B^i(t)]. \quad (3.24)$$

В некотором роде мы можем говорить о наличии однопараметрического семейства классически-квантовых каналов [8], на вход которых подается классическое вероятностное распределение $\{p_A^i\}$, а на выходе соответственно реализуются состояния $\{\tilde{\rho}_B^i(t)\}$. В такой интерпретации величина $\chi^{A \rightarrow B}(t)$ представляет собой границу Холево такого канала. Основным отличием же рассматриваемой ситуации от действия настоящих квантовых каналов является, конечно же, невозможность варьирования входного сигнала, что снимает возможность постановки вопроса о пропускных способностях.

Очевидным образом, все представленные выше рассуждения можно провести для случая измерения над B и получить величину $\chi^{B \rightarrow A}(t)$. Также отметим, что из общих физических соображений величины $\chi^{A \rightarrow B}(t)$ и $\chi^{B \rightarrow A}(t)$ должны достигать локальных максимумов при $t = t_{\text{loc}}$.

В настоящей работе основной интерес будет представлять величина средней локально передаваемой информации

$$\chi = \frac{1}{2} (\chi^{A \rightarrow B}(t_{\text{loc}}) + \chi^{B \rightarrow A}(t_{\text{loc}})), \quad (3.25)$$

а также относительная асимметрия локально передаваемой информации

$$\Delta\chi = \frac{\chi^{A \rightarrow B}(t_{\text{loc}}) - \chi^{B \rightarrow A}(t_{\text{loc}})}{\chi^{A \rightarrow B}(t_{\text{loc}}) + \chi^{B \rightarrow A}(t_{\text{loc}})}. \quad (3.26)$$

Важно отметить, что в выражении (3.23) мы пренебрегли возможным действием окружающей среды, таким образом, все вышеприведенные рассуждения верны в пределе

$$t_{\text{loc}} \ll t_{\text{rel}}, \quad (3.27)$$

где t_{rel} – время релаксации к исходному состоянию ρ_{AB}

Наконец, рассмотрим важный частный случай чистых стационарных состояний

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |ii\rangle_{AB}, \quad (3.28)$$

для которых естественным образом имеем

$$\rho_A = \rho_B = \sum_i |c_i|^2 |i\rangle\langle i|, \quad (3.29)$$

и для которых можно предполагать отсутствие асимметрии локально передаваемой информации ($\Delta\chi = 0$) по аналогии с величиной энтропийной асимметрии d . Рассмотрим данную ситуацию подробно.

В обоих случаях (как измерения A , так и измерения B) состояние (3.28) коллапсирует в вектор $|ii\rangle_{AB}$ с вероятностью $|c_i|^2$. В результате свободной эволюции данное состояние преобразуется в $U(t)|ii\rangle_{AB}$, вследствие чего имеем

$$S[\tilde{\rho}_A^i(t)] = S[\tilde{\rho}_B^i(t)]. \quad (3.30)$$

Однако, мы ничего не можем сказать о самих матрицах $\tilde{\rho}_A^i(t)$ и $\tilde{\rho}_B^i(t)$, а главное об энтропиях соответствующих усредненных по ансамблю состояний $\sum_i |c_i|^2 \tilde{\rho}_A^i$ и $\sum_i |c_i|^2 \tilde{\rho}_B^i$. Таким образом, необходимым и достаточным условием отсутствия асимметрии локально передаваемой информации $\Delta\chi = 0$ будет являться тождество

$$S \left[\sum_i |c_i|^2 \tilde{\rho}_A^i(t) \right] = S \left[\sum_i |c_i|^2 \tilde{\rho}_B^i(t) \right]. \quad (3.31)$$

Его выполнение, в свою очередь, определяется видом Гамильтониана, порождающего чистые стационарные состояния.

3.1.4 Основное состояние

Как было показано ранее, можно выделить следующие типы основных состояний исследуемого Гамильтониана в зависимости от соотношения полей B_1 и B_2 (см. Рис. 3.2): чистое сепарабельное состояние $|00\rangle$ и $|11\rangle$, чистое запутанное состояние $|\psi^-\rangle$, вырожденное состояние

$$\rho_{AB}^{\text{gr}} = \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11| + \frac{1}{2}|\psi^-\rangle\langle \psi^-| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta/2) & -\sin \theta/2 & 0 \\ 0 & -\sin \theta/2 & \cos^2(\theta/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

на ветке гиперболы (3.10) $B_1, B_2 > 0$, а также

$$\tilde{\rho}_{AB}^{\text{gr}} = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|\psi^-\rangle\langle \psi^-| \quad (3.33)$$

на ветке гиперболы (3.10) $B_1, B_2 < 0$.

В рамках изучения энтропийной асимметрии основной интерес представляет случай вырождения, при котором оно становится смешанным. Однако, прежде, чем переходить к смешанному основному состоянию, рассмотрим вопрос о локальных потоках информации в чистых основных состояниях.

Очевидно, в случаях состояний $|00\rangle$ (или $|11\rangle$) ситуация тривиальна: проективное измерение в вычислительном базисе какой-либо из частиц со 100%-ой вероятностью оставляет состояние неизменным, а последующая эволюция может добавляет лишь дополнительный фазовый множитель. Таким образом, для основного состояния $B_1 B_2 > 1/4$ имеем $\chi = \Delta\chi = 0$.

Более интересная ситуация реализуется для состояний $|\psi^-\rangle$ (3.8). Проективное измерение этого состояния приводит к его коллапсу либо в вектор $|01\rangle$ с вероятностью $\sin^2(\theta/2)$, либо в вектор $|10\rangle$ с вероятностью $\cos^2(\theta/2)$. Последующая эволюция полного ансамбля этих состояний в соответствии с оператором (3.14) приводит к матрице с общим видом ненулевых элементов

$$\tilde{\rho}_{AB}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

редуцирование которой дает одинаковые матрицы плотности подсистем. Вследствие этого, имеем выполнение тождества (3.31) и отсутствие асимметрии локальных потоков информации $\Delta\chi = 0$.

На Рис. 3.4 представлено поведение величины среднего потока информации от времени

$$\chi(t) = \chi^{A \rightarrow B}(t) = \chi^{B \rightarrow A}(t) \quad (3.35)$$

для различных конфигураций полей B_1 и B_2 . Отметим ряд важных особенностей. Величина $\chi(t)$ имеет локальный максимум в момент времени $t = 0$, соответствующий мгновенным корреляциям, обусловленным квантовой запутанностью состояния $|\psi^-\rangle$ (в данном случае корректнее говорить о классической части этих корреляций, т.к. они получены уже по результатам измерения состояния). Следующий локальный максимум достигается при $t = t_{loc}$ и соответствует локально передаваемой информации между частицами. При наличии отстройки от резонанса данный максимум располагается ниже, что свидетельствует о превышении уровня нелокальных корреляций над локальными для чистых основных состояний. При $t = 2t_{loc}$ уровень корреляций с учетом пренебрежения воздействием окружающей среды возвращается к исходному.

Перейдем к изучению вырожденного основного состояния, лежащего на гиперболе $B_1 B_2 = 1/4$. Рассмотрим состояния, принадлежащие ветви, располагающиеся в квадранте $B_1, B_2 > 0$ (для квадранта $B_1, B_2 < 0$ результаты будут аналогичными вследствие общей симметрии). В данной области матрица плотности основного состояния принимает вид (3.32), а редуцирован-

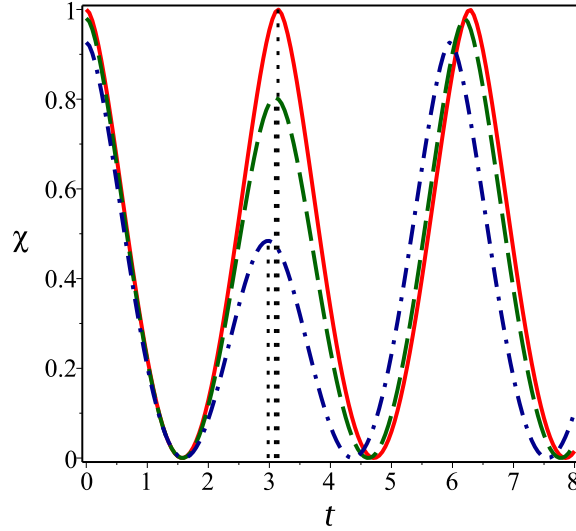


Рисунок 3.4: Потоки информации (3.35) в зависимости от времени для чистого основного состояния $|\psi^-\rangle$ при различных значения полях: $B_1 = B_2 = 1/3$ (сплошная линия), $B_1 = 1/3, B_2 = 1/6$ (пунктирная линия), $B_1 = 1/3, B_2 = 0$ (штрих-пунктирная линия). Вертикальными линиями отмечены моменты времени $t = t_{\text{loc}}$ для различных конфигураций полей.

ные матрицы подсистем соответственно

$$\begin{aligned} \rho_A^{\text{gr}} &= \frac{1}{2(N^-)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (K - \Delta B)^2 + (N^-)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin^2(\theta/2) & 0 \\ 0 & 1 + \cos^2(\theta/2) \end{pmatrix}, \\ \rho_B^{\text{gr}} &= \frac{1}{2(N^-)^2} \begin{pmatrix} (K - \Delta B)^2 & 0 \\ 0 & 1 + (N^-)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) & 0 \\ 0 & 1 + \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Важно отметить, что все элементы матриц (3.32) и (3.36) однозначно определяются неоднородностью поля ΔB (3.9).

Рассмотрим свойства состояния (3.32). К интересующим нас характеристикам будут относиться:

- (i) согласованность C , вычисляемая по формуле (2.20), как мера запутанности и общей величины квантовых корреляций между подсистемами;
- (ii) величина энтропийной асимметрии d , вычисляемая по формуле (1.29), как мера асимметрии состояния основанная исключительно на вычислении энтропий фон Неймана;
- (iii) величина относительной асимметрии дискорда ΔD , вычисляемые по формуле (3.5), характеризующие неравенство локально доступной информации, получаемой при измерениях над различными подсистемами;

(iv) новые величины средней локально передаваемой информации χ и относительной асимметрии локально передаваемой информации $\Delta\chi$, вычисляемые по формулам (3.25) и (3.26) соответственно.

Для вычисления величины энтропийной асимметрии d и взаимной информации I воспользуемся явным видом общей (3.32) и редуцированных (3.36) матриц плотности. Легко видеть, что

$$S[\rho_{AB}^{\text{gr}}] = 1, \quad S[\rho_A^{\text{gr}}] = h_b(\sin^2(\theta/2)/2), \quad S[\rho_B^{\text{gr}}] = h_b(\cos^2(\theta/2)/2). \quad (3.37)$$

С неоднородности поля ΔB от 0 до $+\infty$ мы имеем возрастание величины $\sin^2(\theta/2)/2$ от 1/4 до 1/2, и убывание $\cos^2(\theta/2)/2$ от 1/4 до 0. Таким образом при $\Delta B > 0$ имеем $S[\rho_A^{\text{gr}}] > S[\rho_B^{\text{gr}}]$. Соответственно при $\Delta B < 0$ ситуация меняется на противоположную, и мы получаем $S[\rho_A^{\text{gr}}] < S[\rho_B^{\text{gr}}]$.

Важным свойством матрицы (3.32) является то, что она относится к семейств матриц X -типу [36]. Данное обстоятельство значительно упрощает вычисление величин квантового дискорда (см. Приложение В). Максимумы локально доступной информации $J^{(A)}$ и $J^{(B)}$ достигаются при измерении проекций спина частиц A и B на ось x и оказываются равными

$$\begin{aligned} J^{(A)} &= 1 + h_b(\cos^2(\theta/2)/2) - h_q(\sin(\theta/2)), \\ J^{(B)} &= 1 + h_b(\sin^2(\theta/2)/2) - h_q(\cos(\theta/2)), \end{aligned} \quad (3.38)$$

где

$$h_q = -\frac{1}{2}(1-x)\log_2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{2}(1+x)\log_2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x\right). \quad (3.39)$$

Для вычисления локального потока информации $\chi^{A \rightarrow B}(t_{\text{loc}})$ необходимо получить вид матриц плотности $\tilde{\rho}_B^i(t_{\text{loc}})$ и соответствующих вероятностей p_A^i . Для исследуемого состояния они оказываются равными

$$\begin{aligned} p_A^0 &= \sin^2(\theta/2)/2, & \tilde{\rho}_B^0(t_{\text{loc}}) &= \sin^2(\theta)|0\rangle\langle 0| + \cos^2(\theta)|1\rangle\langle 1|, \\ p_A^1 &= 1 - \sin^2(\theta/2)/2, & \tilde{\rho}_B^1(t_{\text{loc}}) &= (1 - \Gamma)|0\rangle\langle 0| + \Gamma|1\rangle\langle 1|, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где $\Gamma = (\cos(\theta/2)^2 + 1)^{-1}(4\cos(\theta/2)^4 \sin^2(\theta/2) + 1)$. Противоположный поток информации вычисляется путем замены $\theta \rightarrow \bar{\theta} = 2 \arctan(-\Delta B + K)$, в свою очередь подразумевающую замену $\sin(\theta/2) \leftrightarrow \cos(\theta/2)$.

Величина согласованности в состоянии (3.32) оказывается равной

$$C = \frac{1}{2} \sin \theta. \quad (3.41)$$

Таким образом, все исследуемые меры корреляций определяются параметром θ , который в свою очередь зависит только от неоднородности поля ΔB (см. (3.12)).

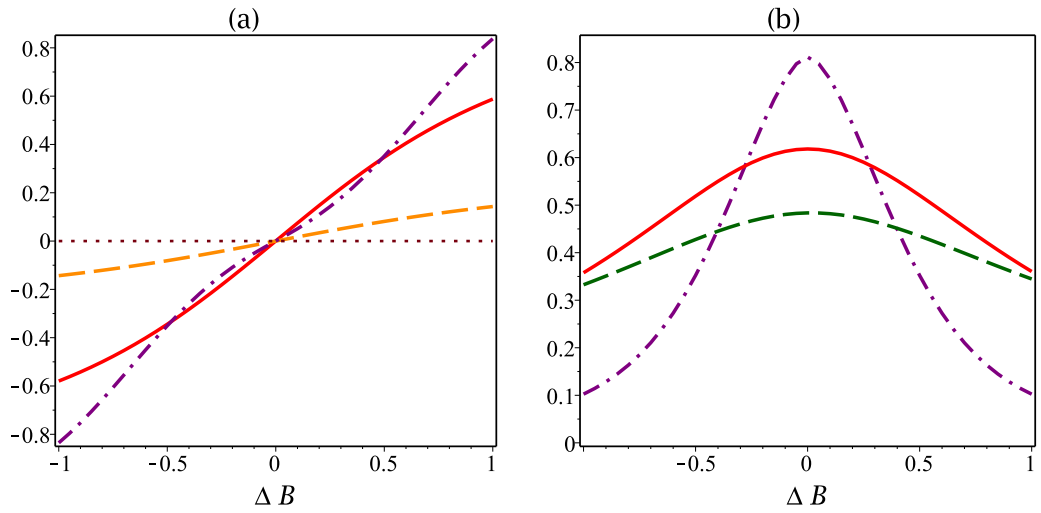


Рисунок 3.5: (а): Поведение энтропийной асимметрии d (сплошная линия), относительной асимметрии дискорда ΔD , (пунктирная линия) и относительной асимметрии локально передаваемой информации $\Delta\chi$ (штрихпунктирная линия) как функции неоднородности магнитного поля ΔB . (б): Поведение взаимной информации I (сплошная линия), согласованности C (пунктирная линия) и средней локально передаваемой информации χ как функции неоднородности магнитного поля ΔB

Поведение величин d , и ΔD и $\Delta\chi$, характеризующих асимметрию состояния, как функций ΔB представлено на Рис. 3.5а, соответствующее поведение величин C , I и χ , характеризующих общий уровень корреляций, представлено на Рис. 3.5б. В согласии с интуитивными представлениями в случае однородности поля $\Delta B = 0$ исследуемое состояние является симметричным, и для него выполняется равенство энтропий подсистем $S[\rho_A^{\text{gr}}] = S[\rho_B^{\text{gr}}]$. Кроме того, при $\Delta B = 0$ вектор $|\psi^-\rangle$, отвечающий за наличие запутанности в смешанном состоянии (3.32), превращается максимально запутанное Белловское состояние, чему соответствует максимум согласованности C и взаимной информации I .

Неоднородность магнитного поля влечет за собой возникновение энтропийной асимметрии d , которая совпадает со знаком ΔB . Данное обстоятельство объясняется стабилизирующей ролью магнитного поля: чем больше напряженность поля, тем сильнее оно ограничивает неопределенность в направлении соответствующего спина в основном состоянии. Также отметим, что величина d монотонно возрастает (убывает) с возрастанием (убыванием) ΔB .

Из представленного поведения величины ΔD следует, что наибольший локальный доступ к взаимной информации достигается при измерении проводимым над спином, находящимся в более слабом магнитном поле и обладающим большей энтропией. Таким образом, направление

асимметрии дискордов совпадает с направлением энтропийной асимметрии. Кроме того, для представленной области параметров с большой степенью точности выполняется равенство

$$d \approx 4.1\Delta D \quad (3.42)$$

из которого, после умножение на величину взаимной информации I , следует соотношение на безусловную асимметрию дискордов

$$d \cdot I \approx 4.1 (D^{(B)} - D^{(A)}) = 4.1 (J^{(A)} - J^{(B)}), \quad (3.43)$$

где, напомним, $J^{(A)}$ и $J^{(B)}$ – представляет собой величин локально доступной информации при измерениях над A и B соответственно.

Перейдем к рассмотрению поведения локальных потоков информации, характеризующихся величинами χ и $\Delta\chi$. Как мы видим, в случае $\Delta B > 0$, что соответствует $B_2 > B_1$, локальный поток информации $\chi^{A \rightarrow B}(t_{\text{loc}})$ от частицы A к частице B превышает противоположный поток информации $\chi^{B \rightarrow A}(t_{\text{loc}})$. Данное поведение полностью согласуется со значениями остальных величин, характеризующими асимметрию корреляций: d и ΔD .

Анализ динамики величин $\chi^{A \rightarrow B}(t)$ и $\chi^{B \rightarrow A}(t)$ (пример для $\Delta B = 0.9$ и резонанса $\Delta B = 0$ представлен на Рис. 3.6) показывает, что в исследуемом смешанном состоянии локальный поток информации от частицы, находящейся в более слабом магнитном поле, всегда превышает уровень соответствующих мгновенных корреляций: например, при $\Delta B > 0$ мы соответственно имеем

$$\chi^{A \rightarrow B}(t_{\text{loc}}) > \chi^{A \rightarrow B}(0) = \chi^{B \rightarrow A}(0). \quad (3.44)$$

Таким образом, в случае неоднородности магнитного поля, мы имеем ярко выраженную асимметрию в передаче локальной информации. Также отметим, что смешанность состояния может приводит к превышению локального потока информации над уровнем мгновенных корреляций, что представляет важное отличие по сравнению со случаем чистых состояний (см. Рис. 3.4). Данное явление является характерной чертой отличия квантовых систем от чисто классических, в которых имеют место лишь запаздывающие корреляции, обусловленные локальной передачей информации.

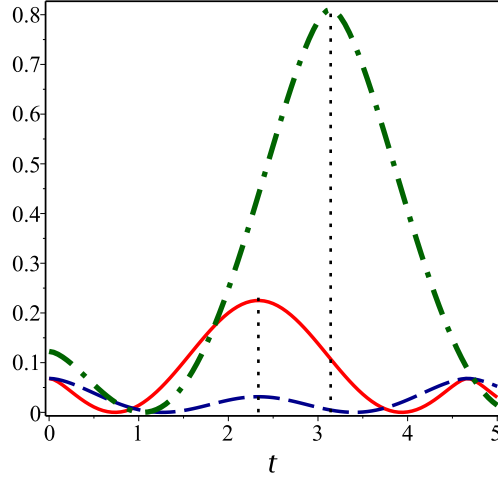


Рисунок 3.6: Потоки информации $\chi^{A \rightarrow B}(t)$ (сплошная линия) и $\chi^{B \rightarrow A}(t)$ (пунктирная линия) в вырожденном основном состоянии (3.32) при $\Delta B = 0.9$, а также симметричные потоки информации $\chi^{A \rightarrow B}(t) = \chi^{B \rightarrow A}(t) = \chi(t)$ (штрихпунктирная линия) в этом же состоянии при резонансе $\Delta B = 0$. Вертикальными линиями отмечены моменты времен $t = t_{loc}$

3.1.5 Термальное состояние

Перейдем к рассмотрению состояния термального равновесия (3.2) при ненулевых температурах. Его матрица плотности в явном виде может быть записана как

$$\rho_{AB} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \exp \frac{-B_1 - B_2}{2T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m - n & -s & 0 \\ 0 & -s & m + n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp \frac{B_1 + B_2}{2T} \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

где приняты обозначения

$$m = \operatorname{ch} \frac{K}{2T}, \quad n = -\cos \theta \operatorname{sh} \frac{K}{2T}, \quad s = \sin \theta \operatorname{sh} \frac{K}{2T},$$

$$Z = 2m + \exp \frac{B_1 + B_2}{2T} + \exp \frac{-B_1 - B_2}{2T}.$$

Матрицы подсистем соответственно принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_A &= \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \exp \frac{-B_1 - B_2}{2T} + m - n & 0 \\ 0 & \exp \frac{B_1 + B_2}{2T} + m + n \end{pmatrix}, \\ \rho_B &= \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \exp \frac{-B_1 - B_2}{2T} + m + n & 0 \\ 0 & \exp \frac{B_1 + B_2}{2T} + m - n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Энтропии всей системы и подсистем могут быть получены как

$$S[\rho_{AB}] = \log_2 Z + E/T, \quad (3.47)$$

$$S[\rho_A] = h_b \left(\frac{1}{Z} \exp \frac{-B_1 - B_2}{2T} + m - n \right), \quad S[\rho_B] = h_b \left(\frac{1}{Z} \exp \frac{-B_1 - B_2}{2T} + m + n \right). \quad (3.48)$$

В случае однородности магнитного поля $B_1 = B_2 = B_0$ получаем, очевидно, равенство редуцированных матриц плотности

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \exp \frac{-B_0}{T} + \operatorname{ch} \frac{1}{2T} & 0 \\ 0 & \exp \frac{B_0}{T} + \operatorname{ch} \frac{1}{2T} \end{pmatrix},$$

а также их энтропий фон Неймана.

С другой стороны, в случае равных по модулю антипараллельных полей $B_1 = -B_2 = B_0$ матрицы плотности подсистем принимают вид

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 1 + m_0 + n_0 & 0 \\ 0 & 1 + m_0 - n_0 \end{pmatrix}, \quad \rho_B = \begin{pmatrix} 1 + m_0 - n_0 & 0 \\ 0 & 1 + m_0 + n_0 \end{pmatrix},$$

где m_0 и n_0 – соответствующие данным полям значения величин m и n , и мы вновь получаем равенство их энтропий фон Неймана. Таким образом, мы можем заключить, что при $|B_1| = |B_2|$ энтропийная асимметрия в состоянии (3.45) отсутствует.

Рассмотрим соотношения между энтропиями фон Неймана редуцированных матриц плотности в случае $|B_1| \neq |B_2|$. Для этой цели рассмотрим разность мер смешанности $1 - \operatorname{Tr} \rho_A^2$ и $1 - \operatorname{Tr} \rho_B^2$. Подставляя явный вид матриц (3.46) получаем

$$\operatorname{Tr} \rho_B^2 - \operatorname{Tr} \rho_A^2 = \frac{4}{Z^2} n e^{-\frac{B_1+B_2}{T}} (1 - e^{\frac{B_1+B_2}{T}}). \quad (3.49)$$

Знак выражения (3.49) определяется, с одной стороны, знаком суммы полей $B_1 + B_2$, а с другой стороны знаком величины n , определяющимся, в свою очередь, знаком ΔB ($\operatorname{sign} n = \Delta B$). В результате имеем $\operatorname{Tr} \rho_B^2 > \operatorname{Tr} \rho_A^2$ при $|B_1| < |B_2|$ и $\operatorname{Tr} \rho_B^2 < \operatorname{Tr} \rho_A^2$ при $|B_1| > |B_2|$. Однако знак $\operatorname{sign}(\operatorname{Tr} \rho_B^2 - \operatorname{Tr} \rho_A^2)$ очевидно совпадает со знаком $\operatorname{sign}(S[\rho_A] - S[\rho_B])$, таким образом энтропийная асимметрии направлена от частицы в более слабом магнитном поле к частице в более сильном магнитном поле.

Величина согласованности для состояния (3.45) будет имеет вид

$$C = \max(0, 2(s-1)/Z). \quad (3.50)$$

Рассмотрим три конфигурации магнитных полей:

- $B_1 = B_1^c, B_2 = B_2^c$;

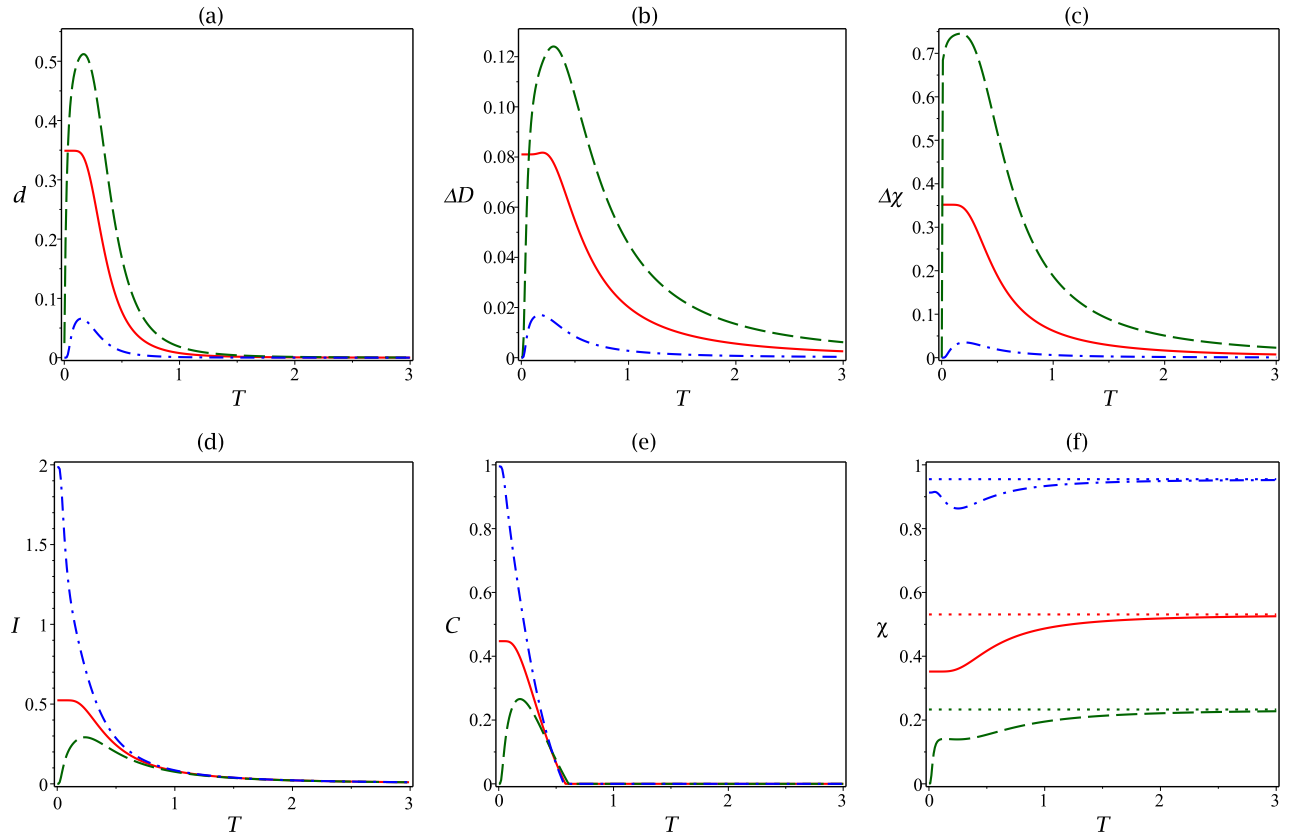


Рисунок 3.7: Зависимость энтропийной асимметрии d (a), относительной асимметрии дискорда ΔD (b), относительной асимметрии локально передаваемой информации $\Delta\chi$ (c), взаимной информации I (d), согласованности C (e) и средней локально передаваемой информации χ (f) в зависимости от температуры T в состоянии (3.45) при соответствующих значениях магнитных полей B_1^c, B_2^c (сплошная линия), $B_1^c, B_2^c + 0.4$ (пунктирная линия), $B_1^c, B_2^c - 0.4$ (штрихпунктирная линия). На рисунке f дополнительно представлены асимптотические значения, вычисленные по формуле (3.56)

- $B_1 = B_1^c, B_2 = B_2^c + 0.4;$
- $B_1 = B_1^c, B_2 = B_2^c - 0.4;$

в которых значения $B_1^c \approx 0.309$ и $B_2^c \approx 0.809$ определяются соотношением $B_1^c B_2^c = 1/4$, соответствующим гиперболе вырожденных основных состояний, и величине неоднородности поля $B_2^c - B_1^c = 0.5$. На Рис. 3.7 представлены все основные характеристики, описывающие асимметрию и величины корреляций, в исследуемых состояниях как функции температуры.

