

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Белавин Владимир Александрович

**Интегрируемость и дуальности двумерной конформной
теории поля**

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2017

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Структура суперсимметричной конформной теории . . .	22
1.1 Суперсимметричная теория Лиувилля	23
1.1.1 Операторная алгебра	25
1.1.2 Корреляционные функции и конформные блоки	29
1.2 Вырожденные представления и сингулярные вектора	31
1.2.1 Операторные разложения вырожденных полей	31
1.2.2 Корреляционные функции с вырожденным полем	33
1.3 Аналитические свойства конформного блока	37
1.3.1 \widehat{c} -рекурсия	45
1.3.2 Эллиптические рекурсия	48
1.3.3 Суперконформный бутстрап	51
Глава 2. Интегрируемые возмущения конформных моделей	56
2.1 Интегрируемая структура возмущенных минимальных моделей . .	57
2.1.1 Конформная теория возмущений	59
2.1.2 Интегрируемые модели с факторизованным рассеянием . .	61
2.2 Ультрафиолетовый режим	63
2.2.1 Теория возмущений для структурных функций	64
2.2.2 УФ-разложение для корреляторов спиновых операторов .	68
2.3 Инфракрасный режим	69
2.3.1 Формфакторный подход	70
2.3.2 ИК-разложение для корреляторов спиновых операторов .	73
2.4 Комбинированное описание корреляционных функций	74
2.4.1 Возмущенная модель $\mathcal{M}_{2,7}$ в качестве примера	74
2.4.2 Корреляционные функции потомков в модели Ли–Янга . .	79
Глава 3. Минимальная Лиувиллевская Гравитация	88
3.1 Минимальные модели некритической суперструны	88
3.1.1 Структура СМЛГ	90
3.1.2 Физические состояния и структура кольца	97
3.1.3 Корреляционные числа	105

3.2	Однопетлевые амплитуды минимальной бозонной струны	108
3.2.1	Структура МЛГ	109
3.2.2	Амплитуды на торе в МЛГ	110
3.2.3	Сравнение с подходом матричных моделей	116
3.3	Конструкция амплитуд открытой бозонной струны	119
3.3.1	Граничная теория поля Лиувилля	120
3.3.2	Высшие уравнения движения	123
3.3.3	Применение в минимальной гравитации	131
Глава 4. Дуальное описание МЛГ		134
4.1	Фробениусовы многообразия, уравнение Дугласа и МЛГ	134
4.1.1	ФМ и интегрируемые иерархии	135
4.1.2	Струнное уравнение Дугласа	140
4.1.3	Группа резонансных преобразований	142
4.1.4	Производящая функция корреляторов МЛГ	145
4.2	Унитарная серия МЛГ	153
4.2.1	Статсумма и одноточечные корреляторы	155
4.2.2	Двухточечные корреляторы	156
4.2.3	Трехточечные корреляторы	157
4.2.4	Четырехточечные корреляторы	163
4.3	Плоские структуры на деформациях киральных колец Гепнера	167
4.3.1	Особенности, кольца Якоби и ФМ	168
4.3.2	Подход к вычислению плоских координат	173
4.3.3	Киральные кольца Гепнера и их деформации	176
4.3.4	Плоская структура для моделей Гепнера	184
Глава 5. АГТ дуальность		189
5.1	Суперконформные блоки из $\mathcal{N} = 2$ калибровочных теорий	194
5.1.1	Конструкция АДНМ и детерминанты векторного поля	197
5.1.2	Модифицированное пространство модулей	200
5.1.3	Характер неподвижных точек на компонентах связности	204
5.2	$N=2$ суперконформные блоки и инстантонные статсуммы	206
5.2.1	$N=2$ суперконформная алгебра	208
5.2.2	Аффинная $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебра	211
5.2.3	$N=2$ состояния Гайотто как предел векторов цепочки	214

5.3	Аффинная $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ и инстантонные статсуммы	218
5.3.1	Связь $N=2$, ослабленных $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ и обычных $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ блоков	218
5.3.2	Поверхностный дефект и инстантонные статсуммы	226
5.3.3	Комбинаторные выражения для $N=2$ блоков	233
5.4	АГТ и \mathcal{W}_N минимальные модели	237
5.4.1	\mathcal{W}_N алгебры и конформные теории поля	239
5.4.2	\mathcal{W}_N АГТ соответствие	244
5.4.3	Минимальные модели и N -условия Берджа	247
	Заключение	250
	Список литературы	253
	Список рисунков	272
	Список таблиц	273
	Приложение А.	274
A.1	Суперпроективная инвариантность и трехточечная функция	274
A.2	Дискретное операторное разложение из непрерывного	278
A.3	Дифференциальные уравнения из условия нуль-вектора	280
A.4	Пример использования рекуррентных соотношений	287
	Приложение Б.	289
B.1	Интегралы для первых поправок теории возмущений	289
B.2	Контурные вычисления в теории с границей	292
	Приложение В.	299
V.1	Баланс числа духов на сфере	299
V.2	Некоторые свойства БРСТ когомологий	301
V.3	Разложение операторного произведения $O_{1,3}W_a$	303
V.4	Специальные функции Барнса	307
	Приложение Г.	310
G.1	Структурные константы Фробениусовой алгебры	310
G.2	Некоторые свойства многочленов Якоби	313
G.3	Детали вычисления четырехточечного коррелятора в МЛГ	314

Введение

Актуальность тематики. В настоящее время существует весьма ограниченный набор подходов, позволяющих эффективно решать задачи квантовой теории поля за рамками стандартной теории возмущений. Очевидный недостаток последней заключается в невозможности описания непертурбативных эффектов, которые, как известно, играют ключевую роль в построении фундаментальной теории. Наиболее ярким примером такого рода ограничений является неспособность теории возмущений описать низкоэнергетическую физику сильных взаимодействий. Таким образом, изучение точно решаемых моделей квантовой теории поля представляет серьезный научный интерес.

Важным классом точно решаемых моделей являются модели двумерной конформной теории поля. Можно надеяться, что определенные свойства интегрируемости и соответствующие методы описания двумерных точно решаемых моделей и, в частности, конформных моделей найдут свое применение в исследовании четырехмерной квантовой теории поля.

Другой фундаментальной задачей, стоящей перед современной физикой, является проблема объединения теории квантовой гравитации с теорией взаимодействий в стандартной модели. В настоящее время одним из немногих подходов к решению этой проблемы является теория струн, основным ингредиентом которой также является двумерная конформная теория поля, описывающая теорию на мировой поверхности струны.

Представленная работа посвящена изучению точно решаемых моделей квантовой теории поля, связанных с двумерной конформной теорией поля. В ней исследуются модели конформной теории поля с различными киральными алгебрами, массивные интегрируемые модели, рассматриваемые как возмущения конформных теорий, и модели двумерной индуцированной квантовой гравитации Лиувилля, т. е. модели некритической теории струн. Мы анализируем явления дуальности между различными моделями, в частности, мы рассматриваем соответствие между косетными конформными теориями поля и инстантонными секторами суперсимметричных калибровочных теорий, уделяя особое внимание роли интегрируемых структур. Данное соответствие является при-

мером связи и применения методов двумерных точно решаемых моделей для изучения четырехмерной теории поля.

Современное состояние исследований. Изначально интерес к изучению конформной теории поля (КфТП) был обусловлен ее важной ролью в различных контекстах статистической физики и физики конденсированного состояния. КфТП является теорией, описывающей критическое поведение в точках фазовых переходов (см., например, [1; 2]). В эпохальной работе [3] было осознано, что критические теории помимо масштабной инвариантности обладают инвариантностью по отношению к конформным преобразованиям. Как известно, критическое поведение определяется неподвижными точками ренормализационной группы в пространстве эффективных теорий. Классификация неподвижных точек ренормгруппы, таким образом, фактически эквивалентна построению всех конформно-инвариантных решений теории поля.

Бесконечномерная конформная симметрия в двумерном случае вместе с другим важным требованием структуры алгебры пространства локальных полей позволяет осуществить в конформной теории поля так называемую программу конформного бутстрапа [4] и тем самым найти явное решение соответствующих моделей квантовой теории поля. Наиболее известные примеры конформных теорий – это унитарные минимальные модели и, в частности, критическая модель Изинга, двумерная модель Весса-Зумино [5–7] и т. д.

Математический аппарат двумерной конформной теории поля включает в себя теорию представлений бесконечномерных алгебр Ли, таких как алгебра Вирасоро, алгебры Каца-Мууди, а также теорию представлений так называемых вертекс-операторных алгебр [8–11]. Программа конформного бутстрапа базируется на алгебраических методах теории представлений и с помощью конформной симметрии позволяет находить корреляционные функции локальных полей – основной объект исследования любой квантовой теории поля. В этом смысле КфТП является точно решаемой моделью квантовой теории поля.

Одним из основных объектов КфТП является функция конформного блока [4]. Конформные блоки содержат в себе полную информацию о голоморфной зависимости корреляционных функций и играют ключевую роль в реализации программы конформного бутстрапа. В настоящей диссертации вопросу изучения функции конформного блока отведена одна из ключевых ролей.

В конформном случае интегрируемость является прямым следствием конформной инвариантности. Действительно, известно, что конформная инвариантность в двух измерениях приводит к тому, что тензор энергии-импульса можно разделить на голоморфную и антиголоморфную компоненты. Это приводит к наличию бесконечного количества сохраняющихся величин, так как любое выражение составленное из голоморфных величин и их производных также является голоморфным. Другими словами, все элементы обертывающей алгебры Вирасоро являются интегралами движения, однако при этом не все они коммутируют между собой. Естественная задача заключается в поиске максимальной коммутативной подалгебры.

Обычно возмущение конформной теории [12–14] нарушает интегрируемость (физический интерес представляют релевантные возмущения), но если же интегрируемость выживает после возмущения, то соответствующая теория представляет собой массивную интегрируемую теорию поля. Ее существенное отличие от конформной теории заключается в том, что она обладает свойством факторизации процессов рассеяния, позволяющим решать соответствующие модели. Данное свойство дает возможность осуществления некоторого аналога бутстрапного подхода [15], в основе которого лежит аксиоматическая конструкция построения форм-факторов локальных операторов в пространстве асимптотических *in*–, *out*– состояний процесса рассеяния. Этот подход позволяет вычислять корреляционные функции локальных полей.

Имеется естественный вопрос: каким образом точная решаемость КфТП, описывающей теорию в фиксированной точке, связана с интегрируемостью ее массивных возмущений? В конформной точке формулировка задачи усложняется в связи с отсутствием аналогичного массивным моделям формализма анализа интегрируемости. С другой стороны, наличие бесконечномерной алгебры симметрии в КфТП, включающей в себя алгебру Вирасоро, позволяет явно строить интегралы движения, ответственные за точную решаемость конформных моделей. Лишь сравнительно недавно, в процессе анализа соответствия между КфТП и четырехмерными суперсимметричными теориями поля [16; 17], было достигнуто понимание алгебраической структуры, в полной мере проясняющей свойства интегрируемости КфТП. Это продвижение позволило найти явную конструкцию интегрируемого базиса, состоящего из собственных векторов коммутирующих интегралов движения, а также в отдельных случаях най-

ти явный вид интегралов движения. Изучению этого явления и его следствий в диссертации отводится существенная роль.

Важным классом точно решаемых моделей, связанных с конформной теорией поля, являются минимальные модели теории струн [18;19]. Поскольку данные модели включают в себя динамическую метрику, они также представляют собой самосогласованные модели двумерной гравитации.

Существует два независимых подхода к изучению квантовой двумерной гравитации [18–24]. Сопоставление результатов этих подходов, также как и сам вопрос установления эквивалентности представляется весьма нетривиальным. Первый – непрерывный подход, он основан на описании некритической теории струн с использованием континуального интеграла по римановым метрикам. В конформной калибровке функциональный интеграл по флуктуирующим поверхностям приводит к теории Лиувилля (описывающей динамическую метрику), взаимодействующей с полями материи. В том случае, когда в качестве материи берется минимальная конформная модель, теория гравитации имеет специальное название минимальной лиувиллевской гравитации (МЛГ). Дуальный подход к двумерной гравитации основан на идее описания двумерной гравитации как теории, возникающей при рассмотрении статистических систем, определенных на флуктуирующих поверхностях. Данный подход реализуется в матричных моделях в двойном скейлинг-пределе (ММ) [21;22;25]. Важный факт заключается в том, что спектры размерностей в непрерывном и дискретном подходах совпадают [20]. Это наблюдение позволяет сформулировать гипотезу об эквивалентности двух подходов.

Идея эквивалентности была развита в работах Виттена (1990-1993гг.), где было предположено, что оба подхода, описывающие $2d$ гравитацию, связаны с теорией чисел пересечений на пространстве модулей кривых [26], получившей впоследствии название топологической гравитации Виттена. Связь топологической гравитации с теорией матричных моделей нашла более строгое математическое обоснование в работе Концевича [27], где было показано, что статистическая сумма в топологической гравитации удовлетворяет струнному уравнению, возникающему в матричном подходе. Там же была обнаружена связь 2-мерной гравитации с интегрируемыми системами. А именно, было показано, что статсумма теории есть логарифм τ -функции КдФ иерархии. Однако связь с континуальной формулировкой минимальной лиувиллевской гравитации не бы-

ла раскрыта полностью, поскольку на уровне физических амплитуд подходы приводили к разным результатам.

Как было обнаружено позднее, проблема частично связана с необходимостью учитывать так называемые контактные члены при вычислении корреляционных чисел. Возможность возникновения контактных членов приводит к смешиванию исходных констант связи [28]. Таким образом, для отождествления операторов и вычисления корреляционных чисел необходимо учитывать резонансные соотношения между константами связи в разных подходах.

Установить эти соотношения долгое время не представлялось возможным ввиду отсутствия каких-либо явных ответов в лиувиллевской гравитации. Однако в результате обнаружения квантовых высших уравнений движения в теории Лиувилля (КВУД) [29] удалось существенно продвинуться в разработке непрерывного подхода к МЛГ. На основе КВУД была установлена нетривиальная связь между БРСТ когомологиями минимальной лиувиллевской гравитации и логарифмическими полями в теории Лиувилля. Наличие этой связи позволило произвести явное аналитическое вычисление интеграла по пространству модулей в четырехточечной амплитуде [30].

В [31] связь между лиувиллевской гравитацией и матричными моделями была исследована для серии $(2, 2p+1)$. В результате исследования было установлено соответствие на уровне корреляционных чисел для физических наблюдаемых, построенных из примарных полей. При этом были получены нетривиальные соотношения между лиувиллевскими константами связи и КдФ временами в подходе матричных моделей (так называемые резонансные соотношения). Также было показано, что требование выполнения конформных правил отбора, таких как отсутствие вакуумных средних и правила слияния для вырожденных полей, позволяет установить явный вид резонансных соотношений. Однако использованная техника была специфична именно для рассматриваемой серии и не позволяла проанализировать более общую ситуацию (q, p) моделей.

Дальнейший прогресс в этом направлении был достигнут благодаря использованию связи между дуальным подходом к МЛГ и теорией фробениусовых многообразий (ФМ) [32]. Основным ингредиентом теории ФМ является уравнение Виттена-Дайкграафа-Верлинде-Верлинде (ВДВВ) [33] на так называемый препотенциал. Третьи производные препотенциала определяют структурные константы q -параметрического семейства фробениусовых алгебр, при

этом параметры рассматриваются как координаты на фробениусовом многообразии. Условие ВДВВ эквивалентно требованию ассоциативности фробениусовой алгебры и представляет собой набор уравнений в частных производных. Вместе с дополнительным требованием квазиоднородности (имеющим естественную скейлинговую интерпретацию в физическом контексте) ВДВВ приводит к весьма жестким ограничениям на вид препотенциала, поэтому имеется естественный вопрос общей классификации возможных решений (см., например, [34–37], направленные на изучение этого вопроса, а также анализ связи с интегрируемыми системами).

Таким образом, имеется связь между топологическими моделями, матричными моделями, интегрируемыми иерархиями и структурой фробениусовых многообразий. В [38–41] получило развитие еще одно направление, нашедшее применение не только в вышеупомянутых областях, но и в более широком классе вопросов, – топологическая рекурсия (ТР). Метод ТР основан на утверждении, что коэффициенты разложения по родам статсумм матричных моделей или топологических теорий определяются исключительно геометрией так называемой спектральной кривой S и представляют собой универсальные функционалы S , вид которых определяется рекурсивно, стартуя с малых значений параметров g (род поверхности) и n (количество выделенных точек). Связь структуры ФМ и ТР остается не до конца изученной и представляет собой направление, активно развивающееся в настоящее время. Эта связь а также альтернативная техника реконструкции Гивенталя, направленная на восстановление информации о геометрии пространства модулей кривых исходя из алгебраической конструкции ФМ [35], не будут рассматриваться в данной диссертационной работе.

В контексте МЛГ связь с фробениусовыми многообразиями приводит к формулировке нового метода, который позволяет эффективно исследовать корреляционные числа. Часть диссертационной работы посвящена дальнейшему развитию этого направления. Мы опишем подход, позволяющий связать производящую функцию корреляционных чисел с решением струнного уравнения Дугласа, которое вместе с дифференциальным уравнением на свободную энергию дает ее явное интегральное представление, а также покажем, что для нахождения специального решения струнного уравнения, обеспечивающего требуемые свойства корреляционных чисел, и для установления вида резонансных соотно-

шений в общем случае минимальной (q,p) гравитации необходимо использовать плоские координаты на фробениусовом многообразии.

Следующее направление связано с исследованием соответствия между двумерными конформными теориями с различными типами киральной алгебры и четырехмерными $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричными калибровочными теориями поля в так называемом омега-бэкграунде, открытого в работе Алдая, Гайотто и Тачикавы [42]. Эта нетривиальная связь получила название АГТ соответствия.

Изложим краткую предысторию открытия АГТ соответствия. В 1994 году Зайберг и Виттен [43; 44], используя свойство голоморфности, S-дуальность и некоторые дополнительные физические гипотезы, нашли явное выражение для эффективного низкоэнергетического действия в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теориях. Ответ выражается через интеграл от специальной формы по циклам римановой поверхности. Род поверхности равен рангу калибровочной группы, параметры поверхности выражаются через вакуумные средние скалярного поля.

В 2002 году Некрасов нашел [45] точное решение деформированной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории (так называемая статсумма Некрасова). В силу $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии функциональный интеграл сводится к конечномерному интегралу по многообразию модулей инстантонов. В результате деформации теория становится предметом теории локализации, а выражение для статсуммы сводится к некоторому эквивариантному интегралу, который вычисляется в явном виде при помощи формул Дюйстермата–Экмана. Поскольку статсумма Некрасова является хорошо определенным объектом, можно сформулировать математически строгое утверждение АГТ соответствия, доказанное позднее несколькими независимыми способами [46–48].

В [49; 50] были обнаружены глубокие связи между $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричными калибровочными теориями и интегрируемыми теориями. В частности, в пределе когда один из параметров деформации стремится к нулю статсумма Некрасова становится функционалом Янга–Янга, определяющим уравнения Бете–анзаца, для некоторой интегрируемой системы.

Из АГТ соответствием следует, что статистические суммы $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных $SU(2)$ моделей Янга–Миллса на \mathbb{R}^4 совпадают с корреляционными функциями двумерной конформной теории Лиувилля, обладающей симметрией алгебры Вирасоро. Гипотеза была основана на сравнении вычислений [47]

со стороны калибровочных теорий и результатов [4;51;52] со стороны конформной теории поля.

Первое доказательство этой гипотезы (в случае колчаных $SU(2)$ теорий на \mathbb{R}^4 и теории Лиувилля) было дано в работе Альбы, Литвинова, Тарнопольского и Фатеева (АЛТФ) [16]. Доказательство в этой работе основывалось на конструкции специального базиса в пространстве локальных полей конформной теории поля. Матричные элементы вертексных операторов в этом базисе имеют явный факторизованный вид, что дает явные формулы для конформных блоков, которые совпадают с выражениями для статсумм Некрасова. В работах 2012 года (см., например, работу [53]) наличие такого базиса было также выведено из геометрической реализации алгебры симметрий.

Под геометрической реализацией понимается действие данной алгебры симметрий на прямой сумме эквивариантных кохомологий многообразий модулей инстантонов. Простейшим примером такой реализации является действие алгебры Гейзенберга на прямой сумме эквивариантных кохомологий схем Гильберта. По теореме Атьи-Ботта в этих эквивариантных кохомологиях имеется базис занумерованный неподвижными точками, и этот базис соответствует базису из работы АЛТФ.

Гипотеза АГТ имеет ряд обобщений. Вскоре после работы АГТ было предложено обобщение на конформные теории с W_r симметрией [54;55]. С точки зрения калибровочных теорий это соответствует увеличению ранга калибровочной группы, с $SU(2)$ до $SU(r)$. Этот случай также рассматривался в [53]. Позднее Алдай и Тачикава нашли [56] некоторый аналог для случая конформной теории с $\widehat{sl}(2)_k$ алгеброй. С точки зрения калибровочных теорий при этом в теорию вставляется дополнительный оператор и в качестве инстантонных многообразий выступают многообразия Ломона. Дальнейшему развитию этого направления посвящена последняя часть диссертационной работы.

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Разработать и обосновать метод вычисления конформных блоков в двумерной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной конформной теории поля.
2. Реализовать программу конформного бутстрапа в суперсимметричной теории поля Лиувилля.

3. Развить метод конформной теории возмущений для вычисления корреляционных функций в массивных теориях, обладающий свойством интегрируемости.
4. Получить следствия высших уравнений движения в суперсимметричной теории Лиувилля для конструкции физических полей в МЛГ.
5. Разработать метод вычисления корреляционных чисел в МЛГ.
6. Получить соотношения дуальности для двумерных конформных теорий поля с расширенной киральной алгеброй со специальным классом четырехмерных калибровочных теорий.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие конкретные задачи:

1. В рамках бутстрапного подхода к конформной теории поля исследовать аналитические свойства конформных блоков.
2. Исследовать структуру пространства локальных полей в теории Лиувилля и структуру операторной алгебры.
3. Исследовать массивные интегрируемые модели и развить методы конформной теории возмущений.
4. Исследовать интегрируемые модели 2d квантовой супергравитации Лиувилля и разработать метод вычисления интеграла по пространству модулей римановых поверхностей.
5. Установить следствия наличия высших уравнений движения в суперсимметричной теории Лиувилля для структуры пространства физических полей в теории минимальной супергравитации Лиувилля.
6. Исследовать специфику вычисления корреляционных чисел в случае несферической топологии, в частности топологии диска.
7. Исследовать дискретный подход к теории 2d гравитации и получить явное выражение для производящей функции корреляционных чисел.
8. Установить вид искомого решения струнного уравнения Дугласа и вид резонансных соотношений.
9. Разработать эффективный метод вычисления плоских координат на фробениусовом многообразии, связанном с МЛГ.

10. Исследовать дуальность между 4d SUSY калибровочными теориями и суперсимметричной двумерной КфТП и получить искомую модификацию пространства модулей инстантонов в дуальной теории.
11. Исследовать дуальность между 4d SUSY калибровочными теориями и двумерной КфТП с симметрией алгебры токов и получить искомую модификацию пространства модулей инстантонов в дуальной теории.
12. Исследовать дуальность между 4d SUSY калибровочными теориями и двумерными минимальными моделями с W_N симметрией и получить искомую модификацию пространства модулей инстантонов в дуальной теории.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Рекуррентные соотношения для конформных блоков суперсимметричной конформной теории поля, рассматриваемых как функции центрального заряда.
2. Рекуррентные соотношения для конформных блоков суперсимметричной конформной теории поля, рассматриваемых как функции конформных полей, появляющихся при использовании разложения операторных произведений.
3. Явная конструкция четырехточечной корреляционной функции в суперсимметричной теории поля Лиувилля. Проверка свойства кроссинг-симметрии, что является доказательством самосогласованности конформного бутстрапа и гипотезы о структуре операторного разложения теории.
4. Комбинированное описание специального класса интегрируемых моделей методом спектрального разложения в режиме IR и методом конформной теории возмущений в режиме UV.
5. Явная конструкция физических амплитуд в минимальных моделях супергравитации Лиувилля. Связь между когомологиями с $N_{ghost} = 1$ и логарифмическими полями в теории Лиувилля, позволяющая вычислять эти амплитуды.
6. Связь гравитации Лиувилля со структурой фробениусовых многообразий. Явная конструкция производящей функции корреляторов.
7. АГТ соответствие для теории $\mathcal{N} = 1, \mathcal{N} = 2$ КфТП и W_N минимальных моделей конформной теории поля.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Все результаты, изложенные в диссертации, являются оригинальными. Рассматриваемые проблемы представляют конкретный научный интерес в соответствующих областях теоретических исследований. Новизна полученных результатов позволила продвинуться в понимании структуры конформной теории поля, двумерной минимальной теории гравитации Лиувилля, в анализе алгебраической структуры двух независимых подходов к теории двумерной квантовой гравитации, изучении связи конформной теории поля с четырехмерными калибровочными теориями. Эти результаты регулярно используются российскими и зарубежными научными группами для дальнейших исследований в соответствующих областях. Вклад автора во всех полученных результатах в работах с соавторами является определяющим как при формулировке задач, так и при поиске их решения. Все конкретные вычисления проведены автором независимо.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для исследования и описания широкого круга явлений в конформной теории поля, теории струн, теории двумерной гравитации, а также в анализе соответствий между различными точно решаемыми системами, связанными с конформной теорией поля.

Полученные в диссертационной работе рекуррентные соотношения для функции конформного блока в суперсимметричной конформной теории [57–59] представляют собой эффективный инструмент для изучения корреляционных функций в рамках бутстрапного подхода. Они подходят для численных вычислений четырехточечных корреляционных функций примарных полей в секторе Невьё-Шварца в целом и вырожденных примарных полей в частности. Полученное q -представление рекуррентных соотношений для четырехточечных суперконформных блоков существенным образом улучшает сходимость представлений конформных блоков в виде ряда по эллиптическому параметру во всей комплексной плоскости с тремя выколотыми точками, что в частности позволяет произвести анализ спектра суперсимметричной теории Лиувилля, имеющего ранее гипотетический характер, и выполнить программу конформного бутстрапа в суперсимметричном случае.

Развитые в диссертационной работе методы конформной теории возмущений [60;61] позволяют исследовать ультрафиолетовую асимптотику корреляционных функций в возмущенных минимальных моделях конформной теории

поля. В интегрируемых возмущениях имеется независимый форм-факторный подход. Таким образом, в этом случае имеется два разных разложения одних и тех же корреляционных функций локальных операторов. В диссертационной работе впервые исследован вопрос сопоставления двух подходов и учета вклада полей потомков в поправки теории возмущений к структурным функциям. Произведено сравнение результатов на больших и малых расстояниях.

Обнаружено, что учет вклада потомков дает широкую область, в которой два разложения совпадают, уже в первом порядке теории возмущений. Это совпадение между разными разложениями демонстрирует, что комбинация конформной теории возмущений и форм-факторного подхода является очень полезным инструментом для проверки согласованности различных предположений, используемых в обеих конструкциях, а также дает знание корреляционных функций на всех масштабах. Мы получаем дополнительное подтверждение утверждения о том, что форм-факторы для примарных полей даются минимальными решениями с заданными аналитическими свойствами, и что нормировка форм-факторов фиксируется правильно. Кроме того, тот факт, что вклад от операторов потомков существенно улучшает сходимость двух разложений, является подтверждением выведенного ранее на основе ряда предположений выражения для вакуумных средних полей потомков.

В диссертационной работе впервые исследована суперсимметричная версия минимальной теории гравитации Лиувилля [62;63]. Данная теория является точно решаемым аналогом критической струны Невьё-Шварца-Рамона. Произведена полная классификация физических состояний теории, в частности, проанализирован специальный дискретный ряд физических состояний – «элементы основного кольца». Найдена связь между логарифмическими аналогами элементов основного кольца и основными физическими полями. Получен общий вид n -точечных корреляционных чисел на сфере в СЛГ. Данное выражение содержит интегрирование по пространству модулей, для которого предложен эффективный метод вычисления на основе установленной связи между физическими полями. Для четырехточечных корреляционных чисел впервые получено явное аналитическое выражение. Исследована проблема вычисления корреляционных чисел на топологиях высших родов [64], а также в случае теории с границей [65].

В диссертационной работе был предложен явный способ вычисления производящей функции корреляционных чисел в минимальной лиувиллевской гра-

витаии. Прояснена связь между подходом к МЛГ, основанным на струнном уравнении, и структурой фробениусова многообразия. Найдено решение струнного уравнения, выбор которого определяет искомую производящую функцию МЛГ [66]. Прояснена роль плоских координат на фробениусовом многообразии и связь МЛГ с интегрируемыми структурами [67]. Показано, что необходимое решение уравнения Дугласа имеет простой вид именно в плоских координатах на фробениусовом многообразии в общем (q,p) случае МЛГ. Найден явный вид резонансных преобразований между естественными параметрами исходного и дуального подходов в терминах многочленов Якоби. Проверено, что использование этих преобразований обеспечивает выполнение необходимых правил отбора для корреляционных чисел в (q,p) МЛГ. Получены явные выражения для корреляционных чисел в случае унитарной серии гравитирующих минимальных моделей [68]. Предложен эффективный метод вычисления плоских координат, который обобщается на широкий класс теорий, в частности, на случай W гравитации [69; 70].

В диссертационной работе предложено обобщение АГТ соответствия на больший класс конформных теорий, содержащий суперсимметричную конформную теорию поля [71; 72]. Показано, что со стороны калибровочных теорий в общем случае выступают многообразия модулей инстантонов не на \mathbb{C}^2 , а на разрешении $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$. Детально изучен случай $p = 2$, отвечающий суперсимметричным конформным теориям, и обнаружено, что в этом случае существует явная АГТ формулировка для конформных блоков, которая соответствует специальной компактификации многообразия модулей инстантонов. При помощи конструкции Кадзама-Сузуки получено обобщение формулы АГТ соответствия для конформных блоков $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной конформной теории поля и аффинной $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебры токов.

Исследован специальный случай нерегулярных конформных блоков, соответствующих нормам векторов Уиттекера, получивших ясную интерпретацию в терминах дуальной калибровочной теории. Показано, что подпространство пространства инстантонных модулей колчаных $SU(2)$ теорий, состоящее из \mathbb{Z}_2 симметричных инстантонных решений, дуально $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Лиувилля и функция конформного блока в пределе Уиттекера совпадает с инстантонной статсуммой, вычисляемой посредством метода локализации в редуцированном пространстве модулей. Это наблюдение имеет обобщение на

более широкий класс $SU(n)$ колчаных калибровочных теорий. Показано, что в основе соответствия лежит тот факт, что алгебра, действующая на когомологиях \mathbb{Z}_n симметричных инстантонных многообразий, в конформном пределе имеет вид $A = \widehat{gl}(2)_2 \times S\text{Vir}$. Этот факт обобщает наличие $H \times \text{Vir}$ алгебры в случае исходного АГТ соответствия.

Рассмотрена задача вычисления нерегулярных конформных блоков в двумерных конформных теориях поля, алгебра киральной симметрии которых является $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгеброй. Установлена и расширена до уровня конформных блоков связь между теориями представлений $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебры и аффинной $\widehat{sl}(2)$ алгебры. Показано, что эта связь позволяет получить соотношение между $\widehat{sl}(2)$ конформными блоками и инстантонными статсуммами в четырехмерной $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ калибровочной теории с поверхностным дефектом [73]. Объединяя эти факты, предложено явное комбинаторное выражения для $\mathcal{N} = 2$ суперконформных блоков в пределе Гайотто [74].

Изучена специфика рациональных значений центрального заряда конформной алгебры, соответствующих минимальным моделям. Данный результат [75; 76] дает явную формулу для конформных блоков минимальных $W(N)$ моделей в случае отсутствия проблемы кратности в каналах слияния.

Публикации и апробация работы. Основные результаты по теме диссертации получены в 2004–2016 годах и изложены в 20 публикациях в журналах, рекомендованных ВАК: Nucl. Phys. B., Phys. Lett. B, J. Phys. A, JHEP, Theor. Math. Phys., JETP Lett.

Основные результаты, представленные в диссертационной работе, докладывались на конференциях и ежегодных совещаниях, проводимых в различных научных центрах: “Integrability and Geometrical correspondences” (Триест, Италия, 2012-2016); “Landau days” (Черноголовка, Россия, 2014-2016); Франко-Русская конференция “Случайная Геометрия и Физика” (Париж, Франция, 2016); “Quantum Geometry, Duality and Matrix Models” (Москва, Россия, 2016); Russia-Japan School of Young Mathematicians (Киото, Япония, 2009); “Classical and Quantum Integrable Systems” (Дубна, Россия, 2004); “Recent Advances in Quantum Integrable Systems” (Аннеси, Франция, 2007-2012).

Результаты работ, которые легли в основу диссертации, докладывались на семинарах в ФИАН, ИТФ, ИТЭФ, ИППИ, ИЯИ, университета Монтпелье

(Монтпелье, Франция), университета Дижона (Дижон, Франция), университета Тура (Тур, Франция), университета Сержи-Понтуаз (Сержи-Понтуаз, Франция), Высшей Нормальной Школы (Париж, Франция), университета Пьера и Марии Кюри (Париж, Франция), Международной школы передовых исследований (Триест, Италия), Международного центра теоретической физики (Триест, Италия), университета Соган (Сеул, Южная Корея), Боннского университета (Бонн, Германия), университета Вупперталя (Вупперталь, Германия), института Вейцмана (Реховот, Израиль).

Представленные в диссертационной работе результаты были получены при финансовой поддержке программ Российского научного фонда, РФФИ, фонда “Династия”, Министерства образования Франции, программы ENS-Landau, программы поддержки международного сотрудничества “Research in Paris” института Анри Пуанкаре, грантов Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Для удобства заинтересованного читателя вспомогательные справочные материалы, а также некоторые технические детали вычислений сосредоточены в приложении, включающем четыре тематических раздела. Полный объём диссертации с приложениями составляет 317 страниц с 5 рисунками и 4 таблицами. Список литературы содержит 209 наименований.

В **Главе 1** обсуждаются рекуррентные соотношения для четырехточечных функций суперконформных блоков, которые по существу являются частными вкладами данного конформного класса к четырехточечной корреляционной функции. Подход основан на анализе аналитических свойств суперконформных блоков, рассматриваемых как функций конформных размерностей и центрального заряда суперконформной алгебры. Полученные результаты сравниваются с явными аналитическими выражениями, найденными для специальных значений параметров, отвечающих вырожденному операторному разложению. Помимо этого мы изучаем конструкцию четырехточечной функции базисных экспоненциальных полей сектора Навьё-Шварца (НШ) в суперсимметричной полевой теории Лиувилля. Мы приводим вывод структурных констант в секторе НШ, основанный на исключении в НШ-секторе сингулярного вектора. Это позволяет нам оставаться полностью внутри НШ-сектора пространства

состояний без обращения к полям Рамона. В четырехточечной конструкции также задействованы НШ-блоки, для которых мы предлагаем новое рекуррентное представление, так называемое эллиптическое представление. Бутстрапные условия для данной четырехточечной корреляционной функции численно проверены при различных значениях параметров. Рекуррентные соотношения для функций суперконформных блоков вместе с проверкой конформного бутстрапа является основным результатом этой главы.

В **Главе 2** речь идет о корреляционных функциях в возмущенных минимальных моделях $\mathcal{M}_{2,2n+1}$. Мы рассматриваем корреляционные функции спиновых операторов в минимальных моделях $\mathcal{M}_{p,p'}$, возмущенных полем Φ_{13} , в рамках конформной теории возмущений. Мы получаем аналитические выражения для поправок первого порядка к структурным функциям. Вместе с точными значениями вакуумных средних локальных операторов это дает разложение корреляционных функций на малых расстояниях. Для случая $\mathcal{M}_{2,2n+1}$ мы проводим вычисления для корреляционных функций на больших расстояниях с помощью формфакторного бутстрапного подхода. Затем мы численно демонстрируем, что разложения на малых и больших расстояниях совпадают на промежуточных расстояниях. Включение операторов потомков в операторное разложение существенно улучшает область сходимости. Таким образом, комбинация этих двух методов описывает корреляционные функции с хорошей точностью на всех масштабах длины.

В **Главе 3** рассматривается определенный класс точно решаемых моделей некритической теории струн, а именно моделей 2D гравитации, описываемой теорией Лиувилля, взаимодействующей с конформной материей, описываемой некоторой минимальной моделью КфТП. Данная глава организована следующим образом. Вначале кратко напоминаются некоторые основные моменты, касающиеся всех ингредиентов теории. Затем производится анализ физических состояний, строятся основные типы физических полей в рамках стандартного БРСТ квантования. Мы также вводим специальный дискретный ряд физических состояний «основного кольца», и обсуждаем отношения между логарифмическими аналогами элементов основного кольца и основными физическими полями. Затем мы обсуждаем операторные произведения элементов основного кольца с основными физическими полями и получаем общий вид n -точечных корреляционных чисел на сфере. Для четырехточечных корреляторов мы по-

казываем, что интегрирование по пространству модулей сводится к граничным членам, которые определяются разложениями операторных произведений «логарифмических» полей. Затем мы в явном виде вычисляем все необходимые операторные произведения, а также граничные члены. Прделанный анализ приводит к явному выражению для четырехточечного корреляционного числа одного вырожденного и трех общих полей.

В **Главе 4** мы обсуждаем связь МЛГ с теорией Фробениусовых многообразий. Глава организована следующим образом. Вначале мы кратко напоминаем понятие Фробениусова многообразия и обсуждаем его основные свойства. Мы обсуждаем Фробениусово многообразие, которое появляется в контексте минимальной Лиувиллевской гравитации и связь между структурами Фробениусова многообразия, интегрируемыми структурами и струнным уравнением Дугласа. Затем мы сосредотачиваемся на (p, q) моделях МЛГ и обсуждаем проблему резонансных преобразований, формулируем идею подхода, основанного на струнном уравнении, к (p, q) МЛГ и обсуждаем надлежащее решение струнного уравнения Дугласа. Остальная часть работы посвящена анализу корреляционных функций, исследованию методов вычисления плоских координат, а также изучению некоторых обобщений.

В **Главе 5** мы рассматриваем АГТ соответствие между конформными теориями с различными киральными алгебрами и $N = 2$ суперсимметричными $SU(N)$ колчанными калибровочными теориями на различных орбифолдах \mathbb{R}_4 . Глава организована следующим образом. Сначала мы рассматриваем двумерную $\mathcal{N} = 1$ суперконформную теорию поля и показываем, что конформный блок в пределе Уиттекера связан с инстантонной статсуммой $SU(2)$ теории Янга - Миллса, вычисленной на \mathbb{Z}_2 симметричном пространстве модулей инстантонов. Мы показываем, что \mathbb{Z}_2 симметрия редуцирует пространство модулей и модифицирует инстантонную статсумму. Эта связь дает новое явное представление для функции $\mathcal{N} = 1$ суперконформного блока в терминах диаграмм Юнга с клетками двух типов. Затем мы обобщаем полученное утверждение на широкий класс конформных теорий поля.

Глава 1. Структура суперсимметричной конформной теории

Последние достижения [29; 30; 77] в теории поля Лиувилля [51; 52; 78] и двумерной квантовой Лиувиллевской гравитации влекут за собой интересные приложения в теории струн. В этом направлении серьезной проблемой является суперсимметричное обобщение методов, используемых в бозонном случае. Построение подобного обобщения особенно интересно ввиду того, что пока еще нет суперсимметричного аналога техники матричных моделей (см., например, обзоры [79; 80]), доступных в бозонном случае; супер-Лиувиллевский подход, предложенный Поляковым [18], остается, таким образом, единственным доступным методом.