Как было показано ранее, в случае нулевой температуры асимметрия корреляций присутствует лишь в вырожденных основных состояниях. Из зависимостей, представленных на Рис. 3.7а-с следует, что с ростом температуры невырожденные основные состояния также приобретают

асимметрию с позиции всех трех исследуемых величин: d , ΔD и $\Delta\chi$; причем, поведение всех величин имеет качественно схожий характер. Отметим, что для пары полей $(B_1^c, B_2^c + 0.4)$, которой соответствует сепарабельное состояние $|11\rangle$, имеет место более резкое возникновение асимметрии по сравнению с конфигурацией $B_1^c, B_2^c - 0.4$, которой соответствует чистое запутанное основное состояние $|\psi^-\rangle$. Меры асимметрии для вырожденного основного состояния сохраняют свои значения при $T \lesssim 0.2$, после чего происходит их убывание с дальнейшим ростом температуры. Таким образом, при $T \rightarrow \infty$ термальное состояние теряет асимметрию при фиксированных значениях магнитных полей.

Перейдем к рассмотрению поведения величин, характеризующих объем корреляций, представленных на Рис. 3.7d-f. Для конфигурации полей $(B_1^c, B_2^c + 0.4)$ имеет место возникновение и рост величин I и C с возрастанием температуры при $T \lesssim 0.2$, объясняющийся появлением компоненты $|\psi^-\rangle\langle\psi^-|$, ответственной за корреляции, в общей термальной смеси. Дальнейший рост температуры ведет к увеличению смешанности состояния, и в пределе $T \rightarrow \infty$ мы получаем максимально смешанное двухкубитное состояние

$$\rho_{AB}^{\text{asympt}} = \frac{1}{4}\mathbf{1}_4, \quad (3.51)$$

в котором мгновенные корреляции отсутствуют.

Качественно иное поведение демонстрирует величина χ , соответствующая потокам локальной информации и отвечающая за запаздывающие корреляции между подсистемами. Зависимости, представленные на Рис. 3.7f, демонстрируют наличие горизонтальных асимптот, на которые выходят зависимости χ в пределе $T \rightarrow \infty$. Получим аналитические выражения для данных асимптот, исходя из вида матрицы плотности (3.51) и оператор эволюции (3.14).

Измерение частицы A приведет к коллапсу состояния (3.51) в состояния $|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}_2/2$ или $|1\rangle\langle 1| \otimes \mathbf{1}_2/2$ с одинаковыми вероятностями $p_A^1 = p_A^2 = 1/2$. Их последующая эволюция в течение промежутка времени $t = t_{\text{loc}}$ приведет к соответствующим состояниям частицы B :

$$\tilde{\rho}_B^1(t_{\text{loc}}) = \begin{pmatrix} 1 - \cos^2(\theta)/2 & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta)/2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\rho}_B^2(t_{\text{loc}}) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta)/2 & 0 \\ 0 & 1 - \cos^2(\theta)/2 \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

удовлетворяющим соотношению

$$\frac{1}{2}\tilde{\rho}_B^1(t_{\text{loc}}) + \frac{1}{2}\tilde{\rho}_B^2(t_{\text{loc}}) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_2. \quad (3.53)$$

Подставляя полученные результаты в выражение (3.24), получаем локальный поток информации от A к B

$$\chi^{A \rightarrow B}(t_{\text{loc}}) = 1 - h_b(\cos^2(\theta)/2), \quad (3.54)$$

записанный через бинарную энтропийную функцию (2.19).

Чтобы получить противоположный поток информации от B к A , воспользуемся заменой $\theta \rightarrow \bar{\theta}$, в которой новый параметр

$$\bar{\theta} = 2 \arctan(-\Delta B + K) \quad (3.55)$$

получается изменением знака у неоднородности поля ΔB . Используя тригонометрические преобразования, легко показать выполнение равенства $\cos^2 \theta = \cos^2 \bar{\theta}$, из которого при подстановке в (3.54) автоматически следует тождество

$$\chi^{\text{asympt}} = \chi^{A \rightarrow B}(t_{\text{loc}}) = \chi^{B \rightarrow A}(t_{\text{loc}}) = 1 - h_b(\cos^2(\theta)/2), \quad (3.56)$$

а также отсутствие асимметрии локальных потоков информации $\Delta\chi = 0$ в полном соответствии с результатами, представленными на Рис. 3.7е. Полученные значения χ^{asympt} для исследуемых конфигураций полей также показаны на Рис. 3.7ф.

Таким образом, мы можем заключить, что с ростом температуры, соответствующим переходу квантовой системы в классическую, роль мгновенных корреляций ослабляется, в то время как роль корреляций, обусловленных локальным переносом информации, – увеличивается. Кроме того, повышение температуры способствуют сглаживанию асимметрии всех видов корреляций.

Далее рассмотрим зависимость различных характеристик мгновенных и запаздывающих корреляций от силы магнитного поля B_2 при фиксированном значении поля $B_1 = 1$ и наборе температур $T = 0.75, 1, 1.25$. Полученные результаты представлены на Рис. 3.8. Зависимость для согласованности C опущена, вследствие отсутствия запутанности при рассматриваемых температурах.

В первую очередь проанализируем поведение энтропийной асимметрии d . Как было показано ранее, при равенстве модулей полей $|B_1| = |B_2|$ энтропии фон Неймана обеих частиц равны друг другу, и мы имеем $d = 0$. Как показывают результаты вычислений, в случае наличия неоднородности поля знак величины d совпадает со знаком разности $|B_2| - |B_1|$, таким образом, энтропийная асимметрия направлена от частицы в более слабом магнитном поле к частице в более сильном магнитном поле. Данный результат, в свою очередь, полностью соответствует выводам, полученным при изучении вырожденного основного состояния.

Две другие меры асимметрии корреляций ΔD и $\Delta\chi$ демонстрируют полностью аналогичное поведение: в случае неоднородности поля их знаки совпадают со знаком разности $|B_2| - |B_1|$, и в случае равенства модулей полей $|B_1| = |B_2|$ обе меры асимметрии корреляций обращаются в нуль. Таким образом, измерение состояния частицы, находящейся в более слабом магнитном поле дает больше информации о частице в более сильном магнитном поле, чем наоборот. В

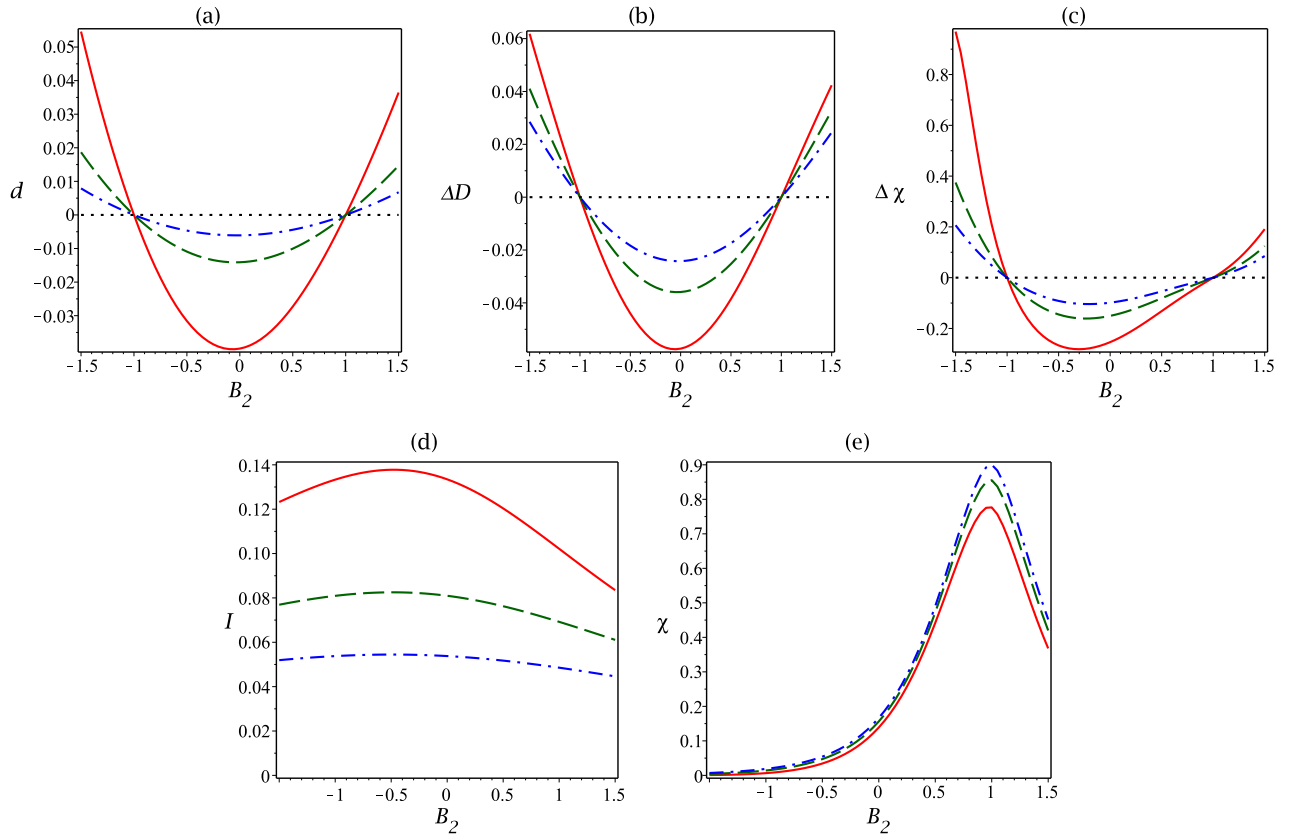


Рисунок 3.8: Зависимость энтропийной асимметрии d (a), относительной асимметрии дискорда ΔD (b), относительной асимметрии локально передаваемой информации $\Delta\chi$ (c), взаимной информации I (d) и средней локально передаваемой информации χ (e) в зависимости от поля B_2 в состоянии (3.45) при фиксированном значении $B_1 = 1$ и температуры $T = 0.75$ (сплошная линия), $T = 1$ (пунктирная линия) и $T = 1.25$ (штрихпунктирная линия)

тоже время, за счет локального взаимодействия от частицы в более слабом магнитном поле к частице в более сильном магнитном поле передается больше информации, чем в противоположном направлении. Следует отметить, однако, что величина $\Delta\chi$ в случае параллельных и антипараллельных полей демонстрирует гораздо более выраженное отличие в своем поведении по сравнению с соответствующим поведением величин d и ΔD .

Яркое отличие между мгновенными и запаздывающими корреляциями также показывают величины I и χ , представленные на Рис. 3.8d,e. Максимум взаимной информации I смещен в сторону антипараллельных полей, что соответствует результатам работы [163], посвященной сохранению запутанности за счет применения антипараллельных полей, в то время, как максимум средней локально передаваемой информации приходится на резонанс $B_1 = B_2$, что соответствует общей закономерности классических взаимодействий.

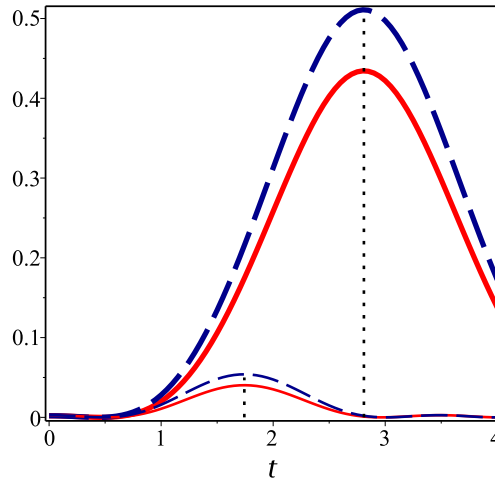


Рисунок 3.9: Локальные потоки информации $\chi^{A \rightarrow B}(t)$ (сплошные линии) и $\chi^{B \rightarrow A}(t)$ (пунктирные линии) в случае параллельных ($B_1 = 1$, $B_2 = 0.5$, жирные кривые) и антипараллельных ($B_1 = 1$, $B_2 = -0.5$, тонкие линии) полей для термального состояния (3.45) при температуре $T = 1$. Вертикальными линиями отмечены моменты времени $t = t_{loc}$

На Рис. 3.9 дополнительно представлена динамика потоков информации $\chi^{A \rightarrow B}(t)$ и $\chi^{B \rightarrow A}(t)$ для случая параллельных ($B_1 = 1$, $B_2 = 0.5$) и антипараллельных ($B_1 = 1$, $B_2 = -0.5$) полей для термального состояния (3.45) при температуре $T = 1$. Здесь важно отметить, что в отличие от основных состояний (см. Рис. 3.4 и Рис. 3.6) с повышением температуры пик мгновенных корреляций становится незначительным по сравнению с пиком, обусловленным локально передаваемой информацией.

В заключение, вновь вернемся к теме различия между парой величин d и ΔD от величины $\Delta\chi$ как характеристик асимметрии двусоставного квантового состояния. С одной стороны, по своему определению, d и ΔD описывают асимметрию квантового состояния, в котором находится двусоставная система в данный конкретный момент времени, в то время, как $\Delta\chi$ описывает корреляции между состояниями подсистем, разнесенными во времени. С другой стороны, в качестве объекта исследования мы специально выбрали именно стационарное состояние двусоставной системы, которое по своему построению (фактически, будучи функцией Гамильтониана) содержит информацию о собственной динамике. В результате изучения этого состояния мы получили явное соответствие между двумя подходами: направления всех видов информационных асимметрий всегда совпадают, а их относительные значения подчиняются аналогичным зависимостям от внешних параметров, таких как силы магнитных полей и температура.

В этом контексте наибольший интерес представляет собой соответствие между энтропийной асимметрией d и асимметрией локально передаваемой информации $\Delta\chi$. Напомним, что общая идея использования энтропийной асимметрии как характеристики корреляций уходит своими корнями в классический причинный анализ [37], в котором, исходя из величины аналогичной d , формулируется вывод о направлении и силе причинной связи в смысле асимметрии классических влияний друг на друга подсистем, участвующих в естественных квазистационарных природных процессах. При переходе к произвольным двусоставным квантовым состояниям понятия «причины» и «следствия» теряют свой классический интуитивно понятный смысл. Однако, в рассмотренном примере стационарного квантового состояния мы вновь сталкиваемся со связью между величиной d и асимметрией влияния подсистем друг на друга. Важно отметить, что в нашем случае это влияние проявляет себя как в рамках мгновенных корреляции, описываемых асимметрией локально доступной информации ΔD , так и в рамках запаздывающих корреляции, обусловленных естественной передачей информации посредством локальных взаимодействий, описываемых величиной $\Delta\chi$. Как мы убедились, с ростом температуры мгновенные корреляции исчезают, в то время, как корреляции локальных взаимодействий, выходят на ненулевой асимптотический уровень. Именно с подобным типом передачи информации мы обычно имеем дело при рассмотрении классических систем. Таким образом, можно предположить, что аналогичное поведение, сопровождающее переход квантовых систем в классическую область, будет иметь место и для других более сложных и крупных квантовых систем. Данный вопрос является темой для дальнейших исследований.

3.1.6 Выводы

Мы рассмотрели задачу о корреляциях в термальном состоянии двух частиц со спином $1/2$, находящихся в неоднородном магнитном поле, и взаимодействующих согласно XY -модели Гейзенберга. В качестве основных характеристик описывающих мгновенные корреляции рассматривались величины энтропийной асимметрии d , относительной асимметрии дискорда ΔD , квантовой взаимной информации I и согласованности C . В качестве характеристик, описывающих запаздывающие корреляции, обусловленные локальным взаимодействием между частицами, была введена величина относительной асимметрии локально передаваемой информации $\Delta\chi$, а также величина средней локально передаваемой информации χ .

В результате проведенных исследований были получены следующие результаты.

1. Получено, что в основном состоянии рассматриваемого Гамильтониана асимметрия корреляций (с точки зрения всех рассматриваемых мер асимметрии) может иметь место только в случае его вырождения.
2. Получено, что в случае равенства модулей магнитных полей, действующих на частицы, термальное состояние симметрично с позиции всех рассматриваемых мер асимметрии.
3. В случае наличия неоднородности поля энтропийная асимметрия направлена от частицы в более слабом магнитном поле к частице в более сильном магнитном поле. Данное поведение сопровождается тем фактом, что измерение над частицей в более слабом магнитном поле дает доступ к большей величине локально доступной информации, чем измерение над в более сильном магнитном поле. Кроме того, частица в более слабом магнитном поле передает посредством локального взаимодействия больше информации частице в более сильном локальном поле, чем наоборот. Данные результаты соответствуют одинаковым знакам у величин d , ΔD и $\Delta \chi$.
4. Рост температуры способствует ослаблению мгновенных корреляций, характеризуемых величинами квантовой взаимной информации I и согласованности C , и увеличению величины средней локально передаваемой информации χ . В пределе бесконечных температур мгновенные корреляции между частицами исчезают, в то время, как запаздывающие корреляции, обусловленные локальным взаимодействием между частицами, выходят на положительный асимптотический уровень, определяемый величиной магнитных полей. Возможная исходная асимметрия состояния с точки зрения всех рассматриваемых мер асимметрий корреляций исчезает с ростом температуры.
5. Наибольшая интенсивность потоков локально передаваемой информации имеет место в случае однородности магнитного поля, в то время, как сохранению мгновенных корреляций способствует помещение частиц в антипараллельные поля.

Полученные выводы обосновывают защищаемое положение №3.

Основные результаты представленного исследования также опубликованы в работах [109–111, 113]. Ожидается, что полученные результаты могут способствовать более глубокому пониманию вопроса о переходе границы между классическим и квантовым описанием систем системы, а также более эффективному управлению асимметричными двухкубитными системами. К одному из наиболее перспективных направлений дальнейшего развития данных исследований можно отнести рассмотрение взаимосвязи между поведением энтропийной асимметрии и асимметрии локально передаваемой информации в более крупных и сложных физических системах.

3.2 Взаимодействие двухуровневого атома с модой электромагнитного поля согласно модели Джейнса-Каммингса

3.2.1 Постановка задачи

Следующая система, которую мы рассмотрим с точки на энтропийной асимметрии квантовых состояний, представляет собой двухуровневый атом, взаимодействующий с модой электромагнитного поля.

В качестве модели, описывающей подобное взаимодействие, будем использовать модель Джейнса-Каммингса [165]. Она представляет большой интерес в связи с тем, что, с одной стороны, сочетает в себе простоту и возможность получения аналитических решений, а с другой стороны, обладает высокой эффективностью при описании реальных процессов, происходящих, например, в одноатомных лазерах [166]. Большое внимание также уделяется взаимодействию искусственных атомов и модой резонатора, интересное, например, с точки зрения наблюдения динамического эффекта Лэмба [167, 168].

Базисные состояния атома, соответствующие возбужденному и основному состояниям, будем соответственно обозначать как $|e\rangle$ и $|g\rangle$, а состояния Фока моды поля как $|n\rangle$ ($n = 0, 1, \dots$). Согласно модели Джейнса-Каммингса эволюция атома и моды электромагнитного поля в приближении вращающейся волны описывается Гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \hbar \frac{\omega_a}{2} \mathbf{1}_f \otimes \sigma_z + \hbar \omega_f a^\dagger a \otimes \mathbf{1}_a + \hbar g (a^\dagger \otimes |g\rangle\langle e| + a \otimes |e\rangle\langle g|), \quad (3.57)$$

где принята следующая система обозначений

$$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad \mathbf{1}_a = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|, \quad \mathbf{1}_f = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|, \quad (3.58)$$

a и a^\dagger представляют собой стандартные операторы уничтожения и рождения:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (3.59)$$

а ω_a и ω_f – частота перехода между состояниями $|e\rangle$ и $|g\rangle$ в атоме и частота поля соответственно. Величина g представляет собой константу связи, которая в реальных ситуациях оказывается значительно меньше частот ω_a и ω_f ($g \ll \omega_a, \omega_f$). Введем также величину отстройки

$$\delta = \omega_a - \omega_f, \quad (3.60)$$

на которую в приближении вращающейся волны накладывается условие $|\delta| \ll \omega_a + \omega_f$.

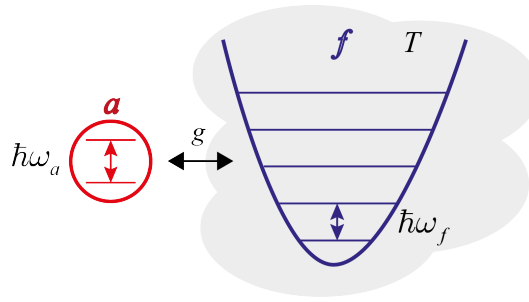


Рисунок 3.10: Схема исследуемой системы: двухуровневый атом, изначально находящийся в чистом (возбужденном и основном) состоянии взаимодействует с модой электромагнитного поля, находящейся в термальном состоянии

Традиционно считается, что смешанность квантовых систем (вызванная, в частности, конечной температурой) препятствует возникновению запутанности. Примером может выступать термальное состояние пары взаимодействующих частиц со спином $1/2$, рассмотренное в предыдущем параграфе, запутанность которого полностью исчезала после превышения некоторой критической температуры. Также важно отметить, что в рассмотренном примере XU -взаимодействия Гейзенберга константа связи была сравнима по величине со собственными энергиями невзаимодействующих частиц.

В изучаемом Гамильтониане (3.57) константа связи заведомо мала по сравнению частотами ω_a и ω_f , поэтому общее термальное состояние с большой степенью точности является сепарабельным:

$$\rho_{af}^{\text{th}} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{k_B T}\right) \approx \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_a}{k_B T}\right) \otimes \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_f}{k_B T}\right), \quad (3.61)$$

где $Z = \text{Tr}[-\mathcal{H}/k_B T]$, а $\mathcal{H}_a = \hbar\omega_a\sigma_z/2$ и $\mathcal{H}_f = \hbar\omega_f a^\dagger a$ – Гамильтонианы атома и моды полости по отдельности.

Нетривиальный подход к вопросу о соответствии смешанности и запутанности рассмотрен в работе Бозе и др. [169]. Авторы изучают динамику двусоставной системы из начального состояния, в котором одна из двух подсистем находится в смешанном состоянии, а другая – в чистом. Более конкретно в [169] изучается запутанность, образующаяся при резонансном взаимодействии Джейнса-Каммингса между атомом в возбужденном состоянии и моды поля в термальном состоянии. Авторы получают нижнюю оценку на величину негативности, и оказывается, что запутанность возникает в системе даже в пределе бесконечно высоких начальных температур моды поля.

В работе [170] рассмотрена аналогичная задача взаимодействия атома в состоянии с различным уровнем смешанности и моды поля в термальном состоянии, и получена верхняя граница

на уровень логарифмической негативности в зависимости от температуры поля и степени смешанности атома.

В настоящей работе рассматривается точная динамика негативности, получаемая из решения уравнения на динамику совместной матрицы плотности атома и моды поля $\rho_{af}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\rho_{fa}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\mathcal{H}, \rho_{fa}(t)], \quad (3.62)$$

в качестве начальных условий для которого рассматриваются два варианта:

$$\rho_{fa}^{e0} = \rho_f^{\text{th}} \otimes |e\rangle\langle e|, \quad (3.63)$$

$$\rho_{fa}^{g0} = \rho_f^{\text{th}} \otimes |g\rangle\langle g|, \quad (3.64)$$

соответствующих атому в возбужденном или основном состоянии, и моде поля в смешанном термальном состоянии, определяемом, в свою очередь, как

$$\rho_f^{\text{th}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle\langle n|, \quad (3.65)$$

где вероятностное распределение имеет вид

$$P_n = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \left(\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right)^n, \quad (3.66)$$

и $\langle n \rangle$ – среднее число фотонов моды поля, определяемое через температуру согласно выражению

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}. \quad (3.67)$$

В дальнейшем, говоря о температуре, мы будем иметь в виду величину $\langle n \rangle$.

В связи с высокой размерностью системы в качестве меры запутанности удобно использовать негативность, являющуюся достаточным условием наличия запутанности, и определяемую для произвольного состояния ρ_{af} как

$$N = \frac{1}{2} (\|\rho_{fa}^{\Gamma_a}\|_1 - 1), \quad (3.68)$$

где $\|\bullet\|_1$ – стандартная l_1 норма, а Γ_a – обозначение частичного транспонирования по гильбертову пространству атома.

В отличие от рассмотренных ранее систем, в которых возникновение энтропийной асимметрии было обусловлено либо приготовлением конкретного асимметричного состояния, либо различием во внешних условиях, в которых находились подсистемы, в данном примере асимметрия уже содержится в самой физической природе подсистем. Кроме того, особый интерес представляет не просто величина d как разность между функциями независимости, но и сами функции независимости, содержащие в себе сведения о более глубоких свойствах корреляций между подсистемами.

Рассмотрим следующие задачи.

1. Получить и проанализировать динамику негативности и энтропийной асимметрии при резонансном взаимодействии атома в возбужденном состоянии с модой поля в термальном состоянии при различных значениях температуры.
2. Получить и проанализировать динамику негативности и энтропийной асимметрии при резонансном взаимодействии атома в основном состоянии с модой поля в термальном состоянии при различных значениях температуры.
3. Исследовать поведение усредненных по времени значений запутанности и энтропийной асимметрии в зависимости от начальной температуры поля и величины отстройки.

В разделе 3.2.2 рассматривается вопрос о построении оператора эволюции, порождаемой рассматриваемым Гамильтонианом. Результаты вычислений их обсуждении представлено в разделе 3.2.3. Основные выводы приводятся в разделе 3.2.4.

3.2.2 Порождаемая Гамильтонианом эволюция

Собственные векторы и собственные значения Гамильтониана Джейнса-Каммингса (3.57) имеют хорошо известный вид

$$\begin{aligned} &|0, g\rangle, \\ &|\psi_n^+\rangle = \cos \frac{\alpha_n}{2} |n, e\rangle + \sin \frac{\alpha_n}{2} |n+1, g\rangle, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$|\psi_n^-\rangle = -\sin \frac{\alpha_n}{2} |n, e\rangle + \cos \frac{\alpha_n}{2} |n+1, g\rangle$$

$$E^0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega_a, \quad E_n^\pm = \hbar\omega_f \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2}\hbar\Omega_n \quad (3.70)$$

где приняты обозначения

$$\alpha_n = \arctan \left(\frac{2g\sqrt{n+1}}{\delta} \right) \quad \Omega_n = \sqrt{\delta^2 + 4g^2(n+1)^2}. \quad (3.71)$$

Используя выражения (3.69) и (3.70) мы можем легко получить оператор эволюции системы

$$U(t) = e^{i\omega_a t/2} |0, g\rangle \langle 0, g| + \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-iE_n^+ t/\hbar} |\psi_n^+\rangle \langle \psi_n^+| + e^{-iE_n^- t/\hbar} |\psi_n^-\rangle \langle \psi_n^-| \right). \quad (3.72)$$

В дальнейшем нас будут интересовать исключительно корреляции возникающие между атомом и полем, вследствие чего целесообразно ввести дополнительный оператор «подкрутки», локально действующий на каждую из подсистем

$$L(t) = \exp(i\omega_f t a^\dagger a) \otimes \exp\left(i\frac{\omega_a}{2} t \sigma_z\right), \quad (3.73)$$

соответствующий переходу во вращающуюся систему отсчета.

Рассмотрим произвольное чистое состояние

$$|\psi_0\rangle = C^0|0, g\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+|\psi_n^+\rangle + C_n^-|\psi_n^-\rangle), \quad (3.74)$$

где $C_n^\pm = \langle\psi_n^\pm|\psi_0\rangle$ и $C^0 = \langle 0, g|\psi_0\rangle$ – амплитуды вероятности нахождения в соответствующих стационарных состояниях. Тогда, динамика состояния (3.74) во вращающейся системе координат может быть получена как

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = L(t)U(t)|\psi_0\rangle = C^0|0, g\rangle + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n^+ \left(e^{i(\delta-\Omega_n)t/2} \cos \frac{\alpha_n}{2} |n, e\rangle + e^{i(-\delta-\Omega_n)t/2} \sin \frac{\alpha_n}{2} |n+1, g\rangle \right) + \right. \\ \left. + C_n^- \left(-e^{i(\delta+\Omega_n)t/2} \sin \frac{\alpha_n}{2} |n, e\rangle + e^{i(-\delta+\Omega_n)t/2} \cos \frac{\alpha_n}{2} |n+1, g\rangle \right) \right) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Введем векторы, соответствующие эволюции сепарабельных состояний атома в основном или возбужденном состоянии и поля в фоковском состоянии:

$$\begin{aligned} |\psi_n^e(t)\rangle = L(t)U(t)|n, e\rangle = e^{i\delta t/2} \left(e^{-i\Omega_n t/2} \cos^2 \frac{\alpha_n}{2} + e^{i\Omega_n t/2} \sin^2 \frac{\alpha_n}{2} \right) |n, e\rangle - \\ - i e^{-i\delta t/2} \sin \frac{\Omega_n t}{2} \sin \alpha_n |n+1, g\rangle, \\ |\psi_n^g(t)\rangle = L(t)U(t)|n, g\rangle = -e^{i\delta t/2} i \sin \frac{\Omega_n t}{2} |n, e\rangle + \\ + e^{-i\delta t/2} \left(e^{-i\Omega_n t/2} \sin^2 \frac{\alpha_n}{2} + e^{i\Omega_n t/2} \cos^2 \frac{\alpha_n}{2} \right) |n+1, g\rangle \\ |\psi_0^g(t)\rangle = L(t)U(t)|0, g\rangle = |0, g\rangle. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Тогда, эволюция начальных состояний (3.63) и (3.64) в соответствии с уравнением динамики (3.62) во вращающейся системе отсчета принимает простой вид

$$\rho_{af}^e(t) = L(t)U(t) (|e\rangle\langle e| \otimes \rho_f^{\text{th}}) U(t)^\dagger L(t)^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |\psi_n^e(t)\rangle \langle \psi_n^e(t)|, \quad (3.77)$$

$$\rho_{af}^g(t) = L(t)U(t) (|g\rangle\langle g| \otimes \rho_f^{\text{th}}) U(t)^\dagger L(t)^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |\psi_n^g(t)\rangle \langle \psi_n^g(t)|. \quad (3.78)$$

Исследованию корреляций между подсистемами данных состояний посвящены следующие разделы данного параграфа.

3.2.3 Результаты вычислений

Прежде чем переходить к непосредственным результатам вычислений, отметим, что получение состояний (3.77) и (3.78) предполагает суммирование бесконечного числа слагаемых. Для

того, чтобы избежать данной вычислительной сложности воспользуемся геометрическим убыванием последовательности (3.66) и заменим бесконечность в суммировании конечным значением $N_{\max} - 1$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$1 - \sum_{n=0}^{N_{\max}-1} P_n = \left(\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right)^{N_{\max}} \leq 10^{-3}. \quad (3.79)$$

Ограничение количества слагаемых, в свою очередь, ограничивает размерность используемого подпространства бесконечномерного Гильбертового пространства моды поля и позволяет получить и исследовать конечномерные матрицы плотности атома и поля.

Также для удобства представления результатов положим константу взаимодействия $g = 1$.

Атом в возбужденном состоянии

Рассмотрим решение (3.77) при начальном условии (3.63) для различных значений $\langle n \rangle$ и отсутствии отстройки $\delta \rightarrow +0$. При нулевой температуре матрице плотности системы $\rho_{af}^e(t)$ будет соответствовать вектор чистого состояния

$$|\psi_0^e(t)\rangle = \cos t |0, e\rangle - i \sin t |1, g\rangle. \quad (3.80)$$

Легко видеть, что величина запутанности для данного состояния периодически меняется от нуля до максимального значения, достигаемого при $t = \pi/4 + \pi k$. Вследствие чистоты состояния мы также имеем отсутствие энтропийной асимметрии $d = 0$.

Поведение характеристик состояния при повышении начальной температуры поля представлено на Рис. 3.11. С ростом величины $\langle n \rangle$ явные осцилляции негативности N смазываются, максимальные достигаемые значения спадают, однако уровень квантовых корреляций уже никогда не возвращается к нулевому значению. Так при $\langle n \rangle = 10$ (Рис. 3.11а) мы можем наблюдать стабильный положительный уровень негативности N при $t > 0$.

Поведение обеих функций независимости, представленное на Рис. 3.11b, свидетельствует о переходе корреляций в классическую область с ростом температуры (обе функции независимости при $\langle n \rangle = 10$ практически всегда положительны). Таким образом, мы сталкиваемся с нетривиальной ситуацией, когда систему можно отнести классической с точки зрения энтропийных параметров, но в тоже время в ней присутствует запутанность.

Для всех рассматриваемых значений $\langle n \rangle$ мы имеем типичное выполнение неравенства $i_{f|a} > i_{a|f}$, нарушаемой только в короткие промежутки времени при $\langle n \rangle = 0.1$. Исходя из этого, мы можем заключить, что энтропийная асимметрия преобладающим образом направлена от моды поля к атому, и мода поля в большей степени проявляет себя в корреляциях по сравнению с

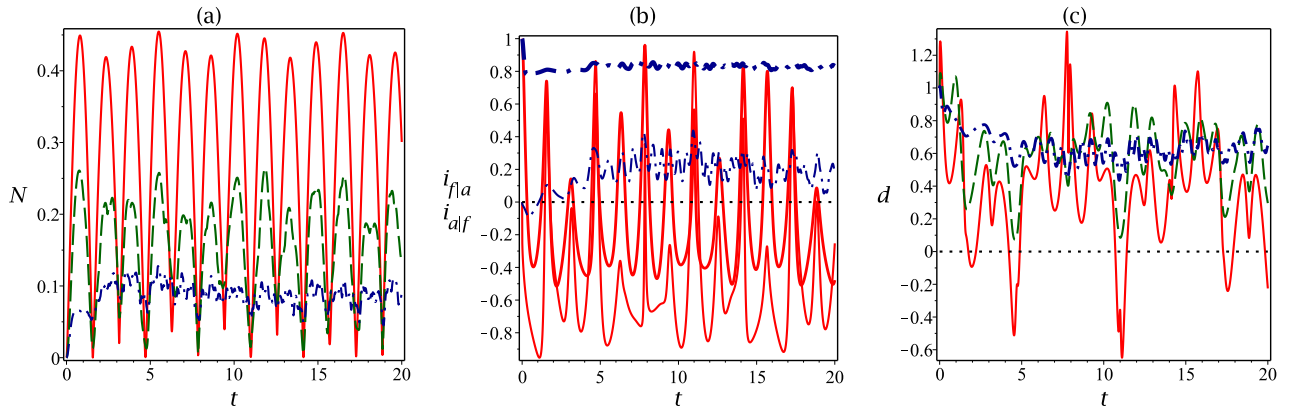


Рисунок 3.11: Динамика негативности N (a), функций независимости $i_{f|a}$ (жирные кривые) и $i_{a|f}$ (тонкие кривые) (b) и энтропийной асимметрии d (c) при взаимодействии атома в возбужденном состоянии с модой поля в термальном состоянии со значением среднего числа фотонов $\langle n \rangle = 0.1$ (сплошные линии), $\langle n \rangle = 1$ (пунктирные линии) и $\langle n \rangle = 10$ (штрихпунктирные линии)

атомом. Данный вывод согласуется с интуитивным представлением о направлении потока энтропии, изначально сконцентрированной в моде поля за счет конечной температуры.

Также отметим, что при достаточно высоких температурах (на Рис. 3.11 лучше всего это наблюдается для $\langle n \rangle = 10$) динамика исследуемых характеристик представляет собой выход на некоторой стационарный уровень с последующими флуктуациями возле этого уровня. Из полученных данных можно сделать вывод об уменьшении относительной интенсивности подобных флуктуаций с ростом температуры.

Атом в основном состоянии

Далее рассмотрим решение (3.77) для начального состояния (3.64) и различных значений величины $\langle n \rangle$. При нулевой температуре матрице плотности (3.77) соответствует статичный сепарабельный вектор $|0, g\rangle$, в котором отсутствуют какие либо корреляции.

Повышение температуры поля приводит к возникновению энергообмена между атомом в основном состоянии и проекциями состояния поля на векторы $\{|n\rangle, n > 0\}$, что, в свою очередь, приводит к возникновению квантовых корреляций. Поведение различных характеристик системы при $\langle n \rangle = 0.1, 1, 10$ представлено на Рис. 3.12. Мы можем наблюдать, как повышение температуры способствует увеличению запутанности, характеризуемой величиной негативности N . При $\langle n \rangle = 10$ запутанность стабильно присутствует для всех моментов времени $t > 0$.

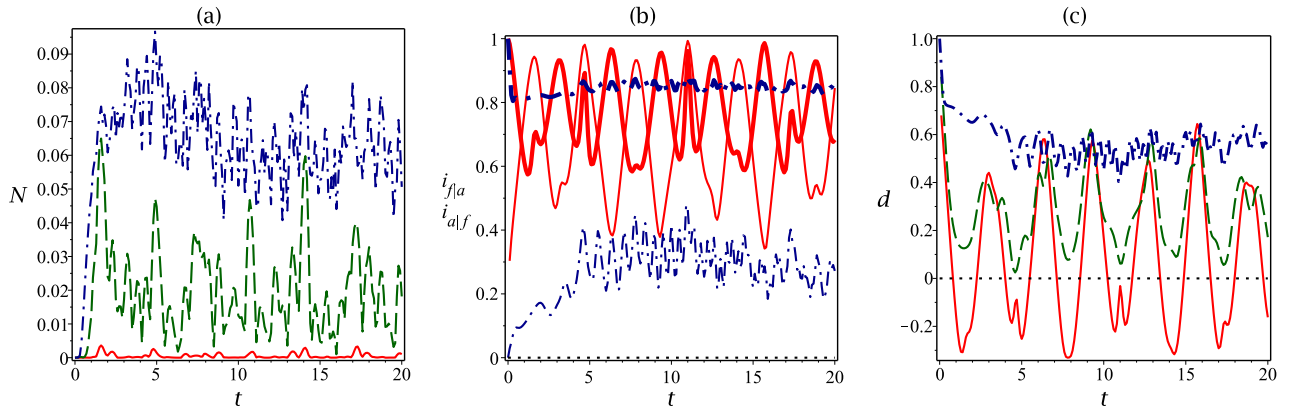


Рисунок 3.12: Динамика негативности N (a), функций независимости $i_{f|a}$ (жирные кривые) и $i_{a|f}$ (тонкие кривые) (b) и энтропийной асимметрии d (c) при взаимодействии атома в основном состоянии с модой поля в термальном состоянии со значением среднего числа фотонов $\langle n \rangle = 0.1$ (сплошные линии), $\langle n \rangle = 1$ (пунктирные линии) и $\langle n \rangle = 10$ (штрихпунктирные линии)

В отличие от рассмотренной ранее ситуации с атомом в возбужденном состоянии обе функции независимости всегда положительны (Рис. 3.12b), что свидетельствует об энтропийной классичности возникающих корреляций.

Средний уровень величины энтропийной асимметрии d (Рис. 3.12c) возрастает с ростом температуры. Как мы можем видеть, временное обращение энтропийной асимметрии имеет место лишь при малых значениях $\langle n \rangle$. При достаточно высоких температурах энтропийная асимметрия стабильно направлена от моды поля к атому ($d > 0$). Как и в случае с атомом в начальном возбужденном состоянии, это соответствует тому, что мода поля в большей степени проявляет себя в корреляциях по сравнению с атомом (поток энтропии направлен от поля к атому).

Наконец, отметим что динамика характеристик для исследуемого начального состояния также соответствует выходу на некоторые стационарные значения, возле которых происходят флуктуации.

Усреднение по времени и влияние отстройки

В процессе изучения поведения величин, характеризующих корреляции, для начальных состояний (3.63) и (3.64) было выявлено, что динамика характеристик системы представляет собой выход на стационарный уровень с последующими флуктуациями около этого уровня. Выясним зависимости усредненных по времени характеристик системы (стационарных значений) от температуры, определяемой через величину $\langle n \rangle$. Для этого рассмотрим временной промежуток $150 \leq t \leq 400$ (чтобы исключить из рассмотрения начальный участок зависимости от времени)

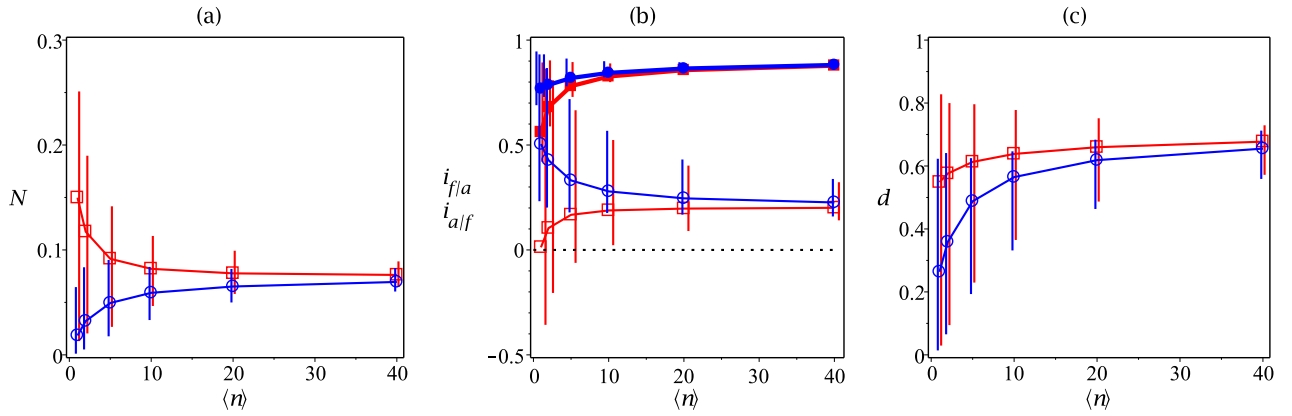


Рисунок 3.13: Поведение усредненных по времени значений негативности N (a), функций независимости $i_{f|a}$ (жирные кривые и заполненные значки) и $i_{a|f}$ (тонкие кривые и пустые значки) (b) и энтропийной асимметрии d (c) при взаимодействии атома в основном (\circ) или возбужденном (\square) состоянии с модой поля в термальном состоянии в зависимости от его среднего значения числа фотонов $\langle n \rangle$ после достижения стационарного режима. Вертикальными линиями соответствуют минимальному и максимальному значениям на исследуемом промежутке $150 \leq t \leq 400$.

с шагом $\Delta t = 0.5$ и для него будем вычислять средние значения рассмотренных ранее характеристик.

Результаты вычислений для начальных состояний (3.63) и (3.64) представлены на Рис. 3.13. Хорошо видно, что для всех характеристик две кривые стремятся выходить на общую горизонтальную асимптоту при $\langle n \rangle \rightarrow \infty$, что свидетельствует об исчезновении влияния выбора начального чистого состояния атома на усредненные характеристики.

Наибольший интерес представляет поведение запутанности, представленное на Рис. 3.13a. Можно было ожидать, что с ростом $\langle n \rangle$ величина негативности N для начального состояния (3.63) будет стремиться к нулевому значению, однако кривые для начальных состояний (3.63) и (3.64) сходятся на уровне $N \approx 0.07$, что составляет $\approx 14\%$ от максимального значения. Таким образом, начальная температура поля не разрушает квантовые корреляции полностью, а в случае начального состояния (3.64) является даже конструктивным фактором для возникновения запутанности.

Величины функций независимости $i_{f|a}$ и $i_{a|f}$ выходят на асимптотические значения $i_{f|a}^{\text{asympt1}} \approx 0.86$ и $i_{a|f}^{\text{asympt1}} \approx 0.24$, что соответствует значению $d^{\text{asympt1}} \approx 0.62$. Таким образом, в пределе высоких температур $\langle n \rangle \rightarrow \infty$ между атомом и полем имеют место классические корреляции с точки зрения энтропий, причем мода поля в большей степени проявляет себя в корреляциях по сравнению с атомом.

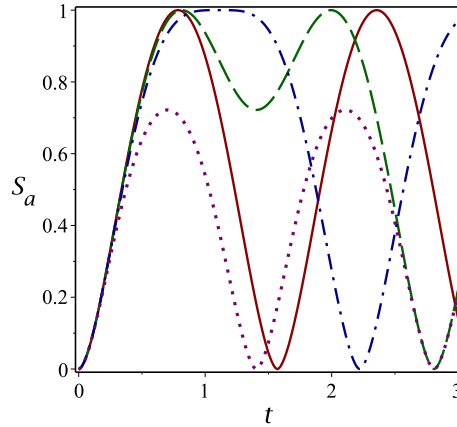


Рисунок 3.14: Динамика энтропии фон Неймана редуцированного состояния, возникающего при взаимодействии атома в возбужденном состоянии с модой поля в вакуумном состоянии, при различных значениях отстройки: $\delta = 0$ (сплошная кривая), $\delta = 1$ (пунктирная кривая), $\delta = 2$ (штрихпунктирная кривая) и $\delta = 4$ (точечная кривая)

В заключение рассмотрим, влияние отстройки δ между частотой перехода в атоме и частотой поля на возникающие корреляции. В случае нулевой температуры и атома изначально в возбужденном состоянии имеем чистое состояние $|\psi_0^e(t)\rangle$, энтропия фон Неймана редуцированного состояния которого принимает вид

$$S_a = S [\text{Tr}_f |\psi_0^e(t)\rangle \langle \psi_0^e(t)|] = h_b (\sin^2 \alpha_0 \sin^2 (\omega_n t/2)), \quad (3.81)$$

где $\alpha_0 = \arctan(2g/\delta)$ и $\Omega_0 = \sqrt{\delta^2 + 4}$. Напомним, что для чистых двусоставных состояний энтропия фон Неймана редуцированного состояния является также мерой запутанности. Анализируя поведение бинарной энтропийной функции (3.81) (см. Рис. 3.14), мы можем заключить, небольшая отстройка ($\delta \sim 1$) способствует незначительному повышению среднего уровня запутанности (максимальное значение соответствует $\delta \approx 1.4$), однако при больших отстройках ($\delta > 2$) происходит уменьшение амплитуды колебаний запутанности и закономерное уменьшение ее среднего значения. Данное явление объясняется общим ослаблением взаимодействия между подсистемами. Энтропийная асимметрия в данном состоянии отсутствует по причине его чистоты.

В случае атома в основном состоянии и поля при нулевой температуре мы по-прежнему имеем статичное сепарабельное состояние $|0, g\rangle$ не представляющей какого-либо интереса.

Поведение усредненных по времени характеристик для обоих начальных состояний (3.63), (3.64) и фиксированной температуры $\langle n \rangle = 20$ в зависимости от величины отстройки представлено на Рис. 3.15. Как и следовало ожидать из рассмотрения случая нулевой температу-

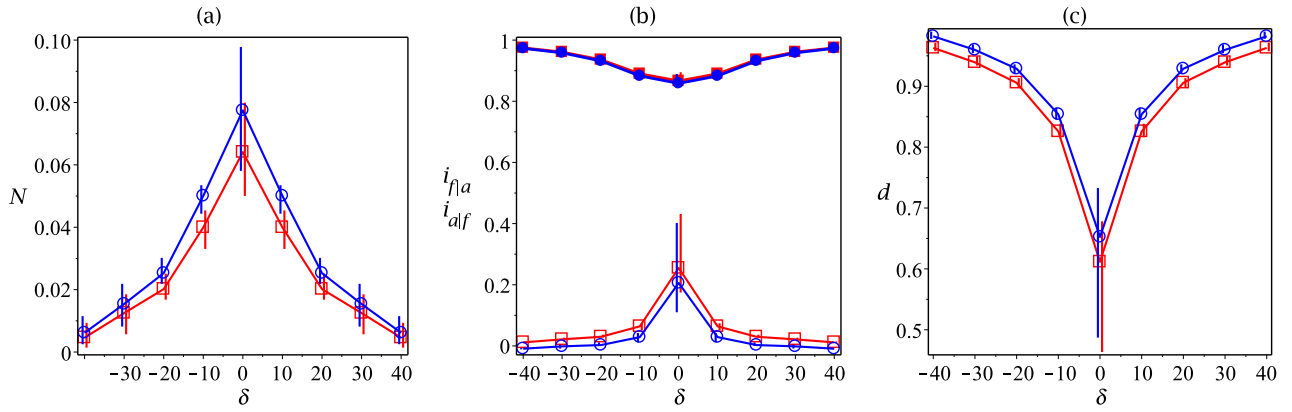


Рисунок 3.15: Поведение усредненных по времени значений негативности N (a), функций независимости $i_{f|a}$ (жирные кривые и заполненные значки) и $i_{a|f}$ (тонкие кривые и пустые значки) (b) и энтропийной асимметрии d (c) при взаимодействии атома в основном (\circ) или возбужденном (\square) состоянии с модой поля в термальном состоянии в зависимости от его отстройки δ при фиксированном значении $\langle n \rangle = 20$ после достижения стационарного режима. Вертикальными линиями соответствуют минимальному и максимальному значениям на исследуемом промежутке

ры, средние по времени значения негативности убывают с отстройкой. Нетривиальным образом ведут себя функции независимости: мы наблюдаем увеличение $i_{f|a}$ и уменьшение $i_{a|f}$, что соответствует усилению асимметрии корреляций на фоне ослабления их общего уровня (аналогичное поведение можно наблюдать, например, для рассмотренного взаимодействия частиц со спином $1/2$ на Рис. 3.8). При больших значения отстройки мы получим практически максимально возможную классическую энтропийную асимметрию между атом и полем ($d \approx 1$), при которой по состоянию моды поля можно однозначно определить состояние атома, а по состоянию атома невозможно определить состояние моды поля. Данное поведение согласуется с интуитивном представлением о направленности потока энтропии от смешанного состояния моды поля к чистому состоянию атома. Также отметим, что говорить об общих значениях асимптот для обоих начальных условий мы можем только для достаточно высоких значений температуры поля, при которых исчезают различия между средними характеристиками для атома в основном и возбужденном состояниях.

3.2.4 Выводы

Мы рассмотрели резонансное и нерезонансное взаимодействие двухуровневого атома, изначально находящегося в чистом основном или возбужденном состоянии, и моды электромагнитного поля, изначально находящемся в термальном состоянии. В качестве модели взаимодействия

рассматривалась модель Джейнса-Каммингса в приближении вращающейся волны (3.57) и отсутствия диссипации (потерь в резонаторе и спонтанного излучения атома в другие моды поля).

В качестве основных исследуемых характеристик рассматривалась величина негативности N , являющаяся достаточным условием наличия запутанности, функции независимости $i_{a|f}$ и $i_{f|a}$, описывающие энтропийный характер односторонних корреляции между атомом и полем, и общая величина энтропийной асимметрии d . На основании проделанной работы можно сформулировать следующие выводы.

1. Для рассмотренных начальных состояний динамика исследуемых характеристик представляет собой выход на стационарный уровень с последующими флуктуациями возле этого уровня. Относительная интенсивность подобных флуктуаций уменьшается с ростом температуры.
2. Энтропийная асимметрия превалирующим образом направлена от моды поля к атому (обращении энтропийной асимметрии имеет место только в короткие промежутки времени при малых значениях температур $\langle n \rangle \lesssim 1$) Данный вывод согласуется с интуитивным представлением о направлении потока энтропии, изначально сконцентрированной в моде поля за счет конечной температуры.
3. В случае резонансного взаимодействия в пределе бесконечных начальных температур поля образующееся стационарное состояние (совпадающее по характеристикам для обоих вариантов начального состояния атома) является запутанным (негативность $N \approx 0.07$), классически коррелированным с точки зрения энтропий ($i_{a|f}, i_{f|a} > 0$) и энтропийно асимметричным $d \approx 0.62$ (с направлением асимметрии от поля к атому).
4. Значительная (по сравнению с константой связи) отстройка по частоте между атомом и полем приводит к уменьшению запутанности и усилению энтропийной асимметрии.

Полученные выводы обосновывают защищаемое положение №3.

Основные результаты опубликованы в работах [105, 129, 136]. Возможным продолжением исследований является выявление связи между энтропийной асимметрией и асимметрией дискорда в образующихся стационарных запутанных состояниях атома и поля. Отметим, что в данном случае мы имеем дело с бесконечномерной системой, что значительно усложняет вычисление дискорда по сравнению с рассмотренными ранее двухкубитными состояниями, в то время как вычисление энтропийной асимметрии не представляет каких либо особых трудностей.

Глава 4

Энтропийная асимметрия в томографическом описании квантовых систем

4.1 Томографическое описание дискретных квантовых систем

4.1.1 Понятие томограммы

В настоящей главе мы рассмотрим альтернативный подход к описанию квантового состояния, основанный на использовании классических вероятностных распределений, получаемых при наблюдении этого состояния в различных измерительных базисах. Данный подход [80–92], называемый томографическим, с одной стороны, эквивалентен другим распространенным подходам к описанию квантовых систем (например, с помощью квази-вероятностных распределений [83, 89]), а с другой стороны, представляет большой интерес с практической точки зрения, т. к. имеет дело с непосредственными экспериментальными данными (см. например [84]). Ниже мы будем рассматривать исключительно конечномерные квантовые системы, томографическое описание которых рассматривается в работах [85–87]. Подробный список литературы по томографическому подходу представлен в работе [88].