Одной из открытых проблем в этом контексте является построение полного набора корреляционных функций в минимальной супергравитации, которая эквивалентна минимальным моделям некритической теории суперструн. Как и в бозонной конформной теории поля, основной метод здесь основан на решении конформных уравнений бутстрапа [4]. Важную роль в этом подходе играют так называемые функции конформных блоков. В настоящее время замкнутые аналитические выражения для этих функций могут быть найдены лишь для некоторых специальных значениях конформных размерностей рассматриваемых полей.

В этой главе мы обсудим рекуррентные соотношения для функций конформных блоков суперсимметричной конформной теории поля, аналогичные тем соотношениям, которые были найдены в [81] в бозонном случае. Последовательные итерации этих соотношений позволяют эффективно вычислять степенные разложения по координатам для конформных блоков. Мы опишем аналитические свойства суперконформных блоков, рассматриваемых как функции конформных размерностей полей и центрального заряда суперконформной алгебры и обсудим их асимптотические поведения. В конце главы мы используем полученные рекуррентные соотношения для анализа структуры пространства полей в суперконформной теории Лиувилля и реализации программы конформного бутстрапа.

1.1 Суперсимметричная теория Лиувилля

Суперсимметричная теория поля Лиувилля (SLFT), возникающая в контексте некритической теории суперструн [18], описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{SLFT}} = \frac{1}{8\pi} (\partial_a \phi)^2 + \frac{1}{2\pi} (\psi \bar{\partial} \psi + \bar{\psi} \partial \bar{\psi}) + 2i\mu b^2 \bar{\psi} \psi e^{b\phi} + 2\pi b^2 \mu^2 e^{2b\phi}, \quad (1.1)$$

где параметр b связан через так называемый *фоновый заряд* $Q = b^{-1} + b$ с центральным зарядом

$$\hat{c} = 1 + 2Q^2 \quad (1.2)$$

суперконформной алгебры, порожденной супертоком $S(z)$, $\bar{S}(\bar{z})$ и тензором энергии-импульса $T(z)$, $\bar{T}(\bar{z})$. Традиционно масштабный параметр μ называется (супер) космологической постоянной.

Напомним некоторые сведения о SLFT, необходимые для предстоящего обсуждения. Для более детального описания см., например, [82–85]. Пространство полей суперконформной теории расщепляется на так называемые сектор Невьё-Шварца [86] (НШ) и сектор Рамона [87] (Р), в которых компоненты супертока (S, \bar{S}) вблизи точки, где находится соответствующий оператор, являются соответственно однозначными или двузначными. Первый, НШ-сектор является замкнутым относительно операторного разложения (ОР). В этой связи вполне целесообразно рассмотреть его отдельно. Это то, что мы собираемся сделать в настоящей главе.

Итак, НШ-поля принадлежат представлению суперконформной НШ-алгебры со старшим весом

$$\begin{aligned} \{G_k, G_l\} &= 2L_{k+l} + \frac{\hat{c}}{2} \left(k^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{k+l}, \\ [L_n, G_k] &= \left(\frac{n}{2} - k \right) G_{n+k}, \\ [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{\hat{c}}{8} (m^3 - m) \delta_{m+n}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где индексы m, n являются целыми, а k, l – полуцелыми. На самом деле имеется две копии алгебры (1.3) – *правая SVir*, порожденная $S(z)$ и $T(z)$, и *левая SVir*, порожденная левыми компонентами $\bar{S}(\bar{z})$ и $\bar{T}(\bar{z})$. Все пространство разбивается

на представления со старшим весом алгебры $SVir \otimes \overline{SVir}$. Базисными НШ-полями являются скалярные примарные поля $V_a(x)$, которые отвечают векторам со старшим весом

$$\begin{aligned} L_n V_a &= 0; \quad \bar{L}_n V_a = 0; \quad \text{для } n > 0, \\ G_k V_a &= 0; \quad \bar{G}_k V_a = 0; \quad \text{для } k > 0, \\ L_0 V_a &= \bar{L}_0 V_a = \Delta_a V_a, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\Delta_a = \frac{a(Q - a)}{2} \tag{1.5}$$

и a является (комплексным) непрерывным параметром. Иногда полезно думать об этих базисных операторах как о должным образом регуляризованных экспонентах $V_a = \exp(a\phi)$ фундаментального бозонного поля, входящего в лагранжиан (1.1). Это особенно уместно в области конфигурационного пространства, где $\phi \rightarrow -\infty$. Здесь можно пренебречь членами взаимодействия в действии (1.1), поле ϕ ведет себя как свободный бозон, а $(\psi, \bar{\psi})$ – как свободный майорановский фермион, и экспоненциальному выражению можно придать точный смысл.

Все остальные НШ-поля являются $SVir \otimes \overline{SVir}$ потомками примарных полей. Полезно различать потомков целого и полуцелого уровней. Мы будем называть их соответственно *четными* и *нечетными* потомки и отмечать индексами e и o . Также полезно ввести специальные обозначения для компонент мультиплетов по отношению к супер-Пуанкаре алгебре – подалгебре $SVir \otimes \overline{SVir}$, порожденной $G_{-1/2}$, $\bar{G}_{-1/2}$ и $L_0 - \bar{L}_0$. С этой точки зрения V_a является *нижней* компонентой супермультиплета, который также включает в себя

$$\begin{aligned} \Lambda_a &= G_{-1/2} V_a = -ia\psi e^{a\phi}, \\ \bar{\Lambda}_a &= \bar{G}_{-1/2} V_a = -ia\bar{\psi} e^{a\phi}, \\ W_a &= G_{-1/2} \bar{G}_{-1/2} V_a = a^2 \bar{\psi} \psi e^{a\phi} - 2i\pi\mu a b e^{(a+b)\phi}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь мы используем представление *свободными полями* для соответствующих компонент. Основные тождества Уорда

$$\begin{aligned}
T(z)V_a(0) &= \frac{\Delta_a}{z^2}V_a(0) + \frac{1}{z}\partial V_a(0) + \text{reg} , \\
T(z)\Lambda_a(0) &= \frac{\Delta_a + 1/2}{z^2}\Lambda_a(0) + \frac{1}{z}\partial\Lambda_a(0) + \text{reg} , \\
S(z)V_a(0) &= \frac{1}{z}\Lambda_a(0) + \text{reg} , \\
S(z)\Lambda_a(0) &= \frac{2\Delta_a}{z^2}V_a(0) + \frac{1}{z}\partial V_a(0) + \text{reg} .
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Мы явно приводим голоморфные выражения только для V_a и Λ_a . «Правые» суперконформные свойства дублета $\bar{\Lambda}_a, W_a$ являются такими же, как и у V_a, Λ_a , а «левые» свойства $V_a, \bar{\Lambda}_a$ и Λ_a, W_a подобны (1.7) с очевидными изменениями, связанными с антикоммутируемостью правого и левого *фермионных* генераторов G_k и \bar{G}_k .

1.1.1 Операторная алгебра

Локальные свойства SLFT в НШ-секторе кодируются в базисном операторном разложении (здесь и далее для краткости обозначим $\Delta = \Delta_{Q/2+iP}$ и $\Delta_i = \Delta_{a_i}$ всюду, где это не может вызвать каких-либо недоразумений)

$$\begin{aligned}
V_{a_1}(x)V_{a_2}(0) &= \\
&\int \frac{dP}{4\pi} (x\bar{x})^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2} \left(\mathbb{C}_{a_1, a_2}^{Q/2+iP} [V_{Q/2+iP}(0)]_{\text{ee}} + \tilde{\mathbb{C}}_{a_1, a_2}^{Q/2+iP} [V_{Q/2+iP}(0)]_{\text{oo}} \right) .
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Данное ОР непрерывно и включает в себя интегрирование по *импульсу* P . Точно так же, как и в бозонной полевой теории Лиувилля [52], контур интегрирования в основном проходит вдоль вещественной оси, но иногда должен быть деформирован при аналитическом продолжении по параметрам a_1 и a_2 . Иногда полезно производить данную деформацию явным образом, представляя результат в виде так называемых дискретных членов [52]. В (3.8) $[V_p]$ обозначает вклад в операторное разложение примарного поля V_p и его суперконформных потомков. В отличие от обычной, т.е. не расширенной конформной симметрии, не все

из этих вкладов однозначно задаются суперконформной инвариантностью, четные и нечетные вклады входят независимо. Отсюда в ОР (3.8) возникают две разные структурные константы $\mathbb{C}_{a_1 a_2}^p$ и $\tilde{\mathbb{C}}_{a_1 a_2}^p$, тогда как $[V_a]_{ee}$ и $[V_a]_{oo}$ обозначают соответственно наборы *чет.-чет.*¹ и *нечет.-нечет.*, потомков. Как обычно [4], обе серии потомков разбиваются в произведение голоморфной и антиголоморфной *цепочек*

$$\begin{aligned} [V_a(0)]_{ee} &= \mathcal{C}_e^{\Delta_1, \Delta_2}(\Delta_a, x) \bar{\mathcal{C}}_e^{\Delta_1, \Delta_2}(\Delta_a, \bar{x}) V_a(0) , \\ [V_a(0)]_{oo} &= \mathcal{C}_o^{\Delta_1, \Delta_2}(\Delta_a, x) \bar{\mathcal{C}}_o^{\Delta_1, \Delta_2}(\Delta_a, \bar{x}) V_a(0) , \end{aligned} \quad (1.9)$$

где каждый из операторов цепочки

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_e^{\Delta_1, \Delta_2}(\Delta, x) &= 1 + x \frac{\Delta + \Delta_1 - \Delta_2}{2\Delta} L_{-1} + O(x^2) , \\ \mathcal{C}_o^{\Delta_1, \Delta_2}(\Delta, x) &= \frac{x^{1/2}}{2\Delta} G_{-1/2} + O(x^{3/2}) , \end{aligned} \quad (1.10)$$

(и то же самое для $\bar{\mathcal{C}}_e$ и $\bar{\mathcal{C}}_o$ с правыми *SVir* операторами G_k и L_n , замененными левыми операторами \bar{G}_k и \bar{L}_n) однозначно определяется суперконформной симметрией, как только фиксируется нормировка первого члена, например, как в (1.10), по существу таким же образом, как это происходит в обычном КфТП случае.

Базисные НШ структурные константы $\mathbb{C}_{a_1 a_2}^{Q/2-iP}$ и $\tilde{\mathbb{C}}_{a_1, a_2}^{Q/2-iP}$ в (3.8) были довольно давно вычислены с помощью бутстрапной техники в работах [85; 88]. Мы приводим результат в терминах трехточечных функций

$$\begin{aligned} \langle V_{a_1}(x_1) V_{a_2}(x_2) V_{a_3}(x_3) \rangle &= \frac{C_{a_1, a_2, a_3}}{(x_{12} \bar{x}_{12})^{\Delta_1 + 2 - 3} (x_{23} \bar{x}_{23})^{\Delta_2 + 3 - 1} (x_{31} \bar{x}_{31})^{\Delta_3 + 1 - 2}} , \\ \langle W_{a_1}(x_1) W_{a_2}(x_2) W_{a_3}(x_3) \rangle &= \frac{(1/2 - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)^2 \tilde{C}_{a_1, a_2, a_3}}{(x_{12} \bar{x}_{12})^{\Delta_1 + 2 - 3 + 1/2} (x_{23} \bar{x}_{23})^{\Delta_2 + 3 - 1 + 1/2} (x_{31} \bar{x}_{31})^{\Delta_3 + 1 - 2 + 1/2}} . \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь и далее мы обозначаем $x_{ij} = x_i - x_j$, а также используем сокращения типа $\Delta_{1+2-3} = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3$ и т.д. Все остальные трехточечные функции различных компонент супермультиплетов выражаются через данные с помощью

¹Это означает четный в левом и четный в правом секторах. Термины *нечет.-нечет.*, *чет.-нечет.* и т.д. имеют аналогичный смысл.

суперпроективной инвариантности $SL(2|1) \otimes \overline{SL(2|1)}$. Например,

$$\begin{aligned} \langle W_{a_1}(x_1)W_{a_2}(x_2)V_{a_3}(x_3) \rangle &= \frac{(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3)^2 C_{a_1, a_2, a_3}}{(x_{12}\bar{x}_{12})^{\Delta_{1+2-3}+1} (x_{23}\bar{x}_{23})^{\Delta_{2+3-1}} (x_{31}\bar{x}_{31})^{\Delta_{3+1-2}}}, \quad (1.12) \\ \langle W_{a_1}(x_1)V_{a_2}(x_2)V_{a_3}(x_3) \rangle &= \frac{\tilde{C}_{a_1, a_2, a_3}}{(x_{12}\bar{x}_{12})^{\Delta_{1+2-3}+1/2} (x_{23}\bar{x}_{23})^{\Delta_{2+3-1}-1/2} (x_{31}\bar{x}_{31})^{\Delta_{3+1-2}+1/2}}. \end{aligned}$$

Суперконформная симметрия позволяет выразить все трехточечные функции с различными компонентами (3.47) супермультиплетов через две константы $C_{a_1 a_2 a_3}$ и $\tilde{C}_{a_1 a_2 a_3}$ ². Обе константы $C_{a_1 a_2 a_3}$ и $\tilde{C}_{a_1 a_2 a_3}$ симметричны по всем своим индексам и связаны со структурными константами как

$$\mathbb{C}_{a_1 a_2}^{Q-p} = C_{a_1 a_2 p}, \quad \tilde{\mathbb{C}}_{a_1 a_2}^{Q-p} = -\tilde{C}_{a_1 a_2 p}. \quad (1.13)$$

Заметим, что выбранная в (1.10) нормировка играет важную роль в этих соотношениях. Согласно [85; 88] эти константы имеют следующий явный вид (a обозначает здесь $a_1 + a_2 + a_3$)

$$\begin{aligned} C_{a_1 a_2 a_3} &= \left(\pi \mu \gamma \left(\frac{Qb}{2} \right) b^{1-b^2} \right)^{(Q-a)/b} \frac{\Upsilon'_{\text{NS}}(0) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_1) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_2) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_3)}{\Upsilon_{\text{NS}}(a-Q) \Upsilon_{\text{NS}}(a_1+2-3) \Upsilon_{\text{NS}}(a_2+3-1) \Upsilon_{\text{NS}}(a_3+1-2)}, \quad (1.14) \\ \tilde{C}_{a_1 a_2 a_3} &= \left(\pi \mu \gamma \left(\frac{Qb}{2} \right) b^{1-b^2} \right)^{(Q-a)/b} \frac{2i \Upsilon'_{\text{NS}}(0) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_1) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_2) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_3)}{\Upsilon_{\text{R}}(a-Q) \Upsilon_{\text{R}}(a_1+2-3) \Upsilon_{\text{R}}(a_2+3-1) \Upsilon_{\text{R}}(a_3+1-2)}, \end{aligned}$$

где мы используем обозначения из работы [89] для специальных функций

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\text{NS}}(x) &= \Upsilon_b \left(\frac{x}{2} \right) \Upsilon_b \left(\frac{x+Q}{2} \right), \quad (1.15) \\ \Upsilon_{\text{R}}(x) &= \Upsilon_b \left(\frac{x+b}{2} \right) \Upsilon_b \left(\frac{x+b^{-1}}{2} \right), \end{aligned}$$

²Вывод, основанный на суперпроективных тождествах Уорда, которые не задействуют формализм суперполя, приведен в Приложении A.1.

выраженных в терминах стандартной в теории поля Лиувилля функции Υ_b (см. [51;52]). Для нас будут полезны следующие функциональные соотношения

$$\begin{aligned}\Upsilon_{\text{NS}}(x+b) &= b^{-bx} \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{bx}{2} \right) \Upsilon_{\text{R}}(x), \\ \Upsilon_{\text{R}}(x+b) &= b^{1-bx} \gamma \left(\frac{bx}{2} \right) \Upsilon_{\text{NS}}(x),\end{aligned}\tag{1.16}$$

и то же самое с b , замененным b^{-1} . Наконец,

$$\Upsilon'_{\text{NS}}(0) = \frac{1}{2} \Upsilon_b \left(\frac{b}{2} \right) \Upsilon_b \left(\frac{1}{2b} \right).\tag{1.17}$$

Все эти выражения отвечают «естественной» нормировке экспоненциальных полей, в которой двухточечная функция принимает вид

$$\langle V_a(x) V_a(0) \rangle = \frac{D_{\text{NS}}(a)}{(x\bar{x})^{2\Delta_a}}\tag{1.18}$$

с

$$D_{\text{NS}}(a) = \left(\pi \mu \gamma \left(\frac{bQ}{2} \right) \right)^{(Q-2a)b^{-1}} \frac{b^2 \gamma \left(ba - \frac{1}{2} - \frac{b^2}{2} \right)}{\gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{b^{-2}}{2} - ab^{-1} \right)}.\tag{1.19}$$

В естественной нормировке поля V_a и V_{Q-a} связаны следующим соотношением отражения

$$V_a = D_{\text{NS}}(a) V_{Q-a}.\tag{1.20}$$

В работах [85;88] (см. также [89]) выражения (3.9) были получены на основе отщепления сингулярного вектора в вырожденном представлении Рамона. Этот подход имеет много преимуществ, будучи простейшим известным подходом и дающим одновременно структурные константы ОР во всем пространстве полей, Невьё-Шварца и Рамона. Ниже мы воспроизведем вывод (3.9) с помощью чистого НШ-бутстрапа с требованием отщепления НШ нуль-вектора. Несмотря на то, что этот вывод технически сложнее, он позволяет рассматривать независимо сектор Невьё-Шварца суперконформной теории.

1.1.2 Корреляционные функции и конформные блоки

После того как структурные константы определены, операторное разложение (3.8) можно использовать в конструкции корреляционных функций. Для четырехточечной функции четырех нижних компонент примарных НШ-полей мы получаем следующее представление

$$\langle V_{a_1}(x_1)V_{a_2}(x_2)V_{a_3}(x_3)V_{a_4}(x_4) \rangle = \quad (1.21)$$

$$(x_{41}\bar{x}_{41})^{-2\Delta_1} (x_{24}\bar{x}_{24})^{\Delta_{1+3-2-4}} (x_{34}\bar{x}_{34})^{\Delta_{1+2-3-4}} (x_{23}\bar{x}_{23})^{\Delta_{4-1-2-3}} G \left(\begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{array} \middle| x, \bar{x} \right),$$

где

$$x = \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{41}}, \quad (1.22)$$

и *редуцированная* четырехточечная функция G допускает следующее «s-канальное» интегральное представление

$$G \left(\begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{array} \middle| x, \bar{x} \right) = \int \frac{dP}{4\pi} \mathbb{C}_{a_1 a_2}^{Q/2-iP} \mathbb{C}_{a_3 a_4}^{Q/2+iP} \left| \mathcal{F}_e \left(\begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{array} \middle| \Delta, x \right) \right|^2$$

$$- \int \frac{dP}{4\pi} \tilde{\mathbb{C}}_{a_1 a_2}^{Q/2-iP} \tilde{\mathbb{C}}_{a_3 a_4}^{Q/2+iP} \left| \mathcal{F}_o \left(\begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{array} \middle| \Delta, x \right) \right|^2. \quad (1.23)$$

Для простоты мы опускаем возможные дискретные члены. Суперконформные НШ-блоки \mathcal{F}_e и \mathcal{F}_o эффективно суммируют соответственно четных и нечетных потомков примарного НШ-поля с размерностью $\Delta = Q^2/8 + P^2/2$. Обратите внимание на знак минус перед вторым членом в (1.23). Он связан с антикоммутативностью правых и левых нечетных операторов цепочки в (1.9)³. Блоки строятся однозначно на основе суперконформной инвариантности. Проблема их вычисления будет рассмотрена в разделе 1.3. Для начала, в разделе 1.3.1, мы воспроизведем так называемое рекуррентное «s-представление» [81], разработанное в [57; 90], которое позволяет с помощью итераций эффективно восстанавливать блоки в виде ряда по параметру x . Лучшей сходимостью обладает

³Эта конвенция согласуется со знаком минус во втором соотношении в уравнении (1.13). Чисто мнимая структурная константа $\mathbb{C}_{a_1 a_2}^p$ в (3.9) обеспечивает положительный знак перед вкладом чисто нечетных уровней (см. ниже).

так называемая «эллиптическая» версия рекурсии, которая дает быстро сходящийся ряд по эллиптическому параметру q . Для обычной конформной алгебры подобное представление было построено в [91]. В разделе 1.3.2 мы описываем обобщение эллиптического представления на суперконформный случай [58; 59].

Важным свойством непротиворечивой евклидовой квантовой теории поля является ассоциативность алгебры операторного разложения. Это свойство обеспечивает однозначность корреляционных функций на евклидовом срезе комплексного пространства-времени. Общепринято давать евклидову интерпретацию стандартной локальности Минковского. В частности, четырехточечная функция однозначна (или удовлетворяет кроссинг-симметрии), если выполняются следующие два тождества

$$\begin{aligned} G \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_3 & x, \bar{x} \\ a_2 & a_4 & \end{array} \right) &= [(1-x)(1-\bar{x})]^{-2\Delta_1} G \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_4 & \frac{x}{x-1}, \frac{\bar{x}}{\bar{x}-1} \\ a_2 & a_3 & \end{array} \right), \\ G \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_3 & x, \bar{x} \\ a_2 & a_4 & \end{array} \right) &= G \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & 1-x, 1-\bar{x} \\ a_3 & a_4 & \end{array} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

В виде (1.23) первое соотношение является тривиальным следствием трансформационных свойств блоков. Второе, однако, становится нетривиальным соотношением на структурные константы. Его замкнутая формулировка в терминах структурных констант требует знания явной матрицы слияния (или кроссинг-матрицы) для общего суперконформной блока, конструкция которой остается не вполне доступной на данный данный момент (см. [92] для явной конструкции в бозонном случае). Ввиду этих обстоятельств полезно проанализировать свойства матрицы слияния, используя быстро сходящееся эллиптическое представление для суперконформных блоков. В разделе 1.3.3 мы описываем результаты работы [58; 59], где впервые было получено убедительное подтверждение соотношений (1.24) в суперконформной теории поля Лиувилля для корреляционных функций примарных полей, а также их суперпартнеров.

1.2 Вырожденные представления и сингулярные вектора

При определенных значениях параметра a оператор SLFT V_a соответствует старшему вектору вырожденного представления $SVir$. В НШ-секторе простейшее вырожденное представление имеет размерность $\Delta_{1,3} = -1/2 - b^2$ с примарным полем V_{-b} в качестве старшего вектора. Сингулярный вектор, появляющийся на уровне $3/2$, имеет вид

$$\left(G_{-1/2}^3 + b^2 G_{-3/2}\right) V_{-b} . \quad (1.25)$$

Существует также сингулярный вектор того же вида в левом \overline{SVir} секторе. Зануление всех сингулярных векторов в вырожденных представлениях может быть принято в качестве основного *динамического принципа* SLFT, в точности как в обычной бозонной КфТП. В частности, полагая (1.25) и его левый аналог равными нулю, мы приходим к нетривиальным уравнениям на корреляционные функции. Легко видеть, например, рассматривая трехточечную функцию с полем V_{-b} , что такое *уравнение отщепления* ограничивает вид операторного разложения произведения данного вырожденного поля и произвольного примарного поля V_a до следующей *дискретной* формы

$$V_{-b}V_a = \quad (1.26)$$

$$(x\bar{x})^{ab}C_-(a) [V_{a-b}]_{ee} + (x\bar{x})^{1/2+b^2}\tilde{C}_0(a) [V_a]_{oo} + C_+(a)(x\bar{x})^{1-ba+b^2} [V_{a+b}]_{ee} ,$$

где $C_-(a)$, $\tilde{C}_0(a)$ и $C_+(a)$ являются «специальными» (в отличие от «общих» структурных констант в ОР (3.8)) или *дискретными структурными константами*.

1.2.1 Операторные разложения вырожденных полей

Почувительно разобраться, как общее ОР (3.8) со структурными константами (3.9) приводится к дискретному разложению (3.62), если один из параметров

a_1 или a_2 принимает вырожденное значение минус b . Этот анализ представлен в Приложении A.2.

В этом разделе мы будем использовать бутстрапные условия вместе с принципом отщепления, чтобы получить общие НШ структурные константы (3.9). В частности, значения специальных структурных констант (3.62) восстанавливаются однозначно с точностью до общего масштаба. Полезно, однако, использовать «пертурбативный» вывод, подобный тому, что представлен, например, в [93], поскольку он, во-первых, является более простым и прозрачным, а во-вторых, дает эвристическую связь с SLFT лагранжианом (1.1). В частности, он проясняет связь масштабного параметра с космологической постоянной μ . В сущности идея представляет собой некоторую версию «скринингова» вычисления, изобретенного Б. Фейгиным и Д.Фуксом (и развитая в дальнейшем В.Фатеевым и В.Доценко [94]), в которой роль оператора скрининга играет член взаимодействия $2i\mu W_b$ в (1.1). К примеру, формально пренебрегая этим членом, можно считать ϕ и ψ свободными полями, так что экспоненты V_{-b} и V_a удовлетворяют слиянию свободных полей в V_{a-b} с

$$C_-(a) = 1. \quad (1.27)$$

Следующий член с $[V_a]_{\text{oo}} = (2\Delta_a)^{-2}(x\bar{x})^{1/2}W_a + \dots$ требует одной вставки возмущения $2i\mu b^2 \int \bar{\psi}\psi e^{b\phi} d^2x$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0(a) &= -2i\mu b^2 (Q-a)^2 \int \langle \bar{\psi}\psi e^{b\phi}(y) V_a(0) V_{-b}(1) \bar{\psi}\psi e^{(Q-a)\phi}(\infty) \rangle \\ &= \frac{2\pi i \mu \gamma(ab - b^2)}{\gamma(-b^2)\gamma(ab)}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Наконец, мы должны сделать две пертурбативные вставки для того, чтобы сформировать последний член $[V_{a+b}]_{\text{ee}} = V_{a+b} + \dots$ в ОР (3.62). Это приводит к

$$\begin{aligned} C_+(a) &= \frac{(-2i\mu b^2)^2}{2} \int \langle \bar{\psi}\psi e^{b\phi}(y_1) \bar{\psi}\psi e^{b\phi}(y_2) V_a(0) V_{-b}(1) V_{Q-a-b}(\infty) \rangle \\ &= 2\mu^2 b^4 \int [(y_1 - y_2)(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)]^{-b^2-1} \prod_{i=1}^2 (y_i \bar{y}_i)^{-ab} [(1 - y_i)(1 - \bar{y}_i)]^{b^2} d^2y_i \\ &= \pi^2 \mu^2 b^4 \gamma^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{2} \right) \gamma \left(-\frac{1}{2} - \frac{b^2}{2} + ab \right) \gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{2} - ab \right). \end{aligned} \quad (1.29)$$

В последнем вычислении мы использовали следующую формулу интегрирования, принадлежащую Доценко и Фатееву [95],

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n (z_i \bar{z}_i)^{\mu-1} [(1-z_i)(1-\bar{z}_i)]^{\nu-1} d^2 z_i \prod_{i>j} [(z_i - z_j)(\bar{z}_i - \bar{z}_j)]^{2g} \quad (1.30) \\ & = (\pi\gamma(1-g))^n \prod_{k=0}^{n-1} \gamma(g+kg)\gamma(\mu+kg)\gamma(\nu+kg)\gamma(\lambda+kg), \end{aligned}$$

где $\mu + \nu + \lambda = 1 - 2(n-1)g$.

Простым упражнением на операторное разложение является вывод утверждения, что двухточечная функция (1.18) удовлетворяет следующему функциональному соотношению

$$\frac{D_{\text{NS}}(a)}{D_{\text{NS}}(a+b)} = C_+(a), \quad (1.31)$$

где амплитуда отражения $D_{\text{NS}}(a)$ определена в (1.19). «Дуальное» функциональное соотношение

$$\frac{D_{\text{NS}}(a)}{D_{\text{NS}}(a+b^{-1})} = \pi^2 \tilde{\mu}^2 b^4 \gamma^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{b^{-2}}{2} \right) \gamma \left(-\frac{1}{2} - \frac{b^{-2}}{2} + ab^{-1} \right) \gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{b^{-2}}{2} - ab^{-1} \right) \quad (1.32)$$

также выполняется, если *дуальная космологическая постоянная* $\tilde{\mu}$ связана с μ как

$$\pi \tilde{\mu} \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{b^{-2}}{2} \right) = \left(\pi \mu \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{2} \right) \right)^{b^2}. \quad (1.33)$$

1.2.2 Корреляционные функции с вырожденным полем

Теперь давайте обратимся к четырехточечной функции с одним вырожденным примарным полем V_{-b} и тремя произвольными полями. Естественно перенумеровать операторы, заменив в (1.21) V_{a_1} на V_{-b} и обозначив V_{a_2} , V_{a_3} и V_{a_4} как V_1 , V_2 и V_3 , с соответствующими размерностями Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 . Таким

образом, в обозначениях (1.21),

$$g(x, \bar{x}) = G \left(\begin{array}{cc|c} -b & a_2 & x, \bar{x} \\ a_1 & a_3 & \end{array} \right). \quad (1.34)$$

В [57] было показано⁴, что эта функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$D_3 g''' + D_2 g'' + D_1 g' + D_0 g = 0, \quad (1.35)$$

где явные выражения для коэффициентов

$$\begin{aligned} D_3 &= \frac{1}{b^2}, & D_2 &= \frac{1-2b^2}{b^2} \frac{1-2x}{x(1-x)} +, \\ D_1 &= \left(\frac{b^2 + 2\Delta_1}{x^2} + \frac{b^2 + 2\Delta_2}{(1-x)^2} + \frac{2-3b^2 + 2\Delta_{1+2-3}}{x(1-x)} \right), \\ D_0 &= \left(\frac{2\Delta_2(1+b^2)}{(1-x)^3} - \frac{2\Delta_1(1+b^2)}{x^3} + \frac{\Delta_{2-1} + (1-2x)(b^4 + b^2(1/2 - \Delta_{1+2-3}) - \Delta_{1+2})}{x^2(1-x)^2} \right). \end{aligned}$$

То же самое уравнение имеет место и по отношению к \bar{x} . При $x \rightarrow 0$ данное уравнение имеет три характеристические экспоненты ba_1 , $1+b^2$ и $1-ba_1+b^2$, которые отвечают размерностям в канале слияния Δ_{a_1-b} , $\Delta_{a_1} + 1/2$ и Δ_{a_1+b} соответственно. Таким образом, они дают начало трем s-канальным блокам

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_e^{(-)}(x) &= x^{a_1 b} (1 + \dots), \\ \mathcal{F}_o^{(0)}(x) &= x^{1+b^2} \left(\frac{1}{2\Delta_{a_1}} + \dots \right), \\ \mathcal{F}_e^{(+)}(x) &= x^{1-ba_1+b^2} (1 + \dots), \end{aligned} \quad (1.36)$$

где в скобках стоит регулярный ряд по x и нормировка отвечает общей конвенции (1.10). Корреляционная функция строится следующим образом

$$\begin{aligned} g(x, \bar{x}) &= -\tilde{C}_0(a_1) \tilde{C}_{a_1, a_2, a_3} \mathcal{F}_o^{(0)}(x) \mathcal{F}_o^{(0)}(\bar{x}) \\ &+ C_-(a_1) C_{a_1-b, a_2, a_3} \mathcal{F}_e^{(-)}(x) \mathcal{F}_e^{(-)}(\bar{x}) + C_+(a_1) C_{a_1+b, a_2, a_3} \mathcal{F}_e^{(+)}(x) \mathcal{F}_e^{(+)}(\bar{x}). \end{aligned} \quad (1.37)$$

⁴Мы приводим вывод этого дифференциального уравнения в Приложении A.3.

Оказывается, что уравнение (1.35) относится к типу, рассмотренному Доденко и Фатеевым в [94], и может быть решено в терминах двукратных контурных интегралов. Явно,

$$\mathcal{F}_e^{(-)}(x) = \quad (1.38)$$

$$\frac{x^{a_1 b} (1-x)^{a_2 b} \Gamma\left(-\frac{1}{2} - \frac{b^2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{2} + ba_1\right) \Gamma(ba_1 - b^2) F_-(A, B, C, g; x)}{\Gamma(-1 - b^2) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ba_{1+3-2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{ba_{1+3-2}}{2} - \frac{b^2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ba_{1+2-3}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{ba_{1+2-3}}{2} - \frac{b^2}{2}\right)},$$

$$\mathcal{F}_e^{(+)}(x) = \quad (1.39)$$

$$\frac{x^{1-ba_1+b^2} (1-x)^{a_2 b} \Gamma\left(-\frac{1}{2} - \frac{b^2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - ba_1 + \frac{b^2}{2}\right) \Gamma(1 - ba_1) F_+(A, B, C, g; x)}{\Gamma(-1 - b^2) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ba_{2+3-1}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{ba_{2+3-1}}{2} - \frac{b^2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{ba_{1+2+3}}{2} + b^2\right) \Gamma\left(1 - \frac{ba_{1+2+3}}{2} + \frac{b^2}{2}\right)},$$

и

$$\mathcal{F}_o^{(0)}(x) = \frac{x^{1+b^2} (1-x)^{a_2 b} b^2 \Gamma(1 - ba_1 + b^2) \Gamma(ba_1) F_0(A, B, C, g; x)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ba_{2+3-1}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ba_{1+3-2}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{ba_{1+2+3}}{2} + b^2\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ba_{1+2-3}}{2}\right)}. \quad (1.40)$$

Функции $F_{\pm}(A, B, C, g; x)$ и $F_0(A, B, C, g; x)$ представляют собой регулярные ряды по x и допускают следующие интегральные представления

$$F_-(x) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (t_1 - t_2)^{2g} (t_1 t_2)^{-A-B-C-2} [(1-t_1)(1-t_2)]^B [(1-xt_1)(1-xt_2)]^C,$$

$$F_+(x) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (t_1 - t_2)^{2g} (t_1 t_2)^A [(1-t_1)(1-t_2)]^C [(1-xt_1)(1-xt_2)]^B,$$

$$F_0(x) =$$

$$\int_0^1 t_1^{-2-A-B-C-2g} (1-t_1)^B (1-xt_1)^C dt_1 \int_0^1 dt_2 t_2^A [(1-xt_2)]^B [(1-t_2)]^C (1-xt_1 t_2)^{2g}. \quad (1.41)$$

Параметры A , B , C и g связаны с параметрами a_1 , a_2 , a_3 и b как

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} + \frac{ba_{2+3-1}}{2}, & B &= -\frac{1}{2} + \frac{ba_{1-2+3}}{2}, \\ C &= \frac{1}{2} - \frac{ba_{1+2+3}}{2} + b^2, & g &= -\frac{1}{2} - \frac{b^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Для полноты изложения в Приложении [A.3](#) мы воспроизводим из [94] дифференциальное уравнение третьего порядка типа Доценко-Фатеева, интегральные представления решений, а также их свойства монодромии.

Заметим, что комбинация (1.37) является однозначной функцией координат (x, \bar{x}) , если

$$\begin{aligned} \frac{C_+(a_1)C_{a_1+b,a_2,a_3}}{C_-(a_1)C_{a_1-b,a_2,a_3}} &= -\frac{\gamma(ba_1)\gamma(ba_1-b^2)\gamma^2\left(\frac{1}{2}-\frac{b^2}{2}+ba_1\right)}{\left(\frac{1}{2}-ba_1+\frac{b^2}{2}\right)^2} \times \\ &\frac{\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{ba_{2+3-1}}{2}\right)\gamma\left(\frac{ba_{2+3-1}}{2}-\frac{b^2}{2}\right)\gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{ba_{1+2+3}}{2}+b^2\right)\gamma\left(1-\frac{ba_{1+2+3}}{2}+\frac{b^2}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{ba_{1+3-2}}{2}\right)\gamma\left(\frac{ba_{1+3-2}}{2}-\frac{b^2}{2}\right)\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{ba_{1+2-3}}{2}\right)\gamma\left(\frac{ba_{1+2-3}}{2}-\frac{b^2}{2}\right)} \end{aligned} \quad (1.43)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{C}_0(a_1)\tilde{C}_{a_1,a_2,a_3}}{C_-(a_1)C_{a_1-b,a_2,a_3}} &= \frac{-\gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{b^2}{2}\right)\gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{b^2}{2}+ba_1\right)\gamma^2(ba_1-b^2)}{b^4\gamma(-1-b^2)\gamma(ba_1)} \times \\ &\frac{\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{ba_{2+3-1}}{2}\right)\gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{ba_{1+2+3}}{2}+b^2\right)}{\gamma\left(\frac{ba_{3+1-2}}{2}-\frac{1}{2}b^2\right)\gamma\left(\frac{ba_{1+2-3}}{2}-\frac{b^2}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Эти формулы вместе с явными выражениями (1.27), (1.28) и (1.29) для специальных структурных констант приводят к следующим функциональным соотношениям на трехточечные функции C_{a_1,a_2,a_3} и \tilde{C}_{a_1,a_2,a_3}

$$\begin{aligned} \frac{C_{a_1+b,a_2,a_3}}{C_{a_1-b,a_2,a_3}} &= \frac{\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{b^2}{2}+a_1b\right)\gamma(ba_1)\gamma(ba_1-b^2)\gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{b^2}{2}+ba_1\right)}{\pi^2\mu^2b^4\gamma^2\left(\frac{1}{2}+\frac{b^2}{2}\right)\gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{b^2}{2}+a_1b\right)\gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{b^2}{2}+a_1b\right)} \times \\ &\frac{\gamma\left(1-\frac{1}{2}ba_{1+2+3}+\frac{1}{2}b^2\right)\gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{ba_{1+2+3}}{2}+b^2\right)\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ba_{2+3-1}\right)\gamma\left(\frac{1}{2}ba_{2+3-1}-\frac{1}{2}b^2\right)}{\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ba_{1+3-2}\right)\gamma\left(\frac{1}{2}ba_{1+3-2}-\frac{1}{2}b^2\right)\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ba_{1+2-3}\right)\gamma\left(\frac{1}{2}ba_{1+2-3}-\frac{1}{2}b^2\right)} \end{aligned} \quad (1.45)$$

и

$$\frac{\tilde{C}_{a_1, a_2, a_3}}{C_{a_1-b, a_2, a_3}} = \frac{2i\gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{2} + ba_1\right) \gamma(ba_1 - b^2) \gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ba_2+3-1}{2}\right) \gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{ba_1+2+3}{2} + b^2\right)}{\pi\mu b^4 \gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{2}\right) \gamma\left(\frac{ba_3+1-2}{2} - \frac{1}{2}b^2\right) \gamma\left(\frac{ba_1+2-3}{2} - \frac{b^2}{2}\right)}. \quad (1.46)$$

С помощью соотношений сдвига (1.16) непосредственно можно проверить, что структурные константы (3.9) удовлетворяют этим функциональным соотношениям. Применяя теперь стандартный подход [96] с «дуальным» функциональным соотношением (т.е. соотношением с $b \rightarrow b^{-1}$ и $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$), можно утверждать, что по крайней мере при действительных иррациональных значениях b^2 выражения (3.9) дают единственное решение уравнений отщепления сингулярных векторов.