Под томограммой $\mathcal{T}(U)$ квантового состояния ρ при его измерении в базисе, характеризующемся оператором поворота U , мы будем понимать совокупность диагональных элементов матрицы $U\rho U^\dagger$

$$\mathcal{T}(U) = \{ \mathcal{T}^n(U) = \langle n|U\rho U^\dagger|n \rangle \}, \quad (4.1)$$

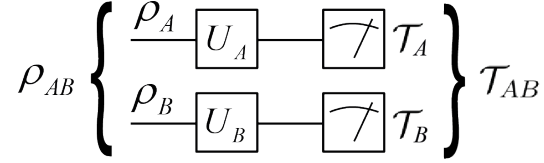


Рисунок 4.1: Принципиальная схема получения томограммы двусоставного состояния

где множество $\{|n\rangle\}$ представляет собой вычислительный базис, в котором изначально представлена матрица плотности ρ . Распределение вероятностей (4.1) можно интерпретировать как результат измерения состояния в произвольном базисе, связанном с вычислительной матрицей перехода U^\dagger . Будучи элементами классического распределения вероятностей, компоненты томограммы удовлетворяют естественным свойствам неотрицательности и нормирования на единицу:

$$\mathcal{T}^n(U) \geq 0, \quad \sum_n \mathcal{T}^n(U) = 1. \quad (4.2)$$

Аналогичным образом можно ввести томограмму двусоставного состояния, полученную в результате локальных измерений над подсистемами (см. Рис. 4.1). В этом случае для матрицы плотности ρ_{AB} и соответствующего оператора поворота вида $U_A \otimes U_B$ имеем

$$\mathcal{T}_{AB}(U_A, U_B) = \left\{ \mathcal{T}_{AB}^{mn}(U_A \otimes U_B) = \langle mn | (U_A \otimes U_B) \rho_{AB} (U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger) | mn \rangle \right\} \quad (4.3)$$

где использовано обозначение $|mn\rangle = |m\rangle_A \otimes |n\rangle_B$ для векторов, образующих базис в гильбертовом пространстве исследуемой двусоставной системы. Соотношения (4.2) соответственно принимают вид

$$\mathcal{T}_{AB}^{mn}(U_A, U_B) \geq 0, \quad \sum_{m,n} \mathcal{T}_{AB}^{mn}(U_A, U_B) = 1. \quad (4.4)$$

Рассматривая томограмму двусоставного состояния $\mathcal{T}_{AB}(U_A, U_B)$ как совместное распределение вероятностей двух случайных величин, можно легко получить компоненты томограммы для отдельных подсистем $\mathcal{T}_A(U_A)$ и $\mathcal{T}_B(U_B)$:

$$\mathcal{T}_A^m(U_A) = \sum_n \mathcal{T}_{AB}^{mn}(U_A \otimes U_B), \quad \mathcal{T}_B^n(U_B) = \sum_m \mathcal{T}_{AB}^{mn}(U_A \otimes U_B). \quad (4.5)$$

С другой стороны, имеем

$$\mathcal{T}_A^m(U_A) = \langle m | U_A \rho_A U_A^\dagger | m \rangle, \quad \mathcal{T}_B^n(U_B) = \langle n | U_B \rho_B U_B^\dagger | n \rangle, \quad (4.6)$$

где $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$ и $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$ – редуцированные матрицы плотности подсистем A и B соответственно. Отметим, что независимость томограмм подсистем от операторов поворота другой подсистемы (так, например, \mathcal{T}_A не зависит от U_B) представляет собой естественное проявление принципа локальности.

4.1.2 Энтропийные характеристики

Имея в распоряжении совместное \mathcal{T}_{AB} и маргинальные \mathcal{T}_A и \mathcal{T}_B распределения вероятностей, мы можем рассмотреть их энтропийные характеристики на основе классической теории информации Шеннона [139–141]. Так для каждой из томограмм можно получить соответствующую энтропию

$$H_{\Xi}(U_{\Xi}) = - \sum_{\alpha} \mathcal{T}_{\Xi}^{\alpha}(U_{\Xi}) \log \mathcal{T}_{\Xi}^{\alpha}(U_{\Xi}), \quad \Xi \in \{A, B, AB\}, \quad (4.7)$$

характеризующую степень неопределенности соответствующих результатов измерения. Как и в случае любого классического распределения вероятностей, энтропии томограммы удовлетворяют неравенству

$$\max\{H_A(U_A), H_B(U_B)\} \leq H_{AB}(U_A \otimes U_B) \leq H_A(U_A) + H_B(U_B). \quad (4.8)$$

Величина корреляции результатов измерений над подсистемами может быть описана неотрицательной величиной классической взаимной информации

$$J(U_A, U_B) = H_A(U_A) + H_B(U_B) - H_{AB}(U_A, U_B). \quad (4.9)$$

Естественным следствием неравенств (4.8) является то, что величина томографической взаимной информации ограничена снизу и сверху значениями

$$0 \leq J(U_A, U_B) \leq \min\{H_A(U_A), H_B(U_B)\}. \quad (4.10)$$

Большой интерес представляет собой связь между величиной классической наблюдаемой взаимной информации $J(U_A, U_B)$ и величиной квантовой взаимной информации

$$I = S_A + S_B - S_{AB}, \quad (4.11)$$

определяемой на основе энтропий фон Неймана

$$S_{\Xi} = -\text{Tr}[\rho_{\Xi} \log \rho_{\Xi}], \quad \Xi \in \{A, B, AB\}. \quad (4.12)$$

Как известно, квантовая взаимная информация характеризует величину полной (классической и квантовой) корреляции между подсистемами A и B двусоставного состояния ρ_{AB} .

Неотрицательную разницу между величинами I и $J(U_A, U_B)$, характеризующую квантовую составляющую корреляций,

$$D(U_A, U_B) = I - J(U_A, U_B) \quad (4.13)$$

в настоящей работе будем называть *томографическим дискордом*. Данная величина зависит от операторов поворота U_A и U_B или, иначе говоря, от того, в каком базисе мы производим измерение системы. Отметим, что введенное определение отличается от рассмотренного в работе [96],

где под томографическим дискордом понимается разность между квантовой взаимной информацией и классической взаимной информацией, получаемой в частном случае измерения состояния в базисе, диагонализующем матрицы плотности подсистем (этот случай подробно рассматривается в следующем параграфе).

Аналогичным образом мы можем ввести томографическую меру энтропийной асимметрии квантового состояния

$$d(U_A, U_B) = i_{A|B}(U_A, U_B) - i_{B|A}(U_B, U_A), \quad (4.14)$$

построенную на томографических функциях независимости

$$\begin{aligned} i_{A|B}(U_A, U_B) &= \frac{H_{AB}(U_A \otimes U_B) - H_B(U_B)}{H_A(U_A)}, \\ i_{B|A}(U_A, U_B) &= \frac{H_{AB}(U_A \otimes U_B) - H_A(U_A)}{H_B(U_B)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Величина (4.14) определяет асимметрию корреляций между подсистемами после их наблюдения в базисах, характеризующихся операторами поворота U_A и U_B .

4.1.3 Выделенные измерительные базисы

Как было показано, томографические энтропийные характеристики напрямую зависят от базисов, в которых производятся измерения. В свою очередь, уже для простейшей двухуровневой квантовой системы (кубита) существует бесконечно много подобных измерительных базисов. Таким образом, возникает естественный вопрос о выборе наиболее характерного или полезного измерительного базиса среди всех возможных. Мы остановимся на двух типичных подходах.

Первый подход основан на максимизации классической взаимной информации (4.9):

$$(U_A^{\text{opt}}, U_B^{\text{opt}}) = \arg \max_{U_A, U_B} J(U_A, U_B). \quad (4.16)$$

Данную пару унитарных операторов мы будем называть *оптимальными*, а также использовать верхний индекс *opt* для всех томографических характеристик, вычисленных в этом базисе. Томографический дискорд, в оптимальном базисе

$$D^{\text{opt}} = D(U_A^{\text{opt}}, U_B^{\text{opt}}) = \min_{U_A, U_B} D(U_A, U_B) \quad (4.17)$$

также известен как симметричный дискорд при условии использовании проективных ортогональных измерений [93]. Важно отметить, что нахождение операторов U_A^{opt} и U_B^{opt} сопряжено с очевидными вычислительными сложностями из-за процедуры максимизации в многомерном параметрическом пространстве.

Второй подход, рассмотренный в работах [94–96] основан на использовании операторов поворота, приводящих матрицы плотности подсистем к диагональному виду. Получившийся базис мы будем называть *диагонализирующим*, а соответствующие операторы поворота и томографические характеристики будем обозначать с помощью верхнего индекса diag . Значение томографического дискорда при данном выборе базисе также известно под названием возмущения, индуцированного измерением (measurement induced disturbance).

Отметим, что в случае максимально запутанных состояний матрицы плотности подсистем будут оставаться диагональными в любом измерительном базисе. В этом частном случае в качестве диагонализирующего естественно выбрать один из базисов, определяющий разложение Шмидта данного состояния, т. к. именно в нем достигается максимальный уровень наблюдаемых корреляций.

Важной особенностью диагонализирующего измерительного базиса является то, что при его использовании энтропии Шеннона и энтропии фон Неймана подсистем совпадают:

$$H_{\Xi}(U_{\Xi}^{\text{diag}}) = S_{\Xi}, \quad \Xi \in \{A, B\}. \quad (4.18)$$

Это обстоятельство важно с точки зрения меры энтропийной асимметрии d , которую можно записать как

$$d^{\text{diag}} = d(U_A^{\text{diag}}, U_B^{\text{diag}}) = J^{\text{diag}} \frac{S_A - S_B}{S_A S_B}. \quad (4.19)$$

Сопоставляя данную величину со стандартной мерой энтропийной асимметрии, которую мы для краткости просто будем обозначать как d без аргумента:

$$d = I \frac{S_A - S_B}{S_A S_B}, \quad (4.20)$$

имеем

$$\frac{d^{\text{diag}}}{d} = \frac{J^{\text{diag}}}{I} = 1 - \frac{D^{\text{diag}}}{I} \geq 0. \quad (4.21)$$

Таким образом, томографическая энтропийная асимметрия, вычисленная в диагонализирующем базисе, по направлению всегда совпадает с исходной энтропийной асимметрией (построенной на энтропиях фон Неймана) и по модулю всегда не превышает последнюю. Другими словами, измерение в диагонализирующем базисе может лишь уменьшить величину асимметрии, но не изменить ее направления.

Важно отметить, что представленный выше вывод в общем случае не характерен для оптимального базиса. Знак величины

$$\frac{d^{\text{opt}}}{d} = \frac{J^{\text{opt}}}{I} \frac{S_A S_B}{H_A^{\text{opt}} H_B^{\text{opt}}} \frac{H_A^{\text{opt}} - H_B^{\text{opt}}}{S_A - S_B} \quad (4.22)$$

зависит от конкретного состояния ρ . Исследованию взаимосвязи между величинами d^{opt} , d и d^{diag} посвящена следующая задача.

4.2 Томографическая энтропийная асимметрия в двухкубитных состояниях

4.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим вопрос о взаимосвязи квантово-информационных энтропийных характеристик и томографических энтропийных характеристик для двухкубитных квантовых состояний, среди которых выделим класс двухкубитных состояний с матрицей плотности X -типа [36]. Интерес к X -состояниям мотивирован, во-первых, их распространенностью среди естественно физически реализуемых двухкубитных состояний (см. например [25, 171]), а во-вторых, наличием аналитических выражений [31–35] по вычислению стандартного дискорда (определяемого на основе измерения над одной из подсистем). Кроме того, в работе [172] показано, что с помощью унитарного оператора можно перевести произвольное двухкубитное квантовое состояние в состояние X -типа, имеющее такой же уровень смешанности, согласованности и негативности.

В данной главе под X -матрицей плотности мы будем понимать матрицу вида

$$\rho_{AB}^X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.23)$$

$$\rho_{14} \geq 0 \quad \rho_{23} \geq 0 \quad \text{Tr} \rho_{AB}^X = 1.$$

Важной особенностью X -состояния является то, что его редуцированные матрицы плотности изначально имеют диагональный вид

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & 0 \\ 0 & \rho_{33} + \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad \rho_B = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{33} & 0 \\ 0 & \rho_{22} + \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

таким образом, диагонализующие операторы поворота совпадают с единичными операторами

$$U_A^{\text{diag}} = U_B^{\text{diag}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Данное обстоятельство значительно упрощает вычисление томографических энтропийных характеристик в диагонализующем базисе.

Сформулируем основные задачи, связанные с изучением поведения томографической энтропийной асимметрии в двухкубитных состояниях.

1. Исследовать связь между величиной исходной энтропийной асимметрии d и величинами томографической энтропийной асимметрии d^{diag} и d^{opt} для X -состояний.

2. Исследовать связь между различными мерами энтропийной асимметрии (d , d^{diag} и d^{opt}) и различными вариантами томографического дискорда (D^{diag} и D^{opt}) для X -состояний.
3. Сравнить полученные результаты со случаем произвольных двухкубитных матриц плотности.

Решению задач, связанных с X -состояниями, посвящен раздел 4.2.2, произвольные состояния рассмотрены в разделе 4.2.3. Основные выводы представлены в разделе 4.2.4.

4.2.2 Результаты для X -состояний

В связи с крайней громоздкостью аналитических выкладок, получающихся при попытке вычисления энтропийных характеристик X -состояния общего вида (4.23), воспользуемся методом генерации случайных состояний (см. Приложение A.4). Для каждого сгенерированного состояния будем вычислять следующие величины:

(i) квантовую взаимную информации I и исходную энтропийную асимметрию d , построенные на основе энтропий фон Неймана;

(ii) томографической взаимную информацию I^{diag} и томографическую энтропийную асимметрию d^{diag} в диагонализующем базисе, которые можно легко получить по соответствующей томограмме

$$\mathcal{T}_{AB}^{\text{diag}} = \{\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{33}, \rho_{44}\}; \quad (4.26)$$

(iii) томографическую взаимную информацию I^{opt} и томографическую энтропийную асимметрию d^{opt} в оптимальном базисе.

Для выявления оптимального базиса воспользуемся параметризацией унитарных операторов с помощью угловых координат на сфере Блоха:

$$\begin{aligned} U_A = U_A(\phi_A, \theta_A) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_A}{2} \exp \frac{i\phi_A}{2} & \sin \frac{\theta_A}{2} \exp \frac{-i\phi_A}{2} \\ -\sin \frac{\theta_A}{2} \exp \frac{i\phi_A}{2} & \cos \frac{\theta_A}{2} \exp \frac{-i\phi_A}{2} \end{pmatrix}, \\ U_B = U_B(\phi_B, \theta_B) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_B}{2} \exp \frac{i\phi_B}{2} & \sin \frac{\theta_B}{2} \exp \frac{-i\phi_B}{2} \\ -\sin \frac{\theta_B}{2} \exp \frac{i\phi_B}{2} & \cos \frac{\theta_B}{2} \exp \frac{-i\phi_B}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

(отметим, что существует также альтернативный способ параметризации, основанный на кватернионах [104]). С ее помощью мы можем получить величину томографической взаимной информации как функцию четырех параметров

$$J(\phi_A, \theta_A, \phi_B, \theta_B) = J(U_A, U_B) \quad (4.28)$$

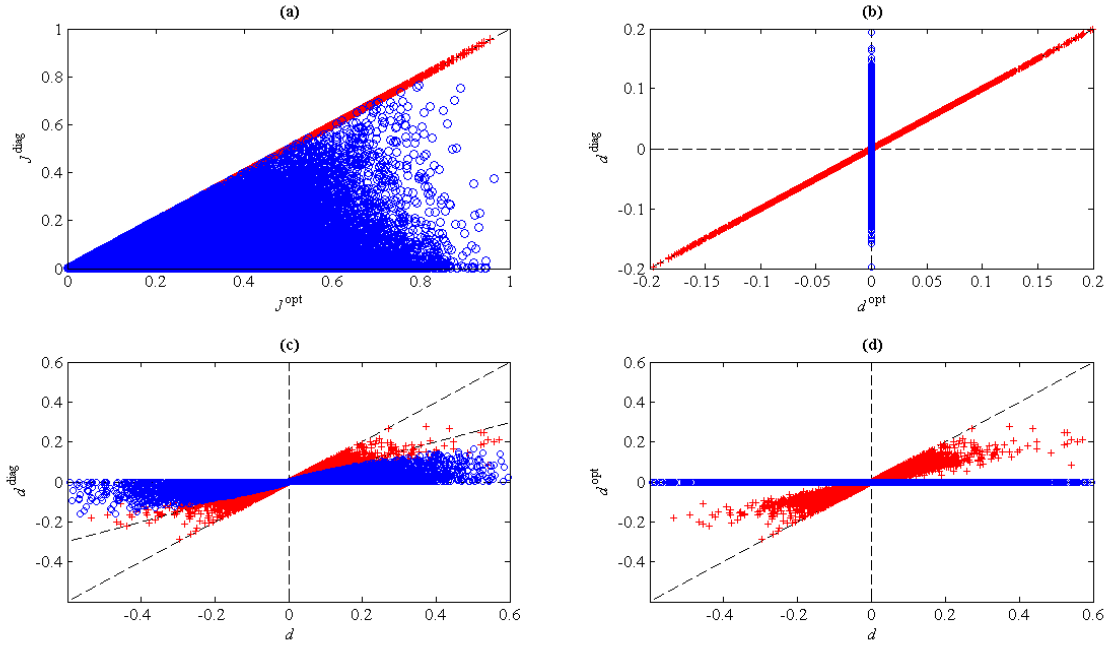


Рисунок 4.2: Сопоставление энтропийных характеристик для выборки из $N = 10^5$ X -состояний: (а) величины томографической взаимной информации J^{opt} и J^{diag} в оптимальном и диагонализующем базисах соответственно; (б) величины томографической энтропийной асимметрии d^{opt} и d^{diag} в оптимальном и диагонализующем базисах соответственно; (с) исходная энтропийная асимметрия d и энтропийная томографическая энтропийная асимметрия в диагонализующем базисе d^{diag} ; (д) исходная энтропийная асимметрия d и энтропийная томографическая энтропийная асимметрия в оптимальном базисе d^{opt} . Красными крестиками отмечены состояния для которых $J^{\text{opt}} = J^{\text{diag}}$, синими кружками – все остальные состояния

и далее, воспользовавшись стандартными методами оптимизации, получить численные значения параметров $\phi_A^{\text{opt}}, \theta_A^{\text{opt}}, \phi_B^{\text{opt}}$ и θ_B^{opt} , максимизирующих томографическую информацию. В итоге мы получаем значения томографических энтропийных характеристик состояния в оптимальном базисе

$$\begin{aligned} J^{\text{opt}} &= J(U_A^{\text{opt}}, U_B^{\text{opt}}) = J(\phi_A^{\text{opt}}, \theta_A^{\text{opt}}, \phi_B^{\text{opt}}, \theta_B^{\text{opt}}), \\ d^{\text{opt}} &= d(U_A^{\text{opt}}, U_B^{\text{opt}}) = d(\phi_A^{\text{opt}}, \theta_A^{\text{opt}}, \phi_B^{\text{opt}}, \theta_B^{\text{opt}}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Перейдем к анализу результатов, полученных для случайной выборки из $N = 10^5$ случайных X -состояний. Рассмотрим график Рис. 4.2а, на котором представлено сравнение величин томографической взаимной информации J^{diag} и J^{opt} . Среди всех состояний явно выделяется подкласс (обозначенный красными крестиками), характеризующийся равенством $J^{\text{opt}} = J^{\text{diag}}$. Для состояний данного подкласса диагонализующий базис (в нашем случае вычислительный) совпадает

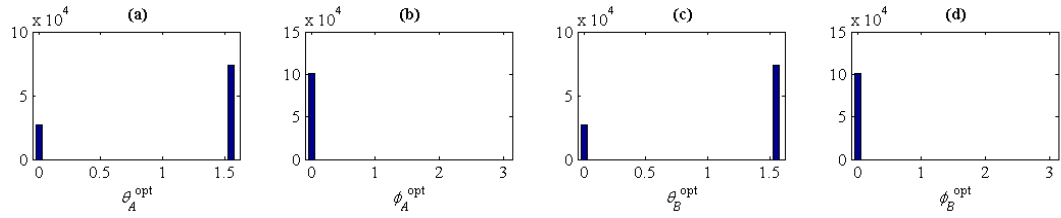


Рисунок 4.3: Гистограммы распределения параметров, определяющих оптимальный базис измерения (см. (4.27))

с оптимальным и соответствует измерениям z -проекции векторов Блоха обоих кубитов, что, в свою очередь, соответствует $\theta_A^{\text{opt}} = \theta_B^{\text{opt}} = 0$. Для остальных состояний (обозначенных синими кружками), оптимальный базис отличен от диагонализующего и обеспечивает больший уровень наблюдаемых корреляций ($J^{\text{opt}} > J^{\text{diag}}$).

Важную дополнительную информацию о втором подклассе состояний дает график Рис. 4.2b, на котором представлено сопоставление величин энтропийной асимметрии в оптимальном и диагонализующем базисах. Для подкласса состояний, в которых эти базисы совпадают, очевидно, имеем $d^{\text{diag}} = d^{\text{opt}}$. Для всех остальных состояний энтропийная асимметрия в оптимальном базисе, оказывается равной 0. В терминах представления состояния на сфере (шаре) Блоха это означает, что ось оптимального измерения для второго подкласса состояний лежит в плоскости xy , перпендикулярной оси z , вдоль которой расположены векторы Блоха обоих кубитов. Обратимся к гистограммам распределения углов, задающих оптимальный базис измерения, представленным на Рис. 4.3 (заметим, что гистограммы построены на основе всей сгенерированной совокупности состояний). Мы видим, что величины θ_A^{opt} и θ_B^{opt} принимают только два значения: 0 и $\pi/2$, что соответствует измерениям проекций векторов Блоха на ось z и на перпендикулярную ей плоскость. В то же время, азимутальные углы операторов поворота (4.27) всегда имеют нулевые значения

$$\phi_A^{\text{opt}} = \phi_B^{\text{opt}} = 0, \quad (4.30)$$

что свидетельствует о совпадении оси оптимального измерения для второго подкласса состояний с осью x . Важно отметить, что выполнение (4.30) непосредственно связано с выбором положительности недиагональных элементов матрицы плотности (см. (4.23)). В противном случае азимутальные углы операторов поворота, характеризующих оптимальный базис, соответствовали бы преобразованию имеющейся матрицы плотности к виду (4.23).

Итак, на основе полученных результатов, мы можем ввести два типа X -состояний.

- К первому типу X -состояний будем относить состояния, для которых оптимальным является измерение проекций обоих спинов вдоль оси z (измерение в вычислительном базисе), и который характеризуется потенциальной возможностью наличия томографической энтропийной асимметрии $d^{\text{opt}} = d^{\text{diag}}, |d^{\text{opt}}| \geq 0$.
- Ко второму типу X -состояний будем относить состояния, для которых оптимальным оказывается измерение проекций обоих спинов вдоль оси x , что влечет за собой равенство томографических энтропий кубитов и отсутствие томографической энтропийной асимметрии в оптимальном базисе $d^{\text{opt}} = 0$ (независимо от $|d|$).

Отметим ряд важных особенностей введенной классификации. Во-первых, состояния, принадлежащие к первому типу, могут иметь нулевое значение энтропийной асимметрии d^{opt} . Подобная ситуация возникает в случае, когда оптимальный базис совпадает с вычислительным, и исходные энтропии фон Неймана кубитов равны друг другу (например, в состоянии $\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$)

Во-вторых, подобная классификация неприменима к состояниям, в которых в принципе отсутствует корреляция между кубитами ($I = 0$). Данное обстоятельство обусловлено невозможностью определения оптимального базиса.

В-третьих, максимально запутанные состояния можно отнести одновременно к двум типам, т.к. для них существует бесконечно большое множество оптимальных базисов, к которым также относится вычислительных базис (кроме того, для них имеем $d = d^{\text{diag}} = d^{\text{opt}} = 0$).

В-четвертых, возможна ситуация при которой асимметричное состояние с $d > 0$ также может принадлежать обоим типам, т. к. измерение z - и x - проекций кубитов дает одинаковый уровень взаимной информации. Физическая возможность реализации подобного состояния будет продемонстрирована далее.

Прямым результатом, следующим из выявленной типизации, является возможность вычисления симметричного дискорда в X -состояниях по формуле

$$D = I - \max(J^{(\sigma_z, \sigma_z)}, J^{(\sigma_x, \sigma_x)}), \quad (4.31)$$

где

$$J^{(\sigma_z, \sigma_z)} = J^{\text{diag}} = J(\phi_A = 0, \theta_A = 0, \phi_B = 0, \theta_B = 0),$$

$$J^{(\sigma_x, \sigma_x)} = J(\phi_A = 0, \theta_A = \pi/2, \phi_B = 0, \theta_B = \pi/2)$$

соответствуют томографической взаимной информации, полученной при измерении z -проекции и x -проекции векторов Блоха кубитов.

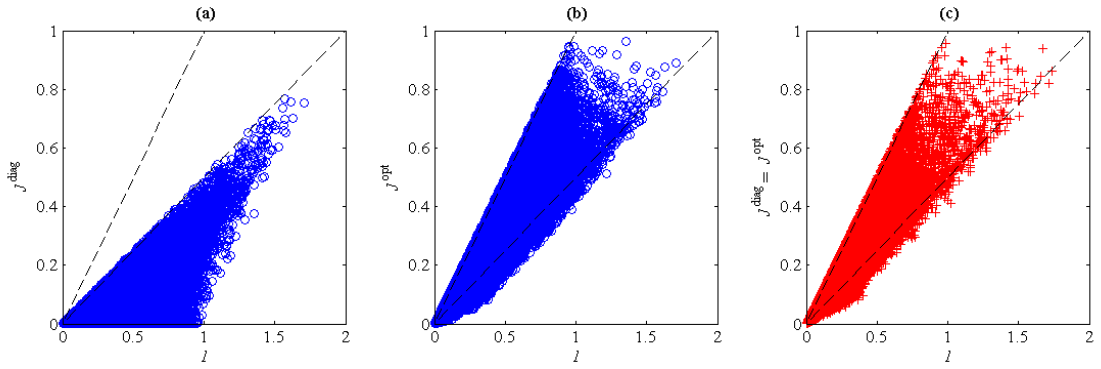


Рисунок 4.4: Сопоставление величин томографической взаимной информации в диагонализующем (J^{diag}) и оптимальном (J^{opt}) базисах с квантовой взаимной информацией I для X -состояний, принадлежащих второму (a, b) и первому (c) типам

Перейдем к рассмотрению взаимосвязи между величинами томографической энтропийной асимметрии d^{diag} и d^{opt} с исходной энтропийной асимметрией d , представленную на Рис. 4.2с,d. Как мы видим, для всех состояний выполняются неравенства

$$|d^{\text{diag}}| \leq |d|, \quad |d^{\text{opt}}| \leq |d|, \quad (4.32)$$

что обусловлено выполнением неравенства (4.21), а также обнаруженной возможностью распределения всех состояний на два типа ($d^{\text{opt}} = d^{\text{diag}}$ и $d^{\text{opt}} = 0$).

Однако кроме выполнения неравенства (4.32) из Рис. 4.2с видно, что для состояний второго типа имеет место более сильное неравенство

$$|d^{\text{diag}}| \leq \frac{1}{2}|d|. \quad (4.33)$$

Воспользовавшись соотношением (4.21) мы можем переписать (4.33) как

$$J^{\text{diag}} \leq \frac{1}{2}I. \quad (4.34)$$

Кроме того, из Рис. 4.2с видно, для часть энтропийно-асимметричных состояний также попадает в область (4.33). На основании вышеизложенного мы можем сформулировать *достаточное* условие принадлежности X -состояния первому типу: состояние вида (4.23) принадлежит первому типу, если томографическая взаимная информация, полученная в вычислительном базисе, превышает половину квантовой взаимной информации

$$J^{\text{diag}} > \frac{1}{2}I. \quad (4.35)$$

На Рис. 4.4 представлены соотношения между величинами J^{opt} и J^{diag} отдельно для каждого типа состояний. На Рис. 4.4b,c ясно прослеживается область возможных значений J^{opt} , захватывающая сегмент $I/2 \leq J^{\text{opt}} \leq I$, а также часть сегмента $J^{\text{opt}} < I/2$. Получение точной

аналитической формы области возможных значений величины J^{opt} представляет собой задачу дальнейших исследований.

4.2.3 Результаты для двухкубитных матриц плотности общего вида

Перейдем к рассмотрению случая произвольных двухкубитных состояний. Для этой цели вновь воспользуемся методом генерации случайных состояний (см. Приложение) и будем вычислять те же характеристики, что и для X -состояний.

Отметим, что для состояния общего вида ρ_{AB} диагонализующий базис отличается от вычислительного. Для его нахождения воспользуемся разложением соответствующих редуцированных матриц плотности $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$ и $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$ по сингулярным значениям в форме

$$\begin{aligned}\rho_A &= (U_A^{\text{diag}})^\dagger \Sigma_A U_A^{\text{diag}}, \\ \rho_B &= (U_B^{\text{diag}})^\dagger \Sigma_B U_B^{\text{diag}},\end{aligned}\tag{4.36}$$

где Σ_A и Σ_B – диагональные матрицы.

Легко видеть, что редуцированные матрицы плотности отдельных кубитов A и B , полученные из «подкрученной» матрицы плотности

$$\rho_{AB}^{\text{diag}} = (U_A^{\text{diag}} \otimes U_B^{\text{diag}}) \rho_{AB} (U_A^{\text{diag}} \otimes U_B^{\text{diag}})^\dagger,\tag{4.37}$$

будут соответственно равны Σ_A и Σ_B , что соответствует определению диагонализующего базиса.

Для получения оптимального базиса, как и в случае X -состояний, воспользуемся стандартными методами оптимизации.

Численные результаты для выборки $N = 10^5$ произвольных случайных двухкубитных состояний представлены на Рис. 4.5. Рассмотрим основные отличия по сравнению с аналогичными результатами для X -состояний (см. Рис. 4.3).

В первую очередь, отметим, что для произвольных состояний отсутствует выделенный подкласс, для которого оптимальный базис совпадает с диагонализующим: на Рис. 4.5a состояния лежат ниже биссектрисы $J^{\text{opt}} = J^{\text{diag}}$.

Далее, из результатов, представленных на Рис. 4.5b мы можем заключить, что величины томографической энтропийной асимметрии d^{diag} и d^{opt} могут соотноситься друг с другом произвольным образом, причем как по модулю, так и по направлению. В этом контексте наиболее необычными, с интуитивной точки зрения, представляются состояния с противоположными направлениями асимметрии $d^{\text{diag}} d^{\text{opt}} < 0$. Однако, в целом для всей равномерно распределенной выборки между параметрами d^{opt} и d^{diag} имеет место корреляция (коэффициент линейной корреляции $r = 0.70$), соответствующая однонаправленности томографических мер энтропийной асимметрии.

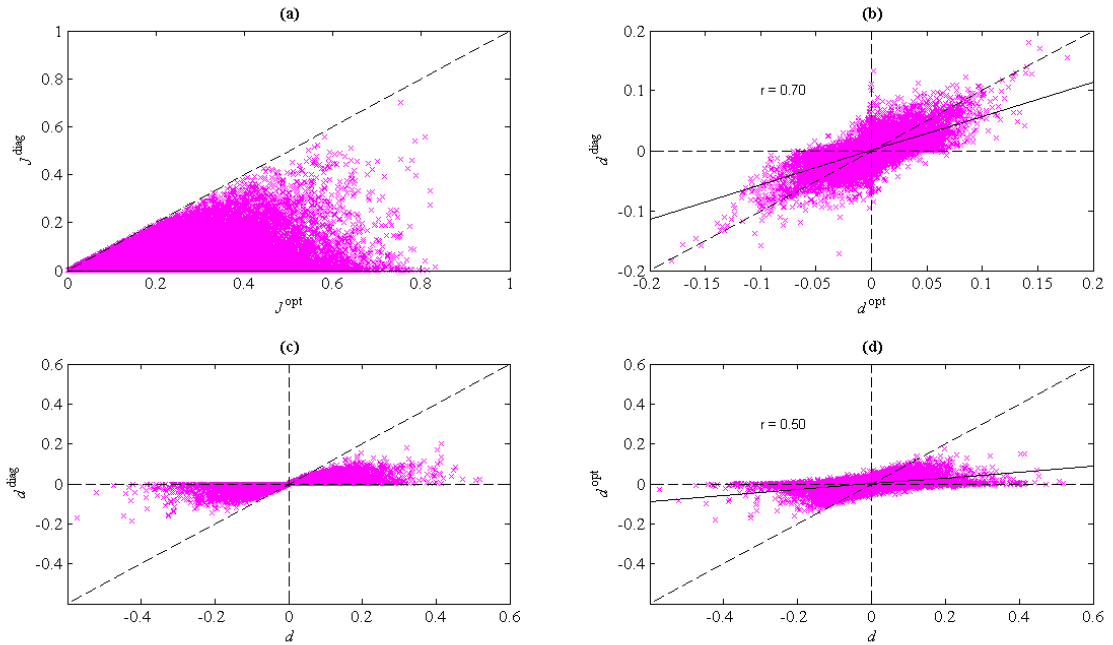


Рисунок 4.5: Сопоставление энтропийных характеристик для выборки из $N = 10^5$ произвольных двухкубитных состояний: (а) величины томографической взаимной информации J^{opt} и J^{diag} в оптимальном и диагонализующем базисах соответственно; (б) величины томографической энтропийной асимметрии d^{opt} и d^{diag} в оптимальном и диагонализующем базисах соответственно; (с) исходная энтропийная асимметрия d и энтропийная томографическая энтропийная асимметрия в диагонализующем базисе d^{diag} ; (д) исходная энтропийная асимметрия d и энтропийная томографическая энтропийная асимметрия в оптимальном базисе d^{opt} . Красными крестиками отмечены состояния для которых $J^{\text{opt}} = J^{\text{diag}}$, синими кружками – все остальные состояния. На графиках (б) и (д) также показаны прямые линейной регрессии с указанием соответствующих коэффициентов корреляции (сплошные линии)

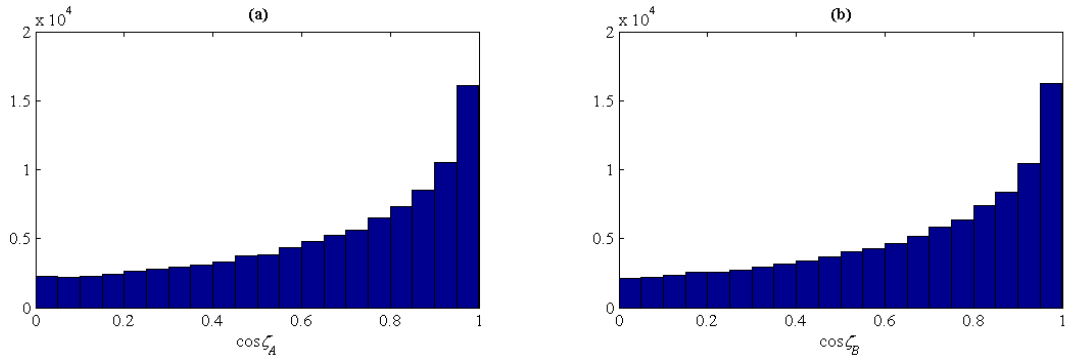


Рисунок 4.6: Гистограммы распределения косинусов углов между осями, определяющими диагонализующий и оптимальный базисы (4.38) для выборки из $N = 10^5$ произвольных двухкубитных состояний

На Рис. 4.6 дополнительно приведены гистограммы распределения косинусов углов ζ_A и ζ_B между осями, определяющими диагонализующий и оптимальный базисы. Данные величины могут быть вычислены как скалярное произведение между соответствующими единичными векторами:

$$\cos \zeta_{\Xi} = |\{\cos \theta_{\Xi}^{\text{diag}} \cos \phi_{\Xi}^{\text{diag}} \cos \theta_{\Xi}^{\text{opt}} \cos \phi_{\Xi}^{\text{opt}}\} + \{\cos \theta_{\Xi}^{\text{diag}} \sin \phi_{\Xi}^{\text{diag}} \cos \theta_{\Xi}^{\text{opt}} \sin \phi_{\Xi}^{\text{opt}}\} + \{\sin \theta_{\Xi}^{\text{diag}} \sin \phi_{\Xi}^{\text{opt}}\}|, \quad \Xi = A, B. \quad (4.38)$$

Представленные распределения явно демонстрируют факт наличия корреляции между направлениями осей рассматриваемых томографических базисов.

Сопоставление томографической меры энтропийной асимметрии d^{diag} с исходной энтропийной асимметрией d , представленное на Рис. 4.5с, иллюстрирует выполнение неравенства (4.21): томографическая асимметрия в диагонализующем базисе совпадает по направлению и не превышает по модулю исходную.

Особый интерес представляет собой сопоставление исходной и томографической энтропийной асимметрии в оптимальном базисе, приведенное на Рис. 4.5d. Мы можем убедиться, что в общем случае эти величины по знаку и модулю могут соотноситься друг с другом произвольным образом. Как и в случае с парой $(d^{\text{diag}}, d^{\text{opt}})$, между d и d^{opt} имеет место линейная корреляция, однако ее коэффициент $r = 0.50$ уже значительно ниже.

Наконец, рассмотрим соотношение между максимальной величиной томографической взаимной информации J^{opt} и исходной величиной квантовой взаимной информации I , представленной на Рис. 4.7. Как мы видим, в целом полученная область распределения точек (I, J^{opt}) для произвольных состояний соответствует аналогичным областям, полученным для X -состояний

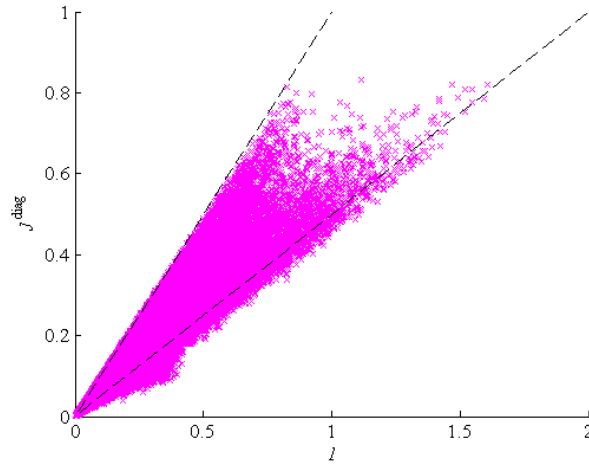


Рисунок 4.7: Соотношение между томографической взаимной информацией в оптимальном базисе J^{opt} и квантовой взаимной информацией I для выборки из $N = 10^5$ произвольных двухкубитных состояний

(см. Рис. 4.4b,c). Таким образом, можно выдвинуть гипотезу о наличии универсальных математических соотношений, ограничивающих возможные значения пар (I, J^{opt}) для всех двухкубитных состояний.

4.2.4 Выводы

Мы рассмотрели вопрос о связи энтропийной асимметрии, построенной на основе энтропий фон Неймана, и томографической энтропийной асимметрии в двухкубитных состояниях, уделив отдельное внимание состояниям с X -матрицей плотности. Перечислим основные полученные результаты.

1. Выявлено два типа состояний с X -матрицей плотности вида (4.23):

- (a) для состояний первого типа оптимальный измерительный базис совпадает с вычислительным (что соответствует измерению z -проекции векторов Блоха кубитов), и томографическая энтропийная асимметрия $d^{\text{opt}} = d^{\text{diag}}$ совпадает по направлению и не превосходит по модулю энтропийную асимметрию d ;
- (b) для состояний второго типа оптимальный измерительный базис соответствует измерению x -проекций векторов Блоха кубитов, вследствие чего томографическая энтропийная асимметрия $d^{\text{opt}} = 0$ вне зависимости от значения d .

2. Исключительное место в представленной выше классификации занимают

- (a) состояния, в которых отсутствует корреляция между кубитами ($I = 0$);

(b) состояния для которых одновременное измерение z -проекций кубитов и x -проекций кубитов дают одинаковый уровень томографической взаимной информации: к ним, например, относятся максимально запутанные состояния, но также могут относиться энтропийно-асимметричные состояния с $d^{\text{opt}} = d^{\text{diag}} \neq 0$.

3. Выявлено достаточное условие принадлежности X -состояния к первому типу:

$$J^{\text{diag}} > I/2.$$

4. Как следствие выявленной типизации получена конструктивная формула для вычисления симметричного дискорда в X -состояниях (4.31)

5. Для произвольных равномерно распределенных двухкубитных состояний выявлена тенденция к сонаправленности осей оптимального и диагонализующего измерений, однако в общем случае пары величин $(d^{\text{diag}}, d^{\text{opt}})$ и (d, d^{opt}) могут находиться в любых соотношения как по знаку, так и по модулю.

Данные результаты опубликованы в работе [102]. Следует отметить, что основным недостатком представленного исследования является то, что оно основано на методе Монте-Карло. В рамках случайной генерации состояний внутри некоторого множества из поля внимания выпадают подмножества состояний, имеющие нулевую меру. К такому подмножеству, например, относятся состояния лежащие на пересечении первого и второго типа X -состояний. Для того, чтобы частично решить данную проблему, в следующей части мы рассмотрим определенное, реализующееся в конкретных физических условиях, X -состояние, которое позволяет явно проследить переход между двумя типами.

4.3 Исследование физической реализации X -состояния

4.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим конкретную физическую ситуацию, в которой реализуется состояние X -типа, схематично представленную на Рис. 4.8. Пусть два сверхпроводящих LC -контура с различными значениями емкостей C_1 и C_2 и индуктивностей L_1 и L_2 связаны друг с другом индуктивной (трансформаторной) связью $L_{12} \leq \sqrt{L_1, L_2}$.

Гамильтониан данной системы может быть представлен в виде

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_2 + \hat{V} \quad (4.39)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_j = \frac{L_j \hat{I}_j^2}{2} + \frac{\hat{Q}_j^2}{2C_j}, \quad j = 1, 2$$

являются гамильтонианами невзаимодействующих цепочек, записанными через операторы токов \hat{I}_j и зарядов на конденсаторе \hat{Q}_j , а гамильтониан взаимодействия соответственно имеет вид

$$\hat{V} = L_{12} \hat{I}_1 \hat{I}_2 \quad (4.40)$$

(в данном параграфе, в отличие от остальных, мы будем использовать знак $\hat{}$ для обозначения операторов).

В качестве основного объекта исследований будем рассматривать состояние термального равновесия

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\hat{\mathcal{H}}}{k_B T}\right), \quad Z = \text{Tr} \left[\exp\left(-\frac{\hat{\mathcal{H}}}{k_B T}\right) \right], \quad (4.41)$$

где k_B и T – постоянная Больцмана и температура среды соответственно. Как будет показано ниже, при достаточно низких температурах данное состояние с большой степенью точности можно считать двухкубитным состоянием X -типа.

Важно отметить, что в рассматриваемой системе параметры контуров в общем случае различны. Вследствие этого можно ожидать, что исследуемое состояние будет обладать энтропийной асимметрией (как обычной, так и томографической), а также для него будет наблюдаться неравенство между дискордами, получаемыми на основе измерений состояний различных контуров.

Сформулируем основные задачи.

1. Получить двухкубитное приближение состояния (4.41) и соответствующие условия его применимости.
2. Исследовать принадлежность данного X -состояния к типам, выявленным в предыдущем параграфе, в зависимости от физических параметров системы.
3. Исследовать взаимосвязь между асимметрией собственных частот осцилляторов, различными мерами энтропийной асимметрии и асимметрией обычных дискордов.
4. Исследовать поведение взаимной информации и согласованности между кубитами в зависимости от физических параметров системы.

Получению двухкубитного состояния посвящен раздел 4.3.2, в разделе 4.3.3 подробно исследуются его свойства, основные выводы представлены в разделе 4.4.4.

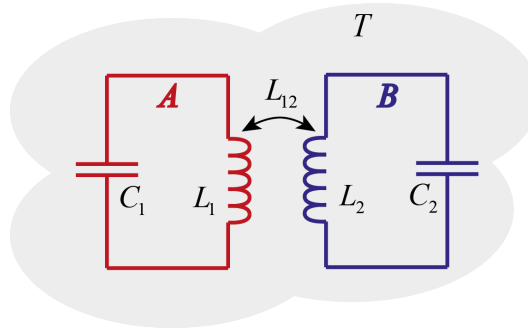


Рисунок 4.8: Схема физической реализации изучаемого X -состояния

4.3.2 Двухкубитное приближение термальной матрицы плотности

В качестве вычислительного базиса в гильбертовом пространстве нашей системы выберем стационарные сепарабельные состояния невзаимодействующих осцилляторов, удовлетворяющие соотношению

$$(\hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_2)|mn\rangle = E_{mn}|mn\rangle, \quad (4.42)$$

в котором энергетические уровни соответственно имеют вид

$$E_{mn} = \hbar\omega_1(m + 1/2) + \hbar\omega_2(n + 1/2), \quad (4.43)$$

где

$$\omega_j = \frac{1}{\sqrt{L_j C_j}} \quad (4.44)$$

резонансные частоты осцилляторов (здесь и далее индекс j принимает значения 1, 2).

Для того, чтобы получить выражение для состояния (4.41), перейдем к новому базису, в котором бы полный гамильтониан системы (4.39) имел диагональный вид. Для этого, в первую очередь, введем две пары канонических переменных

$$\hat{x}_j = -L_j C_j^{1/2} \hat{I}_j, \quad \hat{p}_j = C_j^{-1/2} \hat{Q}_j, \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}, \quad (4.45)$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Тогда гамильтониан (4.41) можно переписать в виде

$$\hat{\mathcal{H}}_j = \frac{\hat{p}_j^2}{2} + \frac{\omega_j^2 \hat{x}_j^2}{2}, \quad \hat{V} = g\omega_1\omega_2 \hat{x}_1 \hat{x}_2, \quad (4.46)$$

где

$$g = L_{12}(L_1 L_2)^{-1/2} \quad (4.47)$$

– безразмерный параметр, определяющий силу взаимодействия между осцилляторами.

Далее перейдем к новой паре канонических переменных

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{pmatrix} = M(\Theta) \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \end{pmatrix} = M(\Theta) \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

с помощью симплектической матрицы

$$M(\Theta) = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что при

$$\Theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2g\omega_1\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (4.50)$$

гамильтониан (4.45) принимает форму

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{P}_1^2}{2} + \frac{\Omega_1^2 \hat{X}_1^2}{2} + \frac{\hat{P}_2^2}{2} + \frac{\Omega_2^2 \hat{X}_2^2}{2}, \quad (4.51)$$

соответствующую двум невзаимодействующим осцилляторам со значениями резонансных частот

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \omega_1^2 \cos^2 \Theta + \omega_2^2 \sin^2 \Theta + g\omega_1\omega_2 \sin 2\Theta, \\ \Omega_2^2 &= \omega_1^2 \sin^2 \Theta + \omega_2^2 \cos^2 \Theta - g\omega_1\omega_2 \sin 2\Theta \end{aligned} \quad (4.52)$$

Для обозначения собственных векторов полного гамильтониана, а также их уровней энергии, будем использовать подчеркивание соответствующих квантовых чисел:

$$(\hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_2 + \hat{V})|\underline{mn}\rangle = E_{\underline{mn}}|\underline{mn}\rangle, \quad (4.53)$$

$$E_{\underline{mn}} = \hbar\Omega_1(m + 1/2) + \hbar\Omega_2(n + 1/2). \quad (4.54)$$

Коэффициенты разложения данных векторов в вычислительном базисе будем обозначать как $C_{ij}^{\underline{mn}} = \langle ij|\underline{mn}\rangle$. Для их вычисления воспользуемся известными волновыми функциями собственных состояний гармонического осциллятора

$$\Psi_m^{(\Omega)}(X) = \frac{\Omega^{1/4} \pi^{-1/4}}{\sqrt{(2^m m!)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\Omega X^2\right) \mathbf{H}_m(\Omega^{1/2} X), \quad (4.55)$$

где m – квантовое число, X – обозначение координаты, Ω – частота осциллятора и \mathbf{H}_m – полином Эрмита m -ой степени. Таким образом, получаем выражение

$$C_{ij}^{\underline{mn}} = \iint_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \Psi_i^{(\omega_1)}(x_1) \Psi_j^{(\omega_2)}(x_2) \Psi_m^{(\Omega_1)}(X_1(x_1, x_2)) \Psi_n^{(\Omega_2)}(X_2(x_1, x_2)), \quad (4.56)$$

где пара координат X_1 и X_2 связана с исходными координатами x_1 и x_2 соотношением

$$\begin{pmatrix} X_1(x_1, x_2) \\ X_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = M(\Theta) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

при значении параметра Θ , определяемым (4.50). Заметим, что в выражении (4.56) эрмитово сопряжение опущено, в связи с действительностью всех используемых функций. Кроме того,

важно отметить, что за счет четности (нечетности) функции $\Psi_m^{(\Omega)}(X)$ при четных (нечетных) значениях m , подынтегральное выражение удовлетворяет соотношению

$$\Psi_i^{(\omega_1)}(-x_1) \Psi_j^{(\omega_2)}(-x_2) \Psi_m^{(\Omega_1)}(X_1(-x_1, -x_2)) \Psi_n^{(\Omega_2)}(X_2(-x_1, -x_2)) = (-1)^{i+j+m+n} \Psi_i^{(\omega_1)}(x_1) \Psi_j^{(\omega_2)}(x_2) \Psi_m^{(\Omega_1)}(X_1(x_1, x_2)) \Psi_n^{(\Omega_2)}(X_2(x_1, x_2)). \quad (4.58)$$

Вследствие этого, имеем $C_{ij}^{mn} = 0$ для нечетных значений суммы $i + j + m + n$ по свойству интеграла от нечетной функции по всему пространству.

Зная энергетический спектр рассматриваемого гамильтониана (4.54), состояние термодинамического равновесия (4.41) можно переписать в виде

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \frac{1}{Z} \sum_{m,n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_{mn}}{k_{\text{B}}T}\right) |mn\rangle\langle mn|, \quad (4.59)$$

а нормирующий множитель, в свою очередь, может быть представлен как

$$Z = \sum_{m,n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_{mn}}{k_{\text{B}}T}\right) = \frac{\exp\left(-\frac{\hbar\Omega_1}{2k_{\text{B}}T}\right) \exp\left(-\frac{\hbar\Omega_2}{2k_{\text{B}}T}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\Omega_1}{k_{\text{B}}T}\right)\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\Omega_2}{k_{\text{B}}T}\right)\right)}. \quad (4.60)$$

В случае ненулевой температуры $T > 0$ ранг матрицы плотности (4.59), вообще говоря, стремится к бесконечности. Однако, числа заполнения энергетических уровней убывают по экспоненциальному закону

$$\langle mn|\rho_{\text{th}}|mn\rangle \propto \exp\left(-\frac{E_{mn}}{k_{\text{B}}T}\right), \quad (4.61)$$

что дает возможность «обрубить» компоненты матрицы плотности, соответствующие энергиям $E_{mn} \gg k_{\text{B}}T$.

В рассматриваемой задаче нас будут интересовать температуры, при которых матрицу плотности (4.59), записанную в вычислительном базисе, эффективно можно считать двухкубитной. Данное утверждение равносильно тому, что рассматриваемая матрица почти полностью принадлежит подпространству, определяемому проектором

$$\hat{\Pi}^{2\text{qb}} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|. \quad (4.62)$$

При попытке непосредственного вычисления элементов матрицы $\hat{\Pi}^{2\text{qb}}\rho_{\text{th}}\hat{\Pi}^{2\text{qb}}$ мы сталкиваемся с необходимостью получения бесконечного количества коэффициентов C_{ij}^{mn} для $i, j = 0, 1$ и всех возможных m, n , поэтому с учетом (4.61) будем рассматривать двухкубитное приближение термальной матрицы плотности ρ_{th} в виде

$$\hat{\rho}_{\text{th}}^{2\text{qb}} = \frac{1}{Z^{2\text{qb}}} \hat{\Pi}^{2\text{qb}} \sum_{\substack{m,n \geq 0, \\ m+n \leq 2}} \left[\exp\left(-\frac{E_{mn}}{k_{\text{B}}T}\right) |mn\rangle\langle mn| \right] \hat{\Pi}^{2\text{qb}}, \quad (4.63)$$

с нормирующим множителем

$$Z^{2\text{qb}} = \text{Tr} \left\{ \hat{\Pi}^{2\text{qb}} \sum_{\substack{m,n \geq 0, \\ m+n \leq 2}} \left[\exp \left(-\frac{E_{mn}}{k_{\text{B}}T} \right) |mn\rangle \langle mn| \right] \right\}. \quad (4.64)$$

Отметим, что индексы суммирования в выражениях (4.63) и (4.63) ограничены неравенством $m + n \leq 2$. Таким образом, состояние $\hat{\rho}_{\text{th}}^{2\text{qb}}$ получается из полного состояния $\hat{\rho}_{\text{th}}$ в два этапа: сначала к нему применяется проектор

$$\hat{\Pi}^{\text{init}} = |00\rangle \langle 00| + |01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 10| + |11\rangle \langle 11| + |20\rangle \langle 20| + |02\rangle \langle 02|, \quad (4.65)$$

ограничивающий количество слагаемых в суммировании, а затем уже применяется проектор на двухкубитное подпространство (4.62).

В качестве оценки точности рассматриваемого приближения удобно использовать величину

$$\alpha = 1 - \frac{Z^{2\text{qb}}}{Z} \geq 0, \quad (4.66)$$

фактически оценивающую L^1 норму проекции состояния на двух-кубитное подпространство. Таким образом, критерий использования двухкубитного приближения может быть сформулирован как

$$\alpha \ll 1. \quad (4.67)$$

Наконец, убедимся в том, что состояние (4.63), соответствует матрице плотности X -типа. Действительно, оператор плотности $\hat{\Pi}^{\text{init}} \rho_{\text{th}} \hat{\Pi}^{\text{init}}$ представляет собой сумму слагаемых вида $r_{\underline{mn}} |\underline{mn}\rangle \langle \underline{mn}|$, где $r_{\underline{mn}}$ – некоторая скалярная величина, $m + n \leq 2$. После действия проектора $\hat{\Pi}^{2\text{qb}}$ каждое такое слагаемое оказывается в обложках вида $|i_1 j_1\rangle \langle i_1 j_1| \bullet |i_2 j_2\rangle \langle i_2 j_2|$, где $i_1, i_2, j_1, j_2 = 0, 1$, и в результате для каждого слагаемого получаем

$$r_{\underline{mn}} |i_1 j_1\rangle \langle i_1 j_1| \langle \underline{mn} | \underline{mn} \rangle |i_2 j_2\rangle \langle i_2 j_2| = r_{\underline{mn}} C_{i_1 j_1}^{\underline{mn}} C_{i_2 j_2}^{\underline{mn}} |i_1 j_1\rangle \langle i_2 j_2|, \quad (4.68)$$

(комплексное сопряжение вновь опущено из-за действительности амплитуд). Для того, чтобы произведение $C_{i_1 j_1}^{\underline{mn}} C_{i_2 j_2}^{\underline{mn}}$ не обращалось в ноль, необходимо совпадение четности сумм $i_1 + j_1$ и $i_2 + j_2$ (с четностью $m + n$). Очевидно, что это условие не выполняется для нулевых элементов матрицы плотности X -типа, стоящих перед проекторами вида $|00\rangle \langle 10|$, $|00\rangle \langle 01|$, $|10\rangle \langle 11|$ и т. д.

4.3.3 Исследование корреляций в термальном состоянии

В целях упрощения представления результатов перейдем к безразмерным величинами, положив $k_{\text{B}} = \hbar = 1$. Положим также частоту первого осциллятора $\omega_1 = 1$ и введем величину

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad (4.69)$$

определяющую отстройку между осцилляторами.

В качестве основных характеристик, описывающих корреляции между осцилляторами, будем рассматривать следующие величины

- (i) квантовую взаимную информацию I ;
- (ii) томографический дискорд, полученный в диагонализующем (вычислительном) базисе D^{diag} ;
- (iii) томографический дискорд, полученный в симметризирующем базисе D^{sym} (данный базис будет описан ниже);
- (iv) стандартные дискорды $D^{(A)}$ и $D^{(B)}$, получаемые при измерениях, проводимых над подсистемами A и B соответственно;
- (v) запутанность формирования (entanglement of formation) \mathcal{E} , которую можно выразить через согласованность C (2.20) по формуле

$$\mathcal{E} = h_b \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - C^2} \right), \quad (4.70)$$

где h_b – бинарная энтропийная функция (2.19).

В предыдущем параграфе было показано, что среди X -состояний можно выделить два типа, характеризующихся определенным оптимальным измерительным базисом. Однако, этот результат был получен для матриц плотности, в которых все элементы были неотрицательными (см. (4.23)). В рассматриваемом термальном состоянии это может быть не так: недиагональные элементы являются действительными, но необязательно неотрицательными числами. Таким образом, под измерением в симметризирующем базисе, мы будем понимать измерение x -проекции векторов Блоха кубитов, которому предшествует преобразование исходной матрицы к форме (4.23). Например, в случае отрицательности обоих недиагональных элементов, это будет соответствовать измерению x -проекции вектора Блоха кубита A и y -проекции вектора Блоха кубита B . Все соответствующие величины, получаемые при подобном измерении мы будем обозначать с помощью верхнего индекса sym (данное название обусловлено тем, что в этом измерительном базисе отсутствует энтропийная асимметрия).