1.3 Аналитические свойства конформного блока

Здесь мы более подробно анализируем свойства суперконформных блоков \mathcal{F}_e и \mathcal{F}_o , которые входят в интегральное представление (1.23) четырехточечной функции. В этом анализе важную роль играют *операторы цепочки*, введенные в (1.9). Лево-правая факторизация позволяет сосредоточиться только на голоморфной части, а затем объединить ее с аналогично полученной антиголоморфной частью. Как было обнаружено в [90] и [57], помимо ОР (3.8) необходимо рассмотреть также ОР $\Lambda_{a_1}(x)V_{a_2}(0)$. Коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [G_k, V_a(x)] &= x^{k+1/2} \Lambda_a(x), \\ \{G_k, \Lambda_a(x)\} &= x^{k+1/2} \left(\frac{2\Delta_a(k+1/2)}{x} V_a(x) + \frac{\partial}{\partial x} V_a(x) \right), \end{aligned} \quad (1.47)$$

непосредственно следуют из (1.7). Действуя любым генератором G_k с $k > 0$ на левую часть (3.8), можно найти

$$\Lambda_{a_1}(x)V_{a_2}(0) = x^{-1/2} \int \frac{dP}{4\pi} (x\bar{x})^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2} \left(\mathbb{C}_{a_1,a_2}^{Q/2+iP} \tilde{\mathcal{C}}_o(\Delta_a, x) \bar{\mathcal{C}}_e(\Delta_a, \bar{x}) V_{Q/2+iP}(0) \right. \\ \left. + \tilde{\mathcal{C}}_{a_1,a_2}^{Q/2+iP} \tilde{\mathcal{C}}_e(\Delta_a, x) \bar{\mathcal{C}}_o(\Delta_a, \bar{x}) V_{Q/2+iP}(0) \right) , \quad (1.48)$$

где $\tilde{\mathcal{C}}_e(\Delta_a, x)$ и $\tilde{\mathcal{C}}_o(\Delta_a, x)$ являются новыми операторами цепочки⁵. Удобно объединить четные и нечетные операторы цепочки в один ряд по целым и полуцелым степеням x

$$\mathcal{C}(\Delta, x) = \mathcal{C}_e(\Delta, x) + \mathcal{C}_o(\Delta, x) , \quad (1.49) \\ \tilde{\mathcal{C}}(\Delta, x) = \tilde{\mathcal{C}}_e(\Delta, x) + \tilde{\mathcal{C}}_o(\Delta, x) .$$

Из (1.47) можно найти

$$\tilde{\mathcal{C}}(\Delta, x)V_\Delta = x^k G_k \mathcal{C}(\Delta, x)V_\Delta , \quad (1.50) \\ \mathcal{C}(\Delta, x)V_\Delta = x^k \left(\Delta + 2\Delta_1 k - \Delta_2 - k + x \frac{\partial}{\partial x} \right) G_k \tilde{\mathcal{C}}(\Delta, x)V_\Delta .$$

Для коэффициентов в разложении по уровням

$$\mathcal{C}(\Delta, x) = \sum_N x^N \mathcal{C}_N(\Delta) , \quad \tilde{\mathcal{C}}(\Delta, x) = \sum_N x^N \tilde{\mathcal{C}}_N(\Delta) , \quad (1.51)$$

где N пробегает неотрицательные целые и полуцелые числа (уровни), эти соотношения оказываются следующими ($k \leq N$)

$$G_k \mathcal{C}_N(\Delta)V_\Delta = \tilde{\mathcal{C}}_{N-k}(\Delta)V_\Delta , \quad (1.52) \\ G_k \tilde{\mathcal{C}}_N(\Delta)V_\Delta = (\Delta + 2\Delta_1 k - \Delta_2 + N - k) \mathcal{C}_{N-k}(\Delta)V_\Delta .$$

Этой системы оказывается достаточно, чтобы реконструировать операторы цепочки с точностью до двух общих констант. Последние могут быть фиксирова-

⁵Эти операторы также зависят от размерностей $\Delta_1 = \Delta_{a_1}$ и $\Delta_2 = \Delta_{a_2}$. Чтобы не перегружать обозначения, эта зависимость не указывается явно.

ны условиями $\mathcal{C}_0 = 1$ и $\tilde{\mathcal{C}}_0 = 1$. Явно можно найти уровень за уровнем

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{1/2}(\Delta) &= \frac{1}{2\Delta} G_{-1/2}, \\
\mathcal{C}_1(\Delta) &= \frac{\Delta + \Delta_1 - \Delta_2}{2\Delta} L_{-1}, \\
\mathcal{C}_{3/2}(\Delta) &= \frac{\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1/2}{2\Delta(2\Delta + 1)} G_{-1/2}^3 + \frac{2(\Delta_1 - \Delta_2)}{4\Delta^2 + 2\widehat{c}\Delta - 6\Delta + \widehat{c}} O_{-3/2}, \\
\mathcal{C}_2(\Delta) &= \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1)}{4\Delta(2\Delta + 1)} L_{-1}^2 \\
&\quad + \frac{2(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \Delta - (2\Delta + 1)(\Delta_1 + \Delta_2)}{(2\Delta + 3)(4\Delta^2 + 2\widehat{c}\Delta - 6\Delta + \widehat{c})} G_{-1/2} O_{-3/2} \\
&\quad + \frac{3(\Delta_1 - \Delta_2)^2 - 2\Delta(\Delta_1 + \Delta_2) - \Delta^2}{2\Delta(2\Delta + 3)(16\Delta + 3\widehat{c} - 3)} O_{-2},
\end{aligned} \tag{1.53}$$

и

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{C}}_{1/2}(\Delta) &= \frac{\Delta + \Delta_1 - \Delta_2}{2\Delta} G_{-1/2}, \\
\tilde{\mathcal{C}}_1(\Delta) &= \frac{\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1/2}{2\Delta} L_{-1}, \\
\tilde{\mathcal{C}}_{3/2}(\Delta) &= \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1)}{2\Delta(2\Delta + 1)} G_{-1/2}^3 \\
&\quad + \frac{2(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \Delta - (2\Delta + 1)(\Delta_1 + \Delta_2)}{4\Delta^2 + 2\widehat{c}\Delta - 6\Delta + \widehat{c}} O_{-3/2}, \\
\tilde{\mathcal{C}}_2(\Delta) &= \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1/2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 3/2)}{4\Delta(2\Delta + 1)} L_{-1}^2 \\
&\quad + \frac{2(\Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 3/2)}{(2\Delta + 3)(4\Delta^2 + 2\widehat{c}\Delta - 6\Delta + \widehat{c})} G_{-1/2} O_{-3/2} \\
&\quad + \frac{12(\Delta_1 - \Delta_2)^2 - (2\Delta + 3)(2\Delta - 1 + 4(\Delta_1 + \Delta_2))}{8\Delta(2\Delta + 3)(16\Delta + 3\widehat{c} - 3)} O_{-2},
\end{aligned} \tag{1.54}$$

где мы использовали сокращения

$$\begin{aligned}
O_{-3/2} &= \frac{2}{2\Delta + 1} L_{-1} G_{-1/2} - G_{-3/2}, \\
O_{-2} &= 3L_{-1}^2 - 4\Delta L_{-2} - 3G_{-3/2} G_{-1/2}.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Следующие коэффициенты систематически вычисляются уровень за уровнем как решение (1.50). На каждом уровне (1.52) является конечномерной линей-

ной задачей, коэффициенты которой представляют собой полиномы по \widehat{c} , Δ и «внешним размерностям» Δ_1 и Δ_2 . Детерминантом системы является детерминант Каца [97] соответствующего уровня в представлении суперконформной алгебры. Таким образом, сингулярности $\mathcal{C}(\Delta)$ являются (вообще говоря, простыми) полюсами, расположенными в вырожденных размерностях $\Delta = \Delta_{m,n}$, где (m,n) – пара положительных чисел,

$$\Delta_{m,n} = \frac{Q^2}{8} - \frac{\lambda_{m,n}^2}{2}, \quad (1.56)$$

и мы ввели обозначение

$$\lambda_{m,n} = \frac{mb^{-1} + nb}{2}. \quad (1.57)$$

В НШ-секторе m и n – либо оба четные, либо оба нечетные. При этих значениях в $SVir$ модуле над V_Δ возникает сингулярный вектор $D_{m,n}V_{m,n}$, являющийся примарным полем размерности $\Delta_{m,n} + mn/2 = \Delta_{m,-n}$. Здесь, как и в работе [98], мы обозначили $V_{m,n} = V_{\Delta_{m,n}}$ и ввели набор операторов рождения сингулярных векторов $D_{m,n}$, которые являются градуированными полиномами от образующих G_{-k} и L_{-n} (с коэффициентами, зависящими только от \widehat{c} (или b)) так, что $G_k D_{m,n} V_{m,n} = 0$ для каждого полуцелого $k > 0$. Эти операторы должны быть нормированы как в [98]

$$D_{m,n} = G_{-1/2}^{mn} + \dots \quad (1.58)$$

Ниже нам также понадобится сопряженный оператор $D_{m,n}^\dagger$, который определяется, как и в работе [98], с помощью следующих правил сопряжения $L_n^\dagger = L_{-n}$ и $G_k^\dagger = G_{-k}$. Очевидно,

$$D_{m,n}^\dagger D_{m,n} V_\Delta(0) = r'_{m,n} (\Delta - \Delta_{m,n}) V_\Delta(0) + O((\Delta - \Delta_{m,n})^2) V_\Delta(0), \quad (1.59)$$

где коэффициент $r'_{m,n}$ (так называемая «логарифмическая» норма сингулярного вектора) был явно вычислен в [98]

$$r'_{m,n} = 2^{mn-1} \prod_{\substack{m,n,k+l \in 2\mathbb{Z} \\ k=1-m, l=1-n \\ (k,l) \neq (0,0), (m,n)}} \lambda_{k,l}. \quad (1.60)$$

Сингулярный вектор $D_{m,n}V_{m,n}$, однажды появившийся среди векторов цепочки (1.49), дает рост своим собственным цепочкам $\mathcal{C}(\Delta_{m,-n}, x) D_{m,n} V_{m,n}$ и

$\tilde{\mathcal{C}}(\Delta_{m,-n},x)D_{m,n}V_{m,n}$, которые сами по себе удовлетворяют уравнениям (1.52) с $\Delta = \Delta_{m,n}$. Очевидно,

$$\operatorname{res}_{\Delta=\Delta_{m,n}} \mathcal{C}(\Delta,x) = x^{mn/2} X_{m,n} \mathcal{C}(\Delta_{m,-n},x) D_{m,n}, \quad (1.61)$$

где $X_{m,n}$ являются определенными коэффициентами. Поскольку $\mathcal{C}_e(\Delta,x)$ с $\tilde{\mathcal{C}}_o(\Delta,x)$ и $\mathcal{C}_o(\Delta,x)$ с $\tilde{\mathcal{C}}_e(\Delta,x)$ образуют две независимые системы, необходимо рассматривать целые и полуцелые цепочки отдельно. Обозначим

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\Delta=\Delta_{m,n}} \mathcal{C}_e(\Delta,x) &= x^{mn/2} \begin{cases} X_{m,n}^{(e)} \mathcal{C}_e(\Delta_{m,-n},x) D_{m,n} & m,n \text{ чет.} \\ X_{m,n}^{(e)} \mathcal{C}_o(\Delta_{m,-n},x) D_{m,n} & m,n \text{ нечет.} \end{cases} \\ \operatorname{res}_{\Delta=\Delta_{m,n}} \mathcal{C}_o(\Delta,x) &= x^{mn/2} \begin{cases} X_{m,n}^{(o)} \mathcal{C}_o(\Delta_{m,-n},x) D_{m,n} & m,n \text{ чет.} \\ X_{m,n}^{(o)} \mathcal{C}_e(\Delta_{m,-n},x) D_{m,n} & m,n \text{ нечет.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.62)$$

и пусть $\mathcal{C}(\Delta,x)$ с $\tilde{\mathcal{C}}(\Delta,x)$ нормированы как было указано выше. Тогда коэффициенты $X_{m,n}^{(e)}$ и $X_{m,n}^{(o)}$ определены однозначно. По построению они являются полиномами внешних размерностей Δ_1 и Δ_2 . Для описания этих коэффициентов удобно определить следующие *полиномы слияния* [57;90]

$$\begin{aligned} P_{m,n}^{(e)}(x) &= \prod_{\substack{m+n-k-l \bmod 4=0 \\ k \in \{1-m, 2, m-1\} \\ l \in \{1-n, 2, n-1\}}} (x - \lambda_{k,l}), \\ P_{m,n}^{(o)}(x) &= \prod_{\substack{m+n-k-l \bmod 4=2 \\ k \in \{1-m, 2, m-1\} \\ l \in \{1-n, 2, n-1\}}} (x - \lambda_{k,l}). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Здесь, например, $\{1-m, 2, m-1\}$ означает «от $1-m$ к $m-1$ с шагом 2», т.е. $1-m, 3-m, \dots, m-1$. Степень этих многочленов

$$p_{e,o}(m,n) = \deg P_{m,n}^{(e,o)}(x) \quad (1.64)$$

совпадает с числом множителей в произведениях (1.63)

$$\begin{aligned} p_{e,o}(m,n) &= mn/2 && \text{при } m,n \text{ чет.} \\ p_e(m,n) &= mn/2 - 1/2 && \text{при } m,n \text{ нечет.} \\ p_o(m,n) &= mn/2 + 1/2 && \text{при } m,n \text{ нечет.} \end{aligned} \quad (1.65)$$

В частности, четность полинома $P_{m,n}^{(e,o)}(x)$ такая же, как и у целого числа $p_{e,o}(m,n)$.

Для наших целей оказывается удобным параметризовать внешние размерности в терминах новых переменных λ_i как

$$\Delta_i = \frac{Q^2}{8} - \frac{\lambda_i^2}{2}. \quad (1.66)$$

Нам понадобится еще несколько обозначений. Рассмотрим трехточечную функцию формальных киральных полей, например, $\langle V_{m,n}(\infty)D_{m,n}^\dagger V_{\Delta_1}(1)V_{\Delta_2}(0) \rangle$ и $\langle V_{m,n}(\infty)D_{m,n}^\dagger \Lambda_{\Delta_1}(1)V_{\Delta_2}(0) \rangle$. Применение тождеств Уорда, которые в данном контексте выглядят просто как

$$\begin{aligned} [G_k, V_{\Delta_1}(1)] &= \Lambda_{\Delta_1}(1), \\ \{G_k, \Lambda_{\Delta_1}(1)\} &= (2k\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_{m,n} + N)V_{\Delta_1}(1), \end{aligned} \quad (1.67)$$

(где N является целым или полуцелым числом, отвечающим уровню потомка $V_{m,n}(\infty)$) является чисто алгебраической процедурой, приводящей к соотношениям

$$\begin{aligned} \langle V_{m,n}(\infty)D_{m,n}^\dagger V_{\Delta_1}(1)V_{\Delta_2}(0) \rangle &= \\ Y_{m,n}^{(e)}(\Delta_1, \Delta_2) \begin{cases} \langle V_{m,n}(\infty)V_{\Delta_1}(1)V_{\Delta_2}(0) \rangle & \text{при } m,n \text{ чет.} \\ \langle V_{m,n}(\infty)\Lambda_{\Delta_1}(1)V_{\Delta_2}(0) \rangle & \text{при } m,n \text{ нечет.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} \langle V_{m,n}(\infty)D_{m,n}^\dagger \Lambda_{\Delta_1}(1)V_{\Delta_2}(0) \rangle &= \\ Y_{m,n}^{(o)}(\Delta_1, \Delta_2) \begin{cases} \langle V_{m,n}(\infty)\Lambda_{\Delta_1}(1)V_{\Delta_2}(0) \rangle & \text{при } m,n \text{ чет.} \\ \langle V_{m,n}(\infty)V_{\Delta_1}(1)V_{\Delta_2}(0) \rangle & \text{при } m,n \text{ нечет.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.69)$$

Очевидно, что $Y_{m,n}^{(e,o)}(\Delta_1, \Delta_2)$ являются полиномами от Δ_1 и Δ_2 , с членом старшего порядка, который формируется членом в $D_{m,n}$ с максимальным количеством генераторов G_k , то есть таким, как указан в (1.58). Таким образом, степень $Y_{m,n}^{(e,o)}(\Delta_1, \Delta_2)$ есть $p_{e,o}(m,n)$ со старшим членом

$$Y_{m,n}^{(e,o)}(\Delta_1, \Delta_2) = (\Delta_1 - \Delta_2)^{p_{e,o}(m,n)} + \text{члены младшего порядка}. \quad (1.70)$$

С другой стороны, из общих соображений ясно, что этот полином должен быть пропорционален произведению $P_{m,n}^{(e,o)}(\lambda_1 + \lambda_2)P_{m,n}^{(e,o)}(\lambda_2 - \lambda_1)$. Последний, очевид-

но, является многочленом от Δ_1 и Δ_2 со старшим членом $(2\Delta_1 - 2\Delta_2)^{p_{e,o}(m,n)}$, поэтому

$$Y_{m,n}^{(e,o)}(\Delta_1, \Delta_2) = 2^{-p_{e,o}(m,n)} P_{m,n}^{(e,o)}(\lambda_1 + \lambda_2) P_{m,n}^{(e,o)}(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (1.71)$$

Рассмотрим сначала случай, когда m, n четные, тогда

$$\begin{aligned} & \langle V_\Delta(\infty) D_{m,n}^\dagger \mathcal{C}_e(\Delta, x) V_\Delta(0) \rangle \\ &= \frac{x^{mn/2} X_{m,n}^{(e)}}{\Delta - \Delta_{m,n}} \langle V_\Delta(\infty) D_{m,n}^\dagger \mathcal{C}_e(\Delta_{m,-n}, x) D_{m,n} V_\Delta(0) \rangle + O(\Delta - \Delta_{m,n}), \quad (1.72) \\ & \langle V_\Delta(\infty) D_{m,n}^\dagger G_{1/2} \mathcal{C}_o(\Delta, x) V_\Delta(0) \rangle \\ &= \frac{x^{mn/2} X_{m,n}^{(o)}}{\Delta - \Delta_{m,n}} \langle V_\Delta(\infty) D_{m,n}^\dagger G_{1/2} \mathcal{C}_o(\Delta_{m,-n}, x) D_{m,n} V_\Delta(0) \rangle + O(\Delta - \Delta_{m,n}). \end{aligned}$$

Оценка $O(\Delta - \Delta_{m,n})$ следует из наблюдения, что все регулярные члены в $\mathcal{C}_e(\Delta, x)$ или $G_{1/2} \mathcal{C}_o(\Delta, x)$ ортогональны $V_\Delta(\infty) D_{m,n}^\dagger$ при $\Delta = \Delta_{m,n}$. Аналогично, при нечетных m, n имеем

$$\begin{aligned} & \langle V_\Delta(\infty) D_{m,n}^\dagger \mathcal{C}_o(\Delta, x) V_\Delta(0) \rangle \\ &= \frac{x^{mn/2} X_{m,n}^{(o)}}{\Delta - \Delta_{m,n}} \langle V_\Delta(\infty) D_{m,n}^\dagger \mathcal{C}_e(\Delta_{m,-n}, x) D_{m,n} V_\Delta(0) \rangle + O(\Delta - \Delta_{m,n}), \quad (1.73) \\ & \langle V_\Delta(\infty) D_{m,n}^\dagger G_{1/2} \mathcal{C}_e(\Delta, x) V_\Delta(0) \rangle \\ &= \frac{x^{mn/2} X_{m,n}^{(e)}}{\Delta - \Delta_{m,n}} \langle V_\Delta(\infty) D_{m,n}^\dagger G_{1/2} \mathcal{C}_o(\Delta_{m,-n}, x) D_{m,n} V_\Delta(0) \rangle + O(\Delta - \Delta_{m,n}). \end{aligned}$$

Правую часть можно вычислить с помощью (1.59). Учитывая (1.68, 1.69), сравнение с левой частью приводит к [57; 90]

$$X_{m,n}^{(e,o)} = \frac{Y_{m,n}^{(e,o)}(\Delta_1, \Delta_2)}{r'_{m,n}}. \quad (1.74)$$

Обратите внимание, что простое изменение обозначений превращает вышеприведенное рассмотрение в доказательство формулы вычетов для комплементар-

ной цепочки $\tilde{\mathcal{C}}(\Delta, x)$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\Delta=\Delta_{m,n}} \tilde{\mathcal{C}}_e(\Delta, x) &= x^{mn/2} \begin{cases} X_{m,n}^{(o)} \tilde{\mathcal{C}}_e(\Delta_{m,-n}, x) D_{m,n} & m, n \text{ чет.} \\ X_{m,n}^{(o)} \tilde{\mathcal{C}}_o(\Delta_{m,-n}, x) D_{m,n} & m, n \text{ нечет.} \end{cases} \\ \operatorname{res}_{\Delta=\Delta_{m,n}} \tilde{\mathcal{C}}_o(\Delta, x) &= x^{mn/2} \begin{cases} X_{m,n}^{(e)} \tilde{\mathcal{C}}_o(\Delta_{m,-n}, x) D_{m,n} & m, n \text{ нечет.} \\ X_{m,n}^{(e)} \tilde{\mathcal{C}}_e(\Delta_{m,-n}, x) D_{m,n} & m, n \text{ чет.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.75)$$

Эти простые аналитические свойства наследуются соответствующими суперконформными блоками. Определим четные и нечетные блоки как

$$\mathcal{F}_{e,o} \left(\begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{array} \middle| \Delta \middle| x \right) = x^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2} \langle V_{\Delta_4}(\infty) V_{\Delta_3}(1) \mathcal{C}_{e,o}^{\Delta_1, \Delta_2}(\Delta, x) V_{\Delta}(0) \rangle, \quad (1.76)$$

где V_{Δ} снова обозначает примарные поля (или более точно, их формально киральную часть), и на этот раз мы указали явно зависимость оператора цепочки от внешних размерностей. Нормировка фиксируется следующим образом

$$\begin{aligned} \langle V_{\Delta_4}(\infty) V_{\Delta_3}(1) V_{\Delta}(0) \rangle &= 1, \\ \langle V_{\Delta_4}(\infty) V_{\Delta_3}(1) G_{-1/2} V_{\Delta}(0) \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Полюсы $\mathcal{C}_{e,o}^{\Delta_1, \Delta_2}(\Delta)$ становятся полюсами блоков, вычеты в которых вычисляются аналогично (в целях компактности мы опускаем внешние размерности у аргументов блоков)

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\Delta=\Delta_{m,n}} \mathcal{F}_e(\Delta, x) &= B_{m,n}^{(e)} \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{pmatrix} \begin{cases} \mathcal{F}_e(\Delta_{m,-n}, x) & \text{при } m, n \text{ чет.} \\ \mathcal{F}_e(\Delta_{m,-n}, x) & \text{при } m, n \text{ нечет.} \end{cases} \\ \operatorname{res}_{\Delta=\Delta_{m,n}} \mathcal{F}_o(\Delta, x) &= B_{m,n}^{(o)} \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{pmatrix} \begin{cases} \mathcal{F}_o(\Delta_{m,-n}, x) & \text{при } m, n \text{ чет.} \\ \mathcal{F}_e(\Delta_{m,-n}, x) & \text{при } m, n \text{ нечет.} \end{cases} \end{aligned}$$

Матричные элементы $\langle V_{\Delta_4}(\infty)V_{\Delta_3}(1)D_{m,n}V_{m,n}(0) \rangle$ вычисляются с помощью такой же алгебраической процедуры

$$\langle V_{\Delta_4}(\infty)V_{\Delta_3}(1)D_{m,n}V_{m,n}(0) \rangle = Y_{m,n}^{(e)}(\Delta_3, \Delta_4) \begin{cases} \langle V_{\Delta_4}(\infty)V_{\Delta_3}(1)V_{m,n}(0) \rangle & \text{при } m, n \text{ чет.} \\ \langle V_{\Delta_4}(\infty)V_{\Delta_3}(1)\widehat{V}_{m,n}(0) \rangle & \text{при } m, n \text{ нечет.} \end{cases} \quad (1.78)$$

$$\langle V_{\Delta_4}(\infty)V_{\Delta_3}(1)\widehat{D}_{m,n}V_{m,n}(0) \rangle = Y_{m,n}^{(o)}(\Delta_3, \Delta_4) \begin{cases} \langle V_{\Delta_4}(\infty)V_{\Delta_3}(1)\widehat{V}_{m,n}(0) \rangle & \text{при } m, n \text{ чет.} \\ \langle V_{\Delta_4}(\infty)V_{\Delta_3}(1)V_{m,n}(0) \rangle & \text{при } m, n \text{ нечет.} \end{cases} \quad (1.79)$$

где $\widehat{D}_{m,n} = G_{-1/2}D_{m,n}$ и $\widehat{V}_{m,n}(0) = G_{-1/2}V_{m,n}$. Собирая все вместе, мы находим [57; 90]

$$B_{m,n}^{(e,o)} \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{pmatrix} = \frac{Y_{m,n}^{(e,o)}(\Delta_1, \Delta_2)Y_{m,n}^{(e,o)}(\Delta_3, \Delta_4)}{r'_{m,n}}. \quad (1.80)$$

Заметим следующие важные симметрии полученного выражения

$$B_{m,n}^{(e,o)} \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{pmatrix} = B_{m,n}^{(e,o)} \begin{pmatrix} \Delta_3 & \Delta_1 \\ \Delta_4 & \Delta_2 \end{pmatrix} = B_{m,n}^{(e,o)} \begin{pmatrix} \Delta_2 & \Delta_4 \\ \Delta_1 & \Delta_3 \end{pmatrix}, \quad (1.81)$$

$$B_{m,n}^{(e,o)} \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{pmatrix} = (-)^{p_{e,o}(m,n)} B_{m,n}^{(e,o)} \begin{pmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_4 \end{pmatrix},$$

которые непосредственно вытекают из свойств симметрии полиномов слияния.

1.3.1 \widehat{c} -рекурсия

Из аналитических свойств, рассмотренных в предыдущем разделе, для суперконформных блоков $\mathcal{F}_e(\Delta, x)$ и $\mathcal{F}_o(\Delta, x)$ (мы иногда будем опускать явную зависимость от внешних размерностей) следуют определенные соотношения, позволяющие вычислять их простым рекурсивным образом в виде степенных рядов по x . Первый способ состоит в рассмотрении аналитических свойств по центральному заряду \widehat{c} суперконформной алгебры [57; 90]. В этом случае размерности Каца (1.56) выступают в роли (опять же, вообще говоря, простых)

полюсов по \widehat{c} при

$$\widehat{c} = \widehat{c}_{m,n}(\Delta) = 5 + 2T_{m,n}(\Delta) + 2T_{m,n}^{-1}(\Delta), \quad (1.82)$$

где (m, n) снова есть пара натуральных чисел, оба четные или оба нечетные, тогда как $T_{m,n}(\Delta)$ – корень квадратки (1.56) по b^2

$$T_{m,n}(\Delta) = \frac{1 - 4\Delta - mn + \sqrt{16\Delta^2 + 8(mn - 1)\Delta + (m - n)^2}}{n^2 - 1}, \quad (1.83)$$

$$T_{m,n}^{-1}(\Delta) = \frac{1 - 4\Delta - mn - \sqrt{16\Delta^2 + 8(mn - 1)\Delta + (m - n)^2}}{m^2 - 1}.$$

Для данного корня все сингулярности, отвечающие $m = 1$, полагаются равными бесконечности, а учитываются только пары с $m > 1$. Обратите внимание, что выбранный корень не сингулярен при $n = 1$, так что (1.83) понимается как

$$T_{m,1}(\Delta) = \frac{m^2 - 1}{2(1 - 4\Delta - m)}. \quad (1.84)$$

Соответствующие вычеты считаются с тех, что имеются в (1.80), будучи выраженными в терминах Δ . В данном контексте удобно использовать симметрию полиномов (1.63) для того, чтобы сделать множители в вычетах (1.71) явными полиномами от Δ_1 и Δ_2 . При четных m, n множители в $P_{m,n}^{(e,o)}(x)$ всегда входят парами $(x - \lambda_{k,l})(x - \lambda_{-k,-l})$, и произведение $2^{-p_{e,o}(m,n)} P_{m,n}^{(e,o)}(\lambda_1 - \lambda_2) P_{m,n}^{(e,o)}(\lambda_1 + \lambda_2)$ можно свернуть следующим образом

$$Y_{m,n}^{(e,o)}(\Delta_1, \Delta_2) = \prod_{\substack{k \in \{1, 2, m-1\} \\ l \in \{1-n, 2, n-1\}}}^{m+n-k-l \bmod 4 = 0, 2} \mathcal{Y}_{k,l}^{(m,n)}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta), \quad (1.85)$$

где

$$\mathcal{Y}_{k,l}^{(m,n)}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta) = (\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \Lambda_{k,l}^{(m,n)}(\Delta)(\Delta_1 + \Delta_2 - \Lambda_{1,1}^{(m,n)}(\Delta)) + \frac{1}{4} \left(\Lambda_{k,l}^{(m,n)}(\Delta) \right)^2 \quad (1.86)$$

и

$$\Lambda_{k,l}^{(m,n)}(\Delta) = \frac{k^2 T_{m,n}^{-1}(\Delta) + 2kl + l^2 T_{m,n}(\Delta)}{4}. \quad (1.87)$$

Аналогичная свертка возможна и при нечетных m, n , если степень $P_{m,n}$ четная. Если же она нечетная, то член с $(k, l) = (0, 0)$ приводит к дополнительному множителю $\Delta_1 - \Delta_2$.

После выражения множителей в (1.80) в терминах Δ соответствующие вычеты по \hat{c} оказываются следующими

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\hat{c}=\hat{c}_{m,n}} \mathcal{F}_e(\hat{c}, \Delta, x) &= \widehat{B}_{m,n}^{(e)}(\Delta) \begin{cases} \mathcal{F}_e(\hat{c}_{m,n}, \Delta + mn/2, x) & \text{при } m, n \text{ чет.} \\ \mathcal{F}_o(\hat{c}_{m,n}, \Delta + mn/2, x) & \text{при } m, n \text{ нечет.} \end{cases} \\ \operatorname{res}_{\hat{c}=\hat{c}_{m,n}} \mathcal{F}_o(\hat{c}, \Delta, x) &= \widehat{B}_{m,n}^{(o)}(\Delta) \begin{cases} \mathcal{F}_o(\hat{c}_{m,n}, \Delta + mn/2, x) & \text{при } m, n \text{ чет.} \\ \mathcal{F}_e(\hat{c}_{m,n}, \Delta + mn/2, x) & \text{при } m, n \text{ нечет.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.88)$$

где

$$\widehat{B}_{m,n}^{(e,o)}(\Delta) = B_{m,n}^{(e,o)}(\Delta) \frac{16(T_{m,n}(\Delta) - T_{m,n}^{-1}(\Delta))}{(n^2 - 1)T_{m,n}(\Delta) - (m^2 - 1)T_{m,n}^{-1}(\Delta)}. \quad (1.89)$$

Дробь в данном выражении отвечает вкладу $-\partial\hat{c}/\partial\Delta$.

Асимптотика $\mathcal{F}_{e,o}(\hat{c}, \Delta, x)$ при $\hat{c} \rightarrow \infty$ была установлена в [57; 90]. Аналитические свойства по \hat{c} можно резюмировать следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{e,o}(\hat{c}, \Delta, x) &= f_{e,o}(\Delta, x) + \sum_{m,n \text{ чет.}} \frac{\widehat{B}_{m,n}^{(e,o)}(\Delta)}{\hat{c} - \hat{c}_{m,n}(\Delta)} \mathcal{F}_{e,o}(\hat{c}_{m,n}, \Delta + mn/2, x) \\ &+ \sum_{\substack{m,n \text{ нечет.} \\ m>1}} \frac{\widehat{B}_{m,n}^{(e,o)}(\Delta)}{\hat{c} - \hat{c}_{m,n}(\Delta)} \mathcal{F}_{o,e}(\hat{c}_{m,n}, \Delta + mn/2, x), \end{aligned} \quad (1.90)$$

где

$$\begin{aligned} f_e(\Delta, x) &= x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} {}_2F_1(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2, \Delta + \Delta_3 - \Delta_4, 2\Delta, x), \\ f_o(\Delta, x) &= \frac{1}{2\Delta} x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2 + 1/2} {}_2F_1\left(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + \frac{1}{2}, \Delta + \Delta_3 - \Delta_4 + \frac{1}{2}, 2\Delta + 1, x\right). \end{aligned} \quad (1.91)$$

Уравнения (1.90) очевидно могут быть использованы для рекурсивного вычисления коэффициентов в разложении

$$\mathcal{F}_{e,o}(\hat{c}, \Delta, x) = x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \sum_k x^N F_{e,o}^{(N)}(\hat{c}, \Delta), \quad (1.92)$$

где сумма берется по неотрицательным целым (для \mathcal{F}_e) или полуцелым (для \mathcal{F}_o) числам

$$F_{e,o}^{(N)}(\widehat{c}, \Delta) = f_{e,o}^{(N)}(\Delta) + \sum_{\substack{mn/2 \leq N \\ m,n \text{ чет.}}} \frac{\widehat{B}_{m,n}^{(e,o)}(\Delta)}{\widehat{c} - \widehat{c}_{m,n}(\Delta)} F_{e,o}^{(N-mn/2)}(\widehat{c}_{m,n}, \Delta + mn/2) \\ + \sum_{\substack{mn/2 \leq N \\ m,n \text{ нечет.} \\ m > 1}} \frac{\widehat{B}_{m,n}^{(e,o)}(\Delta)}{\widehat{c} - \widehat{c}_{m,n}(\Delta)} F_{o,e}^{(N-mn/2)}(\widehat{c}_{m,n}, \Delta + mn/2) . \quad (1.93)$$

В (1.93)

$$f_e^{(N)}(\Delta) = \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)_N (\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)_N}{N! (2\Delta)_N} , \quad (1.94)$$

$$f_o^{(N)}(\Delta) = \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1/2)_{N-1/2} (\Delta + \Delta_3 - \Delta_4 + 1/2)_{N-1/2}}{(N - 1/2)! (2\Delta)_{N+1/2}} .$$

Результаты вычисления первых коэффициентов конформных блоков приведены в Приложении A.4.

1.3.2 Эллиптические рекурсия

Для практических расчетов гораздо удобнее оказывается другое соотношение. Это соотношение называется эллиптической рекурсией (поскольку требует параметризации в терминах эллиптических функций) или иногда Δ -рекурсией, поскольку оно основано на аналитических свойствах блоков по Δ вместо \widehat{c} . Как и в работе [91], мы рассматриваем переменную x как модули эллиптической кривой $y^2 = t(1-t)(1-xt)$ и вводим отношение ее периодов τ

$$\tau = i \frac{K(1-x)}{K(x)} , \quad (1.95)$$

где

$$K(x) = \int_0^1 \frac{dt}{2y(t)} \quad (1.96)$$

полный эллиптический интеграл первого рода. Пусть также $q = \exp(i\pi\tau)$, и обозначим стандартным образом

$$\theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \quad \theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}, \quad (1.97)$$

так что

$$x = \frac{\theta_2^4(q)}{\theta_3^4(q)} \quad (1.98)$$

инвертирует (1.95). Такая эллиптическая параметризация имеет важные преимущества. Уравнение (1.98) отображает полуплоскость $\text{Im } \tau > 0$ на универсальную накрывающую x -плоскости с выколотыми точками 0, 1 и ∞ . Степенное разложение (1.92) блоков по x сходится внутри круга $|x| < 1$. После переразложения по q оно сходится внутри $|q| < 1$, т.е. на всей накрывающей, и, следовательно, дает там равномерное приближение. Естественно даже в области $|x| < 1$ ожидается более быстрая сходимость. Эллиптическая рекурсия, которую мы сейчас описываем, дает блоки непосредственно в терминах эллиптической переменной и позволяет генерировать q -ряды простым образом.

Определим *эллиптические блоки* $H_{e,o}(\Delta, q)$ через соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_e \left(\begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{array} \middle| \Delta | x \right) = \\ (16q)^{\Delta - Q^2/8} \frac{x^{Q^2/8 - \Delta_1 - \Delta_2} (1-x)^{Q^2/8 - \Delta_1 - \Delta_3}}{\theta_3^{4 \sum_{i=1}^4 \Delta_i - 3Q^2/2}(q)} H_e \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \middle| \Delta | q \right), \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} 2\mathcal{F}_o \left(\begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Delta_4 \end{array} \middle| \Delta | x \right) = \\ (16q)^{\Delta - Q^2/8} \frac{x^{Q^2/8 - \Delta_1 - \Delta_2} (1-x)^{Q^2/8 - \Delta_1 - \Delta_3}}{\theta_3^{4 \sum_{i=1}^4 \Delta_i - 3Q^2/2}(q)} H_o \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{array} \middle| \Delta | q \right), \end{aligned}$$

где подразумевается параметризация (1.66) внешних размерностей Δ_i в терминах λ_i . Эллиптические блоки, в свою очередь, удовлетворяют следующим

соотношениям (эллиптической рекурсии)

$$H_e(\Delta, q) = \theta_3(q^2) + \sum_{m,n \text{ чет.}} \frac{q^{mn/2} R_{m,n}^{(e)}}{\Delta - \Delta_{m,n}} H_e(\Delta_{m,-n}, q) + \sum_{m,n \text{ нечет.}} \frac{q^{mn/2} R_{m,n}^{(e)}}{\Delta - \Delta_{m,n}} H_o(\Delta_{m,-n}, q) , \quad (1.100)$$

$$H_o(\Delta, q) = \sum_{m,n \text{ чет.}} \frac{q^{mn/2} R_{m,n}^{(o)}}{\Delta - \Delta_{m,n}} H_o(\Delta_{m,-n}, q) + \sum_{m,n \text{ нечет.}} \frac{q^{mn/2} R_{m,n}^{(o)}}{\Delta - \Delta_{m,n}} H_e(\Delta_{m,-n}, q) .$$

Вычеты легко вычисляются

$$R_{m,n}^{(e,o)} = \frac{P_{m,n}^{(e,o)}(\lambda_1 + \lambda_2) P_{m,n}^{(e,o)}(\lambda_1 - \lambda_2) P_{m,n}^{(e,o)}(\lambda_3 + \lambda_4) P_{m,n}^{(e,o)}(\lambda_3 - \lambda_4)}{r'_{m,n}} . \quad (1.101)$$

Эти соотношения учитывают аналитические свойства суперконформных блоков по Δ , описанные в разделе 1.3. Кроме того, они предполагают, что в пределе $\Delta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} H_e(\Delta, q) &= \theta_3(q^2) + O(\Delta^{-1}) , \\ H_o(\Delta, q) &= \Delta^{-1} \theta_2(q^2) + O(\Delta^{-2}) . \end{aligned} \quad (1.102)$$

Первая асимптотика подставляется в соотношения явно, в то время как вторая автоматически генерируется по рекурсии.

Как и \hat{c} -рекурсия раздела 1.3.1, соотношения (1.100) позволяют рекурсивно вычислять разложения эллиптических блоков по степеням q

$$H_{e,o}(\Delta, q) = \sum_N q^N h_{e,o}^{(N)}(\Delta) . \quad (1.103)$$

Функция $H_e(\Delta, q)$ раскладывается по целым неотрицательным степеням q , тогда как $H_o(\Delta, q)$ – по положительным полуцелым. Соотношения (1.100) дают

$$h_{e,o}^{(N)}(\Delta) = \eta_{e,o}^{(N)} + \sum_{m,n \text{ чет.}}^{mn/2 \leq N} \frac{R_{m,n}^{(e,o)} h_{e,o}^{(N-mn/2)}(\Delta_{m,-n})}{\Delta - \Delta_{m,n}} + \sum_{m,n \text{ нечет.}}^{mn/2 \leq N} \frac{R_{m,n}^{(e,o)} h_{o,e}^{(N-mn/2)}(\Delta_{m,-n})}{\Delta - \Delta_{m,n}} , \quad (1.104)$$

где $\eta_o^{(N)} = 0$ и $\eta_e^{(N)}$ являются коэффициентами в q -разложении $\theta_3(q^2)$. На практике это соотношение допускает гораздо более удобный алгоритм по сравнению с \widehat{c} -рекурсией (1.93), в основном потому что \widehat{c} фиксировано и значения $R_{m,n}^{(e,o)}$, $\Delta_{m,n}$ не меняются на протяжении всех этапов итераций (в отличие от (1.93), где на каждом уровне они должны пересчитываться для «сдвинутых» значений Δ). После того, как получено необходимое количество вычетов и размерностей, оставшаяся рекурсивная процедура выполняется очень быстро.