Важным частным случаем термального состояния (4.41) является основное состояние, получающееся в пределе $T \rightarrow 0$. Очевидно, что в случае двух связанных осцилляторов основное состояние является чистым и имеет вид

$$|\psi_{\text{gr}}\rangle = |00\rangle = C_{00}^{00}|00\rangle + C_{11}^{00}|11\rangle + C_{22}^{00}|22\rangle + \dots \quad (4.71)$$

В рамках двухкубитного приближения основное состояние (4.71) принимает вид

$$\rho_{\text{gr}}^{2\text{qb}} = \frac{1}{\left(C_{00}^{00}\right)^2 + \left(C_{11}^{00}\right)^2} \begin{pmatrix} \left(C_{00}^{00}\right)^2 & 0 & 0 & C_{00}^{00}C_{11}^{00} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{00}^{00}C_{11}^{00} & 0 & 0 & \left(C_{11}^{00}\right)^2 \end{pmatrix}, \quad (4.72)$$

а параметр точности приближения можно вычислить по формуле

$$\alpha = 1 - \left(C_{00}^{00}\right)^2 - \left(C_{11}^{00}\right)^2. \quad (4.73)$$

Поведение корреляций между подсистемами в двухкубитной аппроксимации чистого состояния представлены на Рис. 4.9. Как мы видим, для небольших значений константы связи $g < 0.5$ двухкубитное приближение оказывается применимым с достаточно большой точностью ($\alpha < 0.5\%$). Вследствие чистоты основного состояния выполняется следующий ряд тождеств:

$$\mathcal{E} = D^{(A)} = D^{(B)} = D^{\text{diag}} = \frac{1}{2}I. \quad (4.74)$$

Кроме того, как было показано ранее, для чистых состояний оптимальным оказывается измерение в вычислительном базисе, таким образом, имеем

$$D^{\text{sym}} \geq D^{\text{diag}} = D. \quad (4.75)$$

В целом, зависимости, представленные на Рис. 4.9, демонстрируют ожидаемое ослабление корреляций при уменьшении константы связи g , и отстройке от резонанса (возрастании $|\Delta\omega|$).

Перейдем к состоянию с ненулевой температурой $T > 0$, поведение характеристик которого представлено на Рис. 4.10. В случае резонанса (Рис. 4.10а), поведение всех величин кроме D^{diag} свидетельствует о монотонном ослаблении корреляций с ростом температуры. Величина томографического дискорда в диагонализующем базисе, в свою очередь, ведет себя аномальным образом слабо возрастаая на промежутке $0 < T < 0.25$.

Результирующая величина томографического дискорда $D = \min\{D^{\text{diag}}, D^{\text{sym}}\}$ совпадает с D^{diag} при температурах меньших критической температуры $T_c = 0.216$, в которой происходит пересечение кривых D^{diag} и D^{sym} . Таким образом, при росте температуры в точке T_c исследуемое состояние с X -матрицей плотности меняет свой тип с первого на второй. Формально рассматривая производные величины томографического (симметричного) дискорда D по температуре мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial T} &= \frac{\partial D^{\text{diag}}}{\partial T} > 0, & T < T_c; \\ \frac{\partial D}{\partial T} &= \frac{\partial D^{\text{sym}}}{\partial T} < 0, & T > T_c; \end{aligned} \quad (4.76)$$

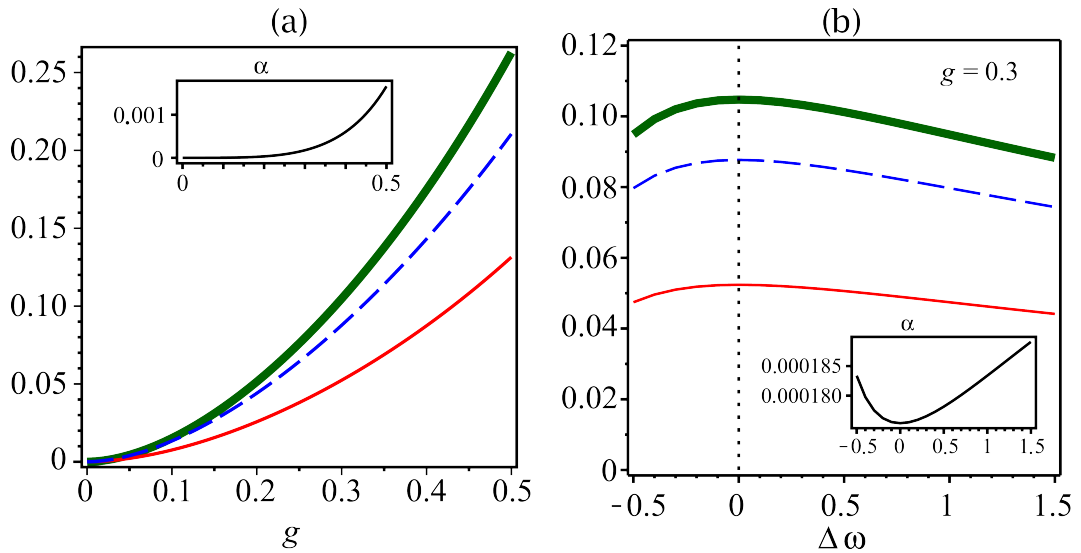


Рисунок 4.9: Корреляции между подсистемами в основном состоянии (4.72) в зависимости от постоянной взаимодействия g при резонансе $\Delta\omega = 0$ (a), в зависимости от отстройки $\Delta\omega$ при $g = 0.3$ (b). Жирная сплошная линия – взаимная информация I , тонкая сплошная линия – запутанность формирования \mathcal{E} , совпадающая с рядом других характеристик (см. (4.74)), пунктирная линия – томографический дискорд в симметризирующем базисе D^{sym} . На вложенных графиках представлена оценка точности двухкубитного приближения α

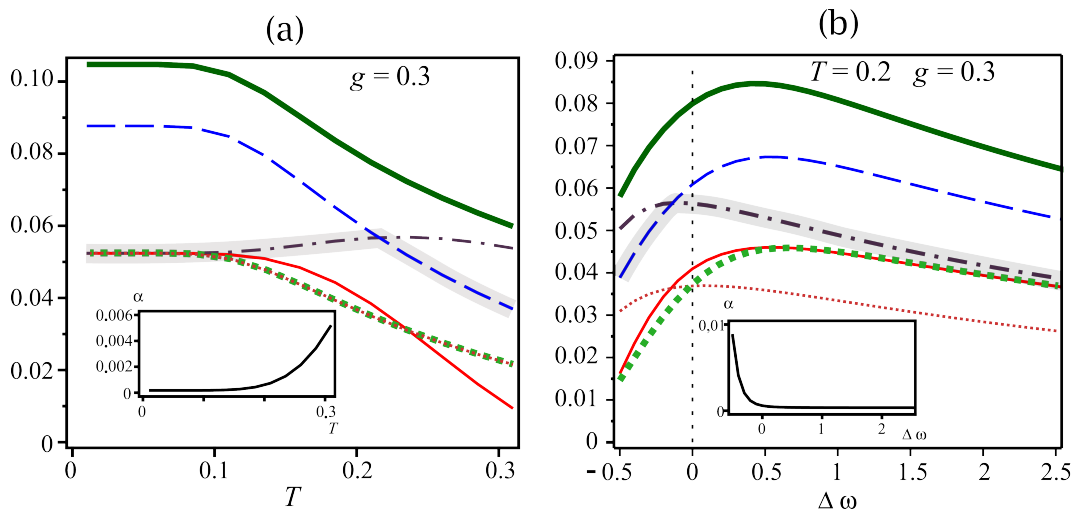


Рисунок 4.10: Корреляции между подсистемами в термальном состоянии (4.63) при $g = 0.3$ в зависимости температуры T при резонансе $\Delta\omega = 0$ (a), в зависимости от отстройки $\Delta\omega$ при $T = 0.2$ (b). Жирная сплошная линия – взаимная информация I , тонкая сплошная линия – запутанность формирования \mathcal{E} , штрихпунктирная линия – томографический дискорд в диагонализующем базисе D^{diag} , пунктирная линия – томографический дискорд в симметризирующем базисе D^{sym} , тонкая и толстая точечные линии – дискорды $D^{(A)}$ и $D^{(B)}$ соответственно. Сплошное выделение соответствует величине симметричного дискорда $D = \min(D^{\text{diag}}, D^{\text{sym}})$ На вложенных графиках представлена оценка точности двухкубитного приближения α

что свидетельствует о наличии фазового перехода второго рода. Следует отметить, что величины обычного дискорда $D^{(A)} = D^{(B)}$, как и остальные меры корреляций, не испытывают подобных скачков своих производных.

При температурах $T > T_c$ мы соответственно имеем $D = D^{\text{sym}}$. Важно отметить, что дальнейший рост температуры сопровождается ухудшением двухкубитного приближения рассматриваемого состояния.

Исследование влияния отстройки от резонанса при фиксированной температуре $T = 0.2$, представленное на Рис. 4.10b свидетельствует о наличии изменения типа состояния при величине отстройки $\Delta\omega = -0.137$. В этой точке вновь происходит скачок производной от томографического дискорда

$$\left. \frac{\partial D}{\partial \Delta\omega} \right|_{\Delta\omega=\Delta\omega_c, \text{ left}} = \left. \frac{\partial D^{\text{sym}}}{\partial \Delta\omega} \right|_{\Delta\omega=\Delta\omega_c} \neq \left. \frac{\partial D}{\partial \Delta\omega} \right|_{\Delta\omega=\Delta\omega_c, \text{ right}} = \left. \frac{\partial D^{\text{diag}}}{\partial \Delta\omega} \right|_{\Delta\omega=\Delta\omega_c} \quad (4.77)$$

что формально соответствует наличию фазового перехода второго рода, однако вновь не сопровождается какими-либо скачками в других мерах корреляции между подсистемами.

Для того, чтобы изучить изменение типа X -состояния более детально, рассмотрим поведение величины

$$J(\theta) = J(\phi_A = 0, \theta_A = \theta, \phi_B = 0, \theta_B = \theta) \quad (4.78)$$

(см. (4.28)) вблизи соответствующих критических значений T_c и $\Delta\omega_c$. На Рис. 4.11 можно увидеть, что величина $J(\theta)$ имеет локальные максимумы при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. В критической точке происходит совпадение этих максимумов и соответствующий прыжок глобального максимума от одного значения к другому. Важно отметить, что это именно мгновенный прыжок, в то время как в случае обычного дискорда для X -состояний, вычисление которого также сводится к рассмотрению σ_z и σ_x измерений (см. Приложение), имеет место хоть и относительно быстрый, но все-таки плавный переход между оптимальными измерительными базиса [35].

Подводя итог рассмотрению вопроса об изменении типа X -состояния, мы можем сделать вывод о том, что принципиально возможна ситуация, когда измерения в симметризирующем и диагонализующем базисах обеспечивают равные величины классической информации, а соответствующее состояние одновременно принадлежит двум типам.

Особый интерес представляет собой поведение стандартных дискордов $D^{(A)}$ и $D^{(B)}$, равенство между которым выполняется лишь при условии резонанса $\Delta\omega = 0$. В случае появления отстройки имеет место неравенства

$$\begin{aligned} D^{(A)} &> D^{(B)}, & \Delta\omega < 0; \\ D^{(A)} &< D^{(B)}, & \Delta\omega > 0; \end{aligned} \quad (4.79)$$

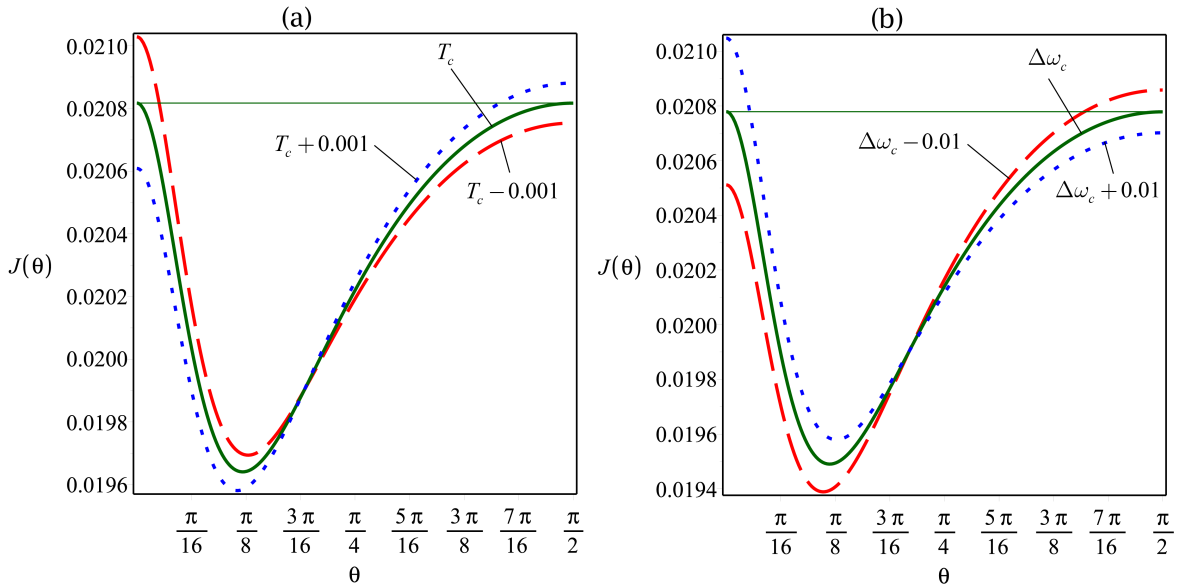


Рисунок 4.11: Поведение величины $J(\theta)$ в окрестностях критических точек T_c (a) и $\Delta\omega_c$ (b)

Сопоставляя поведение относительной асимметрии дискордов (3.5) с поведением энтропийных асимметрий d и d^{diag} (рис. Рис. 4.12), мы заключаем, что их направления всегда совпадают ($d \cdot \delta D > 0$ и $d^{\text{diag}} \cdot \delta D > 0$ при $\Delta\omega \neq 0$), и измерение подсистемы с большей энтропией дает доступ к большей величине взаимной информации. Таким образом, для данной пары взаимодействующих осцилляторов в термальном состоянии наблюдается та же закономерность, что и обнаруженная нами ранее в других физических системах.

Наконец, заметим, что максимум квантовой взаимной информации I и запутанности \mathcal{E} достигается не при резонансе, а при некоторой отстройке $\Delta\omega > 0$. На Рис. 4.13 представлено сравнение величин корреляций при резонансе и оптимальной отстройке для различных температур, а также соответствующие оптимальные значения отстройки отдельно для взаимной информации и запутанности. Интересно, что при температурах $T > 0.15$ запутанность оказывается более чувствительной к отстройке от резонанса, чем взаимная информация. Кроме того, между оптимальными значениями $\Delta\omega$, обеспечивающим максимумы I и \mathcal{E} , имеется разница, которая растет вместе температурой (при $T > 0.15$).

4.3.4 Выводы

Сформулируем основные выводы из изучения поведения корреляций термального состояния двух взаимодействующих осцилляторов, представленных в виде сверхпроводящих LC -контуров с индуктивной связью.

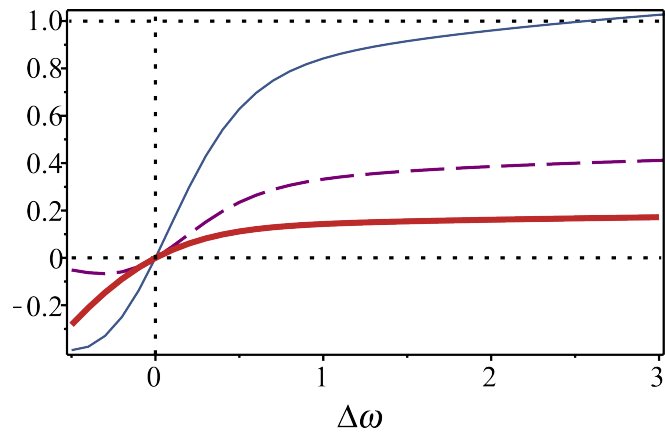


Рисунок 4.12: Величины относительной асимметрии дискорда ΔD (жирная сплошная), энтропийной асимметрии d (тонкая сплошная) и d^{diag} (пунктирная) в зависимости от отстройки $\Delta\omega$ при фиксированной температуре $T = 0.2$ и константе связи $g = 0.3$

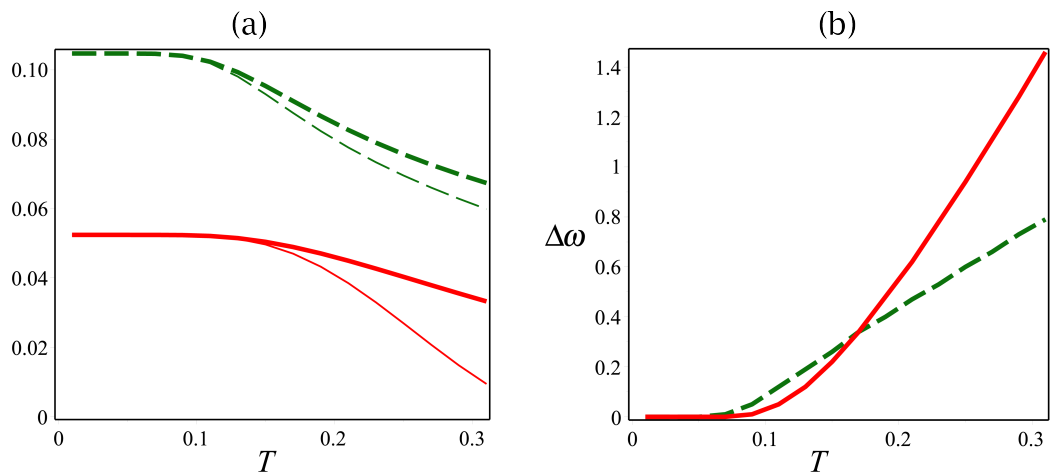


Рисунок 4.13: (a) Сопоставление значений взаимной информации I (пунктирные линии) и запутанности \mathcal{E} (сплошные линии) при резонансе (тонкие линии) и оптимальном значении отстройки $\Delta\omega$ (жирные линии) как функции температуры T при фиксированной константе связи $g = 0.3$. (b) Соответствующие оптимальные значения отстройки $\Delta\omega$ для которых достигаются максимальные значения взаимной информации и запутанности (пунктирная и сплошная линии соответственно)

1. Основное состояние исследуемой системы при условии справедливости двухкубитного приближения ($g < 0.5$, $-0.5 < \Delta\omega < 1.5$) соответствует X -состоянию первого типа.
2. При росте температуры и введении отстройки может происходить изменение типа исследуемого X -состояния. Данное изменение сопровождается скачком производной от томографического дискорда по температуре или отстройке. Соответствующих особенностей в поведении других мер корреляций в этих критических точках не наблюдается.
3. В наблюдаемых переходах от одного типа X -состояния к другому, оптимальные параметры измерительных базисов меняются скачкообразным образом, что отличает томографический дискорд от обычного.
4. Для исследуемой системы продемонстрировано выполнение выявленной ранее закономерности, согласно которой направление энтропийной (как стандартной, так и томографической) асимметрии совпадает с направлением асимметрии дискордов. Таким образом, направление томографической асимметрии указывает на подсистему, измерение которой дает больший уровень локально доступной информации.
5. Получено, что при фиксированной температуре максимумы взаимной информации и запутанности формирования соответствуют различным значениям отстройки. Разница между данными значениями отстройки растет вместе с температурой.

Полученные в разделах 4.2.4 и 4.4.4 выводы обосновывают защищаемое положение №4.

Материалы проведенного исследования опубликованы в работе [101]. Ожидается, что полученные результаты могут способствовать экспериментальному изучению томографического дискорда и его роли в прикладных задачах квантовой информатики.

4.4 Дальнейшее развитие: двусоставные квантовые состояния в неделимых физических системах

4.4.1 Использование несоставных квантовых систем в квантовой информатике

В предыдущем разделе мы рассмотрели двухкубитную систему, реализованную с помощью двух сверхпроводящих LC -контуров в предположении, что населенным оказываются лишь первые два энергетических уровня каждого из квантовых осцилляторов, соответствующих отдельным контурам. Очевидно, что эффективная размерность гильбертова пространства исследуемых

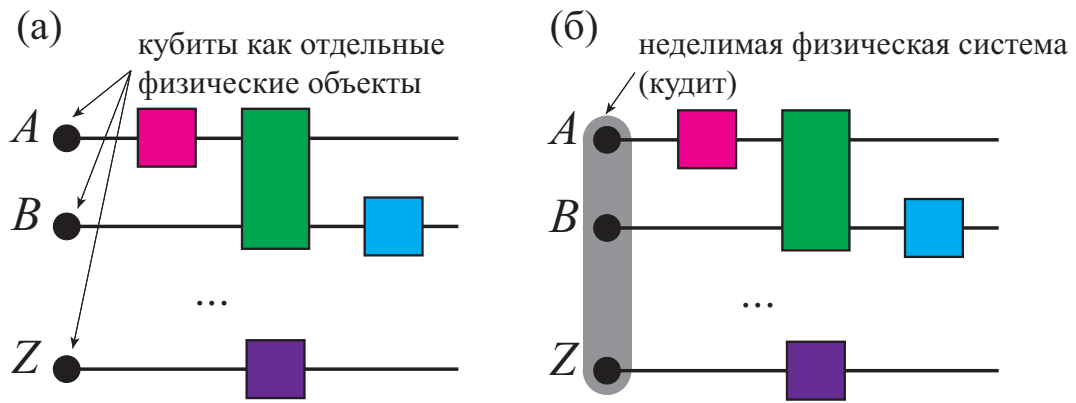


Рисунок 4.14: Традиционная парадигма квантовых вычислений: отдельные кубиты реализуются в виде изолированных физических объектов (а). Альтернативная схема, в которой подпространства состояний отдельных кубитов принадлежат пространству одного кудита (б).

двусоставных состояний оказывается равным четырем: каждому состоянию двусоставной системы соответствует положительно полу-определенная эрмитова матрица с единичным следом размерности 4×4 .

Заметим, что чисто с математической точки зрения пространство исследуемых состояний ничем не отличается от пространства состояний одиночной четырехуровневой системы, которому соответствует такие же положительно полу-определенные матрицы с единичным следом. Данное наблюдение позволяет рассматривать произвольное состояние четырехуровневой системы как двусоставное состояние двух «виртуальных» двухуровневых подсистем. С одной стороны, данный подход открывает возможность реализации квантовых алгоритмов, разработанных для многокубитных систем, с помощью одиночных неделимых физических систем [173–175] (см. Рис. 4.14). С другой стороны, открывается вопрос о роли квантовых корреляций между «виртуальными» подсистемами внутри единой неделимой системы [176–179]. Отметим, что все характеристики, описывающие корреляции в двусоставных состояниях, включая взаимную информацию, квантовую запутанность, квантовый дискорд и энтропийную асимметрию, остаются применимыми и для двусоставных состояниях в несоставных системах.

В следующих подразделах мы рассмотрим дальнейшее развитие идеи реализации квантовых вычислений на одиночных сверх-проводящих многоуровневых контурах с джозефсоновскими переходами. Их рассмотрение обусловлено неэквидистантностью энергетических уровней, дающую возможность обращаться к выделенным переходам между уровнями.

4.4.2 Реализация кубитных операций на четырех- и пятиуровневых системах

Рассмотрим четырехуровневую систему, с набором энергетических уровней $\{|i\rangle\}_{i=0}^4$ и следующим соответствием между состояниями неделимой системы и вычислительным базисом двухкубитного пространства (см. Рис. 4.14):

$$|0\rangle \leftrightarrow |00\rangle, \quad |1\rangle \leftrightarrow |01\rangle, \quad |2\rangle \leftrightarrow |10\rangle, \quad |3\rangle \leftrightarrow |11\rangle. \quad (4.80)$$

Предположим, что мы можем реализовывать произвольные θ -импульсы, соответствующие поворотам вокруг оси x сферы Блоха произвольного двухуровневого пространства:

$$R_x^{(jk)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}^{(jk)} \oplus \mathbf{1}^{(\bar{jk})}, \quad (4.81)$$

где $j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$, верхний индекс (jk) обозначает, что данная матрица записана в пространстве $\text{Span}(|j\rangle, |k\rangle)$, $\mathbf{1}^{(\bar{jk})}$ – единичная матрица в пространстве ортогонального дополнения $\text{Span}(|j\rangle, |k\rangle)^\perp$ в пространстве всей системы и \oplus – обозначение прямой суммы.

Операторы поворота вокруг оси x позволяют получить операторы поворотов вокруг оси y :

$$R_y^{(jk)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}^{(jk)} \oplus \mathbf{1}^{(\bar{jk})} = R_x^{(jl)}(\pi) R_x^{(kl)}(\theta) R_x^{(jl)}(3\pi). \quad (4.82)$$

Использование операторов (4.81) и (4.82) позволяет сконструировать важные логические вентили (гейты) для рассматриваемой несоставной системы. В качестве примера, рассмотри двухкубитный вентиль iSWAP, который может быть реализован следующим образом

$$U_{\text{iSWAP}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_x^{(12)}(3\pi) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{(12)} \oplus \mathbf{1}^{(03)}, \quad (4.83)$$

где полная матрица записана в вычислительном базисе. Как мы видим, реализация двухкубитной операции в пространстве единой четырехуровневой системы выглядит относительно просто.

Однокубитные операция, оказываются более сложными и требуют большего числа импульсов. Например, для реализации вентилля Адамара

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.84)$$

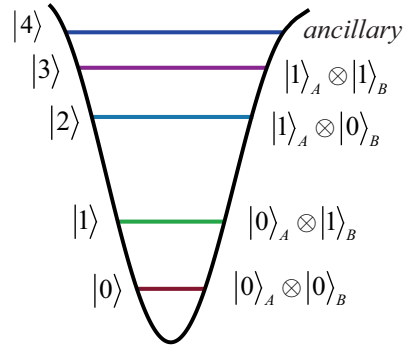


Рисунок 4.15: Соответствие между уровнями энергии в несоставной системе и вычислительным базисом двухкубитных состояний

на отдельных кубитах A и B соответственно требуются следующие операции

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(A)} &= \mathbf{H} \otimes \mathbf{1} = \\ &= R_y^{(13)} \left(\frac{\pi}{2} \right) R_y^{(02)} \left(\frac{\pi}{2} \right) R_x^{(23)}(2\pi) = R_x^{(23)}(\pi) R_x^{(12)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_x^{(03)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_x^{(23)}(\pi), \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(B)} &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{H} = \\ &= R_y^{(23)} \left(\frac{\pi}{2} \right) R_y^{(01)} \left(\frac{\pi}{2} \right) R_x^{(13)}(2\pi) = R_x^{(13)}(\pi) R_x^{(12)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_x^{(03)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_x^{(13)}(\pi). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Применение вентиля Адамара (4.84) к двум кубитам может быть реализовано с помощью последовательных операций (4.85) и (4.86), а также с помощью следующей последовательности импульсов:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(AB)} &= \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} = R_y^{(13)} \left(\frac{\pi}{2} \right) R_y^{(02)} \left(\frac{\pi}{2} \right) R_y^{(23)} \left(\frac{5\pi}{2} \right) R_y^{(01)} \left(\frac{\pi}{2} \right) R_x^{(13)}(2\pi) = \\ &= R_x^{(12)}(\pi) R_x^{(23)} \left(\frac{\pi}{2} \right) R_x^{(01)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_x^{(13)} \left(\frac{5\pi}{2} \right) R_x^{(02)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_x^{(12)}(3\pi) R_x^{(13)}(2\pi). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Отметим, что использование операторов вида (4.81) позволяет реализовывать лишь операции группы SU_4 , т.к. определитель каждого из операторов всегда равен 1. В тоже время, существуют важные операторы, например контролирующее НЕ (CNOT), матрица которых не принадлежит группе SU_4 . Для их реализации воспользуемся дополнительным энергетическим уровнем, рассмотрим соответствие между пространством пятиуровневой системы и двухкубитной системой вида (см. Рис. 4.15)

$$|0\rangle \leftrightarrow |00\rangle, \quad |1\rangle \leftrightarrow |01\rangle, \quad |2\rangle \leftrightarrow |10\rangle, \quad |3\rangle \leftrightarrow |11\rangle, \quad |4\rangle \leftrightarrow \text{ancillary}, \quad (4.88)$$

и будем рассматривать операторы эволюции и матрицы плотности системы соответственно в

форме

$$\mathcal{U} = \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & e^{i\phi} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right), \quad \varrho = \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \quad (4.89)$$

где U – произвольный двухкубитный оператор группы U_4 , а \mathcal{U} – унитарный оператор группы SU_5 ($\det(U)e^{i\phi} = 1$). Использование данных операторов при условии отсутствия заселенности 5-го энергетического уровня даёт возможность реализации произвольных двухкубитных операций.

В частности, данный подход позволяет реализовать $\pi/8$ -вентили $T = |0\rangle\langle 0| + e^{8\pi/4}|1\rangle\langle 1|$

$$\begin{aligned} T^{(A)} &= R_y^{(24)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_x^{(24)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_y^{(24)} \left(\frac{\pi}{2} \right) R_y^{(34)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_x^{(34)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_y^{(34)} \left(\frac{\pi}{2} \right), \\ T^{(B)} &= R_y^{(14)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_x^{(14)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_y^{(14)} \left(\frac{\pi}{2} \right) R_y^{(34)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_x^{(34)} \left(\frac{7\pi}{2} \right) R_y^{(34)} \left(\frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.90)$$

а также вентили CNOT с контролирующими кубитами A и B соответственно

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\text{CNOT}}^{(A \rightarrow B)} &= R_y^{(23)}(\pi) R_x^{(34)}(2\pi), \\ \mathcal{U}_{\text{CNOT}}^{(B \rightarrow A)} &= R_y^{(13)}(\pi) R_x^{(34)}(2\pi). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Полученные операции позволяют реализовать полный набор двухкубитных вентилей, а также приготавливать произвольное чистое двухкубитное состояние [98, 99].

4.4.3 Реализация алгоритма Дойча в пятиуровневой квантовой системе

Рассмотрим “черный ящик” реализующий булеву функцию f над одной булевой переменной. Всего существует четыре варианта f_i данной функции

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 0, & f_2(0) &= 1, & f_3(0) &= 0, & f_4(0) &= 1, \\ f_1(1) &= 0, & f_2(1) &= 1, & f_3(1) &= 1, & f_4(1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Отметим, что функции f_1 и f_2 возвращают одинаковые значения для все возможных вариантов входа и называются константными. Функции f_3 и f_4 возвращают 1 для одного из двух вариантов входа, и 0 – для другого. Такие функции называются сбалансированными.

Рассмотрим задачу определения, является ли неизвестная функция f сбалансированной за минимальное количество обращений к черному ящику. Очевидно, что в классическом случае требуется как минимум два запроса, чтобы справиться с этой задачей.

В квантовом случае, данная задача формулируется с помощью набора двухкубитных квантовых вентилей $\{U_i\}_{i=1}^4$, в которых каждый вентиль реализует следующую операцию

$$U_i|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y \text{ XOR } f_i(x)\rangle, \quad x, y \in \{0, 1\}. \quad (4.93)$$

Таким образом, задача состоит в том, чтобы для неизвестного вентиля из множества $\{U_j\}$ определить, является ли соответствующая ему функция сбалансированной. Алгоритм Дойча-Джоза [180] решает данную задачу всего за один запрос к неизвестному вентилю.

Суть данного алгоритма заключается в выполнении следующего равенства:

$$(\mathbf{H} \otimes \mathbf{1})U_j(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H})(\mathbf{1} \otimes X)|00\rangle = (-1)^j|f_j(0) \text{ XOR } f_j(1)\rangle \otimes |-\rangle. \quad (4.94)$$

Легко видеть, что результат измерения первого кубита в вычислительном базисе содержит результат выполнения алгоритма: 1 в случае сбалансированных функций, и 0 – в противном.

С точки зрения исходного пространства пятиуровневой системы операторы вентиляей (4.93) могут быть реализованы следующим образом

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \mathbf{1}_5, \\ \mathcal{U}_2 &= R_y^{(02)}(2\pi) R_y^{(01)}(\pi) R_y^{(23)}(\pi), \\ \mathcal{U}_3 &= \mathcal{U}_{\text{CNOT}}^{(A \rightarrow B)} = R_y^{(23)}(\pi) R_x^{(34)}(2\pi), \\ \mathcal{U}_4 &= R_y^{(01)}(\pi) R_x^{(14)}(2\pi). \end{aligned} \quad (4.95)$$

Можно непосредственно проверить, что применение операторов \mathcal{U}_j , заданных соотношениями (4.95) к матрицам плотности, в которых населенность пятого уровня равна 0, после применение отображения (4.88) даёт такой же результат, что и применение оператора U_j (4.93) к соответствующей двухкубитной матрице плотности.

В зависимости от трансформации (4.95) реализуются следующие состояния

$$|\psi_j\rangle = \mathbf{H}^{(A)}\mathcal{U}_j\mathbf{H}^{(A)} \otimes \mathbf{H}^{(B)}R_y^{(01)}(\pi)|0\rangle \quad (4.96)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), & |\psi_2\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |0\rangle), \\ |\psi_3\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle), & |\psi_4\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|3\rangle - |2\rangle). \end{aligned} \quad (4.97)$$

Полная схема реализации алгоритма Дейча представлены на Рис. 4.16. Рассматривая набор состояний (4.97) можно заключить, что ответ на вопрос задачи, является ли функция $f \in \{f_j\}$ сбалансированной или нет, может быть получен с помощью огрубленного (coarse-grained) измерения населенности энергетических уровней, задаваемого ПОЗМ вида $\{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3| + |4\rangle\langle 4|\}$. Данное измерение потенциально может быть получено с помощью изменения формы потенциала и проверки эффекта туннелирования (см. Рис. 4.16с). Аналогичная экспериментальная установка для измерения состояния была рассмотрена в работе [179].

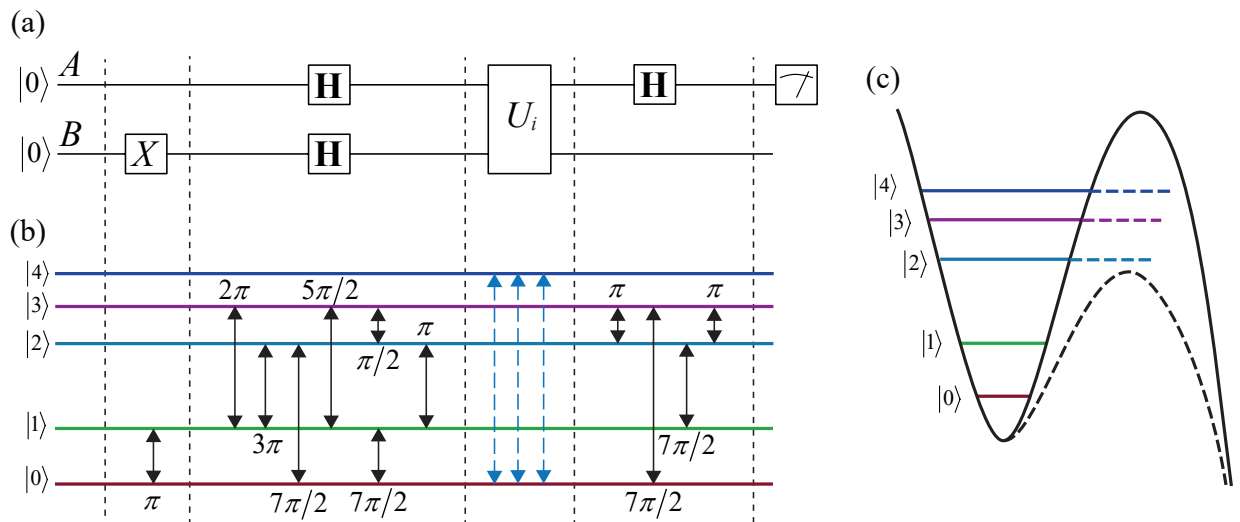


Рисунок 4.16: Реализация алгоритма Дойча-Джоза в несоставной системе: логическая схема алгоритма (а), порядок импульсов к пятиуровневой системе (б), измерение состояния кубита вычислительном базисе (с).

4.4.4 Выводы

Сформулируем основные выводы из изучения возможности реализации двухкубитных состояний в пространстве четырех- и пятиуровневой неделимой системы.

1. Получена реализация вентилей Адамара и оператора i SWAP в пространстве четырехуровневой системы.
2. Получена реализация универсального набора двухкубитных вентилей в пространстве пятиуровневой системы.
3. Представлена реализация алгоритм Дойча с помощью пятиуровневой системы.

Материалы проведенного исследования опубликованы в работах [98, 99]. В качестве актуального направления дальнейшего развития данной работы можно выделить изучение возможности использования несоставных систем в кодах квантового исправления ошибок.

Заключение

Настоящая диссертационная работа была посвящена исследованию энтропийной асимметрии в качестве характеристики, описывающей корреляции в двусоставных квантовых состояниях. Предложенные меры энтропийной асимметрии были использованы для получения результатов в различных областях физики квантовой информации, а именно:

- проблеме устойчивости когерентных свойств двух- и трехкубитных состояний при воздействии на него однокубитных каналов декогеренции (дефазирующего, деполяризующего и демпфирующего);
- исследовании свойств термального состояния двух частиц со спином $1/2$, находящихся в неоднородном магнитном поле и взаимодействующих в рамках XU - модели Гейзенберга;
- исследовании свойств состояний, реализующихся при взаимодействии двухуровневого атома и моды электромагнитного поля в рамках модели Джейнса-Каммингса;
- томографическом подходе к описанию квантовых состояний, а также задаче о нахождении оптимального измерения, определяющего симметричный дискорд двухкубитных состояний.

В результате выполненной работы получены следующие основные результаты.

1) Установлено соответствие между исходной энтропийной асимметрией двухкубитных и трёхкубитных состояний и различием в степени разрушения когерентных свойств при воздействии однокубитных каналов (дефазирующего, деполяризующего и демпфирующего) на различные кубиты данных состояний. Получена связь между поведением энтропийной асимметрии и ранее обнаруженным аномальным разрушением запутанности в «квантово-классическом» состоянии. Получено соответствие между исходной энтропийной асимметрией двухкубитных разбиений чистых трехкубитных состояний и различием в степени разрушения точности воспроизведения и квантовой взаимной информации различных двусоставных разбиений при прохождении одного из кубитов через деполяризующий канал.

2) Получено, что энтропийная асимметрия термального состояния двух частиц со спином $1/2$, находящихся в неоднородном поперечном магнитном поле и взаимодействующих согласно XU -модели Гейзенберга, направлена от частицы в более слабом магнитном поле к частице в более сильном магнитном поле. Продемонстрировано, что данное направление асимметрии согласуется с направлением избыточного потока локально доступной информации: измерение над частицей в более слабом магнитном поле обеспечивает больший уровень локально доступной информации, чем измерение частицы в более сильном магнитном поле.

3) Установлено, что в процессе взаимодействия в рамках модели Джейнса-Каммингса между двухуровневым атомом, изначально находившемся в основном или возбужденном состоянии, и моды поля, изначально находившейся в термальном состоянии, образуется энтропийно асимметричное запутанное состояние. Получены асимптотические значения негативности и функций независимости при стремлении начальной температуры моды поля к бесконечности.

4) Получена классификация двухкубитных X -состояний на основе их томографической энтропийной асимметрии при оптимальном измерении, соответствующем максимуму классической информации Шеннона. На основе данной классификации предложено выражение для вычисления симметричного дискорда в X -состояниях. Продемонстрирована возможность изменения типа X -состояния двух сверхпроводящих LC контуров, связанных индуктивной связью и находящихся в термальном равновесии, при изменении их физических параметров.

5) Предложен способ реализации произвольных двухкубитных операций группы U_4 , с помощью операций из группы SU_5 и использования дополнительного незаселенного уровня. Построен полный набор двухкубитных вентиляей для некомпозитной пятиуровневой системы, с использованием которого продемонстрировано построение алгоритма Дойча.

Стоит отметить, что часть результатов, связанных с исследованием роли энтропийной асимметрии не вошла в текст к диссертации, по причине ограничений на его объем. В частности, к ним относится исследование состояний, реализующихся в моделях замкнутых времени-подобных траекторий [100].

В качестве потенциальных направлений дальнейшего развития настоящего исследования можно выделить строгое математическое обоснование результатов, полученных с помощью метода Монте-Карло, а также обобщение результатов, полученных в рамках исследованных моделей взаимодействия (XU -взаимодействие, модель Джейнса-Каммингса) на другие распространенные типы взаимодействий.

Литература

1. Ladd T.D., Jelezko F., Laflamme R., Nakamura Y., Monroe C., O'Brien J.L. Quantum computers // Nature 2010. V. 464. P. 45-53.
2. Валиев К.А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // УФН 2005. Т. 175. С. 3-39.
3. Scarani V., Bechmann-Pasquinucci H., Cerf N.J., Lütkenhaus N., Peev M. The security of practical quantum key distribution // Rev. Mod. Phys. 2009. V. 81. P. 1301.
4. Молотков С.Н. Квантовая криптография и теоремы В.А. Котельникова об одноразовых ключах и об отсчетах // УФН 2006. Т. 176. С. 777-788.
5. Cirac I.J., Zoller P. Goals and opportunities in quantum simulation // Nature Phys. 2012. V. 8. P. 264-266.
6. Ye J., Kimble H.J., Katori H. Quantum State Engineering and Precision Metrology Using State-Insensitive Light Traps // Science 2008. V. 320. P. 1734.
7. Nielsen M.A., Chuang W.K. Quantum Computation and Quantum Information // Cambridge University Press 2000. 700 P.
8. Holevo A.S. Quantum Systems, Channels, Information: A Mathematical Introduction // Walter de Gruyter GmbH & Company KG 2012. 349 P.
9. Bennett, C. H. and Brassard, G. and Crepeau, C. and Jozsa, R. and Peres, A. and Wootters, W. K. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1895.
10. Bennet H., Wiesner S.J. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 2881.
11. Su X., Wang W., Wang Y., Jia X., Xie Ch., Peng K. Continuous variable quantum key distribution based on optical entangled states without signal modulation // EPL 2009. V. 87. P. 20005.

12. Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 77. P. 1413.
13. Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions // *Phys. Lett. A* 1996. V. 223. P. 1-8.
14. Арифиллин М.Р., Бердинский В.Л. Запутанность спиновых состояний четырехфермионной системы // *Труды МФТИ* 2013. Т. 5(4). С. 170-178.
15. Арифиллин М.Р., Бердинский В.Л. Квантовая запутанность спиновых состояний неразличимых фермионов // *Вестник ОГУ* 2013. Т. 6(155). С. 179-185.
16. Арифиллин М.Р., Бердинский В.Л. Нелокальные корреляции многоспиновых состояний неразличимых фермионов // *Вестник ОГУ* 2013. Т. 9(158). С. 76-79.
17. Арифиллин М.Р., Бердинский В.Л. Спиновые состояния мультиэлектронных систем и действие мультиспиновых запрето // *Ж. физ. химии* 2013. Т. 7(87). С. 1208-1212.
18. Horodecki K., Horodecki M., Horodecki P. Are quantum correlations symmetric? // *Quantum Inf. Comput.* 2010. V. 10. P. 901-910.
19. Ollivier H., Zurek W.H. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 88. P. 017901.
20. Henderson L., Vedral V. Classical, quantum and total correlations // *J. Phys. A* 2001. V. 34. P. 6899.
21. Fanchini F.F., Castelano L.K., Cornelio M.F., de Oliveira M.C. Locally inaccessible information as a fundamental ingredient to quantum information // *New J. Phys.* 2012. V. 14. P. 013027.
22. Modi K., Brodutch A., Cable H., Paterek T., Vedral V. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures // *Rev. Mod. Phys.* 2012. V. 84. P. 1655.
23. Madhok V., Datta A. Interpreting quantum discord through quantum state merging // *Phys. Rev. A* 2011. V. 83. P. 032323.
24. Cavalcanti D., Aolita L., Boixo S., Modi K., Piani M., Winter A. Operational interpretations of quantum discord // *Phys. Rev. A* 2011. V. 83. P. 032324.
25. Aldoshin S.M., Fel'dman E.B., Yurishchev M.A. Quantum entanglement and quantum discord in magnetoactive materials (Review Article) // *Low Temp. Phys.* 2014. V. 40. P. 3-16.

26. Doronin S.I., Fel'dman E.B., Kuznetsova E.I. Contributions of different parts of spin–spin interactions to quantum correlations in a spin ring model in an external magnetic field // *Quantum Inf. Process.* 2015. V. 14. P. 2929.
27. Doronin S.I., Zenchuk A.I. High-probability state transfers and entanglements between different nodes of the homogeneous spin $-1/2$ chain in an inhomogeneous external magnetic field // *Phys. Rev. A* 2010. V. 81. P. 022321.
28. Doronin S.I., Pyrkov A.N., Fel'dman E.B. Entanglement of spin pairs in alternating open spin $-1/2$ chains with the XY Hamiltonian // *JETP* 2007. V. 105. P. 953-961.
29. Fel'dman E.B., Kuznetsova E.I., Yurishchev M.A. Quantum correlations in a system of nuclear $s = 1/2$ spins in a strong magnetic field // *J. Phys. A* 2012. V. 45. P. 475304.
30. Fel'dman E.B., Zenchuk A.I. Asymmetry of bipartite quantum discord // *JETP Lett.* 2011. V. 93. P. 459-462.
31. Luo Sh. Quantum discord for two-qubit systems // *Phys. Rev. A* 2008. V. 77. P. 042303.
32. Ali M., Rau A.R.P., Alber G. Quantum discord for two-qubit X states // *Phys. Rev. A* 2010. V. 81. P. 042105.
33. Chen Q., Zhang Ch., Yu S., Yi X.X., Oh C.H. Quantum discord of two-qubit X states // *Phys. Rev. A* 2011. V. 84. P. 042313.
34. Huang Y. Quantum discord for two-qubit X states: Analytical formula with very small worst-case error // *Phys. Rev. A* 2013. V. 88. P. 014302.
35. Maldonado-Trapp A., Hu A., Roa L. Analytical solutions and criteria for the quantum discord of two-qubit X -states // *Quantum Inf. Process.* 2015. V. 14. P. 1947-1958.
36. Yu T., Eberly J.H. Evolution from Entanglement to Decoherence of Bipartite Mixed "X"States // *Quantum Inf. Comput.* 2007. V. 7. P. 459-468.
37. Коротаев С.М. О возможности причинного анализа геофизических процессов // *Геомагнетизм и аэрономия* 1992. Т. 32. С. 27-33.
38. Шеннон К.Э. Работы по теории информации и кибернетике // М.: ИЛ 1963. 829 С.
39. Бриллюэн Л. Наука и теория информации // М.: Гос. изд-во физ-мат лит-ры 1960. 391 С.
40. Хартмут Х. Применение методов теории информации в физике // М.: Мир 1989. 344 С.

41. Коротаев С.М., Хачай О.А., Шабелянский С.В. Применение причинного анализа к процессу вертикальной диффузии магнитного поля в океане // Геомagnetизм и аэрономия 1992. Т. 32. С. 48-53.
42. Коротаев С.М., Хачай О.А. Причинный анализ и его применение для изучения электромагнитных процессов в море // Известия АН Физика Земли 1992. Т. 4. С. 52-61.
43. Коротаев С.М., Хачай О.А., Лоу Л.К. Результаты применения причинного анализа к наблюдениям переменного магнитного поля в море // Известия АН Физика Земли 1992. Т. 32. С. 35-44.
44. Коротаев С.М., Хачай О.А. Роль запаздывания в причинном анализе геофизических процессов // Геомagnetизм и аэрономия 1992. Т. 32. С. 119-121.
45. Коротаев С.М., Шабелянский С.В., Сердюк В.О. Обобщенный причинный анализ и его применение для изучения электромагнитного поля в море // Известия АН Физика Земли 1992. Т. . С. 66-77.
46. Коротаев С.М., Хачай О.А., Шабелянский С.В. Причинный анализ процесса горизонтальной информационной диффузии электромагнитного поля в океане // Геомagnetизм и аэрономия 1993. Т. 33. С. 128-133.
47. Хачай О.А., Коротаев С.М. Причинный анализ и его применение для изучения физических процессов в атмосфере // Метеорология и гидрология 1994. Т. 33. С. 15-22.
48. Коротаев С.М. Роль различных определений энтропии в причинном анализе геофизических процессов и их приложение к электромагнитной индукции в морских течениях // Геомagnetизм и аэрономия 1995. Т. 35. С. 116-125.
49. Korotaev S.M., Morozov A.N., Serdyuk V.O., Sorokin M.O. Manifestation of the Macroscopic Nonlocality in Some Natural Dissipation Processes // Russ. Phys. J. 2002. V. 45. P. 431-444.
50. Korotaev S.M., Serdyuk V.O., Gorokhov Yu.V., Pulinets S.A., Nalivaiko V.I., Novysh A.V., Gaidash S.P. Experimental estimation of macroscopic nonlocality effect in solar and geomagnetic activity // Phys. Wave Phenom. 2003. V. 11. P. 46-55.
51. Korotaev S.M., Serdyuk V.O., Gorokhov J.V. Forecast of geomagnetic and solar activity on nonlocal correlations // Doklady Earth Sciences 2007. V. 415. P. 975-978.

52. Korotaev S.M., Morozov A.N., Serdyuk V.O., Gorokhov Yu.V., Filippov B.P., Machinin V.A. Experimental study of advanced nonlocal correlations of the process of solar activity // *Russ. Phys. J.* 2007. V. 50. P. 333-341.
53. Brukner Č. Quantum causality // *Nature Phys.* 2014. V. 10. P. 259-263.
54. Pegg D.T. Causality in quantum mechanics // *Phys. Lett. A* 2006. V. 349. P. 411-414.
55. Plotnitsky A. On physical and mathematical causality in quantum mechanics // *Physica E* 2010. V. 42. P. 279-286.
56. Ried K., Agnew M., Vermeyden L., Janzing D., Spekkens R.W., Resch K.J. A quantum advantage for inferring causal structure // *Nature Phys.* 2015. V. 11. P. 414-420.
57. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // *Phys. Rev.* 1935. V. 47. P. 777.
58. Cramer J.G. Generalized absorber theory and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox // *Phys. Rev. D* 1980. V. 22. P. 362.
59. Cramer J.G. The transactional interpretation of quantum mechanics // *Rev. Mod. Phys.* 1986. V. 58. P. 647.
60. Laforest M., Baugh J., Laflamme R. Time-reversal formalism applied to maximal bipartite entanglement: Theoretical and experimental exploration // *Phys. Rev. A* 2006. V. 73. P. 032323.
61. Ma X.-S., Zotter S., Kofler, J., Ursin R., Jennewein T., Brukner C., Zeilinger A. Experimental delayed-choice entanglement swapping // *Nature Phys.* 2012. V. 8. P. 480-485.
62. Megidish E., Halevy A., Shacham T., Dvir T., Dovrat L., Eisenberg H.S. Entanglement Swapping between Photons that have Never Coexisted // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110. P. 210403.
63. Lloyd S., Maccone L., Garcia-Patron R., Giovannetti V., Shikano Y., Pirandola S., Rozema L.A., Darabi A., Soudagar Y., Shalm L.K., Steinberg A.M. Closed Timelike Curves via Postselection: Theory and Experimental Test of Consistency // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 106. P. 040403.
64. Lloyd S., Maccone L., Garcia-Patron R., Giovannetti V., Shikano Yu. Quantum mechanics of time travel through post-selected teleportation // *Phys. Rev. D* 2011. V. 84. P. 025007.
65. Wheeler, J.A., Feynman R.P. Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action // *Rev. Mod. Phys.* 1949. V. 21 (3). P. 425–433.

66. Владимиров Ю.С., Турыгин А.Ю. Теория прямого межчастичного взаимодействия // М.: Энергоатомиздат 1986. 136 С.
67. Hoyle F., Narlikar J.V. Cosmology and action-at-a-distance electrodynamics // Rev. Mod. Phys. 1995. V. 67 (1). P. 113–155.
68. Менский М.Б. Диссипация и декогеренция квантовых систем // УФН 2003. Т. 173. С. 1199-1219.
69. Менский М.Б. Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология // М.: Физматлит 2001. Т. 173. С. 232.
70. Zurek W.H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical // Rev. Mod. Phys. 2003. V. 75. P. 715-775.
71. Cerf N.J. Entropic bounds on coding for noisy quantum channels // Phys. Rev. A 1998. V. 57. P. 3330.
72. Mari A., Giovannetti V., Holevo A.S. Quantum state majorization at the output of bosonic Gaussian channels // Nat. Commun. 2014. V. 5. P. 3826.
73. Filippov S.N., Rybár T., Ziman M. Local two-qubit entanglement-annihilating channels // Phys. Rev. A 2012. V. 85. P. 012303.
74. Filippov S.N., Ziman M. Entanglement sensitivity to signal attenuation and amplification // Phys. Rev. A 2014. V. 90. P. 010301.
75. Holevo A.S. On the constrained classical capacity of infinite-dimensional covariant quantum channels // J. Math. Phys. 2016. V. 57. P. 015203.
76. Amosov G.G., Dnestryan A.I. On the Entropy Gain Under the Action of the Amplitude Damping Channel on Qutrit // J. Russ. Laser Res. 2014. V. 35. P. 291-294.
77. Amosov G.G. Estimating the output entropy of a tensor product of two quantum channels // Theor. Mat. Phys. 2015. V. 182. P. 397-406.
78. Amosov G.G. On estimating the output entropy of the tensor product of a phase-damping channel and an arbitrary channel // Probl. Inform. Transm. 2013. V. 49. P. 224-231.
79. Zyczkowski K., Horodecki P., Horodecki M., Horodecki R. Dynamics of quantum entanglement // Phys. Rev. A 2001. V. 65. P. 012101.

80. Mancini S., Man'ko V.I., Tombesi P. Wigner function and probability distribution for shifted and squeezed quadratures // *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.* 1995. V. 7. P. 615.
81. D'Ariano G.M., Mancini S., Man'ko V.I., Tombesi P. Reconstructing the density operator by using generalized field quadratures // *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.* 1996. V. 8. P. 1017.
82. Mancini S., Man'ko V.I., Tombesi P. Symplectic tomography as classical approach to quantum systems // *Phys. Lett. A* 1996. V. 213. P. 1-6.
83. Ibert A., Man'ko V.I., Marmo G., Simoni A., Ventriglia F. An introduction to the tomographic picture of quantum mechanics // *Phys. Scripta* 2009. V. 79. P. 065013.
84. Bellini M., Coelho A.S., Filippov S.N., Man'ko V.I., Zavatta A. Towards higher precision and operational use of optical homodyne tomograms // *Phys. Rev. A* 2012. V. 85. P. 052129.
85. Dodonov V.V., Man'ko V.I. Positive distribution description for spin states // *Phys. Lett. A* 1997. V. 229. P. 335-339.
86. Man'ko V.I., Man'ko O.V., Safonov S.S. Describing spinors using probability distribution functions // *Theor. Mat. Phys.* 1998. V. 115. P. 520-529.
87. Andreev V.A., Man'ko V.I. Quantum tomography of spin states and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox // *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.* 2000. V. 2. P. 122.
88. Man'ko V.I., Pilyavets O.V., Zborovskii V.G. Probability Representation of Quantum Mechanics: Comments and Bibliography // *arXiv:quant-ph/0608251v3* 2006.
89. D'Ariano G.M., Matteo G.A.P., Sacchi F.M. Quantum Tomographic Methods / Lecture Notes in Physics P. Matteo and Ě. Jaroslav (Ed.) Springer Berlin Heidelberg. 2004 P. 7-58.
90. Fedorov A.K., Yurchenko S.O. Quantum Tomograms and Their Application in Quantum Information Science // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2013. V. 414. P. 012040.
91. Fedorov A.K. Feynman integral and perturbation theory in quantum tomography // *Phys. Lett. A* 2013. V. 377. P. 2320-2323.
92. Fedorov I.A., Fedorov A.K., Kurochkin Y.V., Lvovsky A.I. Tomography of a multimode quantum black box // *New J. Phys.* 2015. V. 17. P. 043063.
93. Girolami D., Paternostro M., Adesso G. Faithful nonclassicality indicators and extremal quantum correlations in two-qubit states // *J. Phys. A* 2011. V. 44. P. 352002.