1.3.3 Суперконформный бутстрап

Зная структурные константы (3.9) и суперконформные блоки, мы готовы вычислить четырехточечную корреляционную функцию (1.23) базисных НШ-полей в SLFT. Целью данного раздела является проверка соотношений кроссинг-симметрии (1.24).

По причинам, которые обсуждались выше, мы будем использовать эллиптическое представление (1.99) блоков. Четырехточечная функция (1.23) приобретает вид

$$G \left(\begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{array} \middle| x, \bar{x} \right) = \frac{(x\bar{x})^{Q^2/8 - \Delta_1 - \Delta_2} [(1-x)(1-\bar{x})]^{Q^2/8 - \Delta_1 - \Delta_3}}{[\theta_3(q)\theta_3(\bar{q})]^{4 \sum_i \Delta_i - 3Q^2/2}} g \left(\begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{array} \middle| \tau, \bar{\tau} \right), \quad (1.105)$$

где

$$g \left(\begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{array} \middle| \tau, \bar{\tau} \right) = \int \frac{dP}{4\pi} |16q|^{P^2} \left[\mathbb{C}_{a_1, a_2}^{Q/2+iP} \mathbb{C}_{a_3, a_4}^{Q/2-iP} H_e(\Delta, q) H_e(\Delta, \bar{q}) - \right. \\ \left. - \tilde{\mathbb{C}}_{a_1, a_2}^{Q/2+iP} \tilde{\mathbb{C}}_{a_3, a_4}^{Q/2-iP} H_o(\Delta, q) H_o(\Delta, \bar{q}) \right], \quad (1.106)$$

и $\Delta = Q^2/8 + P^2/2$. Первое из соотношений (1.24) проверяется аналитически. Действительно, тождества

$$\begin{aligned} H_e \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & \lambda_3 & |\Delta| - q \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \end{array} \right) &= H_e \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & \lambda_4 & |\Delta| q \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \end{array} \right), \\ H_o \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & \lambda_3 & |\Delta| e^{i\pi} q \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \end{array} \right) &= e^{i\pi/2} H_o \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & \lambda_3 & |\Delta| q \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \end{array} \right), \end{aligned} \quad (1.107)$$

для эллиптических блоков (последние легко выводятся из (1.100) и симметрии (1.81) вычетов) непосредственно приводят к

$$g \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_3 & \tau, \bar{\tau} \\ a_2 & a_4 & \end{array} \right) = g \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_4 & \tau + 1, \bar{\tau} + 1 \\ a_2 & a_3 & \end{array} \right). \quad (1.108)$$

Второе соотношение в (1.24) в терминах функции g оказывается следующим

$$g \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_3 & \tau, \bar{\tau} \\ a_2 & a_4 & \end{array} \right) = (\tau \bar{\tau})^{3Q^2/4 - 2\sum_i \Delta_i} g \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & -\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\bar{\tau}} \\ a_3 & a_4 & \end{array} \right). \quad (1.109)$$

Вывод этого соотношения на основе представления (4.282) представляет собой трудную математическую задачу. Однако, с помощью быстрых алгоритмов, основанных на эллиптическом представлении блоков, это вполне доступная задача для численного анализа.

В качестве простейшей численной проверки мы выбрали следующие внешние параметры $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = Q/2$. Структурные константы (3.9) обращаются в нуль при этих значениях внешних параметров, так что мы берем первую производную во всех четырех из них. Это означает, что мы рассматриваем четырехточечную функцию полей $V'_{Q/2} = \phi \exp(Q\phi/2)$. Обозначая

$$\left. \frac{\partial^4}{\partial a_1 \partial a_2 \partial a_3 \partial a_4} g \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_3 & \tau, \bar{\tau} \\ a_2 & a_4 & \end{array} \right) \right|_{a_i=Q/2} = 4\Upsilon_{\text{NS}}'^4(0) \Upsilon_{\text{R}}^2(b) f(\tau, \bar{\tau}), \quad (1.110)$$

мы находим

$$f(\tau, \bar{\tau}) = \int \frac{dP}{4\pi} |16q|^{P^2} \left[r_e(P) \left| H_e \begin{pmatrix} 0 & 0 & |\Delta|q \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \right|^2 + r_o(P) \left| H_o \begin{pmatrix} 0 & 0 & |\Delta|q \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \right|^2 \right]. \quad (1.111)$$

Вспомогательные функции $r_e(P)$ и $r_o(P)$ в терминах стандартных функций $\Upsilon_b(x)$ имеют вид

$$r_e(P) = \frac{\Upsilon_b(iP)\Upsilon_b(-iP)\Upsilon_b^2(iP + Q/2)}{\Upsilon_b^8(Q/4 + iP/2)\Upsilon_b^8(Q/4 - iP/2)}, \quad (1.112)$$

$$r_o(P) = \frac{\Upsilon_b(iP)\Upsilon_b(-iP)\Upsilon_b^2(Q/2 + iP)}{\Upsilon_b^8(Q/4 + b/2 + iP/2)\Upsilon_b^8(Q/4 + b^{-1}/2 + iP/2)}$$

и допускают следующие интегральные представления

$$r_e(P) = P^2 \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[-\frac{(1 + 6b^2 + b^4)e^{-t}}{2b^2} + \frac{8 \cos(Pt/2) \cosh[(b + 1/b)t/4] - 2 \cos(Pt) \cosh^2[(b - 1/b)t/4] - 6}{\sinh(t/2b) \sinh(bt/2)} \right] \right\}, \quad (1.113)$$

$$r_o(P) = P^2 \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[-\frac{(1 - 2b^2 + b^4)e^{-t}}{2b^2} + \frac{8 \cos(Pt/2) \cosh[(b - 1/b)t/4] - 2 \cos(Pt) \cosh^2[(b - 1/b)t/4] - 6}{\sinh(t/2b) \sinh(bt/2)} \right] \right\}. \quad (1.114)$$

На рисунке 1.1 значения функции $f(\tau, \bar{\tau})$ (сплошные кривые) сравниваются со значениями $(\tau\bar{\tau})^{-Q^2/4} \times f(-1/\tau, -1/\bar{\tau})$ (символы) для чисто мнимого $\tau = it$ и определенных значений параметра b . Чтобы дать представление о точности, мы приводим некоторые численные значения в таблице 1. Эти числа соответствуют аппроксимации эллиптических блоков $H_e(q)$ и $q^{1/2}H_o(q)$ в виде рядов с точностью до порядка q^6 . Похоже, что это является основным источником расхождений в этом приближении. Например, при $t = 0.5$ ($q^2 \approx 0.0432$) отличие чисел начинается с пятого десятичного знака (например, числа 7.12534 и 7.12512 в таблице), тогда как улучшенное приближение до порядка q^{10} дает семь совпадающих десятичных знаков.

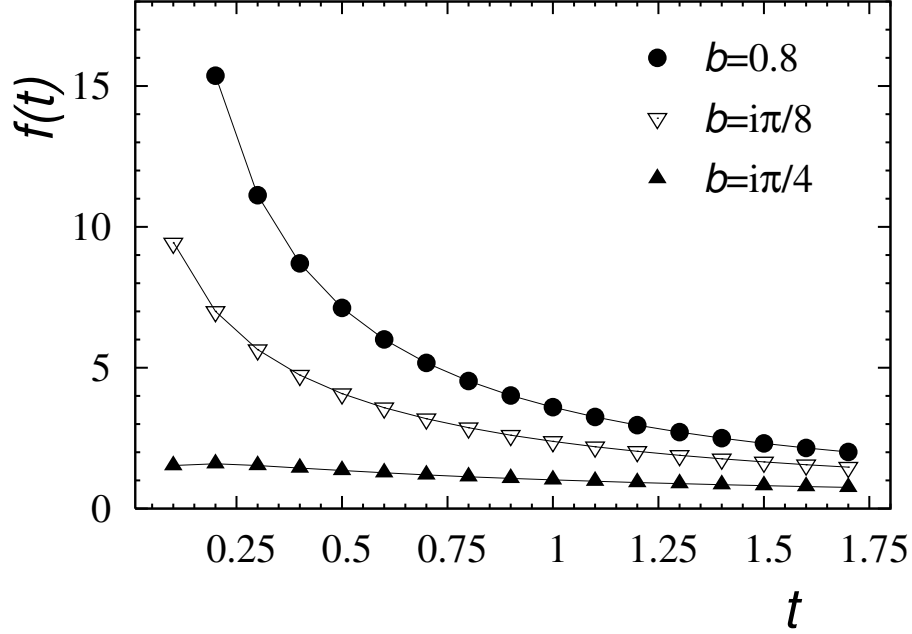


Рисунок 1.1 — Результаты сравнения при различных значениях квантового параметра b , определяющего значение центрального заряда суперсимметричной теории Лиувилля.

Мы провели подобное сравнение при некоторых различных значениях a_1, a_2, a_3, a_4 (выбранных случайно, но достаточно близко к $Q/2$, чтобы сохранить сходимость представлений (1.113) и (1.114)). Например, при

$$a_1 = \frac{9}{14}Q, \quad a_3 = \frac{2Q}{3}, \quad a_2 = \frac{13Q}{30}, \quad a_4 = \frac{7Q}{10}, \quad (1.115)$$

для $b = 2.8$ и $t = 0.3$ имеем

$$\begin{aligned} f_{a_1, a_2, a_3, a_4}(t) &= 2141.5325, \\ t^{3Q^2/2-4\sum_i \Delta_i} f_{a_1, a_3, a_2, a_4}(1/t) &= 2141.5101. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Мы описали анализ бутстрапных свойств для четырехточечных функций в $N = 1$ суперсимметричной теории поля Лиувилля и представили аргументы, подтверждающие, что НШ операторная алгебра, базирующаяся на структурных константах (3.9), удовлетворяет свойству локальности. Как мы увидим в Главе 3, описанная в этой главе конструкция четырехточечной SLFT функции оказывается полезной для приложений в теории Лиувиллевской супергравитации, а также в некритической теории суперструн.

t	$f(t)$ при $b = 0.8$	$t^{-Q^2/2}f(1/t)$ при $b = 0.8$	$f(t)$ при $b = i\pi/4$	$t^{-Q^2/2}f(1/t)$ при $b = i\pi/4$
0.1	25.900821	25.456246	1.5305811	1.5232342
0.2	15.372272	15.365205	1.5884637	1.5881483
0.3	11.123984	11.123971	1.5267458	1.5264759
0.4	8.7059097	8.7060123	1.4398383	1.4396855
0.5	7.1251188	7.125178	1.3522805	1.3521968
0.6	6.0067008	6.0067341	1.2708572	1.2708109
0.7	5.1733043	5.1733228	1.1971168	1.1970912
0.8	4.528805	4.5288147	1.1308767	1.1308632
0.9	4.0160968	4.0161008	1.0713992	1.0713936

Таблица 1 — Численные данные для функции $f(t)$, определенной в (4.287), при значениях параметра Лиувилля $b = 0.8$ и $b = i\pi/4$.

Глава 2. Интегрируемые возмущения конформных моделей

Корреляционные функции локальных полей являются основным объектом изучения теории поля. Известны нетривиальные примеры, в которых точные корреляционные функции вычислены явно (двумерная скейлинговая модель Изинга в нулевом магнитном поле, минимальные модели конформной теории поля [4; 99–102] и т. п.). Однако вдали от критических точек специфические методы, используемые в этих моделях, трудно обобщаются. В частности, проблема нахождения точных аналитических выражений для корреляционных функций интегрируемых двумерных массивных моделей по-прежнему открыта. В этой главе мы исследуем общее поведение корреляционных функций в возмущенных конформных теориях поля, применяя комбинацию конформной теории возмущений и формфакторного бутстрапного подхода.

Мы обсудим минимальные модели КфТП $\mathcal{M}_{p,p'}$ (с взаимно простыми числами p, p' ($1 < p < p'$)), возмущенные полем Φ_{13} . Данные массивные теории поля подчиняются бесконечному числу законов сохранения и, таким образом, обладают свойством интегрируемости [12]. С точки зрения статистической механики данные массивные модели описывают класс универсальности интегрируемых моделей RSOS-типа [103] в соответствующем антиферромагнитном режиме.

Мы увидим, что существует область масштаба, где разложения корреляционных функций спиновых операторов на малых и больших расстояниях совпадают друг с другом. Таким образом, сочетание двух данных подходов полностью определяет корреляционные функции возмущенных массивных моделей.

Для удобства читателя мы начнем с описания процедуры нахождения поправок к структурным функциям, лежащей в основе метода конформной теории возмущений. Затем мы опишем соответствующую задачу рассеяния и введем формализм анализа корреляционных функций на больших расстояниях, основанный на некотором наборе формфакторных аксиом. В качестве основного примера мы применим сочетание двух подходов к возмущенным минимальным моделям $\mathcal{M}_{2,5}$ и $\mathcal{M}_{2,7}$.

2.1 Интегрируемая структура возмущенных минимальных моделей

Конформные теории поля $\mathcal{M}_{p,p'}$, лежащие в основе рассматриваемых массивных моделей, характеризуются центральным зарядом алгебры Вирасоро

$$c = 1 - 6 \frac{(p' - p)^2}{pp'} . \quad (2.1)$$

В модели имеется $(p-1) \times (p'-1)/2$ примарных полей $\Phi_{l,k}$ ($l = 1, \dots, p-1$ и $k = 1, \dots, p'-1$). Конформные размерности $(\Delta_{l,k}, \bar{\Delta}_{l,k})$ этих полей определяются по формуле Каца:

$$\Delta_{l,k} = \frac{(p'l - pk)^2 - (p' - p)^2}{4pp'} . \quad (2.2)$$

В стандартной нормировке

$$\langle \Phi_{l,k}(x) \Phi_{l,k}(0) \rangle_{\text{CFT}} = |x|^{-4\Delta_{l,k}} . \quad (2.3)$$

В этой главе мы используем следующие обозначения. Единичный оператор будет обозначаться символом $I = \Phi_{11}$. Оператор $\Psi = \Phi_{12}$ отождествляется с оператором спина, а $\Phi = \Phi_{13}$ – с оператором энергии. Также вместо p и p' удобно ввести положительный рациональный параметр

$$\xi = \frac{p}{p' - p} .$$

В терминах этого параметра операторы I , Ψ , Φ и Φ_{15} , которые мы собираемся исследовать, соответствуют следующими значениям конформных размерностей

$$\Delta_I = 0, \quad \Delta_\Psi = \frac{\xi - 2}{4(\xi + 1)}, \quad \Delta_\Phi = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \quad \Delta_{\Phi_{15}} = \frac{4\xi - 2}{\xi + 1} .$$

Общая программа, предложенная в [4;94], позволяет вычислить структурные константы операторной алгебры и определить все корреляционные функции минимальных моделей. Для изучения корреляционных функций модели $\mathcal{M}_{p,p'}$, возмущенной полем Φ_{13} , это знание может быть использовано следующим образом.

Скейлинговая модель, которую мы изучаем, может быть формально определена действием

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{p,p'}} = \mathcal{A}_{\mathcal{M}_{p,p'}} + g \int \Phi d^2x, \quad (2.4)$$

где $\mathcal{A}_{\mathcal{M}_{p,p'}}$ обозначает «действие» критической модели, а g является константой связи, имеющей размерность $g \sim m_1^{2-2\Delta_\Phi}$, где m_1 соответствует массе легчайшей частицы. Отметим, что оператор Φ имеет конформную размерность $\Delta_\Phi < 1$, и, таким образом, возмущение релевантно. Более явно, размерные параметры g и m_1 связаны посредством следующего соотношения [104]:

$$\pi g = - \frac{(\xi + 1)^2}{(\xi - 1)(2\xi - 1)} \left(\gamma\left(\frac{3\xi}{\xi + 1}\right) \gamma\left(\frac{\xi}{\xi + 1}\right) \right)^{\frac{1}{2}} m^{\frac{4}{\xi+1}}. \quad (2.5)$$

где

$$m = m_1 \left(\frac{\pi \gamma\left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \gamma\left(\frac{1+\xi}{2}\right)}{8 \sin \pi \xi} \right)^{\frac{1}{2}},$$

и мы ввели обозначение

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}.$$

Формальное определение (2.4) понимается в смысле разложения в ряд теории возмущений. Например, для корреляционной функции спиновых полей мы имеем

$$\langle \Psi(x) \Psi(0) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!} \int \langle \Psi(x) \Psi(0) \Phi(y_1) \cdots \Phi(y_n) \rangle_{\text{CFT}} d^2y_1 \cdots d^2y_n.$$

Символы Ψ в левой части обозначают здесь скейлинговые поля в возмущенной модели; в УФ-пределе эти поля становятся конформными спиновыми полями Φ_{12} . Здесь предполагается, что перенормированные поля в (2.4) имеют определенные скейлинговые размерности и поэтому обозначаются той же буквой, как и в конформном $g \rightarrow 0$ пределе. Также подразумевается, что нормировка скейлинговых полей может быть фиксирована согласно (2.3).

2.1.1 Конформная теория возмущений

УФ- и ИК-регуляризационные схемы интегрирования на плоскости были подробно рассмотрены в [13]. Напомним кратко суть метода. Поскольку возмущающее поле релевантно, УФ-перенормировка может быть достигнута путем добавления конечного числа контрчленов. Для формулировки теории возмущений, свободной от инфракрасных расходимостей, была разработана так называемая *конформная теория возмущений* [13].¹ В основе этой теории лежит следующее утверждение. Пусть $\{A_a, a = 0, 1, \dots\}$ – полный набор локальных полей в скейлинговой теории. Предполагается, что если в качестве базисных элементов выбираются перенормированные поля, являющиеся собственными векторами оператора дилатации, т.е. поля с определенными скейлинговыми размерностями, то структурные функции в соответствующем операторном разложении

$$A_m(x)A_a(0) = \sum_b C_{A_m A_a}^{A_b}(r) A_b(0), \quad (2.6)$$

являются аналитическими функциями константы взаимодействия g . Это довольно естественное предположение, так как функции $C_{A_m A_a}^{A_b}(r)$, как локальные величины, не предполагают никакого неаналитического поведения. При таком выборе перенормированные поля $A_b(r)$ оказываются возмущениями соответствующих базисных полей (примарных полей и их потомков) конформной модели. Таким образом функции $C_{A_m A_a}^{A_b}(r)$ записываются в виде разложения

$$C_{A_m A_a}^{A_b}(r) = r^{2(\Delta_b - \Delta_a - \Delta_m)} \left(C_{A_m A_a}^{A_b} + gr^{2-2\Delta} Q^{(1)} + (gr^{2-2\Delta})^2 Q^{(2)} + \dots \right). \quad (2.7)$$

Члены нулевого порядка определяются здесь структурными константами $C_{A_m A_a}^{A_b}$ критической модели² и задача теории возмущений состоит в определении g -независимых поправок $Q^{(i)}$.

Согласно (2.6), для определения корреляционных функций, требуется также знание вакуумных средних локальных полей A_a , отличных от нуля в некритическом случае. Эти величины, вообще говоря, неаналитичны по константе

¹См. [14] о конформной теории возмущений во всех порядках.

²Отметим, что ввиду правил слияния многие из $C_{A_m A_a}^{A_b}$ в конформном пределе равны нулю. Но некоторые из соответствующих $C_{A_m A_a}^{A_b}(r)$ могут стать ненулевыми из-за поправочных членов.

g. На основе анализа размерностей мы имеем $\langle A_b \rangle \sim m^{2\Delta_b}$. Набор значений вакуумных средних содержит всю непертурбативную информацию о теории. Значения вакуумных средних для возмущенных примарных полей были вычислены в [105] (см. также [106]). Формулу Лукьянова–Замолодчикова для этих значений [105] можно записать в виде

$$\langle \Phi_{1k} \rangle = (-1)^{k-1} m^{2\Delta_{1k}} Q(1 - \xi(k-1)). \quad (2.8)$$

Функция $Q(\eta)$ определяется как экспонента от интеграла, который понимается в смысле аналитического продолжения из области, где он сходится:

$$Q(\eta) = \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\cosh(2t) \sinh((\eta-1)t) \sinh((\eta+1)t)}{2 \cosh(t) \sinh(\xi t) \sinh((\xi+1)t)} - \frac{\eta^2 - 1}{2\xi(\xi+1)} e^{-2(\xi+1)t} \right). \quad (2.9)$$

Заметим, что если $\xi > 1$, как например в моделях унитарной серии $\mathcal{M}_{p,p+1}$, возмущенных оператором энергии, то какие-либо связанные состояния отсутствуют. В этом случае в выражении (2.8) используется масса кинка.

Разложение двухточечной корреляционной функции спиновых полей на малых расстояниях определяется значениями вакуумных средних полей Φ_{1k} (и их потомков) с нечетными $k = 2s + 1$. Выражение (2.9) для этих полей упрощается и может быть выписано явно в терминах гамма-функций в виде

$$Q(1 - 2s\xi) = \prod_{l=1}^s Q_l(\xi),$$

где

$$Q_l(\xi) = \frac{(1 - (2l-1)\xi)(1 - 2l\xi)}{2(\xi+1)} \times \\ \times \gamma\left(\frac{(2l-1)\xi}{2}\right) \gamma\left(\frac{1 - (2l-1)\xi}{2}\right) \left[\gamma\left(\frac{1 - 2(l-1)\xi}{\xi+1}\right) \gamma\left(1 - \frac{(2l+1)\xi}{\xi+1}\right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.10)$$

Значения одноточечных вакуумных средних для некоторых операторов потомков также известны в аналитическом виде [106]. Например,

$$\langle L_{-2}\bar{L}_{-2}\Phi_{1k} \rangle = -(1+\xi)^4 \mathcal{W}(1-\xi(k-1)) m^4 \langle \Phi_{1k} \rangle, \quad (2.11)$$

где функция $\mathcal{W}(\eta)$ есть

$$\mathcal{W}(\eta) := \frac{1}{\xi^2(\xi+1)^2} \gamma\left(\frac{1+\eta+\xi}{2}\right) \gamma\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) \gamma\left(\frac{1-\eta+\xi}{2}\right) \gamma\left(-\frac{\eta+\xi}{2}\right).$$

Значения вакуумных средних (2.8)–(2.11) определяют главные члены в разложении двухточечной корреляционной функции спиновых операторов на малых расстояниях,

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x)\Psi(0) \rangle &= C_{\Psi\Psi}^I(r) \langle I \rangle + C_{\Psi\Psi}^\Phi(r) \langle \Phi(0) \rangle + C_{\Psi\Psi}^{\Phi_{15}}(r) \langle \Phi_{15} \rangle \\ &+ C_{\Psi\Psi}^{L_{-2}\bar{L}_{-2}I}(r) \langle L_{-2}\bar{L}_{-2}I \rangle + C_{\Psi\Psi}^{L_{-2}\bar{L}_{-2}\Phi}(r) \langle L_{-2}\bar{L}_{-2}\Phi(0) \rangle + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.1.2 Интегрируемые модели с факторизованным рассеянием

Как уже было сказано выше, теории (2.4) являются массивными интегрируемыми моделями с факторизованным рассеянием. Матрицы рассеяния в этих теориях совпадают с S матрицами в так называемой ограниченной модели синус-Гордона [107–109]. Таким образом мы можем применить для корреляционных функций спектральное разложение [15; 110] (см. также [111])

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x)\Psi(0) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{a_n\}} \frac{1}{n!} \int \frac{d\beta_1}{2\pi} \dots \frac{d\beta_n}{2\pi} \langle 0|\Psi(0)|\beta_1, \dots, \beta_n \rangle_{a_1 \dots a_n} \times \\ &\times {}_{a_1 \dots a_n} \langle \beta_1, \dots, \beta_n | \Psi(0) | 0 \rangle e^{-r \sum m_j \cosh \beta_j}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

что позволяет изучать интересующие нас корреляционные функции на больших расстояниях $mr \gg 1$. В (2.13) a_i обозначают возможные типы частиц, а величины

$$\langle 0|\Psi|\beta_1, \dots, \beta_n \rangle_{a_1 \dots a_n}, \quad {}_{a_1 \dots a_n} \langle \beta_1, \dots, \beta_n | \Psi | 0 \rangle$$

представляют собой матричные элементы локальных операторов в базисе асимптотических состояний, т.е. форм-факторы. Последние предполагаются мероморфными функциями быстрот β_i , удовлетворяющими набору *аксиом локальности* [15]. Для примарных полей точные решения формфакторных уравнений, возникающих в следствии наличия аксиом локальности, были найдены в [13; 15; 107; 112; 113].

Возмущенные $\mathcal{M}_{2,2n+1}$ модели как теории рассеяния. Напомним вкратце основные факты о рассматриваемых теориях рассеяния (для более детального обзора см., например, [112]). В $\mathcal{M}_{2,2n+1}$ моделях, возмущенных полем Φ , имеется $j = 1, \dots, n - 1$ скалярных самосопряженных частиц с массами

$$m_j := m_1 \frac{\sin(\frac{\pi \xi j}{2})}{\sin(\frac{\pi \xi}{2})}, \quad (2.14)$$

где m_1 отвечает массе легчайшей частицы «1». Стандартная параметризация импульса в терминах быстроты β дается выражениями

$$\begin{aligned} p_a^0 &= m_a \cosh \beta, \\ p_a^1 &= m_a \sinh \beta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В основе S матрицы данных моделей лежит S матрица так называемых *бризеров* соответствующей модели синус-Гордона [107; 114]:

$$S_{ab}(\beta) = f_{\frac{|a-b|}{2}}(\beta) f_{\frac{a+b}{2}}(\beta) \prod_{s=1}^{\min(ab)-1} (f_{\frac{|a-b|+2s}{2}}(\beta))^2, \quad (2.16)$$

где функция $f_a(\beta)$ определяется как

$$f_a(\beta) = \frac{\tanh \frac{1}{2}(\beta + i\pi a \xi)}{\tanh \frac{1}{2}(\beta - i\pi a \xi)}. \quad (2.17)$$

В *физической полосе* $0 < \text{Im } \beta < \pi$ матрицы рассеяния удовлетворяют условиям унитарности и кроссинг-симметрии,

$$S_{ab}(\beta) S_{ba}(-\beta) = 1, \quad S_{ab}(\beta) = S_{ab}(i\pi - \beta),$$

а также дополнительному условию наличия связанного состояния, которое описывается следующим образом. Если у $S_{ab}(\beta)$ имеется простой полюс $\beta_{ab} = iu_{ab}^c$, то частица «с» массы

$$m_c^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \cos(u_{ab}^c)$$

является связанным состоянием «а» и «б». Связанное состояние $|B_c(\beta)\rangle$ с $\beta = \beta_a + \beta_b$ определяется как проекция на полюс двухчастичного состояния $|B_a(\beta_a)B_b(\beta_b)\rangle$ при относительной скорости $\beta_{ab} = iu_{ab}^c$. Для составной частицы S матрицы могут быть найдены с помощью *бутстрепных уравнений*

$$S_{cd}(\beta) = S_{ad}(\beta + i(\pi - u_{ac}^b))S_{bd}(\beta - i(\pi - u_{bc}^a)).$$

В частности, полная матрица рассеяния S_{ab} (2.16) может быть получена, исходя из S матрицы $S_{11}(\beta) = f_1(\beta)$ для легчайшей частицы, в предположении, что процессы рассеяния рассматриваемых моделей замкнуты относительно следующих правил слияния [114]

$$\begin{aligned} a_i \times a_j &\longrightarrow a_{i+j} \quad \text{или} \quad a_i \times a_j \longrightarrow a_{2n-1-i-j}, \\ a_i \times a_j &\longrightarrow a_{i-j}, \end{aligned}$$

где условие в первой строке определяет выбор варианта, при котором конечная частица $i + j$ или $2n - 1 - i - j$ находится в диапазоне $(1, \dots, n - 1)$.

2.2 Ультрафиолетовый режим

Нашей основной целью является изучение двухточечных корреляционных функций спиновых операторов в моделях с действием (2.4). В этом разделе мы анализируем разложение на малых расстояниях на основе операторной алгебры

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x)\Psi(0) \rangle &= C_{\Psi\Psi}^I(r)\langle I \rangle + C_{\Psi\Psi}^\Phi(r)\langle \Phi(0) \rangle + C_{\Psi\Psi}^{\Phi_{15}}(r)\langle \Phi_{15} \rangle \\ &+ C_{\Psi\Psi}^{L_{-2}\bar{L}_{-2}I}(r)\langle L_{-2}\bar{L}_{-2}I \rangle + C_{\Psi\Psi}^{L_{-2}\bar{L}_{-2}\Phi}(r)\langle L_{-2}\bar{L}_{-2}\Phi(0) \rangle + \dots \quad (2.18) \end{aligned}$$

В правой части мы удерживаем лидирующие члены в разложении по r , имеющие отличные от нуля значения вакуумных средних. Таким образом, мы опускаем производные операторов, а также операторы с ненулевыми спинами. Учитывая известные значения вакуумных средних локальных операторов (2.8)–(2.11), мы изучаем корреляционные функции (2.18), следуя программе, предложенной в [13].

2.2.1 Теория возмущений для структурных функций

В соответствии с [13] структурные функции в (2.18) допускают разложение, в котором нулевой порядок определяется структурными константами $C_{\Psi\Psi}^K$ лежащей в основе $\mathcal{M}_{p,p'}$ модели (2.7),

$$C_{\Psi\Psi}^K(r) = C_{\Psi\Psi}^K r^{2\Delta_K - 4\Delta_\Psi} + C_{\Psi\Psi}^{K(1)}(r) + \dots \quad (2.19)$$

Поправки первого порядка $C_{\Psi\Psi}^{K(1)}(r)$ могут быть представлены в регуляризованном виде с параметром инфракрасного обрезания R ,

$$C_{\Psi\Psi}^{K(1)}(r) := \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-g \int_{|y| < R} \langle \tilde{\mathcal{A}}^K(\infty) \Phi(y) \Psi(x) \Psi(0) \rangle_{\text{CFT}} d^2y \right. \\ \left. + \pi g \sum_A \frac{C_{\Psi\Psi}^A C_{\Phi A}^K}{\Delta_K - \Delta_A - \Delta_\Phi + 1} R^{2(\Delta_K - \Delta_A - \Delta_\Phi + 1)} r^{2\Delta_A - 4\Delta_\Psi} \right]. \quad (2.20)$$

С практической точки зрения удобно применить процедуру аналитической регуляризации интеграла. В случае двух операторов $\Psi \equiv \Phi_{12}$ мы имеем дело со следующими регуляризованными интегралами

$$C_{\Psi\Psi}^{I(1)}(r) = -g \int' \langle \Phi(y) \Psi(x) \Psi(0) \rangle_{\text{CFT}} d^2y, \\ C_{\Psi\Psi}^{\Phi(1)}(r) = -g \int' \langle \Phi(\infty) \Phi(y) \Psi(x) \Psi(0) \rangle_{\text{CFT}} d^2y, \quad (2.21) \\ C_{\Psi\Psi}^{\Phi_{15}(1)}(r) = -g \int' \langle \Phi_{15}(\infty) \Phi(y) \Psi(x) \Psi(0) \rangle_{\text{CFT}} d^2y.$$

Напомним точную форму встречающихся здесь конформных корреляторов. В первой строке выше корреляционные функции в интеграле определяются с помощью структурных констант операторной алгебры

$$\langle \Phi(y)\Psi(x)\Psi(0) \rangle_{\text{CFT}} = C_{\Psi\Psi}^{\Phi} |y|^{-2\Delta_{\Phi}} |x|^{-2(2\Delta_{\Psi}-\Delta_{\Phi})} |y-x|^{-2\Delta_{\Phi}}. \quad (2.22)$$

Корреляционная функция, содержащая поле Φ_{15} , имеет очень похожий вид. Выражение в третьей строке можно переписать в виде

$$C_{\Psi\Psi}^{\Phi_{15}(1)}(r) = -gr^{2(1-\Delta_{\Phi}-2\Delta_{\Psi}+\Delta_{15})} \times \int' |z|^{2(\Delta_{\Phi}+2\Delta_{\Psi}-2-\Delta_{15})} \langle \Phi_{15}(\infty)\Phi(1)\Psi(z)\Psi(0) \rangle_{\text{CFT}} d^2z,$$

где

$$\langle \Phi_{15}(\infty)\Phi(1)\Psi(z)\Psi(0) \rangle_{\text{CFT}} = C_{\Psi\Psi}^{\Phi} C_{\Phi\Phi}^{\Phi_{15}} |z|^{\frac{\xi}{\xi+1}} |1-z|^{\frac{2\xi}{\xi+1}}. \quad (2.23)$$

В общем случае четырехточечные корреляционные функции примарных полей в конформных моделях можно найти, например, используя конструкцию свободного поля Доценко и Фатеева [94] или с помощью дифференциальных уравнений. Например, второй интеграл в (2.21) выражается через корреляционную функцию

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(0)\Psi(z)\Phi(1)\Phi(\infty) \rangle_{\text{CFT}} \\ &= C_{\Psi\Psi}^{\Phi} C_{\Phi\Phi}^{\Phi} \left| z^{\frac{\xi}{4(\xi+1)}} (1-z)^{\frac{\xi}{2(\xi+1)}} {}_2F_1\left(\frac{\xi}{\xi+1}, \frac{3\xi-1}{\xi+1}, \frac{2\xi}{\xi+1} |z\right) \right|^2 \\ &+ \left| z^{\frac{2-\xi}{4(\xi+1)}} (1-z)^{\frac{\xi}{2(\xi+1)}} {}_2F_1\left(\frac{2}{\xi+1}, \frac{2\xi}{\xi+1}, \frac{2}{\xi+1} |z\right) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

С учетом ф-лы (Б.1) соответствующая поправка принимает вид

$$\begin{aligned} C_{\Psi\Psi}^{\Phi(1)}(r) &= -gr^{2-4\Delta_{\Psi}} \int' |z|^{2\Delta_{\Psi}-2} \langle \Psi(0)\Psi(z)\Phi(1)\Phi(\infty) \rangle_{\text{CFT}} d^2z \\ &= -gr^{\frac{\xi+4}{\xi+1}} \frac{\gamma\left(\frac{2}{\xi+1}\right)}{\gamma^2\left(\frac{1}{\xi+1}\right)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int d^2x \int d^2y |x|^{-\frac{2\xi}{\xi+1}} |1-x|^{-\frac{4\xi}{\xi+1}} \right. \\ &\quad \left. \times |y|^{-2\frac{\xi+3}{\xi+1}+4\epsilon} |1-y|^{\frac{2\xi}{\xi+1}-2\epsilon} |x-y|^{-\frac{2\xi}{\xi+1}} \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где во второй строке мы используем аналитическую регуляризацию, позволяющую явно вычислить интеграл перед взятием предела (см. формулу (2.29) ниже).

На основе явных формул (2.22)–(2.24) мы находим, что должным образом регуляризованные поправки (2.21) сводятся к интегралам вида

$$J_1(p, q) = \int d^2y |y|^{2p} |y - 1|^{2q}, \quad (2.26)$$

$$J_2(a, b, d, e, c) = \int d^2x \int d^2y |x|^{2a} |1 - x|^{2b} |y|^{2d} |1 - y|^{2e} |x - y|^{2c}. \quad (2.27)$$

Первый интеграл может быть легко вычислен путем сведения к произведению бета-интегралов,

$$J_1(p, q) = \frac{\pi \gamma(p + 1) \gamma(q + 1)}{\gamma(p + q + 2)}. \quad (2.28)$$

Интеграл (2.27) может быть переписан в терминах произведения двух контурных интегралов, допускающих представление в виде значений высших гипергеометрические функции ${}_3F_2$ в единице. Для полноты изложения детали вычислений представлены в Приложение Б.1.

В интересующем нас случае (2.20) интеграл $J_2(a, b, d, e, c)$ фигурирует с определенными значениями параметров и может быть выражен в терминах гамма-функций согласно следующей формуле

$$\begin{aligned} J_2\left(\frac{\beta - \alpha - 1}{2}, \delta - \beta - 1, \alpha - 1, -\frac{\delta}{2}, \frac{\beta - \alpha - 1}{2}\right) \\ = 2^{2\alpha - 2} \pi^2 \gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \gamma\left(\frac{\beta}{2}\right) \gamma\left(\frac{1 - \delta}{2}\right) \gamma\left(\frac{\delta - \beta}{2}\right) \gamma\left(\frac{\alpha - \delta + 1}{2}\right) \\ \times \gamma\left(\frac{\beta - \alpha + 1}{2}\right) \gamma\left(\frac{\delta - \alpha - \beta + 1}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

С помощью (2.28)–(2.29) мы можем получить первые поправки к структурным функциям для произвольного $\xi > 0$ в явном виде. Используя формулы (2.28)–(2.29) для интегралов, а также значения структурных констант КфТП, мы получаем явные выражения для структурных функций до первого порядка по константе связи g .

Функции $C_{\Psi\Psi}^I(r)$ и $C_{\Psi\Psi}^{\Phi_{15}}(r)$ выглядят наиболее просто. (Напомним, что структурные константы конформной теории поля $C_{\Psi\Psi}^I = 1$ и $C_{\Psi\Psi}^{\Phi_{15}} = 0$.) Исполь-

зую (2.28), мы находим, что они имеют следующий вид

$$\begin{aligned} C_{\Psi\Psi}^I(r) &= r^{\frac{2-\xi}{\xi+1}} + \pi g r^{\frac{6-\xi}{\xi+1}} \left(\frac{\gamma(\frac{\xi}{\xi+1})\gamma^5(\frac{2}{\xi+1})}{\gamma(\frac{2\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2-\xi}{\xi+1})\gamma^2(\frac{4}{\xi+1})} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ C_{\Psi\Psi}^{\Phi_{15}}(r) &= -\pi g r^{\frac{2+7\xi}{\xi+1}} C_{\Psi\Psi}^{\Phi} C_{\Phi\Phi}^{\Phi_{15}} \frac{\gamma^2(\frac{1+2\xi}{\xi+1})}{\gamma(\frac{2+4\xi}{\xi+1})}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Поправка первого порядка к функции $C_{\Psi\Psi}^{\Phi}(r)$ (2.25)

$$\begin{aligned} C_{\Psi\Psi}^{\Phi(1)}(r) &= -g r^{\frac{\xi+4}{\xi+1}} \frac{\gamma(\frac{2}{\xi+1})}{\gamma^2(\frac{1}{\xi+1})} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J(\epsilon), \\ J(\epsilon) &= J_2\left(-\frac{\xi}{\xi+1}, -\frac{2\xi}{\xi+1}, -\frac{\xi+3}{\xi+1} + 2\epsilon, \frac{\xi}{\xi+1} - \epsilon, -\frac{\xi}{\xi+1}\right) \end{aligned}$$

вычисляется с помощью ф-лы (2.29). Переходя к пределу, получаем выражение

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J(\epsilon) = -\left(\pi \frac{\xi(1-\xi)^2}{2(\xi+1)^2}\right)^2 \frac{\gamma^3(\frac{1-\xi}{\xi+1})\gamma^2(\frac{\xi}{\xi+1})}{\gamma(\frac{2-2\xi}{\xi+1})}.$$

Наконец, аналитическое выражение для структурной функции $C_{\Psi\Psi}^{\Phi}(r)$ в первом порядке теории возмущений есть

$$C_{\Psi\Psi}^{\Phi}(r) = -r^{\frac{\xi}{\xi+1}} \left(\frac{\gamma(\frac{\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2}{\xi+1})}{\gamma(\frac{2\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2-\xi}{\xi+1})} \right)^{1/2} + \pi g r^{\frac{\xi+4}{\xi+1}} \left(\frac{\xi(1-\xi)^2}{2(\xi+1)^2} \right)^2 \frac{\gamma^4(\frac{1-\xi}{\xi+1})\gamma^4(\frac{\xi}{\xi+1})}{\gamma(\frac{2-2\xi}{\xi+1})}. \quad (2.31)$$

Удобно переписать структурные функции (2.30)–(2.31) в терминах массы легкой частицы. Применяя соотношение «масса–константа взаимодей-

СТВИЯ», ИМЕЕМ

$$C_{\Psi\Psi}^I(r) = r^{\frac{2-\xi}{\xi+1}} \left\{ 1 - (mr)^{\frac{4}{\xi+1}} \frac{(\xi+1)^2}{(\xi-1)(2\xi-1)} \left(\frac{\gamma^2(\frac{\xi}{\xi+1})\gamma^5(\frac{2}{\xi+1})\gamma(\frac{3\xi}{\xi+1})}{\gamma(\frac{2\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2-\xi}{\xi+1})\gamma^2(\frac{4}{\xi+1})} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (2.32)$$

$$C_{\Psi\Psi}^\Phi(r) = -r^{\frac{\xi}{\xi+1}} \left\{ \left(\frac{\gamma(\frac{\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2}{\xi+1})}{\gamma(\frac{2\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2-\xi}{\xi+1})} \right)^{\frac{1}{2}} + (mr)^{\frac{4}{\xi+1}} \frac{\xi^2(1-\xi)^3}{4(\xi+1)^2(2\xi-1)} \left(\frac{\gamma^8(\frac{1-\xi}{1+\xi})\gamma^9(\frac{\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{3\xi}{\xi+1})}{\gamma^2(\frac{2-2\xi}{\xi+1})} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (2.33)$$

$$C_{\Psi\Psi}^{\Phi_{15}}(r) = -r^{\frac{7\xi-2}{\xi+1}} (mr)^{\frac{4}{\xi+1}} \frac{\xi^2(1-\xi)}{4(1-2\xi)(3\xi+1)^2} \left(\frac{\gamma^7(\frac{\xi}{\xi+1})\gamma^4(\frac{1-\xi}{\xi+1})}{\gamma(\frac{4\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2-2\xi}{\xi+1})\gamma(\frac{2-3\xi}{\xi+1})} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.34)$$

Нам также требуются структурные функции в главном порядке для полей потомков. Они выражаются с помощью соответствующих структурных констант примарных полей [4], согласно

$$C_{\Psi\Psi}^{L_{-2}\bar{L}_{-2}I}(r) = \frac{\xi^2}{4(\xi+3)^2} r^{\frac{3(\xi+2)}{\xi+1}} C_{\Psi\Psi}^I, \quad (2.35)$$

$$C_{\Psi\Psi}^{L_{-2}\bar{L}_{-2}\Phi}(r) = \frac{\xi^2}{4(3\xi+1)^2} r^{\frac{5\xi+4}{\xi+1}} C_{\Psi\Psi}^\Phi. \quad (2.36)$$

2.2.2 УФ-разложение для корреляторов спиновых операторов

Используя полученные в предыдущем разделе формулы для структурных функций, значения вакуумных средних примарных полей (2.8), а также выражения для вакуумных средних полей–потомков (2.11), мы получаем явное УФ-разложение до первого порядка по g для корреляционной функции

$$\langle \Psi(r)\Psi(0) \rangle = r^{\frac{2-\xi}{\xi+1}} [A(r) - B(r)Q(1-2\xi) + D(r)Q(1-4\xi)]. \quad (2.37)$$

Напомним, что функция $Q(\eta)$ (2.9) для полей $\Phi_{1,2s+1}$ дается формулой (2.10). Для полей Φ_{13} и Φ_{15} соответствующие выражения в (2.37) оказываются следу-

ЮЩИМИ

$$Q(1 - 2\xi) = \frac{(1 - \xi)(1 - 2\xi)}{2(\xi + 1)} \gamma\left(\frac{\xi}{2}\right) \gamma\left(\frac{1 - \xi}{2}\right) \left[\gamma\left(\frac{1}{\xi + 1}\right) \gamma\left(\frac{1 - 2\xi}{\xi + 1}\right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.38)$$

$$Q(1 - 4\xi) = \frac{(1 - \xi)(1 - 2\xi)(1 - 3\xi)(1 - 4\xi)}{4(\xi + 1)^2} \gamma\left(\frac{\xi}{2}\right) \gamma\left(\frac{3\xi}{2}\right) \\ \times \gamma\left(\frac{1 - \xi}{2}\right) \gamma\left(\frac{1 - 2\xi}{2}\right) \gamma\left(\frac{1 - 3\xi}{2}\right) \left[\gamma\left(\frac{1}{\xi + 1}\right) \gamma\left(\frac{1 - 4\xi}{\xi + 1}\right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.39)$$

Зависящие от r функции $A(r)$, $B(r)$ и $D(r)$ в (2.37) имеют вид

$$A(r) = 1 - \frac{\xi^2}{4(\xi + 3)^2} \frac{\gamma^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\gamma^2\left(\frac{1+\xi}{2}\right)} (mr)^4 \\ - \frac{(\xi + 1)^2}{(1 - \xi)(1 - 2\xi)} \left(\frac{\gamma^2\left(\frac{\xi}{\xi+1}\right) \gamma^5\left(\frac{2}{\xi+1}\right) \gamma\left(\frac{3\xi}{\xi+1}\right)}{\gamma\left(\frac{2\xi}{\xi+1}\right) \gamma\left(\frac{2-\xi}{\xi+1}\right) \gamma^2\left(\frac{4}{\xi+1}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} (mr)^{\frac{4}{\xi+1}}, \quad (2.40)$$

$$B(r) = \left\{ \left(\frac{\gamma\left(\frac{\xi}{\xi+1}\right) \gamma\left(\frac{2}{\xi+1}\right)}{\gamma\left(\frac{2\xi}{\xi+1}\right) \gamma\left(\frac{2-\xi}{\xi+1}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{(\xi + 1)^2}{(\xi - 1)^2 (3\xi + 1)^2} \frac{\gamma\left(\frac{3\xi}{2}\right) \gamma\left(\frac{1-3\xi}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{\xi}{2}\right) \gamma\left(\frac{1-\xi}{2}\right)} (mr)^4 \right] \right. \\ \left. + \frac{\xi^2 (1 - \xi)^3}{4(\xi + 1)^2 (1 - 2\xi)} \left(\frac{\gamma^8\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right) \gamma^9\left(\frac{\xi}{\xi+1}\right) \gamma\left(\frac{3\xi}{\xi+1}\right)}{\gamma^2\left(\frac{2-2\xi}{\xi+1}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} (mr)^{\frac{4}{\xi+1}} \right\} (mr)^{\frac{2(\xi-1)}{\xi+1}}, \quad (2.41)$$

$$D(r) = -\frac{\xi^2 (1 - \xi)}{4(1 - 2\xi)(3\xi + 1)^2} \left(\frac{\gamma^7\left(\frac{\xi}{\xi+1}\right) \gamma^4\left(\frac{1-\xi}{\xi+1}\right)}{\gamma\left(\frac{4\xi}{\xi+1}\right) \gamma\left(\frac{2-2\xi}{\xi+1}\right) \gamma\left(\frac{2-3\xi}{\xi+1}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} (mr)^{\frac{8\xi}{\xi+1}}. \quad (2.42)$$

2.3 Инфракрасный режим

Массивные модели (2.4) допускают альтернативное описание в виде теорий рассеяния с факторизованными S матрицами [107; 108]. В этом разделе мы используем формфакторный подход для изучения поведения спиновых корреляционных функций на больших расстояниях. Структура основных состояний модели, а также спектр частиц зависит от чисел (p, p') . В моделях имеется

два кинка, интерполирующих между $p - 1$ различными вакуумами, а также $[(p' - p)/p]$ связанных состояний.

Для простоты мы ограничиваемся рассмотрением случая неунитарных моделей $\mathcal{M}_{2,2n+1}$, в которых имеется всего лишь n примарных полей $\Phi_{1,k} = \Phi_{1,2n-k+1}$, ($k = 1, \dots, n$). Соответствующие возмущенные модели являются простейшими интегрируемыми двумерными моделями в том смысле, что их матрицы рассеяния диагональны. Многочастичные форм-факторы полей Ψ, Φ, \dots в этих теориях не содержат сложных контурных интегралов, возникающих из-за солитонных форм-факторов [15]. Далее мы используем символ ξ только для значения

$$\xi = \frac{2}{2n - 1}.$$

2.3.1 Формфакторный подход

Как мы уже упоминали, корреляционные функции допускают формфакторное разложение, которое может быть использовано для изучения инфракрасного поведения. Например, соответствующее спектральное разложение для спиновых полей есть

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x)\Psi(0) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d\beta_1}{2\pi} \dots \frac{d\beta_n}{2\pi} \langle 0 | \Psi(x) | \beta_1, \dots, \beta_n \rangle_{a_1 \dots a_n} \times \\ &\quad \times_{a_1, \dots, a_n} \langle \beta_1, \dots, \beta_n | \Psi(0) | 0 \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{a_j\}} \int \frac{d\beta_1}{2\pi} \dots \frac{d\beta_n}{2\pi} e^{-r \sum_j m_{a_j} \cosh \beta_j} \\ &\quad \times F_{a_n \dots a_1}(\beta_n, \dots, \beta_1) F_{a_1 \dots a_n}(\beta_1, \dots, \beta_n), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где мы вводим матричные элементы локальных операторов в базисе асимптотических состояний

$$F_{a_1 \dots a_n}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \langle 0 | \Psi(0) | \beta_1, \dots, \beta_n \rangle_{a_1 \dots a_n}. \quad (2.44)$$

Форм-факторы (2.44) определяются в этом подходе как набор функций, удовлетворяющих аксиомам Смирнова [15] (см. также [110]). Напомним их для

полноты. Первые две аксиомы являются уравнениями Ватсона

$$\begin{aligned}
F_{a_1 \dots a_j a_{j+1} \dots}(\beta_1, \dots, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) &= \\
&= S_{a_j a_{j+1}}(\beta_j - \beta_{j+1}) F_{a_1 \dots a_{j+1} a_j \dots a_n}(\beta_1, \dots, \beta_{j+1}, \beta_j, \dots, \beta_n), \\
F_{a_1 a_2 \dots a_n}(\beta_1 + 2\pi i, \beta_2, \dots, \beta_n) &= \\
&= F_{a_2 \dots a_n a_1}(\beta_2, \dots, \beta_n, \beta_1). \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Из требования релятивистской инвариантности следует, что для локального оператора со спином s выполняется

$$F_{a_1 \dots a_n}(\beta_1 + \Lambda, \dots, \beta_n + \Lambda) = e^{s\Lambda} F_{a_1 \dots a_n}(\beta_1, \dots, \beta_n). \tag{2.46}$$

Ультрафиолетовое граничное условие требует существования конечной постоянной $t(j, n) < \infty$ такой, что

$$F_{a_1 \dots a_n}(\beta_1 + \Lambda, \dots, \beta_j + \Lambda, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n) = O(\exp e^{t(j, n)|\Lambda|}), \quad \Lambda \longrightarrow \infty. \tag{2.47}$$

Кроме того, существуют два условия на полюсы форм-факторов. Первое из них это условие кинематического полюса. В рассматриваемом случае самосопряженных частиц оно выглядит как

$$\begin{aligned}
-i \lim_{\beta' \rightarrow \beta} (\beta' - \beta) F_{a a a_1 \dots a_n}(\beta' + i\pi, \beta, \beta_1, \dots, \beta_n) &= \\
&= (1 - \prod_{j=2}^n S_{a a_j}(\beta - \beta_j)) F_{a_1 \dots a_n}(\beta_1, \dots, \beta_1). \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Вторым условием является ограничение на связанные состояния. Пусть $a_i \times a_j \longrightarrow a_k$. Тогда

$$\begin{aligned}
-i \lim_{\beta' \rightarrow \beta} (\beta' - \beta) F_{a_1 \dots a_i a_j \dots a_n}(\beta_1, \dots, \beta' + i(\pi - u_{a_i a_k}^{a_j}), \beta - i(\pi - u_{a_j a_k}^{a_i}), \dots) &= \\
&= \Gamma_{a_i a_j}^{a_k} F_{a_1 \dots a_k \dots a_n}(\beta_1, \dots, \beta, \dots, \beta_n), \tag{2.49}
\end{aligned}$$

где трехчастичная вершина на массовой поверхности определяется как³

$$-i\text{Res } S_{ab}(\beta)|_{\beta=iu_{ab}^c} = (\Gamma_{ab}^c)^2 .$$

Смирнов доказал [15], что набор функций (2.44), удовлетворяющих условиям (2.45)–(2.49), определяет матричный элемент локального оператора в теории рассеяния с заданной S матрицей.

Решения аксиом локальности (2.45)–(2.49) для примарных полей в возмущенных $\mathcal{M}_{2,2n+1}$ моделях уже обсуждались в литературе. Форм-факторы полей Ψ и Φ найдены в [107] с помощью процедуры квантовой групповой редукции на основе модели синус-Гордона. Случай скейлинговой модели Ли–Янга $\mathcal{M}_{2,5}$ детально разобран в [13]. Общие выражения для примарных полей Φ_{1k} получены в [112] на основе форм-факторов для экспоненциальных операторов в модели гиперболического синус-Гордона [113]. Но для нашей цели изучения корреляционных функций, находящихся в соответствии с (2.18), мы должны дополнительно определить подходящий общий фактор, задающий нормировку (2.3) локальных операторов. Эта задача по существу была выполнена в [115]. В самом деле, после квантово-групповой редукции [104; 106] выражения для первых бризерных форм-факторов экспоненциальных операторов в модели синус-Гордона могут по сути рассматриваться как следующие форм-факторы примарных полей частицы «1» в редуцированной модели:

$$\langle 0|\Phi_{1k}|0\rangle = \langle \Phi_{1k}\rangle , \quad (2.50)$$

$$\langle 0|\Phi_{1k}|\beta\rangle = i C \frac{\sin\left((k-1)\pi\xi/2\right)}{\sin(\pi\xi)} \langle \Phi_{1k}\rangle , \quad (2.51)$$

$$\langle 0|\Phi_{1k}|\beta_2, \beta_1\rangle = i^2 C^2 \frac{\sin^2\left((k-1)\pi\xi/2\right)}{\sin^2(\pi\xi)} R(\beta_1 - \beta_2) \langle \Phi_{1k}\rangle , \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \langle 0|\Phi_{1k}|\beta_3, \beta_2, \beta_1\rangle &= i^3 C^3 \frac{\sin\left((k-1)\pi\xi/2\right)}{\sin(\pi\xi)} \prod_{s<j} R(\beta_s - \beta_j) \\ &\times \left\{ \frac{\sin^2\left((k-1)\pi\xi/2\right)}{\sin^2(\pi\xi)} + \frac{1}{\prod_{s<j} 2 \cosh\left(\frac{\beta_s - \beta_j}{2}\right)} \right\} \langle \Phi_{1k}\rangle , \end{aligned} \quad (2.53)$$

³Отметим, что возмущенные минимальные модели $\mathcal{M}_{2,2n+1}$ нарушают одночастичную унитарность, поскольку некоторые константы взаимодействия в данном случае являются чисто мнимыми.

и так далее. Функция $R(\beta)$, определяющая зависящую от быстроты часть двух-частичного форм-фактора, дается явно в виде

$$R(\beta) = \exp \left\{ 4 \int_0^\infty \frac{dt \sinh t \sinh \xi t \sinh(\xi + 1)t}{t \sinh^2 2t} \cosh 2\left(1 - \frac{i}{\pi}\beta\right)t \right\}. \quad (2.54)$$

Отметим, что она обладает следующим свойством, которое весьма полезно для проверки аксиом локальности

$$\begin{aligned} R(\beta)R(\beta \pm i\pi) &= \frac{\sinh(\beta)}{\sinh(\beta) \mp i \sin(\pi\xi)}, \\ \prod_{k=0}^{n-2} R\left(\beta + \frac{i\pi\xi}{2}(2k+1)\right) R\left(\beta - \frac{i\pi\xi}{2}(2k+1)\right) &= \frac{\cosh(\beta) - \cos(\pi\xi)}{\cosh(\beta) + 1} R(\beta). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Независящая от β постоянная C , фиксирующая нормировку, определяется формулой

$$C^2 = 8 \cos^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \exp\left(-\int_0^{\pi\xi} \frac{dt}{\pi} \frac{t}{\sin t}\right). \quad (2.56)$$

2.3.2 ИК-разложение для корреляторов спиновых операторов

Выражение для двухточечной корреляционной функции с учетом нулевого и одночастичного форм-факторов имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{1k}(x) \Phi_{1k}(0) \rangle &= \\ &= \langle \Phi_{1k} \rangle^2 \left\{ 1 - \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(k-1)\xi\right)}{\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)} \exp\left(-\int_0^{\pi\xi} \frac{dt}{\pi} \frac{t}{\sin t}\right) K_0(m_1 r) \right\} + \dots, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где $K_0(x)$ является функцией Макдональда. Как мы увидим это приближение дает весьма точную аппроксимацию для корреляционных функций на больших расстояниях.

Конечно, для более точных расчетов нужно учитывать вклады форм-факторов с большим числом частиц, и в том числе вклады форм-факторов для частиц различных типов a_j с $j > 1$. Последние могут быть легко получены непосредственно из аксиомы связанного состояния (2.49).⁴ Из (2.43) ясно, что на больших расстояниях вклад от n -частичного форм-фактора с частицами a_1, \dots, a_n и массами m_{a_1}, \dots, m_{a_n} в корреляционные функции по существу аппроксимируется величиной $\exp(-r \sum_j m_{a_j})$. На практике форм-факторы с большим числом частиц a_1 и частиц большой массы становятся важными лишь на малых расстояниях. Полезно упорядочить форм-факторы в соответствии со значением этой величины. Например, для возмущенной $\mathcal{M}_{2,7}$ модели, которая рассматривается далее, главные вклады приходят от форм-факторов $F_1, F_2, F_{11}, F_{21}, F_{111}$ и т.д. в соответствии с отношениями масс (2.14) $m_1 < m_2 < 2m_1 < m_1 + m_2 < 3m_1$ и т.д.

2.4 Комбинированное описание корреляционных функций

Таким образом, в случае интегрируемых возмущений минимальных моделей имеется два вида разложения (2.12) и (2.13) корреляционных функций локальных операторов. Естественным вопросом является сопоставление соответствующих результатов. В случае хорошей экстраполяции мы получаем комбинированное описание корреляционных функций на всех масштабах. В этом разделе мы производим сопоставление форм-факторного разложения и разложения, полученного по конформной теории возмущения на масштабах $mr \sim 1$.

2.4.1 Возмущенная модель $\mathcal{M}_{2,7}$ в качестве примера

Первая модель $\mathcal{M}_{2,5}$ (модель Ли-Янга) в ленточной серии $\mathcal{M}_{2,2n+1}$ характеризуется значением центрального заряда алгебры Вирасоро $c = -\frac{22}{5}$. Интегри-

⁴Как показано в [112], требование согласованности формул (2.50)–(2.53) и т.д., возникающее из условия связанного состояния, автоматически выполняется для операторов $\Phi_{1,k}$. Для форм-факторов с небольшим числом частиц это можно проверить непосредственно.

руемые возмущения этой модель были подробно изучены в [13; 106] на примере корреляционных функций примарных полей. Мы вернемся к данной модели в следующем разделе, где будут рассмотрены корреляционный функции вторичных полей, т.е. конформных потомков.

Следующим примером является модель $\mathcal{M}_{2,7}$ [60] с центральным зарядом

$$c = -\frac{68}{7}. \quad (2.58)$$

В этом случае имеется три примарных поля: единичное поле $I := \Phi_{11} = \Phi_{16}$, спиновое поле $\Psi := \Phi_{12} = \Phi_{15}$ и энергетическое поле $\Phi := \Phi_{13} = \Phi_{14}$ с соответствующими конформными размерностями

$$\Delta_I = 0, \quad \Delta_\Psi = -\frac{2}{7}, \quad \Delta_\Phi = -\frac{3}{7}. \quad (2.59)$$

Поправки первого порядка по константе связи g к структурным функциям даются выражениями (2.32)–(2.34) при значении параметра $\xi = \frac{2}{5}$. Осуществляя аналитическое продолжение решения Лукьянова–Замолодчикова, мы получаем следующие значения вакуумных средних операторов:

$$\begin{aligned} m_1^{\frac{6}{7}} \langle \Phi_{13} \rangle &= 2.269550689, \\ m_1^{\frac{4}{7}} \langle \Phi_{15} \rangle &= -2.325136 i \end{aligned}$$

для примарных полей и

$$\begin{aligned} m_1^{\frac{8}{7}} C_{\Psi\Psi}^{L_{-2}\bar{L}_{-2}I}(r) \langle L_{-2}\bar{L}_{-2}I \rangle &= \\ &= -0.0005899419474(m_1 r)^{\frac{36}{7}}, \\ m_1^{\frac{8}{7}} C_{\Psi\Psi}^{L_{-2}\bar{L}_{-2}\Phi}(r) \langle L_{-2}\bar{L}_{-2}\Phi(0) \rangle &= \\ &= 0.01123584810(m_1 r)^{\frac{30}{7}} \end{aligned}$$

для первых нетривиальных потомков. Учитывая соотношение между константой взаимодействия и массой при значении $\xi = 2/5$

$$g = -0.04053795542378225 m_1^{20/7}, \quad (2.60)$$

мы получаем следующее численное выражение для разложения на малых расстояниях:

$$\begin{aligned} m_1^{\frac{8}{7}} \langle \Psi(x) \Psi(0) \rangle \sim & -5.83(m_1 r)^{\frac{2}{7}} + (m_1 r)^{\frac{8}{7}} - 0.265(m_1 r)^{22/7} + 0.233(m_1 r)^{24/7} \\ & - 0.045(m_1 r)^4 + 0.011(m_1 r)^{\frac{30}{7}} \\ & - 0.0006(m_1 r)^{\frac{36}{7}} + O(r^6). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Учитывая численное значение вакуумного среднего

$$m_1^{\frac{4}{7}} \langle \Phi_{12} \rangle = -2.325598436 i, \quad (2.62)$$

мы находим, что ведущий член в разложении на больших расстояниях (2.57) дается формулой

$$m_1^{\frac{8}{7}} \langle \Phi_{12}(x) \Phi_{12}(0) \rangle \sim -5.408408086 \left(1 - 0.2411163946 \cdot K_0(r m_1) \right). \quad (2.63)$$

Сравнение разложений двухточечной корреляционной функции $\langle \Psi(x) \Psi(0) \rangle$ на малых и больших расстояниях показано на рис. 2.1, 2.2.

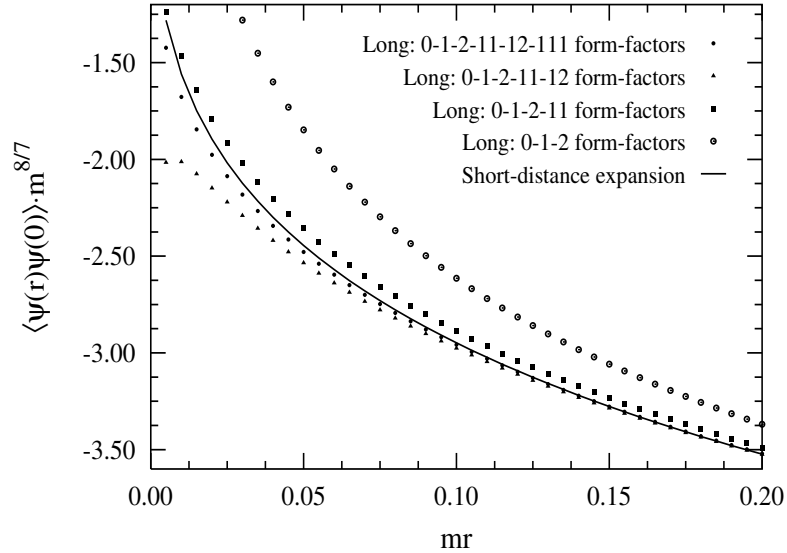


Рисунок 2.1 — Вклады форм-факторов на малых расстояниях.

Численно рассчитанные данные представлены в таблице 2. Разница между разложениями на малых и больших расстояниях указывает на непротиворечивость нулевого порядка теории возмущений и формфакторного разложения до

двух частиц. Достаточно хорошо видно, что вклады полей потомков $\langle L_{-2}\bar{L}_{-2}\Phi \rangle$ и $\langle L_{-2}\bar{L}_{-2}I \rangle$ играют существенную роль.

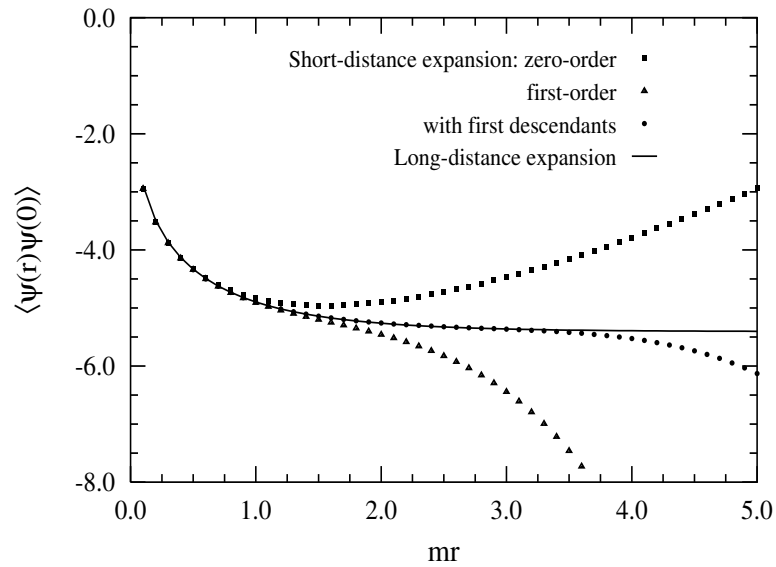


Рисунок 2.2 — Корреляционная функция двух спиновых операторов (в единицах $m^{\frac{8}{7}}$) в модели $\mathcal{M}_{2,7}$, возмущенной полем Φ_{13} .

mr	<i>УФ разложение</i>			<i>ИК разложение</i>		
	up to $r^{8/7}$	up to $r^{28/7}$	up to $r^{36/7}$	up to F_{11}	up to F_{12}	up to F_{111}
0.02	-1.89536	-1.89536	-1.89536	-1.78911	-2.14822	-1.97677
0.04	-2.29916	-2.29917	-2.29917	-2.20386	-2.41955	-2.34353
0.06	-2.56977	-2.56979	-2.56979	-2.48822	-2.63930	-2.59599
0.08	-2.77773	-2.77778	-2.77778	-2.70767	-2.82117	-2.79351
0.10	-2.94806	-2.94817	-2.94817	-2.88736	-2.97622	-2.95732
0.12	-3.09288	-3.09306	-3.09306	-3.03986	-3.11138	-3.09787
0.14	-3.21905	-3.21935	-3.21934	-3.17245	-3.23117	-3.22120
0.16	-3.33092	-3.33135	-3.33135	-3.28975	-3.33870	-3.33115
0.18	-3.43139	-3.43200	-3.43199	-3.39489	-3.43619	-3.43036
0.20	-3.52254	-3.52336	-3.52335	-3.49009	-3.52528	-3.52071
0.22	-3.60588	-3.60696	-3.60694	-3.57702	-3.60725	-3.60361
0.24	-3.68258	-3.68397	-3.68395	-3.65692	-3.68306	-3.68014
0.26	-3.75354	-3.75530	-3.75526	-3.73077	-3.75352	-3.75114
0.28	-3.81950	-3.82167	-3.82162	-3.79937	-3.81926	-3.81732
0.30	-3.88103	-3.88367	-3.88361	-3.86334	-3.88081	-3.87921
0.35	-4.01850	-4.02259	-4.02247	-4.00626	-4.01911	-4.01810
0.40	-4.13682	-4.14280	-4.14259	-4.12947	-4.13911	-4.13845
0.50	-4.33032	-4.34153	-4.34097	-4.33216	-4.33782	-4.33752
0.70	-4.60061	-4.62933	-4.62699	-4.62274	-4.62492	-4.62484
0.90	-4.77130	-4.82907	-4.82226	-4.82018	-4.82110	-4.82108
1.00	-4.83076	-4.90821	-4.89757	-4.89617	-4.89679	-4.89677
1.20	-4.91088	-5.03975	-5.01671	-5.01633	-5.01661	-5.01661
1.40	-4.95019	-5.14911	-5.10491	-5.10540	-5.10554	-5.10554
1.60	-4.95765	-5.24871	-5.17110	-5.17252	-5.17258	-5.17258
1.80	-4.93933	-5.34862	-5.22123	-5.22367	-5.22371	-5.22371
2.00	-4.89960	-5.45779	-5.25949	-5.26302	-5.26304	-5.26304
2.20	-4.84170	-5.58470	-5.28902	-5.29349	-5.29349	-5.29349
2.40	-4.76811	-5.73780	-5.31231	-5.31721	-5.31721	-5.31721
2.60	-4.68080	-5.92578	-5.33150	-5.33577	-5.33577	-5.33577
2.80	-4.58133	-6.15775	-5.34855	-5.35034	-5.35034	-5.35034
3.00	-4.47099	-6.44339	-5.36541	-5.36181	-5.36181	-5.36181
3.20	-4.35086	-6.79303	-5.38416	-5.37087	-5.37087	-5.37087
3.40	-4.22182	-7.21775	-5.40703	-5.37805	-5.37805	-5.37805
3.60	-4.08465	-7.72941	-5.43656	-5.38374	-5.38374	-5.38374

Таблица 2 — Численные данные для корреляционной функции $\langle \Psi(x)\Psi(0) \rangle$.

2.4.2 Корреляционные функции потомков в модели Ли–Янга

В данном разделе мы применяем описанную выше технику для анализа корреляционных функций композитного поля $T\bar{T}$ в скейлинговой модели Ли–Янга [61]. Используя явные выражения для форм-факторов этого оператора, предложенные в [116], мы покажем, что некоторые ограничения на средние значения $T\bar{T}$ [117], а также дополнительное требование асимптотического поведения форм-факторов приводят к полному согласию с ультрафиолетовой асимптотикой, полученной в рамках конформной теорией возмущений.

Итак, рассмотрим скейлинговую модель Ли–Янга

$$S = S_{M(2/5)} + g \int \varphi d^2x, \quad (2.64)$$

т.е. минимальную модель $M(2/5)$ конформной теории поля, возмущенную полем $\varphi = \phi_{1,3}$, которое является единственным нетривиальным примарным полем в данной модели. Модель $M(2/5)$ имеет центральный заряд $c = -22/5$. Пространство полей в этой модели состоит из двух примарных полей: единичного оператора $I = \phi_{1,1} = \phi_{1,4}$ и поля $\varphi = \phi_{1,2} = \phi_{1,3}$ с правой и левой размерностями $\Delta = \bar{\Delta} = -1/5$, и их потомков. След тензора энергии-импульса Θ определяется выражением

$$\Theta(x) = \pi g (1 - \Delta) \varphi(x). \quad (2.65)$$

Значение вакуумного среднего $\langle \Theta \rangle$ было получено в [118]

$$\langle \Theta \rangle = -\frac{\pi m^2}{4\sqrt{3}}, \quad (2.66)$$

где m определяет массовую щель теории. Мы также используем соотношение

$$g = i \frac{2^{\frac{1}{5}} 5^{\frac{3}{4}} \left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \right)^{\frac{12}{5}}}{16\pi^{\frac{6}{5}} \Gamma\left(\frac{3}{5}\right) \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)} m^{\frac{12}{5}} \quad (2.67)$$

между константой взаимодействия g и масштабом m , найденное в [118].

Форм-факторы оператора $\langle \Theta \rangle$ были найдены в [13]. Форм-факторы оператора $T\bar{T} = L_{-2}\bar{L}_{-2}I$ в этой модели были недавно получены в [116]. Мы используем эти выражения для анализа корреляционных функций $G(m|x|) = m^{-6} \langle T\bar{T}(x) \Theta(0) \rangle$ и $H(m|x|) = m^{-8} \langle T\bar{T}(x) T\bar{T}(0) \rangle$.

Ненулевых значения вакуумных средних, дающих вклад в ультрафиолетовой разложение – это $\langle \varphi \rangle$, $\langle I \rangle = 1$ и $\langle L_{-2}\bar{L}_{-2}I \rangle = \langle T\bar{T} \rangle$. Напомним операторные разложения тензора импульса в конформной теории поля [4]:

$$T(z)\phi(0) = \frac{\Delta}{z^2}\phi(0) + \frac{1}{z}\partial\phi(0) + \dots, \quad (2.68)$$

$$T(z)T(0) = \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0) + \dots. \quad (2.69)$$

Это дает

$$C_{T\bar{T},\varphi}^I(x) = 0, \quad C_{T\bar{T},\varphi}^\varphi(x) = \Delta^2|x|^{-4},$$

$$C_{T\bar{T},T\bar{T}}^I(x) = \left(\frac{c}{2}\right)^2|x|^{-8}, \quad C_{T\bar{T},T\bar{T}}^\varphi(x) = 0.$$

Мы опустим детали вычислений поправок первого порядка для структурных функций, все необходимые формулы могут быть найдены в [13; 60]. Используя (2.65) и (2.66), мы приходим к следующему выражению для $\langle T\bar{T}(x) \Theta(0) \rangle$:

$$G_{UV}(m|x|) = -\frac{\pi}{100\sqrt{3}}(m|x|)^{-4} + g_1(2\ln\mu|x| + g_2)(m|x|)^{-\frac{8}{5}} + g_3(2\ln\mu|x| + g_4)(m|x|)^{-\frac{6}{5}}, \quad (2.70)$$

$$g_1 = -\frac{3^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{4}{5}}(\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{5}{6}))^{\frac{12}{5}}(\Gamma(\frac{1}{5}))^{\frac{3}{2}}(\Gamma(\frac{2}{5}))^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{19}{5}}5^{\frac{17}{4}}(\Gamma(\frac{3}{5}))^{\frac{3}{2}}(\Gamma(\frac{4}{5}))^{\frac{5}{2}}},$$

$$g_2 = 2\psi(2) - \psi\left(-\frac{1}{5}\right) - \psi\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{115}{18},$$

$$g_3 = \frac{27}{\pi^{\frac{2}{5}}2^{\frac{13}{5}}5^{\frac{7}{2}}}\frac{(\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{5}{6}))^{\frac{24}{5}}}{(\Gamma(\frac{3}{5})\Gamma(\frac{4}{5}))^2},$$

$$g_4 = 2\psi(2) - \psi\left(-\frac{2}{5}\right) - \psi\left(\frac{2}{5}\right) - \frac{55}{14}.$$

Аналогично для $\langle T\bar{T}(x) T\bar{T}(0) \rangle$ мы имеем

$$H_{UV}(m|x|) = \left(\frac{c}{2}\right)^2 (m|x|)^{-8} + \frac{\pi\Delta^2(1-\Delta)}{\sqrt{3}} \times \\ \times \left(4 \ln \mu|x| + \frac{c-4\Delta^2}{2\Delta(\Delta-1)}\right) (m|x|)^{-6}. \quad (2.71)$$

Необходимо заметить, что в вычислениях первого порядка приходится иметь дело с проблемой резонансов [13], приводящей к неопределенному коэффициенту μ в (2.70) и (2.71).

Массовый спектр скейлинговой модели Ли–Янга состоит из одной частицы A . Корреляционные функции могут быть выражены через форм-факторы локальных операторов в виде спектральных сумм. Двухточечная евклидова корреляционная функция операторов \mathcal{O}_1 and \mathcal{O}_2 имеет вид

$$\langle \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(0) \rangle = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d\theta_1 \dots d\theta_n}{n! (2\pi)^n} F_n^{\mathcal{O}_1}(\theta_1, \dots, \theta_n) \times \\ \times F_n^{\mathcal{O}_2}(\theta_1 - i\pi, \dots, \theta_n - i\pi) e^{-m|x| \sum_{i=1}^n \cosh \theta_i}. \quad (2.72)$$

Выражения для первых четырех форм-факторов оператора Θ имеют вид [13]:

$$F_0^{\Theta} = -\frac{\pi m^2}{4\sqrt{3}}, \quad (2.73)$$

$$F_1^{\Theta} = -\frac{i\pi m^2}{2^{\frac{5}{2}} 3^{\frac{1}{4}} v(0)}, \quad (2.74)$$

$$F_2^{\Theta}(\theta_1, \theta_2) = \frac{\pi m^2}{2} \frac{f(\theta_1 - \theta_2)}{4v^2(0)}, \quad (2.75)$$

$$F_3^{\Theta}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) =$$

$$= \frac{i3^{\frac{1}{4}}\pi m^2}{2^{\frac{7}{2}}v^3(0)} \prod_{i<j}^3 f(\theta_i - \theta_j) \left(1 + \frac{1}{8 \prod_{i<j} \cosh \frac{\theta_i - \theta_j}{2}}\right), \quad (2.76)$$

где

$$f(\theta) = \frac{\cosh \theta - 1}{\cosh \theta + 1/2} v(i\pi - \theta) v(-i\pi + \theta), \quad (2.77)$$

$$v(\theta) = \exp \left(2 \int_0^\infty \frac{\sinh \frac{t}{2} \sinh \frac{t}{3} \sinh \frac{t}{6}}{t \sinh^2 t} e^{\frac{i\theta t}{\pi}} dt \right). \quad (2.78)$$

Следующее выражение для форм-факторов оператора $T\bar{T}$ было получено в [116] с помощью ограничения на рост на бесконечности, асимптотических свойств факторизации и соотношения для среднего значения $T\bar{T}$, полученного в [117]:

$$F_n^{T\bar{T}} = m^2 \left(a \left(\sigma_1^{(n)} \bar{\sigma}_1^{(n)} \right)^2 + c \sigma_1^{(n)} \bar{\sigma}_1^{(n)} + d \right) F_n^\Theta + b F_n^{\mathcal{K}_3} + e m^4 \delta_{n,0}, \quad (2.79)$$

где

$$\sigma_1^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{\sigma}_1^{(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}. \quad (2.80)$$

Для $n < 3$, $F_n^{\mathcal{K}_3}$ есть нуль, тогда как при $n = 3$,

$$F_n^{\mathcal{K}_3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = -i \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{m^2}{v^3(0)} \times \prod_{i < j}^3 f(\theta_i - \theta_j) \left(\cosh(\theta_i - \theta_j) + \frac{1}{2} \right). \quad (2.81)$$

Константы a , b , d и e есть

$$a = \frac{\langle \Theta \rangle}{m^2}, \quad b = -\frac{\langle \Theta \rangle^2}{m^4}, \quad (2.82)$$

$$d = -\frac{2}{m^2} \langle \Theta \rangle, \quad e = -\frac{\langle \Theta \rangle^2}{m^4}, \quad (2.83)$$

где

$$\langle \Theta \rangle = -\frac{\pi m^2}{4\sqrt{3}}. \quad (2.84)$$

В свою очередь, константа c не определяется, что соответствует неоднозначности $T\bar{T} \rightarrow T\bar{T} + \alpha \partial \bar{\partial} \varphi$ в определении оператора $T\bar{T}$ вне критической точки, так как размерности операторов $T\bar{T}$ и $\partial \bar{\partial} \varphi$ удовлетворяют условию резонанса [13]. Коэффициент a определяется из ограничения на рост на бесконечности и асимптотического условия факторизации, а коэффициенты d и e – из ограничения на

рост и соотношения Замолодчикова для среднего значения тензора импульса. Коэффициент b определяется на основе каждого из этих наборов условий независимо.