94. Rajagopal A.K., Rendell R.W. Separability and correlations in composite states based on entropy methods // *Phys. Rev. A* 2002. V. 66. P. 022104.
95. Luo Sh. Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum // *Phys. Rev. A* 2008. V. 77. P. 022301.
96. Man'ko V.I., Yurkevich A. Tomographic Discord and Quantum Correlations in a System of Qubits // *J. Russ. Laser Res.* 2013. V. 34. P. 463-467.
97. Wang Z.-X., Wang B.-B. Symmetric quantum discord for a two-qubit state // *Chin. Phys. B* 2014. V. 23. P. 070305.
98. Kiktenko E.O., Fedorov A.K., Man'ko O.V., Man'ko V.I. Multilevel superconducting circuits as two-qubit systems: Operations, state preparation, and entropic inequalities // *Phys. Rev. A* 2015. V. 91. P. 042312.
99. Kiktenko E.O., Fedorov A.K., Strakhov A.A., Man'ko V.I. Single qudit realization of the Deutsch algorithm using superconducting many-level quantum circuits // *Phys. Lett. A* 2015. V. 379. P. 1409.
100. Korotaev S.M., Kiktenko E.O. Quantum causality in closed timelike curves // *Phys. Scr.* 2015. V. 90. P. 085101.
101. Fedorov A.K., Kiktenko E.O., Man'ko O.V., Man'ko V.I. Tomographic discord for a system of two coupled nanoelectric circuits // *Phys. Scr.* 2015. V. 90. P. 055101.
102. Kiktenko E.O., Fedorov A.K. Tomographic causal analysis of two-qubit states and tomographic discord // *Phys. Lett. A* 2014. V. 378. P. 1704.
103. Киктенко Е.О., Коротаев С.М. Причинность в квантовой телепортации // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер: «Естественные науки»* 2014. Т. 6(57). С. 24-36.
104. Fedorov A.K., Kiktenko E.O. Quaternion Representation and Symplectic Spin Tomography // *J. Rus. Las. Res.* 2013. V. 34. P. 477.
105. Kiktenko E.O., S.M. Korotaev Entanglement and causality in the interaction of the two-level atom with the field // *Phys. Scr.* 2013. V. 88. P. 055008.
106. S.M. Korotaev, Kiktenko E.O. Causality and decoherence in the asymmetric states // *Phys. Scr.* 2012. V. 85. P. 055006.

107. Kiktenko E.O., Korotaev S.M. Causal analysis of asymmetric entangled states under decoherence // *Phys. Lett. A* 2012. V. 376. P. 820.
108. Коротаев С.М., Киктенко Е.О. Причинность в квантовых запутанных состояниях // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер: «Естественные науки»* 2011. V. 3(42). P. 90-107.
109. Коротаев С.М., Киктенко Е.О. Причинный анализ квантовых запутанных состояний Ч. II. // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер: «Естественные науки»* 2010. V. 4(39). P. 30-48.
110. Коротаев С.М., Киктенко Е.О. Причинный анализ квантовых запутанных состояний Ч. I. // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер: «Естественные науки»* 2010. V. 3(38). P. 35-55.
111. Fedorov A.K., Kiktenko E.O. Mutual information-energy inequality for thermal states of a bipartite quantum system // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015. V. 594. P. 012045.
112. Korotaev S.M., Kiktenko E.O. Quantum Causality // *Physics of Reality: Space, Time, Matter, Cosmos.* World Scientific 2013. V. . P. 273-294.
113. Korotaev S.M., Kiktenko E.O. Causal analysis of the quantum states // *AIP Conf. Proc.* 2010. V. 1316. P. 295-331.
114. Kiktenko E.O., Korotaev S.M. Quantum Causality in the Closed Timelike Curves // *International Scientific Conference Physical Interpretations of Relativity Theory. Abstracts.* Moscow, 29 June- 2 July 2015 P. 35.
115. Kiktenko E.O., Korotaev S.M. Causality in quantum teleportation / *Physical Interpretations of Relativity Theory: Proceedings of International Meeting.* Moscow, 1 - 4 July 2013. M.C. Duffy, V.O. Gladyshev, A.N. Morozov, P. Rowlands. (Ed.) Moscow: BMSTU. 2013 P. 131-140.
116. Korotaev S.M., Kiktenko E.O. Causality in the entangled states // *Physical Interpretation of Relativity Theory. Proceeding of International Scientific Meeting.* BMSTU Press 2011. V. . P. 141-149.
117. Киктенко Е.О., Коротаев С.М. Квантовая причинность на замкнутых времени-подобных траекториях // *Необратимые процессы в природе и технике. Труды восьмой Всероссийской конференции 27-29 января 2015 г. Москва. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Часть I.* P. 216-221.
118. Афонькина Н.А., Киктенко Е.О., Кирюхин О.М. Запутанность гауссовых состояний взаимодействующих осцилляторов // *Необратимые процессы в природе и технике. Труды восьмой*

- Всероссийской конференции 27-29 января 2015 г. Москва. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Часть I. Р. 207-211.
119. Киктенко Е.О., Коротаев С.М. Исследование формализмов описания квантовой телепортации с помощью причинного анализа // Необратимые процессы в природе и технике. Труды седьмой Всероссийской конференции 29-31 января 2013 г. Москва. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Часть I. Р. 72-76.
120. Коротаев С.М., Киктенко Е.О. Квантовый причинный анализ // Необратимые процессы в природе и технике. Труды VI Всероссийской конференции. Ч. 1. М.: МГТУ, 2011. Р. 80-84.
121. Kiktenko E.O., Fedorov A.K., Man'ko V.I. Operating with five-level superconducting circuit as a two-qubit system // Program. 3rd International Conference On Quantum Technologies. July 13-17 2015. Moscow. P. 95.
122. Fedorov A.K., Kiktenko E.O., Man'ko O.V., and Man'ko V.I. Tomographic measure of asymmetry in two-qubit states // Book of Abstracts. 23th Intersectional Laser Physics. Sofia, Bulgaria. 14-18 July 2014. P. 25-26.
123. Korotaev S.M., Kiktenko E.O. Quantum causal analysis // CASYS'11 Computing Anticipatory Systems. Abstract Book. Liege: CHAOS, 2011. P. 2.
124. Korotaev S.M., Kiktenko E.O. Causal analysis of the quantum states // International Scientific Conference «Search for Fundamental Theory», London, July 12-14, 2010. P. 29-30.
125. Киктенко Е.О., Федоров А.К. Симметричный дискорд в двухкубитных X-состояниях // Физическое образование в вузах. Спец. выпуск. 2015. Т. 21(1С). С. 26-27.
126. Киктенко Е.О. Устойчивость асимметричного трехкубитного состояния под действием деполяризации // Двадцатая Всероссийская конференция студентов-физиков и молодых учёных. ВНКСФ-20. Материалы конференции. Ижевск 27 марта – 3 апреля 2014 г. Р. 69-70.
127. Е.О. Киктенко Влияние деполяризующего канала на асимметричное чистое трехкубитное состояние // Физическое образование в вузах. Спец. выпуск. 2014. Т. 20(1С). С. 8-9.
128. Киктенко Е.О. Исследование аномального разрушения запутанности в «квантово-классических» состояниях // Физическое образование в вузах. Приложение. 2012. Т. 18(4). С. 5-7.

129. Киктенко Е.О. Запутанность и причинность при взаимодействии двухуровневого атома с резонансным полем // Физическое образование в вузах. Приложение. 2012. Т. 18(1С). С. 6-7.
130. Киктенко Е.О. Причинный анализ запутанных состояний // Студенческий научный вестник. Сборник статей Международного молодежного научного форума-олимпиады по приоритетным направлениям развития Российской Федерации. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Под ред. С.С. Гаврюшина. М.: НТА «АПФН» 2010 Р. 283-289.
131. Киктенко Е.О. Причинный анализ квантовых запутанных состояний // Сборник тезисов докладов общеуниверситетской научно-технической конференции «Студенческая научная весна-2011», посвящённой 50-летию полета Ю.А. Гагарина в космос, 4-30 апреля 2011 года. Т. XI. Ч. 1. М. 2011, МГТУ им. Н.Э. Баумана. Р. 202-203.
132. Киктенко Е.О. Причинный анализ квантовых состояний // Сборник тезисов докладов общеуниверситетской конференции «Студенческая научная весна-2010» 1 – 30 апреля 2010г. Т.Х. Ч.1. Р. 254-255.
133. Киктенко Е.О., Коротаев С.М. Причинность в квантовом мире // Изд. Дом: LAP LAMBERT Academic Publishing 2012. 112 С.
134. Korotaev S.M., Kiktenko E.O. Quantum Causal Analysis // International Journal of Computing Anticipatory Systems 2014. V. 27. P. 77-92.
135. Киктенко Е.О., Коротаев С.М. Необратимые процессы в квантовой телепортации // Инженерный журнал: наука и инновации 2013. Т. 8. С. 1-14.
136. Киктенко Е.О. Запутанность и причинность в модели Джейнса-Каммингса // Молодежный научно-технический вестник. Изд: ФГБОУ ВПО «МГТУ им. Н.Э. Баумана» № 08, авг. 2012
137. Киктенко Е.О., Коротаев С.М., Федоров А.К., Юрченко С.О. Причинный анализ запутанных состояний в томографическом представлении квантовой механики // Вестник МГТУ Сер: «Естественные науки» 2012. Т. S5. С. 75-85.
138. Коротаев С.М., Киктенко Е.О. Причинность при декогеренции асимметричных запутанных состояний // Вестник МГТУ Сер: «Естественные науки». Специальный выпуск: Физические интерпретации теории относительности. 2011. Т. S1. С. 37-44.
139. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication // Bell System Technical Journal 1948. V. 27. P. 379-423.

140. Yeung R.W. Information Theory and Network Coding // Springer 2008. 579 P.
141. Яглом А.М., Яглом И.М. Вероятность и информация // М.: Наука 1973. 512 С.
142. Cerf N.J., Adami C. Quantum extension of conditional probability // Phys. Rev. A 1999. V. 60. P. 893-897.
143. Cerf N.J., Adami C. Negative Entropy and Information in Quantum Mechanics // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 5194-5197.
144. Horodecki M., Oppenheim J., Winter A. Partial quantum information // Nature 2005. V. 436. P. 673-676.
145. Horodecki M., Oppenheim J., Winter A. Quantum State Merging and Negative Information // Commun. Math. Phys. 2007. V. 269. P. 107-136.
146. Horodecki R., Horodecki P. Quantum redundancies and local realism // Phys. Lett. A 1994. V. 194. P. 147-152.
147. Borrás A., Plastino A.R., Casas M., Plastino A. Quantum brachistochrone evolution of systems of two identical particles: The role of entanglement // Phys. Rev. A 2008. V. 78. P. 052104.
148. Jang S.S., Cheong Y.W., Kim J., Lee H.W. Robustness of multiparty nonlocality to local decoherence // Phys. Rev. A 2006. V. 74. P. 062112.
149. Song W., Chen Z.-B. Invariant information and complementarity in high-dimensional states // Phys. Rev. A 2007. V. 76. P. 014307.
150. Lesovik G.B., Lebedev A.V., Sadovskyy I.A., Suslov M.V., Vinokur V.M. *H*-theorem in quantum physics // Sci. Rep. 2016. V. 6. P. 32815.
151. Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 2245.
152. Zyczkowski K., Horodecki P., Sanpera A., Lewenstein M. Volume of the set of separable states // Phys. Rev. A 1998. V. 58. P. 883-892.
153. Rajagopal A.K., Rendell R.W. Robust and fragile entanglement of three qubits: Relation to permutation symmetry // Phys. Rev. A 2002. V. 65. P. 032328.
154. Vidal G., Werner R.F. Computable measure of entanglement // Phys. Rev. A 2002. V. 65. P. 032314.

155. Bouwmeester D., Pan J.-W., Daniell M., Weinfurter H., Zeilinger A. Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 82. P. 1345-1349.
156. D'ur W., Vidal G., Cirac J.I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways // *Phys. Rev. A* 2000. V. 62. P. 062314.
157. Coffman V., Kundu J., Wootters W.K. Distributed entanglement // *Phys. Rev. A* 2000. V. 61. P. 052306.
158. Siewert J., Fazio R., Palma G.M., Sciacca E. Aspects of Qubit Dynamics in the Presence of Leakage // *J. Low Temp. Phys.* 2000. V. 118. P. 795-804.
159. Wendin G., Shumeiko V.S. Superconducting Quantum Circuits, Qubits and Computing // *arXiv:cond-mat/0508729* 2005.
160. Imamoglu A., Awschalom D.D., Burkard G., DiVincenzo D.P., Loss D., Sherwin M., Small A. Quantum Information Processing Using Quantum Dot Spins and Cavity QED // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 4204-4207.
161. Ye Y., Tongqi L., Yu-En L., Qi-Zhong Y. Quantum teleportation via a two-qubit Heisenberg XY chain—effects of anisotropy and magnetic field // *J. Phys. A* 2005. V. 38. P. 3235.
162. Zhang J., Long G.L., Zhang W., Deng Zh., Liu W., Lu Zh. Simulation of Heisenberg XY interactions and realization of a perfect state transfer in spin chains using liquid nuclear magnetic resonance // *Phys. Rev. A* 2005. V. 72. P. 012331.
163. Sun Y., Chen Yu., Chen H. Thermal entanglement in the two-qubit Heisenberg XY model under a nonuniform external magnetic field // *Phys. Rev. A* 2003. V. 68. P. 044301.
164. Wootters W.K., Zurek W.H. A single quantum cannot be cloned // *Nature* 1982. V. 299. P. 802-803.
165. Jaynes E.T., Cummings F.W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser // *Proc. IEEE* 1963. V. 51. P. 89-109.
166. Вальтер Г. Одноатомный мазер и другие эксперименты квантовой электродинамики резонатора // *УФН* 1996. Т. 166. С. 777-794.
167. Shapiro D.S., Zhukov A.A., Pogosov W.V., Lozovik Yu.E. Dynamical Lamb effect in a tunable superconducting qubit-cavity system // *Phys. Rev. A* 2015. V. 91. P. 063814.

168. Zhukov A.A., Shapiro D.S., Pogosov W.V., Lozovik Yu.E. Dynamical Lamb effect versus dissipation in superconducting quantum circuits // *Phys. Rev. A* 2016. V. 93. P. 063845.
169. Bose S., Fuentes-Guridi I., Knight P.L., Vedral V. Subsystem Purity as an Enforcer of Entanglement // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 87. P. 050401.
170. Scheel S., Eisert J., Knight P.L., and Plenio M.B. Hot entanglement in a simple dynamical model // *J. Mod. Opt.* 2009. V. 50. P. 881.
171. Huang Y. Scaling of quantum discord in spin models // *Phys. Rev. B* 2014. V. 89. P. 054410.
172. Paulo E.M.F. M., Marcelo A.M., Diógenes G. Entanglement universality of two-qubit X-states // *Ann. Phys.* 2014. V. 351. P. 79-103.
173. Kessel' A.R., Ermakov V.L. Multiqubit spin // *JETP lett.* 1999. V. 70. P. 61-65.
174. Kessel' A.R., Ermakov V.L. Physical implementation of three-qubit gates on a separate quantum particle // *JETP Lett.* 2000. V. 71. P. 307-309.
175. Kessel A.R., Yakovleva N.M. Implementation schemes in NMR of quantum processors and the Deutsch-Jozsa algorithm by using virtual spin representation // *JETP lett.* 2002. V. 66. P. 062322.
176. Man'ko M.A., Man'ko V.I. Entanglement and other quantum correlations of a single qudit state // *Int. J. Quantum Inform.* 2014. V. 12. P. 1560006.
177. Man'ko M.A., Markovich L.A. Separability and Entanglement of the Qudit X-State with $j = 3/2$ // *J. Russ. Laser Res.* 2014. V. 35. P. 518–524.
178. Man'ko M.A. Entropic and Information Inequalities for Indivisible Qudit Systems // *J. Russ. Laser Res.* 2016. V. 37. P. 533–543.
179. Svetitsky E., Suchowski E., Resh R., Shalibo Y., Martinis J.M., Katz N. Hidden two-qubit dynamics of a four-level Josephson circuit // *Nature Comm.* 2014. V. 5. P. 5617.
180. Deutsch D., Richard J. Rapid Solution of Problems by Quantum Computation // *Proc. R. Soc. A* 1992. V. 439. P. 553.

Приложение А

Генерация случайных матриц плотности

А.1 Генерация чистых двухкубитных состояний

Чистые двухкубитные состояния представляют собой четырехмерные комплексные векторы. Согласно работе [79] равномерную генерацию согласно мере Хаара в соответствующем пространстве $U(4)$ можно провести в виде

$$|\psi\rangle := \begin{pmatrix} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \cos \theta_2 e^{i\phi_3} \\ \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 e^{i\phi_2} \\ \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 e^{i\phi_1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

где

$$\phi_i := \mathcal{U}(0, 2\pi), \quad \theta := \arcsin \xi_k^{\frac{1}{2k}}, \quad \xi_k := \mathcal{U}(0, 1), \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (\text{A.2})$$

Здесь $\mathcal{U}(a, b)$ обозначает равномерное случайное распределение на отрезке от a до b .

А.2 Генерация смешанных двухкубитных состояний заданного ранга

Смешанные двухкубитные состояния заданного ранга имеют вид

$$\rho^{(r)} = \sum_{i=1}^r p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (\text{A.3})$$

где $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^r$ – множество ортонормированных векторов, $r = 1, 2, 3, 4$ – ранг матрицы плотности и $\{p_i\}_{i=1}^r$ образует симплекс ($\sum_i p_i = 1, p_i \geq 0$). Рассмотрим задачу равномерной генерации векторов $\{|\psi_i\rangle\}$ и симплексов по-отдельности.

Для генерации чистых ортонормированных состояний воспользуемся имеющимся алгоритмом генерации чистых двухкубитных состояний, рассмотренном в Приложении A.1. Сгенерируем r чистых двухкубитных состояний $\{|\tilde{\psi}_i\rangle\}_{i=1}^r$. Далее проведем над ними последовательную процедуру ортогонализации Грамма-Шмидта:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &:= |\tilde{\psi}_1\rangle; \\ |\psi_i\rangle &:= |\tilde{\psi}_i\rangle - \sum_{j=1}^{i-1} |\psi_j\rangle \langle \psi_j | \tilde{\psi}_i \rangle, \quad |\psi_2\rangle := \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle^{-1/2} |\psi_2\rangle, \quad i = 2 \dots r. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

В результате мы получим искомый набор ортонормированных векторов $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^r$.

Для равномерной генерации симплексов в соответствии с работой [152] воспользуемся следующим алгоритмом:

$$\begin{aligned} p_k &:= \left(1 - \xi_k^{1/(n-k)}\right) \left(1 - \sum_{i=1}^{r-1} p_i\right), \quad \xi_k := \mathcal{U}(0, 1), \quad k = 1 \dots r-1; \\ p_r &:= 1 - \sum_{i=1}^{r-1} p_i. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Подставляя сгенерированные множества $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^r$ и $\{p_i\}_{i=1}^r$ в общее выражение (A.3), мы получим желаемое состояние.

A.3 Генерация чистых трехкубитных состояний

Чистые двухкубитные состояния представляют собой восьмимерные комплексные векторы. Равномерную генерацию согласно мере Хаара в соответствующем пространстве $U(8)$ можно провести в виде

$$|\psi\rangle := \begin{pmatrix} \cos \theta_7 \\ \sin \theta_7 \cos \theta_6 e^{i\phi_7} \\ \sin \theta_7 \sin \theta_6 \cos \theta_5 e^{i\phi_6} \\ \sin \theta_7 \sin \theta_6 \sin \theta_5 \cos \theta_4 e^{i\phi_5} \\ \sin \theta_7 \sin \theta_6 \sin \theta_5 \sin \theta_4 \cos \theta_3 e^{i\phi_4} \\ \sin \theta_7 \sin \theta_6 \sin \theta_5 \sin \theta_4 \sin \theta_3 \cos \theta_2 e^{i\phi_3} \\ \sin \theta_7 \sin \theta_6 \sin \theta_5 \sin \theta_4 \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 e^{i\phi_2} \\ \sin \theta_7 \sin \theta_6 \sin \theta_5 \sin \theta_4 \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 e^{i\phi_1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

где

$$\phi_i := \mathcal{U}(0, 2\pi), \quad \theta := \arcsin \xi_k^{\frac{1}{2k}}, \quad \xi_k := \mathcal{U}(0, 1), \quad i, k = 1, 2, \dots, 7. \quad (\text{A.7})$$

А.4 Генерация двухкубитных X -состояний

Рассмотрим вопрос о генерации матриц плотности вида

$$\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

удовлетворяющую условиям

$$\rho_{14} \geq 0, \quad \rho_{23} \geq 0, \quad \text{Tr} \rho_X = 1, \quad \rho_X \geq 0. \quad (\text{A.9})$$

В связи с тем, что перед нами не стоит задача равномерной генерации (согласно какой-либо мере), мы рассмотрим упрощенный метод. Положим

$$p_i := \mathcal{U}(0, 1), \quad i = 1 \dots 4; \quad \xi_j := \mathcal{U}(0, 1), \quad j = 1, 2. \quad (\text{A.10})$$

Тогда мы можем получить элементы матрицы (A.8) подстановкой

$$\rho_{ii} := p_i \left(\sum_{j=1}^4 p_j \right)^{-1}, \quad i = 1 \dots 4; \quad \rho_{14} := \xi_1 \sqrt{\rho_{11} \rho_{44}}; \quad \rho_{23} := \xi_2 \sqrt{\rho_{22} \rho_{33}}. \quad (\text{A.11})$$

Приложение В

Квантовый в дискорд X -состояниях

В.1 Матрица плотности X -состояниях

Матрица плотности двухкубитного X -состояния в общем виде может быть записана как

$$\tilde{\rho}_X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & we^{i\phi_w} \\ 0 & b & ze^{i\phi_z} & 0 \\ 0 & ze^{-i\phi_z} & c & 0 \\ we^{-i\phi_w} & 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Требование неотрицательности и единичности следа накладывает следующие ограничения:

$$a, b, c, d, w, z, \phi_w, \phi_z \geq 0, \quad a + b + c + d = 1, \quad w \leq \sqrt{ad}, \quad z \leq \sqrt{bc}. \quad (\text{B.2})$$

В результате действия унитарного оператора

$$U(\phi_A, \phi_B) = \begin{pmatrix} e^{i\phi_A/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_A/2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{i\phi_B/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_B/2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

на состояние (B.1) мы получаем

$$U(\phi_A, \phi_B)\tilde{\rho}_X U^\dagger(\phi_A, \phi_B) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & we^{i(\phi_w + \phi_A + \phi_B)} \\ 0 & b & ze^{i(\phi_z + \phi_A - \phi_B)} & 0 \\ 0 & ze^{-i(\phi_z + \phi_A - \phi_B)} & c & 0 \\ we^{-i(\phi_w + \phi_A + \phi_B)} & 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Легко видеть, что в результате подстановки

$$\phi_A := \frac{1}{2}(\phi_w + \phi_z), \quad \phi_B := \frac{1}{2}(\phi_z - \phi_w) \quad (\text{B.5})$$

мы получаем новую матрицу X -состояния

$$\rho_X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & w \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z & c & 0 \\ w & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

все элементы которого являются действительными числами. Таким образом, с точностью до воздействия дополнительных локальных (воздействующих на отдельные кубиты) операторов фазового сдвига, все элементы матрицы плотности X -состояния можно положить положительными.

В.2 Вычисление квантового дискорда в X -состояниях

Рассмотрим вопрос о вычислении квантового дискорда в двухкубитных X -состояниях при условии действия проективного измерения (измерения фон Неймана) на первый кубит. В связи с тем, что действие локальных операторов не влияет на величину дискорда, мы будем рассматривать исходное состояние в форме (B.6).

Величина квантового дискорда (3.3) для рассматриваемого состояния может быть записана как

$$D^{(A)} = \min_{\theta} S_{B|A}(\theta) - S_{AB} + S_A, \quad (\text{B.7})$$

где S_{AB} и S_A – энтропии фон Неймана целой системы ρ_X и первого кубита соответственно. Величина $S_{B|A}(\theta)$ представляет собой условную энтропию второго кубита при известном результате проекционного измерения в базисе

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)|1\rangle, \\ |-\rangle &= \sin(\theta/2)|0\rangle - \cos(\theta/2)|1\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

проведенным над первым кубитом. Таким образом, получение значения дискорда упирается в нахождение параметра θ_{opt} , минимизирующего условную энтропию.

Введем ряд обозначений:

$$\begin{aligned} B^2 &= w^2 + z^2 + 2wz, & G_{\pm} &= \frac{A_3 \pm A_1 \cos \theta}{2}, & R_{\pm} &= \sqrt{G_{\pm}^2 + B^2 \sin^2 \theta}, \\ A_1 &= a - b - c + d, & A_2 &= a + b - c - d, & A_3 &= a - b + c - d, \\ r &= \sqrt{A_3^2 + 4(w + z)^2}/2. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Перепишем условную энтропию в виде

$$S_{B|A}(\theta) = -\frac{1}{2}(T_+ + T_- + Q_+ + Q_-), \quad (\text{B.10})$$

где

$$T_{\pm} = (p_{\pm} \pm R_{\pm}) \log_2 \frac{p_{\pm} \pm R_{\pm}}{2p_{\pm}}, \quad Q_{\pm} = (p_{\pm} \pm R_{\pm}) \log_2 \frac{p_{\pm} \pm R_{\pm}}{2p_{\pm}}, \quad (B.11)$$

$$p_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm A_2 \cos \theta).$$

В соответствии с результатами работы [35] критическое значение θ определяется на основе соотношения следующих констант:

$$C_0 = A_2 \log_2 \frac{cd(1 + A_2)^2}{ab(1 - A_2)^2} - A_1 \log_2 \frac{ad}{bc} + 2(w + z)^2 \left(\frac{1}{a - b} \log_2 \frac{a}{b} + \frac{1}{c - d} \log_2 \frac{c}{d} \right), \quad (B.12)$$

$$C_+ = 4r(A_1 A_3 - 4A_2 r^2)^2 - 4(w + z)^2(1 - 4r^2)(4r^2 - A_1) \ln \frac{1 + 2r}{1 - 2r}.$$

- Если $C_0 = 0$ или $C_+ = 0$, то при любом θ проекционное измерение будет давать один и тот же уровень дискорда.
- Если $C_0 < 0$ и $C_+ > 0$, то $\theta_{\text{opt}} = 0$, что соответствует σ_z измерению.
- Если $C_0 > 0$ и $C_+ < 0$, то $\theta_{\text{opt}} = \pi/2$, что соответствует σ_x измерению.
- Если $C_0 < 0$ и $C_+ < 0$, то требуется проверить оба варианта σ_z и σ_x измерений и выбрать оптимальный. Таким образом, имеем

$$\theta_{\text{opt}} = \begin{cases} 0, & S_{B|A}(0) \leq S_{B|A}(\pi/2) \\ \pi/2, & S_{B|A}(0) > S_{B|A}(\pi/2) \end{cases}. \quad (B.13)$$

- Если $C_0 > 0$ и $C_+ > 0$ для нахождения θ_{opt} находится как решение уравнения

$$\frac{A_1 G_- + 2B^2 \cos \theta}{R_-} \log_2 \frac{p_- + R_-}{p_- - R_-} - \frac{A_1 G_+ - 2B^2 \cos \theta}{R_+} \log_2 \frac{p_+ + R_+}{p_+ - R_+} + A_2 \log_2 \frac{p_+^2(p_-^2 - R_-^2)}{p_-^2(p_+^2 - R_+^2)} = 0 \quad (B.14)$$

относительно θ . Данное уравнение не имеет известного аналитического решения, поэтому требует использования численных методов.

В заключение отметим, что последний случай, требующий использования численных методов, встречается очень редко с точки зрения относительного объема данных X -состояний среди всех возможных X -состояний [35]. Таким образом при решении практических задач в целях экономии времени вычислений можно руководствоваться формулой (B.13), без дополнительного вычисления и анализа переменных C_0 и C_+ .