Формулы (2.73)–(2.76), (2.79) и (2.81) приводят к спектральному разложению корреляционных функций $G(m|x|)$ и $H(m|x|)$ до трехчастичных членов:

$$G_{\text{IR}}(m|x|) = \left(\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\right)^3 + \\ + G_1(m|x|) + G_2(m|x|) + G_3(m|x|) + \dots, \quad (2.85)$$

$$H_{\text{IR}}(m|x|) = \left(\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\right)^4 + \\ + H_1(m|x|) + H_2(m|x|) + H_3(m|x|) + \dots, \quad (2.86)$$

где

$$G_1(x) = -\frac{\pi}{32\sqrt{3}v^2(0)}(a+c+d)K_0(x), \quad (2.87)$$

$$G_2(x) = \frac{1}{128v^4(0)} \int_0^\infty \left(4a(1+\cosh\theta)^2 + 2c(1+\cosh\theta) + d\right) g(\theta) K_0\left(2x \cosh\frac{\theta}{2}\right) d\theta, \quad (2.88)$$

$$G_3(x) = \frac{1}{32\pi^2v^6(0)} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(-\frac{\pi}{32\sqrt{3}}B(\theta,\chi) \times \right. \\ \left. (aA^4(\theta,\chi) + cA^2(\theta,\chi) + d) + bC(\theta,\chi)\right) B(\theta,\chi) \times \\ \times g(\theta)g(\chi)g(\theta-\chi)K_0(A(\theta,\chi)x) d\theta d\chi, \quad (2.89)$$

$$H_1(x) = -\frac{\pi}{32\sqrt{3}v^2(0)}(a+c+d)^2 K_0(x), \quad (2.90)$$

$$H_2(x) = \frac{1}{128v^4(0)} \int_0^\infty \left(4a(1+\cosh\theta)^2 + 2c(1+\cosh\theta) + d \right)^2 g(\theta) K_0\left(2x \cosh\frac{\theta}{2}\right) d\theta, \quad (2.91)$$

$$H_3(x) = -\frac{\sqrt{3}}{\pi^3 v^6(0)} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(-\frac{\pi}{32\sqrt{3}} B(\theta, \chi) \times \right. \\ \left. \times (aA^4(\theta, \chi) + cA^2(\theta, \chi) + d) + bC(\theta, \chi) \right)^2 \times \\ \times g(\theta) g(\chi) g(\theta - \chi) K_0(A(\theta, \chi)x) d\theta d\chi, \quad (2.92)$$

$$g(\theta) = f(\theta) f(-\theta), \quad (2.93)$$

$$A(\theta, \chi) = \sqrt{3 + 2(\cosh\theta + \cosh\chi + \cosh(\theta - \chi))}, \\ B(\theta, \chi) = 1 + \frac{1}{8 \cosh\frac{\theta}{2} \cosh\frac{\chi}{2} \cosh\frac{\theta - \chi}{2}}, \\ C(\theta, \chi) = \left(\cosh\theta + \frac{1}{2} \right) \left(\cosh\chi + \frac{1}{2} \right) \times \\ \times \left(\cosh(\theta - \chi) + \frac{1}{2} \right).$$

Неоднозначность в определении оператора $\overline{T\overline{T}}$ не влияет на лидирующий вклад в УФ-разложении. Тем не менее, интересно установить соответствие между коэффициентами μ и c . На рис. 2.3 мы показываем результаты сравнения УФ- и ИК-разложения, полученные для $c = 0$. В связи с быстрым ростом рассматриваемых корреляционных функций, мы используем логарифмический масштаб, а также для большей наглядности рассматриваем отношения соответствующих вкладов. Отношения трехчастичных вкладов G_3/G_{IR} и H_3/H_{IR} (треугольники) даны на рисунке для демонстрации степени согласия между ИК- и УФ-данными, а также для оценки интервала, в котором мы ожидаем релевантность ИК-данных. В результате такой оценки мы выделили интервал $[0.01, 0.2]$. Кроме того, мы показываем степень согласия ИК-данных с нулевым

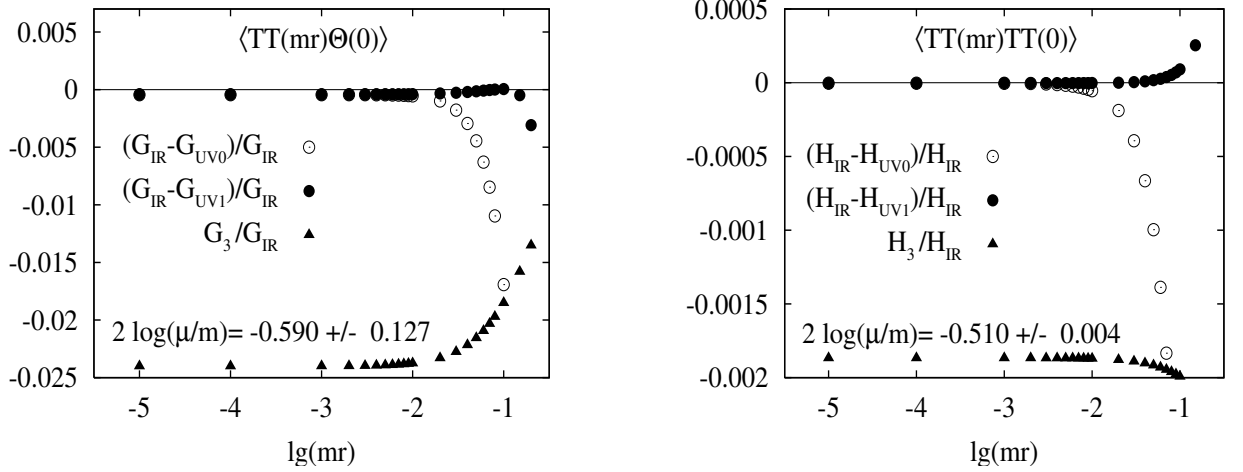


Рисунок 2.3 — Результаты сравнения УФ-разложения и ИК-данных с параметром фитирования μ при $c = 0$.

порядком (кружки) и с первым порядком (заполненные кружки) УФ-разложения. Ошибки в определении параметров фитирования связаны с необходимостью учитывать вклады форм-факторов более высокого порядка.

Сравнение численных значений УФ-разложений (2.70) и (2.71) с формфакторными разложениями (2.85) и (2.86) до трехчастичных вкладов в диапазоне $10^{-5} < m|x| < 0.2$ показано в таблицах 3 и 4. В ИК-разложении мы используем $c = 0$. Результаты УФ-вычислений первого порядка приведены для наилучшего значения параметра фитирования $2 \log(\mu/m) = -0.51$. Полученные данные демонстрируют, что УФ- и ИК-разложения совпадают с достаточно хорошей точностью.

$m x $	G_{IR} 2-част. ФФ	G_{IR} 3-част. ФФ	G_{UV} 0-порядок	G_{UV} 1-порядок
0.001	-1.85652408e+10	-1.81300401e+10	-1.81380007e+10	-1.81379845e+10
0.002	-1.16031262e+09	-1.13312746e+09	-1.13362505e+09	-1.13362023e+09
0.004	-7.25161988e+07	-7.08199961e+07	-7.08515654e+07	-7.08501625e+07
0.006	-1.43231670e+07	-1.39888795e+07	-1.39953709e+07	-1.39946955e+07
0.008	-4.53151109e+06	-4.42603060e+06	-4.42822284e+06	-4.42782279e+06
0.010	-1.85589100e+06	-1.81282105e+06	-1.81380007e+06	-1.81353444e+06
0.020	-1.15890841e+05	-1.13251558e+05	-1.13362505e+05	-1.13289636e+05
0.030	-2.28615882e+04	-2.23527759e+04	-2.23925935e+04	-2.23590156e+04
0.040	-7.22104580e+03	-7.06438900e+03	-7.08515654e+03	-7.06596919e+03
0.050	-2.95154366e+03	-2.88923575e+03	-2.90208012e+03	-2.88972936e+03
0.060	-1.41992160e+03	-1.39078944e+03	-1.39953709e+03	-1.39095957e+03
0.070	-7.64321784e+02	-7.49094702e+02	-7.55435266e+02	-7.49155160e+02
0.080	-4.46655159e+02	-4.38020065e+02	-4.42822284e+02	-4.38041748e+02
0.100	-1.81664934e+02	-1.78361775e+02	-1.81380007e+02	-1.78368395e+02
0.150	-3.50788352e+01	-3.45331307e+01	-3.58281496e+01	-3.45550348e+01
0.200	-1.07663389e+01	-1.06227468e+01	-1.13362505e+01	-1.06572736e+01

Таблица 3 — Численные данные для корреляционной функции $\langle T\bar{T}(x)\Theta(0)\rangle$.

В заключение подчеркнем, что данное сравнение подтверждает конструкцию форм-факторов оператора $T\bar{T}$, предложенную в [116]. Действительно, мы замечаем, что двухчастичные члены G_2 и H_2 являются весьма чувствительными к значению параметра a , а трехчастичные члены G_3 и H_3 — к значению параметра b (поскольку соответствующие члены в подынтегральных выражениях (2.88), (2.89), (2.91) и (2.92) на бесконечности растут наиболее быстро) и слабо чувствительны к значениям других параметров. Таким образом, тот факт, что суммы трех первых членов формфакторных разложений (т.е. нулевого, одно- и двух-частичного) совпадают с УФ-разложением с точностью до трех знаков, подтверждает значение параметра a и гипотезу асимптотического поведения для операторов потомков в скейлиновой модели Ли–Янга [116]. Включение трехчастичных членов улучшает сходимость до пяти цифр, что подтверждает значение параметра b и все предположения, используемые для его определения [116; 117].

$m x $	H_{IR} 2-част. $\Phi\Phi$	H_{IR} 3-част. $\Phi\Phi$	H_{UV} 0-порядок	H_{UV} 1-порядок
0.001	4.84901983e+24	4.83998034e+24	4.83999827e+24	4.83999495e+24
0.002	1.89414518e+22	1.89061384e+22	1.89062440e+22	1.89061959e+22
0.004	7.39895858e+19	7.38516043e+19	7.38525142e+19	7.38518211e+19
0.006	2.88693111e+18	2.88154509e+18	2.88161097e+18	2.88155315e+18
0.008	2.89015215e+17	2.88475727e+17	2.88486384e+17	2.88476475e+17
0.010	4.84879446e+16	4.83973781e+16	4.84000106e+16	4.83974909e+16
0.020	1.89382175e+14	1.89026924e+14	1.89062538e+14	1.89026936e+14
0.030	7.38795913e+12	7.37402153e+12	7.37692595e+12	7.37399344e+12
0.040	7.39439146e+11	7.38034934e+11	7.38525556e+11	7.38027952e+11
0.050	1.24017793e+11	1.23780576e+11	1.23903991e+11	1.23778474e+11
0.060	2.88317563e+10	2.87761876e+10	2.88161166e+10	2.87754224e+10
0.070	8.39672143e+09	8.38041127e+09	8.39577991e+09	8.38008907e+09
0.080	2.88379417e+09	2.87814821e+09	2.88486545e+09	2.87799616e+09
0.090	1.12334075e+09	1.12112407e+09	1.12435943e+09	1.12104556e+09
0.100	4.83278636e+08	4.82317554e+08	4.83999982e+08	4.82273987e+08
0.150	1.87883587e+07	1.87496455e+07	1.88849209e+07	1.87448871e+07
0.200	1.87207209e+06	1.86810743e+06	1.89062486e+06	1.86704234e+06

Таблица 4 — Численные данные для корреляционной функции $\langle T\bar{T}(x)T\bar{T}(0) \rangle$.

Глава 3. Минимальная Лиувиллевская Гравитация

В этой главе мы рассмотрим определенный класс точно решаемых моделей некритической теории струн.

Траектория струны в пространстве-времени представляет собой двумерную поверхность (так называемую мировую поверхность струны). Мировая поверхность может обладать границей, либо быть замкнутой, в зависимости от того, рассматривается ли открытая струна, или же замкнутая. Также можно рассматривать суперсимметричные обобщения исходной бозонной конструкции. Координаты вложения струны в *таргет* пространство можно рассматривать как поля «материи», живущие на мировой поверхности. Важно отметить, что возникающая таким образом материальная теория обладает конформной симметрией. Ковариантная по построению материя индуцирует ковариантную (хотя и не локальную) теорию гравитации, в том смысле, что интегрирование полей материи приводит к эффективному действию для метрического тензора. Таким образом, некритическая теория струн представляет собой явную модель индуцированной квантовой 2D гравитации. При этом гравитационный сектор после фиксации конформной калибровки для метрики на мировой поверхности описывается теорией поля (супер) Лиувилля.

В минимальной модели некритической струны в качестве конформной материи, описывающей «координаты» вложения, выступает некоторая минимальная модель (супер) конформной теории поля. Поскольку центральный заряд минимальной модели в материальном секторе ($c^M < 1$) в данной струнной модели обобщает размерность таргет пространства, иногда эту модель называют некритической струной в пространстве размерности $d < 1$.

3.1 Минимальные модели некритической суперструны

В этом разделе мы рассмотрим двумерную супер Лиувиллевскую гравитацию, взаимодействующую с минимальной суперконформной теорией.

Мы проанализируем физические состояния в этой теории и дадим общий вид n -точечных корреляционных чисел на сфере в терминах интегралов по пространству модулей. Трехточечные корреляционные числа будут вычислены явно. Для четырехточечных корреляторов мы покажем, что если одно из полей является вырожденным, то интеграл по пространству модулей сводится к граничным членам. Релевантными полями для вычисления этих граничных членов оказываются специальные логарифмические поля. В конце раздела мы обсудим конструкцию этих полей, а также их операторные произведения. Данный анализ позволяет вычислить четырехточечные корреляционные числа явно.

Супер Лиувиллевская гравитация (СЛГ) [18] является двумерной квантовой гравитацией, действие которой индуцируется суперконформной материей. Данное индуцированное действие, известное как супер Лиувиллевское действие, является универсальным, т.е. его вид не зависит от конкретного выбора конформной материи. В рамках подхода Дэвида и Дистлера-Каваи (ДДК) [83; 119] СЛГ представляется в виде тензорного произведения материальной теории (SCFT), супер Лиувиллевской (SLFT) системы и системы супер духов (SG). Система супер духов возникает в результате задачи фиксации калибровки в СЛГ (см., например, [80]) и также обладает суперконформной симметрией. Условно, действие СЛГ можно записать как

$$A_{\text{SLG}} = A_{\text{SCFT}} + A_{\text{SL}} + A_{\text{SG}}. \quad (3.1)$$

Все три теории, составляющие СЛГ, полностью решаемы с помощью стандартной бутстрапной техники [4] (по крайней мере, в принципе) ввиду бесконечной симметрии, задаваемой суперконформной алгеброй

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{8}(n^3 - n)\delta_{n,-m}, \\ \{G_r, G_s\} &= 2L_{r+s} + \frac{c}{2} \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{r,-s}, \\ [L_n, G_r] &= \left(\frac{1}{2}n - r \right) G_{n+r}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где c – это параметр центрального заряда, а индексы r и s являются целыми для сектора Рамона (R) и полуцелыми для сектора Навье-Шварца (НШ). Мы ограничиваемся здесь рассмотрением только НШ-сектора. Всякий раз, когда это не может привести к путанице, мы опускаем индексы секторов у суперкон-

формных генераторов (т.е. индексы, указывающие, какой сектор – Лиувилля, материальный или духовый – рассматривается в данный момент).

Взаимодействие между тремя компонентами СЛГ в подходе ДДК осуществляется через соотношение на параметры центральных зарядов

$$c_{\text{SCFT}} + c_{\text{SL}} + c_{\text{SG}} = 0, \quad (3.3)$$

а также заложено в конструкцию физических полей и корреляционных чисел.

3.1.1 Структура СМЛГ

Супер Лиувиллевская теория поля. Супер Лиувиллевская теория поля [18] является суперконформной теорией поля с центральным зарядом

$$c = 1 + 2Q^2, \quad (3.4)$$

где «фоновый заряд» Q параметризован в терминах основного «квантового» параметра b как $Q = b^{-1} + b$. Ниже мы приводим основные факты, касающиеся НШ-сектора SLFT [57; 58; 120; 121]. НШ-поля принадлежат к представлениям суперконформной алгебры со старшим весом. Базисными полями являются скалярные примарные поля $V_a(x)$, отвечающие векторам старшего веса

$$\begin{aligned} L_n V_a &= 0, & \bar{L}_n V_a &= 0, & \text{для } n > 0, \\ G_k V_a &= 0, & \bar{G}_k V_a &= 0, & \text{для } k > 0, \\ L_0 V_a &= \bar{L}_0 V_a = \Delta_a V_a, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\Delta_a = \frac{a(Q - a)}{2} \quad (3.6)$$

и a является (комплексным) непрерывным параметром. Мы также используем параметр $\lambda = Q/2 - a$. При некоторых специальных значениях параметров представления являются сингулярными. Это происходит [97] при $\lambda = \lambda_{m,n}$, где

(m, n) – это пара положительных целых чисел ($m - n \in 2\mathbb{Z}$) и

$$\lambda_{m,n} = \frac{mb^{-1} + nb}{2}. \quad (3.7)$$

Вообще говоря, при $a = a_{m,n}$ на уровне $mn/2$ в модуле Верма над $V_{a_{m,n}} = V_{m,n}$ появляется один сингулярный вектор. Для каждой пары (m, n) удобно ввести «оператор рождения сингулярного вектора» $D_{m,n}$, который является градуированным многочленом по G_{-k} и L_{-k} на уровне $mn/2$, чьи коэффициенты являются функциями параметра центрального заряда b^2 , так что сингулярный вектор появляется при действии $D_{m,n}$ на $V_{m,n}$. Его нормировка фиксируется однозначно с помощью коэффициента при члене старшего порядка $D_{m,n} = G_{-1/2}^{mn} + \dots$. Основное операторное разложение имеет вид

$$V_{a_1}(x)V_{a_2}(0) = \int \frac{dP}{4\pi} (x\bar{x})^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} (\mathbb{C}_{a_1, a_2}^{Q/2+iP} [V_{Q/2+iP}(0)]_{ee} + \tilde{\mathbb{C}}_{a_1, a_2}^{Q/2+iP} [V_{Q/2+iP}(0)]_{oo}) \quad (3.8)$$

(для краткости здесь и далее мы полагаем $\Delta = \Delta_{Q/2+iP}$ и $\Delta_i = \Delta_{a_i}$). Данное операторное разложение непрерывно и включает в себя интегрирование по «импульсу» P . В (3.8) $[V_p]$ обозначает вклад в операторное разложение примарного поля V_p и его суперконформных потомков (индекс ее обозначает потомков на целом уровне и oo – потомков на полуцелом уровне). Все остальные разложения операторных произведений двух произвольных локальных полей могут быть получены из (3.8). Базисные структурные константы $\mathbb{C}_{a_1, a_2}^{Q/2+iP}$ и $\tilde{\mathbb{C}}_{a_1, a_2}^{Q/2+iP}$ в (3.8) были вычислены с помощью бутстрапной техники в [85; 88; 89] и имеют явный вид (a обозначает здесь $a_1 + a_2 + a_3$)

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{a_1, a_2}^{Q-a_3} &= \left(\pi \mu \gamma \left(\frac{Qb}{2} \right) b^{1-b^2} \right)^{(Q-a)/b} \frac{\Upsilon_R(b) \Upsilon_{NS}(2a_1) \Upsilon_{NS}(2a_2) \Upsilon_{NS}(2a_3)}{2 \Upsilon_{NS}(a-Q) \Upsilon_{NS}(a_1+2-3) \Upsilon_{NS}(a_2+3-1) \Upsilon_{NS}(a_3+1-2)}, \\ \tilde{\mathbb{C}}_{a_1, a_2}^{Q-a_3} &= - \left(\pi \mu \gamma \left(\frac{Qb}{2} \right) b^{1-b^2} \right)^{(Q-a)/b} \frac{i \Upsilon_R(b) \Upsilon_{NS}(2a_1) \Upsilon_{NS}(2a_2) \Upsilon_{NS}(2a_3)}{\Upsilon_R(a-Q) \Upsilon_R(a_1+2-3) \Upsilon_R(a_2+3-1) \Upsilon_R(a_3+1-2)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где мы используем удобные обозначения из работы [89] для специальных функций

$$\begin{aligned} \Upsilon_{NS}(x) &= \Upsilon_b \left(\frac{x}{2} \right) \Upsilon_b \left(\frac{x+Q}{2} \right), \\ \Upsilon_R(x) &= \Upsilon_b \left(\frac{x+b}{2} \right) \Upsilon_b \left(\frac{x+b^{-1}}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

выраженных в терминах стандартной в полевой теории Лиувилля функции Υ_b (см. [51; 52]). Структурные константы (3.9) отвечают следующей нормировке примарных полей

$$\langle V_a V_{Q-a} \rangle_{\text{SLFT}} = (x\bar{x})^{-2\Delta_a}. \quad (3.11)$$

Важный результат, касающийся SLFT, – это высшие уравнения движения. Следуя [98], мы определяем набор «вырожденных логарифмических полей» в НШ-секторе

$$V'_{m,n} = V'_a|_{a=a_{m,n}}, \quad m - n \in 2\mathbb{Z}, \quad (3.12)$$

где общие логарифмические поля $V'_a = \partial V_a / \partial a$ являются производными соответствующих примарных полей по a . Оказывается, что в то время как $V'_{m,n}$ являются логарифмическими полями (так же как и общие V'_a), поля

$$\bar{D}_{m,n} D_{m,n} V'_{m,n} \quad (3.13)$$

обладают свойствами примарных полей и должны быть отождествлены с экспоненциальными примарными полями $V_{m,-n}$. Точнее, мы имеем соотношения

$$\bar{D}_{m,n} D_{m,n} V'_{m,n} = B_{m,n} V_{m,-n}, \quad (3.14)$$

известные как высшие уравнения движения. Экспоненциальные примарные поля $V_{m,-n}$ имеют здесь размерности $\Delta_{m,n} + mn/2$, а коэффициенты

$$B_{m,n} = 2^{mn} i^{mn-2[mn/2]} b^{n-m+1} [\pi \mu \gamma(bQ/2)]^n \gamma \left(\frac{m - nb^2}{2} \right) \prod_{(k,l) \in \langle m,n \rangle_{\text{NS}}} \lambda_{k,l}, \quad (3.15)$$

где множество $\langle m,n \rangle_{\text{NS}}$ обозначает следующее множество пар целых чисел

$$\{(k,l) \in \{k \mid 1 - m \leq k \leq m - 1\}, \{l \mid 1 - n \leq l \leq n - 1\} \mid k - l \in 2\mathbb{Z}\} \setminus \{(0,0)\}. \quad (3.16)$$

Обобщенные супер минимальные модели. Мы рассматриваем специальный тип СЛГ, где в материальном секторе теории находятся так называемые обобщенные супер минимальные модели (GSMM). Соответствующую индуцированную Лиувиллевскую гравитацию мы называем минимальной супер Лиувил-

левской гравитацией. В GSMM нет специальных ограничений на центральный заряд, который в принципе может принимать произвольные значения, в отличие от случая обычных минимальных моделей. Полезно параметризовать центральный заряд этих моделей через тот же базовый параметр b как и в SLFT,

$$c = 1 - 2(b^{-1} - b)^2. \quad (3.17)$$

В этой параметризации условие (3.3) на общий центральный заряд выполняется автоматически. «Канонические» супер минимальные модели возникают при специальном выборе параметра b , таком, что b^2 является рациональным числом. В противном случае алгебра вырожденных примарных полей больше не является замкнутой относительно какого-либо конечного подмножества; вместо этого замкнутую алгебру образует полный набор $\{\Phi_{m,n}\}$ с любой парой (m,n) натуральных чисел. Кроме того, мы расширяем пространство локальных полей, включая локальные поля с размерностями, отличными от значений Каца. Вследствие чего спектр размерностей в GSMM непрерывен. Введем непрерывный параметр α для параметризации непрерывного семейства $\{\Phi_\alpha\}$ примарных полей с размерностями

$$\Delta_\alpha^{(M)} = \frac{\alpha(\alpha - q)}{2}, \quad (3.18)$$

где

$$q = b^{-1} - b. \quad (3.19)$$

Как всегда мы используем «каноническую» нормировку примарных полей Φ_α через двухточечные функции

$$\langle \Phi_\alpha \Phi_\alpha \rangle_{\text{GSMM}} = (x\bar{x})^{-2\Delta_\alpha}. \quad (3.20)$$

Вырожденные поля $\Phi_{m,n}$ имеют размерности

$$\Delta_{m,n}^{(M)} = -q^2/8 + \lambda_{m,-n}^2/2. \quad (3.21)$$

Они отвечают либо $\alpha = \alpha_{m,n}$, либо $\alpha = q - \alpha_{m,n}$ с

$$\alpha_{m,n} = q/2 + \lambda_{-m,n}. \quad (3.22)$$

Можно заметить, что конструкция GSMM формально похожа на SLFT и отличается лишь заменой $b \rightarrow ib$ и $\alpha \rightarrow -ia$, а также условием нормировки примарных полей, формула (3.11) для SLFT и формула (3.20) для GSMM.

Супер духи. Приведем некоторые результаты, касающиеся SG (более детально см., например, [122]). Супер духи возникают как результат фиксации калибровки в подходе Полякова к СЛГ и описываются свободной суперконформной теорией поля с центральным зарядом $c_{\text{SG}} = -10$.

Фермионная часть системы SG включает в себя два антикоммутирующих поля (b, c) со спинами $(2, -1)$ и действием следующего вида

$$A_{bc} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c}). \quad (3.23)$$

Принимая во внимание свойства антикоммутирующих переменных, легко вывести следующие операторные произведения

$$b(z)c(0) \sim \frac{1}{z}, \quad b(z)b(0) \sim O(z), \quad c(z)c(0) \sim O(z). \quad (3.24)$$

Рассмотрим более детально голоморфной сектор. Рассматриваемые поля имеют разложения в ряд Лорана вида

$$b(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{z^{m+2}}, \quad c(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{c_m}{z^{m-1}}, \quad (3.25)$$

которые дают следующие антикоммутаторы

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m+n, 0}, \quad \{b_m, b_n\} = 0, \quad \{c_m, c_n\} = 0. \quad (3.26)$$

Существует два естественных основных состояния, которые оба аннигилируются операторами b_m и c_m при $m > 0$. Кроме того, первое аннигилируется оператором b_0 , а второе аннигилируется оператором c_0 . Для дальнейших целей в качестве вакуума мы выбираем то состояние, которое аннигилируется оператором b_0 :

$$\begin{aligned} b_m |v\rangle_{bc} &= 0, \quad m \geq 0, \\ c_m |v\rangle_{bc} &= 0, \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Можно проверить, что вакуум $|v\rangle_{bc}$ отвечает полю $c(x)$ с размерностью -1 . Единичный оператор, который нам потребуется в дальнейшем, отвечает состоянию

$$|1\rangle_{bc} = b_{-1}|v\rangle_{bc}. \quad (3.28)$$

Все остальные представления (3.26) эквивалентны описанному выше.

Бозонная часть SG включает в себя два бозонных поля (β, γ) со спинами $(3/2, -1/2)$. Эти поля являются суперпартнерами соответствующих фермионных духов (b, c) . Действие бозонной части имеет вид

$$A_{\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (\beta \bar{\partial} \gamma + \bar{\beta} \partial \bar{\gamma}). \quad (3.29)$$

Вследствие смены статистики происходит изменение некоторых знаков в операторных произведениях:

$$\beta(z)\gamma(0) \sim -\frac{1}{z}, \quad \gamma(z)\beta(0) \sim \frac{1}{z}, \quad \beta(z)\beta(0) \sim O(1), \quad \gamma(z)\gamma(0) \sim O(1). \quad (3.30)$$

Гильбертово пространство (β, γ) -системы строится путем разложения

$$\beta(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_m}{z^{m+3/2}}, \quad \gamma(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_m}{z^{m-1/2}}, \quad (3.31)$$

где индекс m является целым числом для R-сектора и полуцелым для НШ-сектора, а коэффициенты удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[\gamma_m, \beta_n] = \delta_{m+n, 0}, \quad [\beta_m, \beta_n] = 0, \quad [\gamma_m, \gamma_n] = 0. \quad (3.32)$$

Действие операторов состояний здесь более сложное. В отличие от фермионного случая здесь имеется дискретный ряд вакуумов $\{|q\rangle_{\beta\gamma}\}$, где q может быть либо целым, либо полуцелым,

$$\begin{aligned} \beta_m |q\rangle_{\beta\gamma} &= 0, & m &\geq -q - 1/2, \\ \gamma_m |q\rangle_{\beta\gamma} &= 0, & m &\geq q + 3/2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Каждый q -вакуум определяет уникальное представление (3.32), которое иногда называют «картиной». Состояния в гильбертовом пространстве находятся во взаимно однозначном соответствии с операторами локальных полей, поэтому полное пространство локальных полей представляет собой прямую сумму всех представлений старшего веса со старшими векторами $|q\rangle_{\beta\gamma}$. Определим два наиболее важных для последующего анализа локальных оператора. Можно проверить, что вакуум $|q = 0\rangle_{\beta\gamma}$ имеет размерность 0 и отвечает единичному оператору. Локальный оператор, отвечающий вакууму $|q = -1\rangle_{\beta\gamma}$, в особенности полезен. Оказывается, что этот вакуум соответствует формальному оператору $\delta(\gamma(0))$ размерности $1/2$. Действительно, учитывая общие свойства δ -функции Дирака и операторное разложение (3.32) (см. Приложение В.1), можно вывести следующие соотношения для операторных произведений

$$\gamma(z)\delta(\gamma(0)) \sim z\partial\gamma(0)\delta(\gamma(0)), \quad \beta(z)\delta(\gamma(0)) \sim -\frac{1}{z}\delta(\gamma(0)), \quad (3.34)$$

и аналогичные соотношения, в которых β и γ поменяны местами. Используя эти разложения, легко убедиться, что $\delta(\gamma(0))$ удовлетворяет (3.33) при $q = -1$. Аномалия в сохранении духовых токов $J^{bc}(u) = -:b(u)c(u):$ и $J^{\beta\gamma}(u) = -: \beta(u)\gamma(u):$ приводит к важному требованию на корреляционные функции. В частности, любая корреляционная функция в СЛГ на сфере, включающая в себя духовые наблюдаемые, состоящие из β , γ , $\delta(\beta(0))$, $\delta(\gamma(0))$ должна удовлетворять балансу духового числа

$$\begin{aligned} N_c - N_b &= 3, \\ (N_{\delta(\gamma)} - N_{\delta(\beta)}) + (N_\beta - N_\gamma) &= 2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Хотя это соотношение является известным (см., например, [122]), в Приложении В.1 для полноты мы приводим вывод этого результата. Наконец, суперконформные генераторы в духовом секторе имеют вид

$$\begin{aligned} L_m^g &= \sum_n (m+n) :b_{m-n}c_n: + \sum_k \left(\frac{m}{2} + k\right) : \beta_{m-k}\gamma_k: - \frac{1}{2}\delta_{m,0}, \\ G_k^g &= - \sum_n \left[\left(k + \frac{n}{2}\right) \beta_{k-n}c_n + 2b_n\gamma_{k-n} \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

где нормальное упорядочение определяется по отношению к основным состояниям $|v\rangle_{bc}$ и $|q = -1\rangle_{\beta\gamma}$. В практических расчетах удобно использовать следующие коммутационные соотношения духовых генераторов с суперконформными генераторами L_n ,

$$\begin{aligned} [L_n, b_m] &= (n - m)b_{n+m}, \\ [L_n, c_m] &= -(2n + m)c_{n+m}, \\ [L_n, \beta_k] &= \left(\frac{n}{2} - k\right)\beta_{n+k}, \\ [L_n, \gamma_k] &= -\left(\frac{3n}{2} + k\right)\gamma_{n+k}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

и генераторами G_k ,

$$\begin{aligned} [G_k, b_n] &= \left(\frac{n}{2} - k\right)\beta_{k+n}, \\ [G_k, c_n] &= -2\gamma_{k+n}, \\ [G_k, \beta_r] &= -2b_{k+r}, \\ [G_k, \gamma_r] &= \left(\frac{3k}{2} + \frac{r}{2}\right)c_{k+r}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Далее мы используем вышеописанные факты для построения основных физических состояний в СЛГ.

3.1.2 Физические состояния и структура кольца

Физические состояния в СМЛГ. Обращения в нуль общего центрального заряда (3.3) еще не достаточно для обеспечения вейлевской инвариантности СЛГ. Вставка физических полей в функциональный интеграл также не должна нарушать вейлевскую инвариантность. Это дает определенное ограничение на структуру физических полей. Стандартным математическим инструментом для обращения с такими проблемами является теория кохомологий. Физические поля образуют пространство классов кохомологий относительно нильпотентного БРСТ заряда Q . Явно Q -оператор может быть получен исходя из следующих

КОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

$$\begin{aligned}\{b_n, Q\} &= L_n, \\ [\beta_r, Q] &= G_r,\end{aligned}\tag{3.39}$$

Здесь и далее L_n и G_r являются общими суперконформными генераторами, которые определяются как суммы соответствующих генераторов во всех трех секторах (материальном, Лиувиллевском и духовом),

$$\begin{aligned}L_n &= L_n^{\text{M}} + L_n^{\text{L}} + L_n^{\text{g}}, \\ G_r &= G_r^{\text{M}} + G_r^{\text{L}} + G_r^{\text{g}}.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Мы также будем использовать обозначения $L_n^{\text{M+L}} = L_n^{\text{M}} + L_n^{\text{L}}$ и $G_r^{\text{M+L}} = G_r^{\text{M}} + G_r^{\text{L}}$. Коммутационные соотношения (3.39) приводят к следующему разложению БРСТ оператора

$$Q = \sum_m : \left[L_m^{\text{M+L}} + \frac{1}{2} L_m^{\text{g}} \right] c_{-m} : + \sum_r : \left[G_r^{\text{M+L}} + \frac{1}{2} G_r^{\text{g}} \right] \gamma_{-r} : - \frac{1}{4} c_0,\tag{3.41}$$

где m пробегает целые числа, а r – полуцелые, и нормальное упорядочение такое же, как в ф-ле (3.36). Исходя из этого, мы можем проверять нильпотентность всякий раз, когда общий центральный заряд равен нулю. Наблюдаемый спектр состоит из БРСТ инвариантных локальных полей,

$$Q|\Psi\rangle = 0,\tag{3.42}$$

которые не принадлежат к $\text{Im}Q$. Ввиду (3.39) суммарная размерность любого нетривиального физического состояния равна нулю. Помимо локальных полей для конструкции физических амплитуд в СЛГ мы также вводим нелокальные физические поля вида

$$\int \bar{b}_{-1} b_{-1} \Psi(z, \bar{z}) d^2 z,\tag{3.43}$$

где $\Psi(z, \bar{z})$ удовлетворяет (3.42). Калибровочная инвариантность этих полей непосредственно вытекает из (3.39). Мы не собираемся здесь полностью классифицировать физические состояния СЛГ для всех различных картин. Нашей

целью является собрать достаточную информацию для анализа, который позволит построить n -точечное гравитационное корреляционное число для некоторого специального выбора картин. Как уже было упомянуто выше, на сфере должен быть удовлетворен баланс числа духов (3.35). Это условие может быть выполнено путем выбора полей таким образом, что три из них имеют духовые коэффициенты c и \bar{c} , а два поля имеют коэффициенты $\delta(\gamma)$ и $\delta(\bar{\gamma})$. Это, в частности, означает, что два поля принадлежат картине $q = -1$, а остальные – картине $q = 0$. Поэтому в дальнейшем мы сосредотачиваемся на физических состояниях такого рода. Общий случай очевидно получается из данного специального случая применением оператора смены картины [122].

Наш поиск физических состояний естественно начать среди тех состояний, которые конструируются из примарных полей во всех трех секторах. Мы называем их «основными» физическими состояниями. Введем специальное обозначение для вакуумного вектора в тензорном произведении материального и Лиувилевского секторов

$$|U_a\rangle = |\Phi_{a-b}\rangle|V_a\rangle. \quad (3.44)$$

Вектор U_a отвечает полю с суммарной размерностью $(1/2, 1/2)$. Определим также основное состояние, связанное с данной картиной q :

$$|\Omega_a\rangle_q = |U_a\rangle|v\rangle_{bc}|q\rangle_{\beta\gamma}. \quad (3.45)$$

Можно проверить, что

$$|W_a\rangle = |\Omega_a\rangle_{-1} \quad (3.46)$$

удовлетворяет (3.42). Следовательно, физические поля первого типа имеют вид

$$W_a(z, \bar{z}) = U_a(z, \bar{z}) \cdot c(z)\bar{c}(\bar{z}) \cdot \delta(\gamma(z))\delta(\bar{\gamma}(\bar{z})). \quad (3.47)$$

Аналогично, можно проверить, что в $q = 0$ картине может быть определен другой тип физических состояний

$$|\tilde{W}_a\rangle = \left(\bar{G}_{-1/2}^{M+L} + \frac{1}{2}\bar{G}_{-1/2}^g \right) \left(G_{-1/2}^{M+L} + \frac{1}{2}G_{-1/2}^g \right) |\Omega_a\rangle_0. \quad (3.48)$$

На языке теории поля,

$$\tilde{W}_a(z, \bar{z}) = \left(\bar{G}_{-1/2}^{\text{M+L}} + \frac{1}{2} \bar{G}_{-1/2}^{\text{g}} \right) \left(G_{-1/2}^{\text{M+L}} + \frac{1}{2} G_{-1/2}^{\text{g}} \right) U_a(z, \bar{z}) \cdot \bar{c}(\bar{z}) c(z). \quad (3.49)$$

В Приложении В.2, приведено доказательство того факта, что \tilde{W}_a представляет собой класс когомологий.

Интегральное представление физического состояния (3.43), отвечающее $\Psi(z, \bar{z}) = \tilde{W}_a(z, \bar{z})$, имеет вид

$$\int \bar{G}_{-1/2} G_{-1/2} U_a(z, \bar{z}) d^2 z. \quad (3.50)$$

Когда представление в материальном секторе является вырожденным, возникает дополнительное «дискретное» физическое состояние. Важность дискретных состояний [123; 124] для вычисления корреляторов в бозонной LG была показана в [30]. Довольно естественно, что подобный эффект имеется и в суперсимметричном расширении LG. Мы начнем с описания конструкции дискретных состояний в СЛГ. Вырожденные материальные поля $\Phi_{m,n}$ в сочетании с вырожденными экспоненциальными полями $V_{m,n}$ соответствующей SLFT дают нетривиальные БРСТ инвариантные операторы с духовым числом равным нулю

$$O_{m,n}(z, \bar{z}) = \bar{H}_{m,n} H_{m,n} \Phi_{m,n}(z, \bar{z}) V_{m,n}(z, \bar{z}). \quad (3.51)$$

Операторы $H_{m,n}$ состоят из супер вирасоровских генераторов $(mn-1)/2$ уровня в материальном и Лиувиллевском секторах, а также духовых полей. Условие того, что поле $O_{m,n}$ замкнуто, но нетривиально, то есть представляет собой класс когомологий, определяет оператор $H_{m,n}$ однозначно по модулю точных членов. Существует важная связь между дискретными состояниями и физическими операторами, описанными выше. Введем оператор

$$J_{m,n}(z) = \left(G_{-1/2}^{\text{M+L}} - \frac{1}{2} G_{-1/2}^{\text{g}} \right) D_{m,n}^{\text{L}} c(z), \quad (3.52)$$

действие которого определяется просто левым умножением. Ниже мы опускаем зависимость от z и \bar{z} . Тогда выполняется основное соотношение

$$\bar{Q} Q O_{m,n} = \bar{J}_{m,n} J_{m,n} \Phi_{m,n} V_{m,n}, \quad (3.53)$$

в котором мы временно предполагаем, что сингулярный вектор в секторе Лиувилля не исключен. Мы доказываем это соотношение в Приложении В.2, а также используем его для получения важного утверждения

$$\bar{Q}QO'_{m,n} = B_{m,n}\tilde{W}_{m,-n}, \quad (3.54)$$

где мы вводим логарифмические аналоги дискретных состояний $O_{m,n}$,

$$O'_{m,n} = \bar{H}_{m,n}H_{m,n}\Phi_{m,n}V'_{m,n}, \quad (3.55)$$

а $B_{m,n}$ – коэффициенты в высших уравнениях движения SLFT (3.14). Отметим, что в пространстве состояний, расширенном логарифмическими полями, поле $\tilde{W}_{m,n}$ становится тривиальным.¹

Еще одно полезное следствие (3.54) может быть получено путем применения $\bar{b}_{-1}b_{-1}$,

$$\bar{G}_{-1/2}G_{-1/2}U_{m,-n} = B_{m,n}^{-1}(\bar{\partial} - \bar{Q}\bar{b}_{-1})(\partial - Qb_{-1})O'_{m,n} \quad (3.56)$$

или

$$\bar{G}_{-1/2}G_{-1/2}U_{m,-n} = B_{m,n}^{-1}\bar{\partial}\partial O'_{m,n} \pmod{Q}. \quad (3.57)$$

Это означает, что подынтегральная функция в (3.50) является полной производной по модулю БРСТ точных членов.

Очевидно, что частные случаи, описанные выше, отвечают следующей общей структуре пространства физических состояний в СЛГ. Если представление в материальном секторе не вырождено, в каждой картине существует ровно один класс кохомологий. В вырожденном случае возникают два дополнительных физических поля. Например, в картине $q = 0$ существуют поля $\tilde{W}_{m,n}$ и $O_{m,n}$ и третий тип кохомологий с духовым числом $N_g = 2$, которые мы здесь не обсуждаем.

Операторные произведения основного кольца. В пространстве физических состояний данного типа (в нашем случае либо W_a , либо \tilde{W}_a) дискретные

¹Однако наивно полагать, что это приводит к тривиальным результатам для корреляционных функций с любыми другими физическими полями. Далее мы увидим, что из-за трансформационных свойств БРСТ тока этого не происходит.

состояния $O_{m,n}$ действуют по модулю точных форм, потому что их действие не изменяет числа духов, и все нетривиальные классы в данных картинах в общем случае исчерпываются этими составными полями с различными a . Кроме того, ввиду ограничений по слиянию вырожденных полей $\Phi_{m,n}$ и $V_{m,n}$ в операторном разложении общая структура операторного произведения имеет вид

$$\begin{aligned} O_{m,n}W(a) &= \sum_{\{r,s\} \in (m,n)} A_{r,s}^{(m,n)}W(a + \lambda_{r,s}), \\ O_{m,n}\tilde{W}(a) &= \sum_{\{r,s\} \in (m,n)} \tilde{A}_{r,s}^{(m,n)}\tilde{W}(a + \lambda_{r,s}), \end{aligned} \quad (3.58)$$

где множество целых чисел (m,n) определяется по ограничениям на операторное разложение вырожденных полей как в материальном, так и Лиувиллевском секторах. Чтобы рассчитать численные коэффициенты $A_{r,s}^{(m,n)}$ и $\tilde{A}_{r,s}^{(m,n)}$, полезно вычислить их явно в простейшем нетривиальном случае $(m,n) = (1,3)$. В этом случае $a_{1,3} = -b$. Уравнение (3.53) определяет $H_{m,n}$ в явном виде. Для $H_{1,3}$ мы находим

$$\begin{aligned} H_{1,3} &= L_{-1}^M - L_{-1}^L - G_{-1/2}^M G_{-1/2}^L + b^2 \beta_{-3/2} \gamma_{1/2} + \\ &+ 2b^2 b_{-2} c_1 - b^2 (G_{-1/2}^M + G_{-1/2}^L) \beta_{-3/2} c_1 \end{aligned} \quad (3.59)$$

и соответствующее поле

$$\begin{aligned} O_{13}(x) &= \Phi'_{13}(x)V_{13}(x) - \Phi_{13}(x)V'_{13}(x) - \Psi_{13}(x)\Lambda_{13}(x) + [b^2 : \beta(x)\gamma(x) : \\ &+ 2b^2 : b(x)c(x) :] \Phi_{13}(x)V_{13}(x) - b^2 \beta(x)c(x)\Psi_{13}(x)V_{13}(z) \\ &- b^2 \beta(x)c(x)\Phi_{13}(x)\Lambda_{13}(z). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Здесь мы вводим специальные обозначения для верхних компонент примарных супермультиплетов в Лиувиллевском и материальном секторах

$$\begin{aligned} \Lambda_a &= \bar{G}_{-1/2}^L G_{1/2}^L V_a, \\ \Psi_a &= \bar{G}_{-1/2}^M G_{1/2}^M \Phi_a. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Рассмотрим сначала операторное произведение $O_{13}(x)W_a(0)$. Специальные операторные разложения, которые необходимы нам в этом случае, это разложения

вырожденного поля V_{13} и поля Λ_{13} в Лиувиллевском секторе (см. [57; 58])

$$\begin{aligned}
V_{1,3}(x)V_a(0) &= (x\bar{x})^{ab}C_+^L(a)[V_{a-b}]_{ee} \\
&\quad + (x\bar{x})^{1+b^2}\tilde{C}_0^L(a)[V_a]_{oo} + (x\bar{x})^{1-ba+b^2}C_-^L(a)[V_{a+b}]_{ee}, \\
\Lambda_{1,3}(x)V_a(0) &= (x\bar{x})^{ab+1/2}C_+^L(a)[V_{a-b}]_{oo} \\
&\quad + (x\bar{x})^{b^2}\tilde{C}_0^L(a)[V_a]_{ee} + (x\bar{x})^{1-ba+b^2}C_-^L(a)[V_{a+b}]_{oo},
\end{aligned} \tag{3.62}$$

где $C_-(a)$, $\tilde{C}_0(a)$, и $C_+(a)$ – это «специальные» структурные константы

$$\begin{aligned}
C_+^L(a) &= 1, \\
\tilde{C}_0^L(a) &= \frac{2\pi i\mu\gamma(ab-b^2)}{\gamma(-b^2)\gamma(ab)}, \\
C_-^L(a) &= \pi^2\mu^2b^4\gamma^2\left(\frac{1}{2}+\frac{b^2}{2}\right)\gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{b^2}{2}+ab\right)\gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{b^2}{2}-ab\right).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Аналогичные операторные произведения в материальном секторе могут быть легко реконструированы исходя из (3.62) с помощью перенормировки полей и аналитического продолжения

$$\begin{aligned}
\Phi_{13}(x)\Phi_a(0) &= (x\bar{x})^{1-ab-b^2}C_-^M(a)[\Phi_{a-b}]_{ee} \\
&\quad + (x\bar{x})^{1-b^2}\tilde{C}_0^M(a)[\Phi_a]_{oo} + (x\bar{x})^{ab}C_+^M(a)[\Phi_{a+b}]_{ee}, \\
\Psi_{13}(x)\Phi_a(0) &= (x\bar{x})^{1-ab-b^2}C_-^M(a)[\Phi_{a-b}]_{oo} \\
&\quad + (x\bar{x})^{-b^2}\tilde{C}_0^M(a)[\Phi_a]_{ee} + (x\bar{x})^{ab}C_+^M(a)[\Phi_{a+b}]_{oo}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

и

$$\begin{aligned}
C_-^M(a) &= \left(\frac{\gamma(1/2+b^2/2)\gamma(ab-1/2+b^2/2)}{\gamma(-1/2+3b^2/2)\gamma(ab+1/2-b^2/2)}\right)^{1/2}, \\
\tilde{C}_0^M(a) &= ib^{-2}\gamma\left(\frac{bQ}{2}\right)\left(\frac{\gamma(1-b^2)\gamma(b^2/2-1/2)}{\gamma(b^2-1)\gamma(3b^2/2-1/2)}\right)^{1/2}\frac{\gamma(ab+b^2)}{\gamma(ab)}, \\
C_+^M(a) &= \left(\frac{\gamma(1/2+b^2/2)\gamma(ab-1/2+3b^2/2)}{\gamma(-1/2+3b^2/2)\gamma(ab+1/2+b^2/2)}\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Достаточно просто убедиться, что в операторном произведении (см. Приложение В.3) остается лишь

$$O_{13}(x)W_a(0) = A_{0,-2}^{(1,3)}W_{a-b}(0) + A_{0,0}^{(1,3)}W_a(0) + A_{0,2}^{(1,3)}W_{a+b}(0). \tag{3.66}$$

Сокращение «нефизических» членов в операторном произведении может быть проверено путем явного вычисления, по крайней мере на уровне примарных полей. Коэффициенты могут быть выписаны в специальном факторизованном виде

$$\begin{aligned} A_{0,-2}^{(1,3)} &= (1 - 2ab + b^2)^2 C_-^M(a-b) C_+^L(a) = X \frac{N(a)}{N(a-b)}, \\ A_{0,0}^{(1,3)} &= \tilde{C}_0^M(a-b) \tilde{C}_0^L(a) = X \frac{N(a)}{N(a)}, \\ A_{0,2}^{(1,3)} &= (1 - 2ab + b^2)^2 C_+^M(a-b) C_-^L(a) = X \frac{N(a)}{N(a+b)}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

где

$$X = 4b^2 \left[\pi \mu \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{2} \right) \right] \left[\frac{\gamma(1/2 + b^2/2)}{\gamma(3b^2/2 - 1/2)} \right]^{1/2} \quad (3.68)$$

и

$$N(a) = \left[\pi \mu \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{2} \right) \right]^{-a/b} \left[\gamma \left(ab - \frac{b^2}{2} + \frac{1}{2} \right) \gamma \left(\frac{a}{b} - \frac{b^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.69)$$

Аналогичное вычисление может быть выполнено для операторного произведения $O_{m,n} \tilde{W}$. Оказывается, что результат можно обобщить на произвольную пару (m,n) как

$$A_{r,s}^{(m,n)} = \tilde{A}_{r,s}^{(m,n)} = K B_{m,n} N(a_{m,-n}) \frac{N(a)}{N(a + \lambda_{r,s})}, \quad (3.70)$$

где коэффициент K является универсальным, т.е. независимым от (m,n) ,

$$K = \frac{1}{2b} \left[\frac{\gamma(1/2 + b^2/2)}{\gamma(3/2 - b^{-2}/2)} \right]^{1/2}. \quad (3.71)$$

Выражение (3.58) сводится к

$$\begin{aligned} O_{m,n} \frac{W(a)}{N(a)} &= K B_{m,n} N(a_{m,-n}) \sum_{\{r,s\} \in (m,n)} \frac{W(a + \lambda_{r,s})}{N(a + \lambda_{r,s})}, \\ O_{m,n} \frac{\tilde{W}(a)}{N(a)} &= K B_{m,n} N(a_{m,-n}) \sum_{\{r,s\} \in (m,n)} \frac{\tilde{W}(a + \lambda_{r,s})}{N(a + \lambda_{r,s})}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.1.3 Корреляционные числа

Требование сохранения духового тока приводит к общей форме n -точечных корреляционных чисел на сфере для трех основных типов наблюдаемых, введенных в предыдущем разделе:

$$\langle\langle a_1 a_2 \cdots a_n \rangle\rangle_{\text{SLG}} = \left\langle W_{a_1}(z_1) W_{a_2}(z_2) \tilde{W}_{a_3}(z_3) \prod_{i=4}^n \int \bar{G}_{-1/2} G_{-1/2} U_{a_i}(z_i) d^2 z_i \right\rangle. \quad (3.73)$$

Простейшим случаем является трехточечное корреляционное число, где интегрирование по пространству модулей отсутствует, и результат факторизуется в произведение трехточечных функций материального, Лиувилевского и духового секторов. Используя (3.47) и (3.49), мы можем получить

$$\begin{aligned} \langle\langle a_1 a_2 a_3 \rangle\rangle_{\text{SLG}} &= [\langle V_{a_1} V_{a_2} V_{a_3} \rangle \langle \Phi_{a_1-b} \Phi_{a_2-b} \Psi_{a_3-b} \rangle \\ &\quad + \langle V_{a_1} V_{a_2} \Lambda_{a_3} \rangle \langle \Phi_{a_1-b} \Phi_{a_2-b} \Phi_{a_3-b} \rangle] \langle c_1 c_2 c_3 \rangle \langle \delta(\gamma_1) \delta(\gamma_2) \rangle \\ &= C^{\text{M}}(a_1 - b, a_2 - b, a_3 - b) \tilde{C}^{\text{L}}(a_1, a_2, a_3) \\ &\quad + \tilde{C}^{\text{M}}(a_1 - b, a_2 - b, a_3 - b) C^{\text{L}}(a_1, a_2, a_3) \end{aligned} \quad (3.74)$$

или явно (см. Приложение В.3)

$$\langle\langle a_1 a_2 a_3 \rangle\rangle_{\text{SLG}} = \Omega \prod_{i=1}^3 N(a_i), \quad (3.75)$$

где

$$\Omega = i \left[\pi \mu \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{2} \right) \right]^{Q/b} \left[\frac{\gamma(b^2/2 + 1/2) \gamma(b^{-2}/2 - 1/2)}{b^2} \right]^{1/2} \quad (3.76)$$

и нормировочный коэффициент $N(a)$ определен в (3.69).

Статсумма и двухточечные числа могут быть легко получены из выражения для трехточечной функции. Следующий шаг заключается в получении четырехточечных чисел. Соответствующее выражение является более сложным: оно включает в себя интегрирование по пространству модулей. Наивный и преимущественно численный способ вычисления основывается на разложении четырехточечных корреляционных функций по конформным блокам как в Ли-

увиллевском, так и в материальном секторах (см. [58]). Но подобное прямое вычисление не в состоянии обеспечить точных результатов. Ниже мы опишем другой метод вычисления четырехточечного интеграла. Соотношение (3.57) позволяет свести интеграл по модулям в выражении (3.73) для корреляционных чисел к интегралам по границам, если один из параметров является вырожденным, $a_i = a_{m,-n}$. В частности, четырехточечное корреляционное число становится равным

$$\langle\langle a_{m,-n} a_1 a_2 a_3 \rangle\rangle_{\text{SLG}} = B_{m,n}^{-1} \int_{\partial\Gamma} \partial \langle O'_{m,n}(x) W_{a_1}(x_1) W_{a_2}(x_2) \tilde{W}_{a_3}(x_3) \rangle \frac{dx}{2i}, \quad (3.77)$$

где граница состоит из трех окружностей $\partial\Gamma = \sum_{i=1}^3 \partial\Gamma_i$ вокруг точек x_1, x_2 и x_3 (с интегрированием по часовой стрелке) и большой окружности $\partial\Gamma_\infty$ вблизи бесконечности (с интегрированием против часовой стрелки), которая возникает из-за того, что оператор $O'_{m,n}$ не является скаляром. Учитывая дистрибутивный характер действия БРСТ заряда, мы можем сдвинуть его после вставки других физических полей, что означает, что Q -точные члены в (3.57) не дают вклад в (3.77). Для вычисления граничных членов необходимо понимать, как операторные произведения $O'_{m,n}(x)W(0)$ и $O'_{m,n}(x)\tilde{W}(0)$ ведут себя на малых расстояниях.

Граничные члены. Интегралы по границам в (3.77) определяются операторными произведениями логарифмических полей $O'_{m,n}$ с основными физическими полями $W(a_i)$ и $\tilde{W}(a_i)$. Вывод разложений этих операторных произведений на основе соответствующих операторных произведений основного кольца почти такой же, как и в бозонном случае [30]. Отличие состоит в другом определении логарифмического поля $V'(a)$ и другом соотношении между конформной размерностью и параметром b . Внимательный анализ показывает, что эти два отличия компенсируют друг друга. Следовательно, необходимые логарифмические вклады в разложение операторного произведения имеют вид

$$\begin{aligned} O'_{m,n} \frac{W(a)}{N(a)} &= \log(x\bar{x}) K B_{m,n} N(a_{m,-n}) \sum_{\{r,s\} \in (m,n)} q_{r,s}^{(m,n)}(a) \frac{W(a + \lambda_{r,s})}{N(a + \lambda_{r,s})}, \\ O'_{m,n} \frac{\tilde{W}(a)}{N(a)} &= \log(x\bar{x}) K B_{m,n} N(a_{m,-n}) \sum_{\{r,s\} \in (m,n)} q_{r,s}^{(m,n)}(a) \frac{\tilde{W}(a + \lambda_{r,s})}{N(a + \lambda_{r,s})}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

где

$$q_{r,s}^{(m,n)}(a) = |a - \lambda_{r,s} - Q/2|_{\text{Re}} - \lambda_{m,n} \quad (3.79)$$

и

$$|x|_{\text{Re}} = \begin{cases} x & \text{if } \text{Re } x > 0, \\ -x & \text{if } \text{Re } x < 0. \end{cases} \quad (3.80)$$

Вклад на бесконечности возникает следующим образом. Дело в том, что логарифмическое поле не является скаляром; при конформных преобразованиях координат $x \rightarrow y$ оно приобретает неоднородную часть

$$O'_{m,n}(y) = O'_{m,n}(x) - 2\Delta'_{m,n} O_{m,n}(x) \log |y_x|, \quad (3.81)$$

где

$$\Delta'_{m,n} = \frac{d}{da} \Delta_a^{(L)}|_{a=a_{m,n}} = \lambda_{m,n}. \quad (3.82)$$

Преобразование (3.81) приводит к следующему поведению корреляционной функции с $O'_{m,n}(x)$ при $x \rightarrow \infty$

$$\langle O'_{m,n}(x) W_{a_1}(x_1) W_{a_2}(x_2) \tilde{W}_{a_3}(x_3) \rangle \sim -2\Delta'_{m,n} \log(x\bar{x}) \langle O_{m,n} W_{a_1} W_{a_2} \tilde{W}_{a_3} \rangle. \quad (3.83)$$

Таким образом, вклад граничного члена $\partial\Gamma_\infty$ вычисляется как

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial\Gamma_\infty} \partial \langle O'_{m,n}(x) W_{a_1}(x_1) W_{a_2}(x_2) \tilde{W}_{a_3}(x_3) \rangle dx = -2\pi \lambda_{m,n} \langle O_{m,n} W_{a_1} W_{a_2} \tilde{W}_{a_3} \rangle. \quad (3.84)$$

Четырехточечное корреляционное число. Суммируя граничные вклады (3.78) и член кривизны (3.84), мы находим выражение для четырехточечного корреляционного числа

$$\langle \langle a_{m,-n} a_1 a_2 a_3 \rangle \rangle_{\text{SLG}} = \pi K N(a_{m,-n}) \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{r,s \in (m,n)} q_{r,s}^{(m,n)}(a_i) + 2mn \lambda_{m,n} \right\} \langle \langle a_1 a_2 a_3 \rangle \rangle, \quad (3.85)$$

где множество слияния $(m,n) = \{1-m : 2 : m-1, 1-n : 2 : n-1\}$, а второй член в фигурных скобках является результатом вклада кривизны. Нормировочный коэффициент $N(a_{m,-n})$ определяется в (3.69), и трехточечное корреляционное число $\langle \langle a_1 a_2 a_3 \rangle \rangle$ дается формулой (4.130). Можно упростить эти соотношения,

вводя перенормированные поля \mathcal{W}_a , $\tilde{\mathcal{W}}_a$, и \mathcal{U}_a вида

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_a &= \frac{W_a}{N(a)}, \\ \tilde{\mathcal{W}}_a &= \frac{\tilde{W}_a}{N(a)}, \\ \mathcal{U}_a &= \frac{U_a}{N(a)}.\end{aligned}\tag{3.86}$$

Выражение (3.85) сводится к

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Omega} \int \langle \bar{G}_{-1/2} G_{-1/2} \mathcal{U}_{m,-n}(x) \mathcal{W}_{a_1}(x_1) \mathcal{W}_{a_2}(x_2) \tilde{\mathcal{W}}_{a_3}(x_3) \rangle d^2x \\ = \pi K \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{r,s \in (m,n)} q_{r,s}^{(m,n)}(a_i) + 2mn\lambda_{m,n} \right\},\end{aligned}\tag{3.87}$$

где Ω определено в (3.76). Формулы (3.85) и (3.87) для четырехточечных корреляционных чисел в минимальной супер Лиувиллевской гравитации вместе с явным выражением для структурных констант (4.130) являются основными результатами данного раздела.

3.2 Однопетлевые амплитуды минимальной бозонной струны

Бозонная теория двумерной Лиувиллевской гравитации [3] остается одной из немногих последовательных квантовых теорий поля, которые включают в себя динамическое метрическое поле. Общая формулировка Лиувиллевской гравитации, действие которой индуцируется критической материей, позволяет рассматривать специальный тип «решаемых» примеров, в которых материальный сектор представлен некоторой минимальной моделью [4] двумерной конформной теории поля. Для таких бозонных моделей мы используем далее термин «минимальная Лиувиллевская гравитация». Считается, что скейлинговый предел матричных моделей (см., например, работу [79] и ссылки в ней) дает альтернативное описание минимальной Лиувиллевской гравитации. Однако на данный момент доказательство этого утверждения отсутствует. Заметим, что обоб-

щение на суперсимметричный случай из предыдущего раздела пока что также недоступно. В работах [28;31] был найден способ отождествления результатов матричных моделей с соответствующими результатами минимальной Лиувиллевской гравитации для конформной материи, представленной неунитарной серией $(2,2p+1)$ минимальных моделей теории поля. В работе [31] было построено резонансное преобразование, связывающее параметры взаимодействия Лиувиллевской гравитации с параметрами взаимодействия матричных моделей. В терминах преобразованных параметров корреляционные числа матричных моделей должны совпадать с корреляционными числами, определенными естественным образом в рамках минимальной Лиувиллевской гравитации. В работе [125] проблема анализа матричных моделей была рассмотрена для высших родов. В частности, в [125] к производящей функции одноматричной модели был найден вклад тора и для нахождения одно- и двухточечных корреляционных чисел на торе в рамках теории Лиувилля были применены резонансные преобразования. Более подробно мы вернемся к рассмотрению альтернативного подхода к теории Лиувиллевской гравитации в следующей главе. Целью данного раздела является сравнение результатов матричных моделей с прямыми вычислениями в минимальной Лиувиллевской гравитации в случае поверхности топологии тора.

3.2.1 Структура МЛГ

В подходе Полякова [3] к бозонной струне функциональный интеграл по метрикам сводится к интегралу по модулям поверхности Римана. Подынтегральное выражение включает в себя корреляционные функции духов b, c и вертексных операторов $U_k = \Phi_k V_{a_k}$, которые сконструированы из материальных полей и надлежащих одевающих Лиувиллевских экспоненциальных полей. Благодаря факторизованному виду вертексного оператора подынтегральное выражение интеграла по модулям раскладывается в произведение корреляционных функций материального, Лиувиллевского и духового секторов. Центральный

заряд теории Лиувилля выражается как

$$c^L = 1 + 6Q^2, \quad (3.88)$$

где $Q = b + b^{-1}$, а b является Лиувиллевской константой взаимодействия, связанной с центральным зарядом конформной материи с помощью так называемого условия баланса центрального заряда $c^M + c^L = 26$, которое эквивалентно требованию полной Вейлевской (БРСТ) инвариантности. Материальный сектор описывается минимальной моделью $M(p/q)$ с центральным зарядом

$$c^M = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}, \quad (3.89)$$

которая обладает набором примарных полей $\Phi_{m,n}$ с $m \in (1, \dots, p-1)$ и $n \in (1, \dots, q-1)$ следующих конформных размерностей

$$\Delta_{m,n}^M = \frac{(np - mq)^2 - (p - q)^2}{4pq}. \quad (3.90)$$

Условие баланса центрального заряда определяет значение Лиувиллевской константы взаимодействия $b = \sqrt{p/q}$. Конформная размерность

$$\Delta^L(a) = a(Q - a) \quad (3.91)$$

экспоненциального Лиувиллевского поля $V(a)$ в конструкции вертексного оператора $U_{m,n} = \Phi_{m,n}V(a)$ также фиксируется Вейлевской инвариантностью, которая требует, чтобы полная конформная размерность вертексного оператора равнялась $\Delta_{m,n}^M + \Delta^L(a) = 1$. Это дает $a = a_{m,-n}$, где

$$a_{m,n} = \frac{(1-m)b^{-1} + (1-n)b}{2}. \quad (3.92)$$

3.2.2 Амплитуды на торе в МЛГ

В N -точечной амплитуде на торе сохранение духового тока требует фиксации координат одного вертекса [126]. Для того, чтобы быть БРСТ инвариант-

ной, эта вставка должна находиться в следующей обкладке духовых полей

$$\langle O_{k_1} \cdots O_{k_N} \rangle_{\text{torus}} = \int_F d\tau d\bar{\tau} \langle b(0) \bar{b}(0) c(0) \bar{c}(0) U_{k_1}(0) \prod_{n=2}^N \int dz_n d\bar{z}_n U_{k_n}(z_n, \bar{z}_n) \rangle_{\tau}. \quad (3.93)$$

F здесь является фундаментальной областью модулярной группы: $\tau_2 > 0$, $|\tau| > 1$, $-1/2 \leq \tau_1 < 1/2$. Среднее значение в правой части берется по материальному, Лиувиллевскому и духовому секторам, рассматриваемым на торе с модулярным параметром $\tau = \tau_1 + i\tau_2$. Далее мы интересуемся минимальной Лиувиллевской гравитацией $\mathcal{MG}_{2/2p+1}$ на торе [64]. В этом случае Лиувиллевская константа взаимодействия есть

$$b = \sqrt{\frac{2}{2p+1}}, \quad (3.94)$$

и одноточечная амплитуда имеет вид

$$\langle O_k \rangle_{\text{torus}} = \int_F d\tau d\bar{\tau} \langle b \bar{b} c \bar{c} \rangle_{\tau} \langle \Phi_k \rangle_{\tau} \langle V(a_{1,-k-1}) \rangle_{\tau}, \quad (3.95)$$

где мы использовали сокращенное обозначение $\Phi_k = \Phi_{1,k+1}$ и $k = 0, \dots, p-1$. Четырехточечная корреляционная функция в духовом секторе дается [126]

$$\langle b \bar{b} c \bar{c} \rangle_{\tau} = |\eta(q)|^4 \quad (3.96)$$

с $\eta(q) = q^{1/24} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)$, являющейся эта-функцией Дедекинда, и $q = e^{2i\pi\tau}$. В терминах теории поля на комплексной плоскости одноточечные корреляционные функции на торе с модулярным параметром τ принимают вид

$$\langle \Phi_k \rangle_{\tau} = \text{Tr}(q\bar{q})^{L_0 - c^M/24} \Phi_k = \sum_{\{\Delta\}} C_{\Delta_k, \Delta}^{\Delta} (q\bar{q})^{\Delta - c^M/24} |F^M(\Delta_k, \Delta, q)|^2, \quad (3.97)$$

$$\langle V_a \rangle_{\tau} = \text{Tr}(q\bar{q})^{L_0 - c^L/24} V_a = \int \frac{dP}{4\pi} C_{a, Q/2+iP}^{Q/2+iP} (q\bar{q})^{\Delta(P) - c^L/24} |F^L(\Delta(a), \Delta(Q/2 + iP), q)|^2. \quad (3.98)$$

$C_{\Delta_k, \Delta}^{\Delta}$ и $C_{a, Q/2+iP}^{Q/2+iP}$ здесь являются структурными константами операторных алгебр в материальном и Лиувиллевском секторах соответственно, тогда как $F(\Delta_{\text{ext}}, \Delta_{\text{int}}, q)$ – одноточечная функция конформного блока, определенная как

вклад представления со старшим весом алгебры Вирасоро с конформной размерностью Δ_{int} . В работах [127; 128] были найдены рекуррентные соотношения на функцию Лиувилевского конформного блока, что сделало возможным вычислить ее разложение в ряд по q .

Рассмотрим сначала наиболее простой пример $\langle O_0 \rangle$. Структурная константа $C_{0,\Delta}^\Delta = \delta_{0,\Delta}$, так что в материальном секторе мы имеем просто статсумму соответствующей минимальной модели. Она выражается в терминах характеров неприводимых представлений алгебры Вирасоро. Интересно, что в этом случае «одевающая» Лиувилевская корреляционная функция $\langle V(a_{1,-1}) \rangle_\tau$ может быть вычислена в явном виде. Внешняя конформная размерность в (3.98) оказывается равной $\Delta_{\text{ext}} = \Delta^L(a_{1,-1} = b) = 1$. Используя рекурсивный алгоритм, предложенный в работе [127], можно показать, что конформный блок $F(1, \Delta_{\text{int}}, q)$ не зависит от внутренней конформной размерности Δ_{int} и равняется

$$F(1, \Delta_{\text{int}}, q) = \frac{q^{1/24}}{\eta(q)}. \quad (3.99)$$

Общее выражение для диагональной Лиувилевской структурной константы имеет вид

$$C_{a, Q/2+iP}^{Q/2+iP} = (\pi \gamma(b^2) b^{2-2b^2})^{-a/b} \frac{\Upsilon(b) \Upsilon(2a) \Upsilon(2iP) \Upsilon(-2iP)}{\Upsilon^2(a) \Upsilon(a+2iP) \Upsilon(a-2iP)}. \quad (3.100)$$

Используя определение Υ -функции, для $a = b$ находим

$$C_{b, Q/2+iP}^{Q/2+iP} = \frac{4P^2}{\pi b}. \quad (3.101)$$

Интегрирование по P в (3.98) можно выполнить аналитически. Это дает

$$\langle O_0 \rangle_{\text{torus}} = \frac{1}{4\pi^2 b} \int_F d\tau d\bar{\tau} \tau_2^{-3/2} |\eta(q)|^2 \sum_{s=1, \dots, p} |\chi_{1,s}(q)|^2, \quad (3.102)$$

где характеры неприводимых представлений имеют следующий явный вид (см., например, [129])

$$\chi_{1,s}(q) = \frac{q^{\frac{(2s-(2p+1))^2}{8(2p+1)}}}{\eta(q)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(q^{2(2p+1)k^2 + (2s-(2p+1))k} - q^{2(2p+1)k^2 + (2s-(2p+1))k+s} \right). \quad (3.103)$$

Данный результат может быть записан как

$$\langle O_0 \rangle_{\text{torus}} = \frac{1}{4\pi^2 b} \sum_{i=1, \dots, p} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left(I(\alpha_{n,i}, \alpha_{m,i}, \delta_i) - 2I(\alpha_{n,i}, \beta_{m,i}, \delta_i) + I(\beta_{n,i}, \beta_{m,i}, \delta_i) \right), \quad (3.104)$$

где

$$\alpha_{k,i} = 2(2p+1)k^2 + k(2i-2p-1) \quad (3.105)$$

$$\beta_{k,i} = 2(2p+1)k^2 + k(2i+2p+1) + i \quad (3.106)$$

$$\delta_i = \frac{(2i-2p-1)^2}{8(2p+1)} \quad (3.107)$$

и

$$I(\alpha, \beta, \delta) = \int_{-1/2}^{1/2} dx e^{2\pi i(\alpha-\beta)x} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} dy y^{-3/2} e^{-2\pi(2\delta+\alpha+\beta)y}. \quad (3.108)$$

Корреляционное число $\langle O_0 \rangle$ может быть вычислено аналитически. Данное вычисление основывается на следующих идеях [130]. Статсумма на торе минимальной модели $M(2, 2p+1)$ связана со статсуммой на торе свободного скалярного поля как

$$\frac{1}{2} \left[Z_{M(2/(2p+1))} = \sum_{s=1, \dots, p} |\chi_{1,s}(q)|^2 = Z_B \left(g = \sqrt{2(2p+1)} \right) - Z_B \left(g = \sqrt{2/(2p+1)} \right) \right], \quad (3.109)$$

где

$$Z_B(g) = \frac{1}{|\eta(q)|^2} \sum_{s,t} q^{(sg^{-1}+tg)/4} \bar{q}^{(sg^{-1}-tg)/4}. \quad (3.110)$$

С помощью формулы суммирования Пуассона можно вывести, что

$$Z_B(g) = g \frac{1}{\sqrt{\tau_2} |\eta(q)|^2} \sum_{n,m} e^{-\frac{\pi g^2 |n-m\tau|^2}{\tau_2}}. \quad (3.111)$$

Данный вид материальной статсуммы позволяет вычислить (3.102) явно

$$\langle O_0 \rangle_{\text{torus}} = \frac{1}{8\pi^2 b} \left[J\left(\sqrt{2(2p+1)}\right) - J\left(\sqrt{2/(2p+1)}\right) \right], \quad (3.112)$$

где

$$J(g) = g \int_F \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \sum_{n,m} e^{-\frac{\pi g^2 |n-m\tau|^2}{\tau_2}} = g \left\{ \int_F \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 \int_0^{\infty} \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} e^{-\frac{\pi g^2 k^2}{\tau_2}} \right\}, \quad (3.113)$$

где суммирование по m во втором члене заменяется на сумму по неэквивалентным изображениям фундаментальной области, которые вместе охватывают полосу $-\frac{1}{2} \leq \tau_1 \leq \frac{1}{2}$. Выполнив интегрирования в (Б.17), находим

$$J(g) = \frac{\pi}{3} \left(g + \frac{1}{g} \right). \quad (3.114)$$

Результат для одноточечной амплитуды принимает простой вид

$$\langle O_0 \rangle_{\text{torus}} = \frac{p}{24\pi}. \quad (3.115)$$

Для различных значений p численные проверки показывают, что даже если мы сохраняем только первый член в сумме по (m,n) в (3.104), результаты (3.104) и (3.115) совпадают с точностью до нескольких знаков. Чтобы сравнить этот результат с результатами матричных моделей, мы должны рассмотреть отношение двух одноточечных амплитуд. Это позволит избежать проблему, связанную с различными нормировками соответствующих статсумм. Оказывается достаточно вычислить корреляционные числа $\langle O_k \rangle_{\text{torus}}$, сохраняя в разложении конформного блока только члены нулевого порядка. В данном приближении материальная корреляционная функция имеет вид

$$\langle \Phi_k \rangle_{\tau} = \sum_{m=1, \dots, p} C_{\Delta_{1,k+1}, \Delta_{1,m}}^{\Delta_{1,m}} |q|^{2\Delta_{1,m} - \frac{cM}{12}}, \quad (3.116)$$

а Лиувиллевская функция выглядит как

$$\langle V(a_{1,-k-1}) \rangle_{\tau} = \int \frac{dP}{4\pi} C_{(1+k/2)b, Q/2+iP}^{Q/2+iP} |q|^{2\Delta_P - \frac{cL}{12}}. \quad (3.117)$$

Мы можем представить результат нулевого порядка для одноточечного корреляционного числа (3.95) в следующем виде

$$\langle O_k \rangle_{\text{torus}} = \sum_{m=1, \dots, p} C_{\Delta_{1,k+1}, \Delta_{1,m}}^{\Delta_{1,m}} I_{k,m}, \quad (3.118)$$

где

$$\begin{aligned} I_{k,m} &= \int_F d^2\tau \int \frac{dP}{4\pi} C_{(1+k/2)b, Q/2+iP}^{Q/2+iP} |q|^{2(\alpha_m + P^2)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{1/2} dx \int_0^\infty dP \frac{C_{(1+k/2)b, Q/2+iP}^{Q/2+iP}}{\alpha_m + P^2} e^{-4\pi(\alpha_m + P^2)\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \quad (3.119)$$

и

$$\alpha_m = \frac{Q^2}{4} - \frac{c^L + c^M}{24} + \Delta_{1,m} = \frac{(1 + 2(p - m))^2}{8(1 + 2p)}. \quad (3.120)$$

Для сравнения с результатами матричных моделей нам понадобятся явные выражения для структурных констант при $k = 1, 2$. Структурная константа минимальной модели при $k = 1$ оказывается равной

$$C_{\Delta_{1,2}, \Delta_{1,m}}^{\Delta_{1,m+1}} = \left(\frac{\gamma(2 - 2\rho)\gamma(1 - m\rho)}{\gamma(1 - \rho)\gamma(2 - (1 + m)\rho)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.121)$$

где $\rho = 2/(2p + 1)$. Обратите внимание, что вырожденное поле $\Phi_{1,2}$ не имеет диагональных каналов в операторном разложении. Таким образом, наивно корреляционное число (3.95) для $k = 1$ (так же как и для любого нечетного k) должно исчезать, что, в частности, противоречит результатам матричных моделей. Разрешение этого противоречия довольно простое. Принимая во внимание симметрию таблицы Каца для $M(2, 2p + 1)$ можно увидеть, что операторы $\Phi_{1,p}$ и $\Phi_{1,p+1}$ обладают одинаковой конформной размерностью и, таким образом, представляют одно и то же физическое поле. Следовательно, в случае $k = 1$ единственным неисчезающим членом является член с $m = p$, т.е. член, содержащий материальную структурную константу (3.118). В случае $k = 2$ имеем

$$C_{\Delta_{1,3}, \Delta_{1,m}}^{\Delta_{1,m}} = \frac{\Gamma(2 - 2\rho)}{\Gamma(2\rho)} \left(\frac{\gamma^3(\rho)}{\gamma(3\rho - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma(1 + (1 - m)\rho)}{\gamma(2 - (1 + m)\rho)}. \quad (3.122)$$

В Лиувиллевском секторе мы применяем соотношения сдвига для Υ -функции, чтобы найти

$$C_{3b/2, Q/2+iP}^{Q/2+iP} = (\pi\gamma(b^2)b^{2-2b^2})^{-3/2} 4 \frac{\Upsilon(b)\Upsilon(3b)}{\Upsilon^2(3b/2)} \frac{P^2\Upsilon(b+2iP)\Upsilon(b-2iP)}{\Upsilon(3b/2+2iP)\Upsilon(3b/2-2iP)} \quad (3.123)$$

и

$$C_{2b, Q/2+iP}^{Q/2+iP} = (\pi\gamma(b^2)b^{2-2b^2})^{-2} 4b^{-1-2b^2} \gamma(3b^2) \frac{\Upsilon(b)\Upsilon(3b)}{\Upsilon^2(2b)} \frac{P^2}{\gamma(b^2+2ibP)\gamma(b^2-2ibP)}, \quad (3.124)$$

где явные интегральные представления для комбинаций Υ -функций имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\Upsilon(b)\Upsilon(3b)}{\Upsilon^2(3b/2)} &= \exp \left\{ - \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \left[\frac{\cosh\left(\frac{t-b^2t}{2b}\right) - 2 \cosh\left(\frac{t-2b^2t}{2b}\right) + \cosh\left(\frac{t-5b^2t}{2b}\right)}{\sinh\left(\frac{bt}{2}\right) \sinh\left(\frac{t}{2b}\right)} + (2-9b^2)e^{-t} \right] \right\}, \\ \frac{\Upsilon(b+2iP)\Upsilon(b-2iP)}{\Upsilon(3b/2+2iP)\Upsilon(3b/2-2iP)} &= \exp \left\{ - \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \left[2 \frac{\cosh(2Pt) \sinh\left(\frac{2t-3b^2t}{2b}\right)}{\sinh\left(\frac{t}{2b}\right) \cosh\left(\frac{bt}{4}\right)} - (2-3b^2)e^{-t} \right] \right\}, \\ \frac{\Upsilon(b)\Upsilon(3b)}{\Upsilon^2(2b)} &= \exp \left\{ - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[2 \cosh\left(\frac{t-3b^2t}{2b}\right) \sinh\left(\frac{bt}{2}\right) \sinh^{-1}\left(\frac{t}{2b}\right) - 2b^2e^{-t} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Эти представления Лиувиллевских структурных констант применимы для значений параметра b , связанных (3.94) с произвольным положительным p .

3.2.3 Сравнение с подходом матричных моделей

Ожидается, что подходы Лиувиллевской гравитации и матричных моделей должны быть физически эквивалентными, поскольку своими корнями они восходят к одной идее флуктуирующей двумерной геометрии. Этому существуют многочисленные подтверждения (см., например, [20; 131; 132]). В работе [28] эквивалентность минимальной гравитации $\mathcal{MG}_{2/2p+1}$ с p -критическими одноматричными моделями была проверена до уровня двухточечных корреляционных чисел включительно. Данное сравнение не является прямым ввиду

так называемой резонансной неоднозначности. В работе [31] было предложено специальное резонансное преобразование, связывающее параметры взаимодействия Лиувиллевской гравитации с параметрами, описывающими отклонение от p -критической точки в матричных моделях. Это, в принципе, позволяет определить n -точечные корреляционные функции. Данная гипотеза была проверена до четырехточечных корреляционных чисел включительно на сфере. В работе [125] резонансное преобразование было применено для нахождения производящей функции корреляционных чисел на торе и вычисления некоторых корреляторов в координатах, отвечающих минимальной Лиувиллевской гравитации. Вклад первого рода в статсумму матричной модели дается выражением

$$Z_{\text{torus}} = -\frac{\ln P'(u_*)}{12}, \quad (3.126)$$

где в Лиувиллевском контексте струнный полином определяется как

$$P(u) = \frac{L_{p+1}(u) - L_{p-1}(u)}{2p+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{p-1} \frac{\lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_n}}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} L_{p-\sum k_i-n}(u). \quad (3.127)$$

$L_k(u)$ здесь являются полиномами Лежандра, а u_* – это максимальный вещественный корень $P(u)$. Корреляционные числа выражаются как

$$\langle O_{k_1} \cdots O_{k_n} \rangle_{\text{torus}} = \frac{\partial^n Z_{\text{torus}}}{\partial \lambda_{k_1} \cdots \partial \lambda_{k_n}} \Big|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0}. \quad (3.128)$$

В частности, для одноточечной амплитуды можно получить

$$\langle O_k \rangle_{\text{torus}} = \frac{d}{d\lambda_k} Z_{\text{torus}}(u_*) = \frac{(2p-k)(k+1)}{24}. \quad (3.129)$$

Теперь мы собираемся сравнить наше выражение (3.118) с корреляционными числами матричных моделей (3.129). Ввиду того, что нормировка статсуммы не может быть фиксирована универсальным образом, естественно обратиться к отношению двух различных корреляционных чисел. Кроме того, следует учесть различную нормировку операторов в Лиувиллевской гравитации и подходе матричных моделей. Нормировка операторов не зависит от топологии и может быть

позаимствована из вычисления на сфере [31]:

$$O_k^{\text{MM}} = N(a_{1,-k-1})O_k^{\text{MLG}}, \quad (3.130)$$

где

$$N(a) = (\pi\gamma(b^2))^{a/b} \left(\gamma(2ab - b^2)\gamma(2a/b - 1/b^2) \right)^{-1/2}. \quad (3.131)$$

Мы приходим к выводу, что между одноточечными корреляционными числами на торе в матричных моделях и в минимальной Лиувиллевской гравитации имеет место следующее соотношение

$$\frac{N(a_{1,-k-1}) \langle O_k \rangle_{\text{torus}}^{\text{MLG}}}{N(b) \langle O_0 \rangle_{\text{torus}}^{\text{MLG}}} = \frac{\langle O_k \rangle_{\text{torus}}^{\text{MM}}}{\langle O_0 \rangle_{\text{torus}}^{\text{MM}}}. \quad (3.132)$$

Из (3.129) для $k = 1$ следует

$$\frac{N(3b/2) \langle O_1 \rangle_{\text{torus}}^{\text{MLG}}}{N(b) \langle O_0 \rangle_{\text{torus}}^{\text{MLG}}} = \frac{2p - 1}{p} \quad (3.133)$$

и для $k = 2$

$$\frac{N(2b) \langle O_2 \rangle_{\text{torus}}^{\text{MLG}}}{N(b) \langle O_0 \rangle_{\text{torus}}^{\text{MLG}}} = \frac{3(p - 1)}{p}. \quad (3.134)$$

Численные расчеты соотношений (3.133) и (3.134) для различных моделей $\mathcal{MG}_{2/2p+1}$ с $p = (1, \dots, 20)$ показывают, что результаты совпадают с очень хорошей точностью (более пяти знаков). Например, для $p = 7$ левая часть (3.133) имеет значение 1.85715, в то время как правая часть равняется 1.85714, а левая часть (3.134) есть 2.57134, в то время как правая часть равняется 2.57143.

Таким образом, резонансное преобразование, предложенное в работе [31], позволяет связать корреляционные функции матричных моделей с корреляционными функциями минимальной Лиувиллевской гравитации для старших родов. Разложение конформного блока, которое входит в выражение для одноточечной корреляционной функции, сходится весьма быстро. Достаточно сохранить вклад нулевого порядка в конформные блоки, чтобы уже иметь хорошую численную точность.

3.3 Конструкция амплитуд открытой бозонной струны

В работе [29] было показано, что в теории поля Лиувилля (LFT) выполняется специальный набор соотношений для квантовых операторов. Эти соотношения параметризуются парами натуральных чисел (m, n) , которые связаны с вырожденным представлением алгебры Вирасоро. В классическом пределе они называются «высшими уравнениями движения», поскольку первое соотношение $(1, 1)$ совпадает с обычным уравнением движения Лиувилля. Эти уравнения связывают между собой различные примарные поля LFT $V_a(x)$. Вывод этих уравнений базируется на основных двух постулатах LFT. Первый состоит в том, что в представлениях, построенных на экспоненциальных полях, все сингулярные векторы исчезают; это квантовая версия соотношений классической LFT. Второй постулат по сути утверждает, что множество экспоненциальных полей $\{V_a\}$ (с допустимыми комплексными a) в некотором смысле охватывает весь спектр примарных полей в LFT.

Высшие уравнения оказались полезными в контексте минимальной Лиувиллевской гравитации. В частности, они были использованы в [30; 62; 63] для получения общих четырехточечных корреляционных функций с одним вырожденным материальным полем. Весьма вероятно, что высшие уравнения движения играют ключевую роль в общей программе явного построения полного набора корреляционных функций в минимальной Лиувиллевской гравитации.

В этом разделе мы опишем дополнительный набор соотношений для квантовых операторов в LFT с конформной границей (BLFT). В начале мы дадим основные сведения о BLFT. Затем мы дадим вывод граничной версии высших уравнений движения. В конце раздела рассматриваются возможные применения высших уравнений теории Лиувилля с границей.

3.3.1 Граничная теория поля Лиувилля

Рассмотрим Лиувиллевскую конформную теорию поля на области Γ с границей $\partial\Gamma$. В общем случае действие BLFT имеет вид [93]

$$A_{\text{bound}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} [g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + QR\phi + 4\pi\mu e^{2b\phi}] \sqrt{g} d^2x + \int_{\partial\Gamma} \left(\frac{QK}{2\pi} \phi + \mu_V e^{b\phi} \right) \sqrt{g_I} dx. \quad (3.135)$$

Первый член описывает теорию в объеме. R здесь является скалярной кривизной, связанной с фоновой метрикой g , а μ – это объемная космологическая постоянная. Фоновый заряд $Q = b + 1/b$ определяет центральный заряд теории

$$c_L = 1 + 6Q^2. \quad (3.136)$$

Конформно-инвариантное граничное условие [133] представляется посредством граничного взаимодействия [93], которое дается вторым слагаемым в (3.135). Здесь g_I является индуцированным граничным значением метрики, K есть геодезическая кривизна границы, а μ_V – это граничная космологическая постоянная. В дальнейшем мы всегда имеем в виду геометрию верхней полуплоскости. Голоморфная составляющая тензора энергии-импульса в объеме имеет вид

$$T(z) = -(\partial\phi)^2 + Q\partial^2\phi, \quad (3.137)$$

где $z = x + iy$. Ввиду граничного условия на поле Лиувилля граничное значение классического тензора энергии-импульса равняется

$$T_{\text{cl}}(x) = -\frac{1}{16}\varphi_x^2 + \frac{1}{4}\varphi_{xx} + \pi b^2(\pi\mu_B^2 b^2 - \mu)e^\varphi, \quad (3.138)$$

где $\varphi = 2b\phi$. Это эквивалентно классическому уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + T_{\text{cl}} \right) e^{-\varphi/4} = \pi b^2(\pi\mu_B^2 b^2 - \mu)e^{3\varphi/4}, \quad (3.139)$$

связывающему две граничные экспоненты. Данное уравнение является примером классического предела квантовых соотношений между граничными примарными операторами, которые мы обсудим ниже.

Пусть $V_\alpha(z, \bar{z})$ обозначают объемные примарные поля. Эти поля обладают конформными весами $\Delta_\alpha = \alpha(Q - \alpha)$. Структурная константа $C(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$, связанная с тремя объемными примарными полями при общих значениях α_i , $i = 1, 2, 3$, дается [51;52] выражением

$$C(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) = \left[\pi \mu \gamma(b^2) b^{2-2b^2} \right]^{\frac{Q-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{b}} \frac{\Upsilon_0 \Upsilon_b(2\alpha_1) \Upsilon_b(2\alpha_2) \Upsilon_b(2\alpha_3)}{\Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q) \Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \Upsilon_b(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2) \Upsilon_b(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)}, \quad (3.140)$$

где специальная функция Υ_b определена в Приложении В.1.

Граничные операторы $B_\beta^{\sigma_2 \sigma_1}(x)$ обладают конформными весами $\Delta_\beta = \beta(Q - \beta)$ и нумеруются с помощью двух индексов σ_1 и σ_2 , связанных с левой и правой космологическими константами μ_{B_1} и μ_{B_2} посредством

$$\cos \left(2\pi b \left(\sigma - \frac{Q}{2} \right) \right) = \frac{\mu_B}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\sin(\pi b^2)}. \quad (3.141)$$

Соответствующие наблюдаемые зависят от масштабнo-инвариантных соотношений μ_i/μ_B^2 . Например, скейлинговые свойства корреляционной функции n объемных операторов $V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_n}$ и m граничных операторов $B_{\beta_1}^{\sigma_1 \sigma_2} \dots B_{\beta_m}^{\sigma_m \sigma_1}$ выражаются следующим образом

$$\mathcal{G}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \sim \mu^{(Q-2\sum_i \alpha_i - \sum_j \beta_j)/2b} F \left(\frac{\mu_{B_1}^2}{\mu}, \frac{\mu_{B_2}^2}{\mu}, \dots, \frac{\mu_{B_m}^2}{\mu} \right),$$

где F – некоторая скейлинговая функция.

Чтобы задать LFT на верхней полуплоскости, мы также должны знать [93] и некоторые другие структурные константы в дополнение к объемной трехточечной функции $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

1. объемную одноточечную функцию [93]

$$\langle V_\alpha(z, \bar{z}) \rangle = \frac{U(\alpha|\mu_B)}{|z - \bar{z}|^{2\Delta_\alpha}},$$

2. граничную двухточечную функцию [93]

$$\left\langle B_{\beta_1}^{\sigma_1\sigma_2}(x)B_{\beta_1}^{\sigma_2\sigma_1}(0) \right\rangle = \frac{S(\beta_1, \sigma_2, \sigma_1)\delta(\beta_2 - \beta_1)}{|x|^{2\Delta_{\beta_1}}},$$

3. двухточечную функцию объемного и граничного операторов [134]

$$\left\langle V_\alpha(z, \bar{z})B_\beta^{\sigma\sigma}(x) \right\rangle = \frac{R(\alpha, \beta|\mu_B)}{|z - \bar{z}|^{2\Delta_\alpha - \Delta_\beta} |z - x|^{2\Delta_\beta}},$$

4. граничную трехточечную функцию [135]

$$\left\langle B_{Q-\beta_3}^{\sigma_1\sigma_3}(x_3)B_{\beta_2}^{\sigma_3\sigma_2}(x_2)B_{\beta_1}^{\sigma_2\sigma_1}(x_1) \right\rangle = \frac{C_{\beta_2\beta_1}^{(\sigma_3\sigma_2\sigma_1)\beta_3}}{|x_{21}|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} |x_{32}|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} |x_{31}|^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}}.$$

Приведем граничную структурную константу в явном виде, поскольку она потребуется в следующих разделах:

$$\begin{aligned} C_{\beta_2\beta_1}^{(\sigma_3\sigma_2\sigma_1)\beta_3} &= (\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2})^{\frac{1}{2b}(\beta_3-\beta_2-\beta_1)} \\ &= \frac{\Gamma_b(2Q - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3)\Gamma_b(\beta_2 + \beta_3 - \beta_1)\Gamma_b(Q + \beta_2 - \beta_1 - \beta_3)\Gamma_b(Q + \beta_3 - \beta_1 - \beta_2)}{\Gamma_b(2\beta_3 - Q)\Gamma_b(Q - 2\beta_2)\Gamma_b(Q - 2\beta_1)\Gamma_b(Q)} \\ &\times \frac{S_b(\beta_3 + \sigma_1 - \sigma_3)S_b(Q + \beta_3 - \sigma_3 - \sigma_1)}{S_b(\beta_2 + \sigma_2 - \sigma_3)S_b(Q + \beta_2 - \sigma_3 - \sigma_2)} \\ &\times \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \frac{S_b(U_1 + s)S_b(U_2 + s)S_b(U_3 + s)S_b(U_4 + s)}{S_b(V_1 + s)S_b(V_2 + s)S_b(V_3 + s)S_b(Q + s)}. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Коэффициенты U_i и V_i , $i = 1, \dots, 4$ имеют вид

$$\begin{aligned} U_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 - \beta_1, & V_1 &= Q + \sigma_2 - \sigma_3 - \beta_1 + \beta_3, \\ U_2 &= Q - \sigma_1 + \sigma_2 - \beta_1, & V_2 &= 2Q + \sigma_2 - \sigma_3 - \beta_1 - \beta_3, \\ U_3 &= \beta_2 + \sigma_2 - \sigma_3, & V_3 &= 2\sigma_2, \\ U_4 &= Q - \beta_2 + \sigma_2 - \sigma_3. \end{aligned}$$

3.3.2 Высшие уравнения движения

Прежде чем обсуждать граничный случай, мы кратко напомним рассуждения, приводящие к высшим уравнениям движения в LFT без границы [29]. Вырожденное примарное поле $V_{m,n}$ появляется при значениях [97] конформной размерности $\Delta_{m,n}$, связанной с параметром

$$\alpha_{m,n} = \frac{Q}{2} - \frac{(mb^{-1} + nb)}{2}. \quad (3.143)$$

Пусть через $D_{m,n}$ обозначаются операторы рождения сингулярных векторов. В работе [29] было доказано, что может быть построено примарное поле вида

$$D_{m,n} \bar{D}_{m,n} V'_{m,n}, \quad (3.144)$$

где вырожденное логарифмическое поле V'_α определяется как

$$V'_{m,n} = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial V_\alpha}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{m,n}}. \quad (3.145)$$

Поле (3.144) обладает конформной размерностью $\Delta_{m,n} + mn$. Оно должно быть отождествлено с примарным полем $V_{m,-n}$ той же размерности. Выполняется операторнозначное соотношение

$$D_{m,n} \bar{D}_{m,n} V'_{m,n} = B_{m,n} V_{m,-n}. \quad (3.146)$$

Коэффициенты $B_{m,n}$ определяются в явном виде:

$$B_{m,n} = (\pi\mu\gamma(b^2))^n b^{1+2n-2m} \gamma(m - nb^2) \prod_{\substack{k=1-n \\ l=1-m \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{m-1} (lb^{-1} + kb). \quad (3.147)$$

Чтобы сформулировать граничный аналог высших объемных уравнений движения [65], т.е. соотношение, которое должно связывать граничные операторы, мы для начала заметим, что вышеописанный метод уже не может быть применим. Действительно, для объемной конструкции нам необходимы оба, ле-

вый и правый операторы рождения сингулярных векторов, в то время как на границе имеется лишь одна алгебра Вирасоро. Вместо этого мы рассматриваем действие оператора $D_{m,n}$ на примарное граничное поле $B_{m,n}^{s_1 s_2}$ с произвольными значениями граничных параметров. Анализ [93] классического предела (3.139) показывает, что в общем случае это поле не должно исчезать. С другой стороны, из чисто алгебраических соображений следует, что поле $D_{m,n} B_{m,n}^{s_1 s_2}$ обладает свойствами примарного поля в независимости от значений граничных космологических параметров. Учитывая основное предположение LFT о том, что существует лишь одно примарное поле данной конформной размерности, мы должны отождествить

$$D_{m,n} B_{m,n}^{s_1 s_2} = K_{m,n}^{s_1 s_2} B_{m,-n}^{s_1 s_2} \quad (3.148)$$

с точностью до числовой константы, где в правой части мы имеем примарное граничное поле той же конформной размерности. Данное операторнозначное соотношение предполагает соответствующие соотношения между корреляционными функциями, если одно из полей является предметом соотношения (3.148). В принципе, непротиворечивость этого утверждения должна быть проверена для произвольных корреляционных функций. Как правило, достаточно рассмотреть следствие (3.148) для трехточечных функций или, что то же самое, для структурных констант разложения произведения граничных операторов

$$\left\langle B_{\beta_2}^{s_3 s_1}(0) D_{m,n} B_{m,n}^{s_1 s_2}(x) B_{\beta_1}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle = K_{m,n}^{s_3 s_2} \left\langle B_{\beta_2}^{s_3 s_1}(0) B_{m,-n}^{s_1 s_2}(x) B_{\beta_1}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle. \quad (3.149)$$

Мы используем это соотношение для определения коэффициентов

$$K_{m,n}^{s_1 s_2} = \frac{\left\langle B_{\beta_2}^{s_3 s_1}(0) D_{m,n} B_{m,n}^{s_1 s_2}(x) B_{\beta_1}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle}{\left\langle B_{\beta_2}^{s_3 s_1}(0) B_{m,-n}^{s_1 s_2}(x) B_{\beta_1}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle}. \quad (3.150)$$

Отметим, что довольно нетривиальное следствие (3.148) состоит в том, что отношение двух корреляционных функций (3.150) не зависит ни от конформной размерности двух других полей β_1 и β_2 , ни от космологического параметра s_3 граничного сегмента, напрямую не связанного с $B_{m,n}^{s_1 s_2}(x)$. Прежде чем рассматривать общую ситуацию, мы проверим эту гипотезу в случае, когда скрининговые вычисления позволяют избежать сложных специальных функций в

выражении (3.142) для общей граничной трехточечной корреляционной функции.

Скрининговые вычисления. Применим (3.148) в случае, когда трехточечные корреляционные функции могут быть вычислены по теории возмущений, как кулоновские интегралы [94]. Напомним, что если конформные параметры α_i и β_i корреляционной функции $\langle V_1 \cdots B_1 \cdots \rangle$ удовлетворяют скрининговому соотношению $\sum \alpha_i + \sum \beta_k = Q - nb$, то эта корреляционная функция имеет полюс [131], и соответствующий вычет вычисляется с помощью теории возмущений по μ и μ_B . Вследствие условия баланса суммарного заряда лишь конечное число членов ряда имеют отличные от нуля значения. Рассмотрим

$$D_{1,2} B_{1,2}^{s_1 s_2} = K_{1,2}^{s_1 s_2} B_{1,-2}^{s_1 s_2}. \quad (3.151)$$

Учитывая, что $a_{1,2} = -b/2$ и $a_{1,-2} = 3b/2$, мы выбираем два других поля так, чтобы скрининговое соотношение

$$\left\langle B_{\beta}^{s_3 s_1}(0) D_{1,2} B_{-b/2}^{s_1 s_2}(x) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle = K_{1,2}^{s_1 s_2} \left\langle B_{\beta}^{s_3 s_1}(0) B_{3b/2}^{s_1 s_2}(x) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle \quad (3.152)$$

выполнялось. Действие $D_{1,2}$ сводится к коэффициенту, который известен в явном виде [29]. Для корреляционной функции в правой части выполняется баланс суммарного заряда, и, следовательно,

$$K_{1,2}^{s_1 s_2} = 2(1 - 2b\beta)(1 - 2b\beta - b^2) \left\langle B_{\beta}^{s_3 s_1}(0) B_{-b/2}^{s_1 s_2}(1) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle. \quad (3.153)$$

Необходима нетривиальная проверка общего утверждения о том, что зависимость от β и μ_3 в правой части (3.153) исчезает. Объемный скрининговый вклад связан с взаимодействием $-\mu \int d^2 z e^{2b\phi}$, в то время как граничный вклад появ-

ляется во втором порядке и требует двух граничных скринингов $e^{b\phi}$,

$$\begin{aligned}
& \left\langle B_{\beta}^{s_3 s_1}(0) B_{-b/2}^{s_1 s_2}(1) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle = \\
& - \mu \int_{\text{Im}z>0} d^2z \left\langle e^{2b\phi(z)} B_{\beta}^{s_3 s_1}(0) B_{-b/2}^{s_1 s_2}(1) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle_0 \\
& + \sum_{i,j} \frac{\mu_i \mu_j}{2} \int_{C_i} \int_{C_j} dx_1 dx_2 \left\langle e^{b\phi(x_1)} e^{b\phi(x_2)} B_{\beta}^{s_3 s_1}(0) B_{-b/2}^{s_1 s_2}(1) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle_0,
\end{aligned} \tag{3.154}$$

где контуры интегрирования определены как $C_1 = (-\infty, 0)$, $C_2 = (0, 1)$ и $C_3 = (1, \infty)$, а μ_i представляют собой соответствующие значения граничной космологической постоянной. Явные выражения для корреляционных функций свободной теории имеют вид

$$\left\langle e^{2b\phi(z)} B_{\beta}^{s_3 s_1}(0) B_{-b/2}^{s_1 s_2}(1) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle_0 = |z|^{-4b\beta} |1-z|^{2b^2} |z-\bar{z}|^{-2b^2} \tag{3.155}$$

и

$$\begin{aligned}
& \left\langle e^{b\phi(x_1)} e^{b\phi(x_2)} B_{\beta}^{s_3 s_1}(0) B_{-b/2}^{s_1 s_2}(1) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle_0 = \\
& = |x_1|^{-2b\beta} |x_2|^{-2b\beta} |1-x_1|^{b^2} |1-x_2|^{b^2} |x_1-x_2|^{-2b^2}.
\end{aligned} \tag{3.156}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
I(A, B, C) &= \int_{\text{Im}z>0} d^2z |z\bar{z}|^A |(1-z)(1-\bar{z})|^B |z-\bar{z}|^C, \\
I_{ij}(A, B, C) &= \int_{C_i} \int_{C_j} dx_1 dx_2 |x_1|^A |x_2|^A |1-x_1|^B |1-x_2|^B |x_1-x_2|^C.
\end{aligned} \tag{3.157}$$

Можно написать

$$\begin{aligned}
& \left\langle B_{\beta}^{s_3 s_1}(0) B_{-b/2}^{s_1 s_2}(x) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \right\rangle = \\
& = -\mu I(-2b\beta, b^2, -2b^2) + \sum_{i,j} \frac{\mu_i \mu_j}{2} I_{ij}(-2b\beta, b^2, -2b^2).
\end{aligned} \tag{3.158}$$

Все интегрирования могут быть выполнены в явном виде. Используя результаты приложений [Б.2](#) и [В.3](#), имеем

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2\pi^3} \sin\left(\frac{\pi C}{2}\right) \sin(\pi A) \sin(\pi B) \sin(\pi(A+B+C)) J(A, B, C), \\
I_{11} &= -\frac{1}{\pi^3} \sin\frac{\pi C}{2} \sin\pi\left(A+B+\frac{C}{2}\right) \sin\pi(A+B+C) J(A, B, C), \\
I_{12} &= -\frac{1}{2\pi^3} \sin\pi C \sin\pi\left(A+B+\frac{C}{2}\right) \sin\pi\left(A+\frac{C}{2}\right) J(A, B, C), \\
I_{13} &= -\frac{1}{2\pi^3} \sin\pi C \sin\pi\left(A+B+\frac{C}{2}\right) \sin\pi\left(B+\frac{C}{2}\right) J(A, B, C), \\
I_{22} &= -\frac{1}{\pi^3} \sin\frac{\pi C}{2} \sin\pi\left(A+\frac{C}{2}\right) \sin\pi A J(A, B, C), \\
I_{23} &= -\frac{1}{2\pi^3} \sin\pi C \sin\pi\left(A+\frac{C}{2}\right) \sin\pi\left(B+\frac{C}{2}\right) J(A, B, C), \\
I_{33} &= -\frac{1}{\pi^3} \sin\frac{\pi C}{2} \sin\pi\left(B+\frac{C}{2}\right) \sin\pi B J(A, B, C),
\end{aligned} \tag{3.159}$$

где

$$\begin{aligned}
J(A, B, C) &= \Gamma(A+1)\Gamma(B+1)\Gamma(C+1)\Gamma(-C/2)\Gamma(B+C/2+1) \times \\
&\quad \Gamma(-A-B-C-1)\Gamma(-A-B-C/2-1)\Gamma(A+C/2+1).
\end{aligned} \tag{3.160}$$

Суммируя эти вклады, получаем

$$\begin{aligned}
\langle B_{\beta}^{s_3 s_1}(0) B_{-b/2}^{s_1 s_2}(x) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \rangle = \\
-\frac{1}{2\pi^3} \sin\frac{\pi C}{2} \left[-\mu \sin(\pi A) \sin(\pi B) \sin(\pi(A+B+C)) + \right. \\
+ \mu_1^2 \sin(\pi(A+B+C/2)) \sin(\pi(A+B+C)) + \\
+ \mu_2^2 \sin(\pi(A+C/2)) \sin(\pi A) + \mu_3^2 \sin(\pi(B+C/2)) \sin(\pi B) - \\
- 2\mu_1 \mu_2 \cos\frac{\pi C}{2} \sin(\pi(A+B+C/2)) \sin(\pi(A+C/2)) - \\
- 2\mu_1 \mu_3 \cos\frac{\pi C}{2} \sin(\pi(A+B+C/2)) \sin(\pi(B+C/2)) + \\
\left. + 2\mu_2 \mu_3 \cos\frac{\pi C}{2} \sin(\pi(A+C/2)) \sin(\pi(B+C/2)) \right] J(A, B, C),
\end{aligned} \tag{3.161}$$

где $A = -2b\beta$, $B = b^2$ и $C = -2b^2$. Достаточно примечательно, что ввиду соотношения $C = -2B$ полученный результат не зависит от μ_3 ,

$$\begin{aligned} \langle B_\beta^{s_3 s_1}(0) B_{-b/2}^{s_1 s_2}(x) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \rangle &= \frac{1}{2\pi^3} \left[-\mu \sin(\pi B) + \mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1 \mu_2 \cos(\pi B) \right] \\ &\times \sin(\pi A) \sin(\pi B) \sin(\pi(A - B)) J(A, B, C). \end{aligned} \quad (3.162)$$

В удобной параметризации

$$\mu_i^2 = \mu \frac{\cosh^2 \pi b s_i}{\sin \pi b^2}, \quad \mu_i \mu_j = \mu \frac{\cosh \pi b s_i \cosh \pi b s_j}{\sin \pi b^2}, \quad (3.163)$$

корреляционная функция (3.154) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \langle B_\beta^{s_3 s_1}(0) B_{-b/2}^{s_1 s_2}(x) B_{Q-\beta-3b/2}^{s_2 s_3}(\infty) \rangle &= \\ \frac{1}{2\pi^3} \sin \frac{B + i s_1 - i s_2}{2} \sin \frac{B - i s_1 + i s_2}{2} \sin \frac{B + i s_1 + i s_2}{2} \sin \frac{B - i s_1 - i s_2}{2} \\ &\times \sin(\pi A) \sin(\pi B) \sin(\pi(A - B)) J(A, B, C). \end{aligned} \quad (3.164)$$

Легко проверить, что β -зависимость у $K_{1,2}^{s_1 s_2}$ также исчезает. Наконец,

$$\begin{aligned} K_{1,2}^{s_1 s_2} &= \frac{4\mu\gamma(b^2)}{\pi} \Gamma(1 - 2b^2) \Gamma(1 - b^2) \Gamma(1 + b^2) \times \\ &\sin \pi b \frac{b + i(s_1 + s_2)}{2} \sin \pi b \frac{b - i(s_1 + s_2)}{2} \sin \pi b \frac{b + i(s_2 - s_1)}{2} \sin \pi b \frac{b - i(s_2 - s_1)}{2}. \end{aligned} \quad (3.165)$$

Аналогичное вычисление в случае (1,1) дает

$$K_{1,1}^{s_1 s_2} = \left(\frac{4\mu\gamma(b^2)}{\pi} \right)^{1/2} \Gamma(1 - b^2) \sin \pi b \frac{i(s_1 + s_2)}{2} \sin \pi b \frac{i(s_2 - s_1)}{2}. \quad (3.166)$$

Далее мы покажем, что (3.165) и (3.166) обобщаются на общий случай (m, n) .

Трехточечный анализ. Операторнозначное соотношение (3.148) означает, что для общих трехточечных корреляционных функций имеет место равенство (3.149). В терминах граничных структурных констант (3.142) это дает

следующее выражение для коэффициентов

$$K_{m,n}^{s_3 s_2} = P_{m,n}(Q - \beta_3 - \beta_1) P_{m,n}(\beta_3 - \beta_1) \frac{C_{\beta_{m,n}, \beta_1}^{(s_3 s_2 s_1) \beta_3}}{C_{\beta_{m,n+nb}, \beta_1}^{(s_3 s_2 s_1) \beta_3}}, \quad (3.167)$$

где $P_{m,n}$ – это полином слияния

$$P_{m,n}(x) = \prod_{\substack{k=1-n:2:n-1 \\ l=1-m:2:m-1}} (x - \lambda_{l,k}), \quad (3.168)$$

и $\lambda_{l,k} = (lb^{-1} + kb)/2$. Для вычисления отношения мы используем следующие обобщения соотношений сдвига на функции S_b и Γ_b , которые представлены в Приложении В.4:

$$S_b(x + nb) = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin \pi b(x + kn) \cdot S_b(x) \quad (3.169)$$

и

$$\Gamma_b(x + nb) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} b^{n(bx - \frac{1}{2})} b^{\frac{n(n-1)}{2} b^2}}{\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma[b(x + kb)]} \Gamma_b(x). \quad (3.170)$$

Искомое отношение удобно разбить на три части. Первая содержит отношение интегральных частей в выражении (3.142). Отличие здесь приходит от двух функций S_b в интеграле. Имея в виду, что $S_b(Q - x) = 1/S_b(x)$, получим

$$\begin{aligned} S_b(\beta_{mn} + nb + \sigma_2 - \sigma_3 + s) S_b(Q - \beta_{mn} - nb + \sigma_2 - \sigma_3 + s) = \\ \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \left[\pi b \left(\frac{(1+2k-n)b}{2} + \sigma_2 - \sigma_3 + s \right) + \frac{1-m}{2} \pi \right]}{\sin \left[-\pi b \left(\frac{(1+2k-n)b}{2} + \sigma_2 - \sigma_3 + s \right) + \frac{1-m}{2} \pi \right]} \\ \cdot S_b(\beta_{mn} + \sigma_2 - \sigma_3 + s) S_b(Q - \beta_{mn} + \sigma_2 - \sigma_3 + s) \\ = (-1)^{mn} S_b(\beta_{mn} + \sigma_2 - \sigma_3 + s) S_b(Q - \beta_{mn} + \sigma_2 - \sigma_3 + s). \end{aligned} \quad (3.171)$$

Следовательно, отношение интегралов дает просто $(-1)^{mn}$. Вторая часть отношения – это часть, содержащая функции S_b в коэффициенте перед интегралом

лом (3.142). В искомое отношение она дает следующий вклад

$$\begin{aligned} & \frac{S_b(\beta_{mn} + nb + \sigma_2 - \sigma_3)S_b(Q + \beta_{mn} + nb - \sigma_2 - \sigma_3)}{S_b(\beta_{mn} + \sigma_2 - \sigma_3)S_b(Q + \beta_{mn} - \sigma_2 - \sigma_3)} = \\ & 2^{2n} \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left[\pi b \left(\frac{(1+2k-n)b}{2} + \sigma_2 - \sigma_3 \right) + \frac{1-m}{2} \pi \right] \\ & \cdot \sin \left[\pi b \left(\frac{(3+2k-n)b}{2} - \sigma_2 - \sigma_3 \right) + \frac{3-m}{2} \pi \right]. \end{aligned} \quad (3.172)$$

В параметризации (3.163) параметр $\sigma = Q/2 + is/2$, и мы имеем

$$\begin{aligned} & 2^{2n} \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left[\pi b \frac{(1-m)b^{-1} + (1+2k-n)b + i(s_2 - s_3)}{2} \right] \\ & \cdot \sin \left[\pi b \frac{(1-m)b^{-1} + (1+2k-n)b + i(s_2 + s_3)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Третья часть отношения – это часть, содержащая функции Γ_b в коэффициенте перед интегралом, которая дает

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Gamma_b(2Q - \beta_1 - \beta_{mn} - \beta_3)\Gamma_b(\beta_{mn} + \beta_3 - \beta_1)}{\Gamma_b(2Q - \beta_1 - \beta_{mn} - nb - \beta_3)\Gamma_b(\beta_{mn} + nb + \beta_3 - \beta_1)} \\ & \cdot \frac{\Gamma_b(Q + \beta_{mn} - \beta_1 - \beta_3)\Gamma_b(Q + \beta_3 - \beta_{mn} - \beta_1)\Gamma_b(Q - 2\beta_{mn} - 2nb)}{\Gamma_b(Q + \beta_{mn} + nb - \beta_1 - \beta_3)\Gamma_b(Q + \beta_3 - \beta_{mn} - nb - \beta_1)\Gamma_b(Q - 2\beta_{mn})}. \end{aligned} \quad (3.174)$$

Зависимость M от β_1 и β_3 приходит от двух множителей вида

$$\frac{\Gamma_b(\beta_{mn} + \beta)\Gamma_b(Q - \beta_{mn} + \beta)}{\Gamma_b(\beta_{mn} + nb - \beta)\Gamma_b(Q - \beta_{mn} - nb + \beta)} = \frac{b^{-nb(2\beta_{mn}+nb-Q)}b^{-mn}}{p_{mn}(\beta)} \quad (3.175)$$

с β , равным либо $\beta_3 - \beta_1$, либо $Q - \beta_3 - \beta_1$, откуда

$$M = b^{-2nb(2\beta_{mn}+nb-Q)}b^{-2mn} \frac{1}{P_{mn}(\lambda_3 - \lambda_1)P_{mn}(\lambda_3 + \lambda_1)} \frac{\Gamma_b(Q - 2\beta_{mn} - 2nb)}{\Gamma_b(Q - 2\beta_{mn})}. \quad (3.176)$$

Собирая все вместе, получаем

$$K_{m,n}^{s_1 s_2} = (-1)^{mn} \left(\frac{4\mu\gamma(b^2)}{\pi} \right)^{\frac{n}{2}} b^{2n(1-m)} \prod_{k=0}^{2n-1} \Gamma(m - (n-k)b^2) \times \quad (3.177)$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin \pi b \frac{(1-m)b^{-1} + (1+2k-n)b + i(s_1 + s_2)}{2} \times$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin \pi b \frac{(1-m)b^{-1} + (1+2k-n)b + i(s_2 - s_1)}{2}.$$

Легко видеть, что вырожденное поле $B_{m,n}^{s_1, s_2}$ имеет исчезающий сингулярный вектор и вырожденное операторное разложение, если $s_1 \pm s_2 = 2i\lambda_{k,r}$ с $k = 1 - n, 3 - n, \dots, n - 1$ и $r = 1 - m, 3 - m, \dots, m - 1$. Этот результат обобщает правила слияния (1,2), предложенные в [93].

3.3.3 Применение в минимальной гравитации

Одно из возможных применений ВНЕМ – это использование в построении корреляционных функций физических полей в граничной минимальной Лиувиллевской гравитации (BMLG). Данная теория является альтернативным описанием некритической открытой струны [3]. Как уже обсуждалось выше, альтернативный подход к двумерной Лиувиллевской гравитации дают матричные модели, которые позволяют получить явные выражения для большого класса наблюдаемых. Сравнение амплитуд некоторых открытых струн, полученных как в рамках матричных моделей, так и с помощью описания посредством методов конформной теории на мировой поверхности струны, было проведено в работе [136].

Специфическое свойство MLG состоит в том, что в конструкции физических полей с ненулевым духовым числом все материальные поля «одеты» Лиувиллевскими экспоненциальными полями, которые появляются в левой части высших уравнений движения. Например, основные граничные физические

поля духового числа-1 имеют вид

$$W_{m,n}^{(\alpha_1, \alpha_2 | s_1, s_2)} = U_{m,n}^{(\alpha_1, \alpha_2 | s_1, s_2)} C \quad (3.178)$$

и

$$U_{m,n}^{(\alpha_1, \alpha_2 | s_1, s_2)} = \Psi_{m,n}^{\alpha_1, \alpha_2} B_{m,-n}^{s_1, s_2}. \quad (3.179)$$

Параметры α_1, α_2 и s_1, s_2 отвечают здесь конформным граничным условиям слева/справа от вставки оператора в материальном и Лиувилевском секторах соответственно. Ввиду аномалии духового тока корреляционная функция MLG любого числа N полей должна иметь следующий вид [126]

$$G_N = \prod_{i=4}^N \int dx_i \langle W_1(x_1) W_2(x_2) W_3(x_3) U_4(x_4) \dots U_N(x_N) \rangle_{\text{MG}}, \quad (3.180)$$

где $\langle \dots \rangle_{\text{MG}}$ обозначает совместную корреляционную функцию материи, Лиувилля и духов.

Другой важный класс граничных физических полей (духового числа 0) – это элементы граничной версии основного кольца. Общий вид элементов граничного основного кольца [124; 137] следующий

$$O_{m,n} = H_{m,n} \Psi_{m,n} V_{m,n}. \quad (3.181)$$

$H_{m,n}$ здесь являются операторами духового числа 0 и уровня mn , построенными из Вирасоровских генераторов $L_n^{(L)}$, $L_n^{(M)}$ и духов. Аналогично работе [62] можно показать, что граничные высшие уравнения приводят к следующему важному соотношению между двумя типами физических полей, представленными выше:

$$\mathcal{Q}O_{m,n}^{s_1, s_2} = K_{m,n}^{s_1, s_2} W_{mn}^{s_1, s_2}. \quad (3.182)$$

В частности, это означает, что для построения элемента $O_{m,n}^{s_1, s_2}$ основного кольца должны быть удовлетворены соотношения слияния для космологических констант s_1 и s_2 в Лиувилевском секторе, $K_{m,n}^{s_1, s_2} = 0$. Другое следствие этого соотношения состоит в том, что если правила слияния для s_1 и s_2 не удовлетворяются, то поле $W_{m,n}^{s_1, s_2}$ кажется точным, и корреляционные функции этого поля наивно равняются нулю.

Учитывая коммутационные соотношения $\{B_{-1}, \mathcal{Q}\} = \partial$, мы можем непосредственно убедиться, что

$$U_{m,n}^{(\alpha_1, \alpha_2 | s_1, s_2)} = \frac{1}{K_{m,n}^{s_1, s_2}} (\partial - \mathcal{Q}B_{-1}) O_{m,n}^{(\alpha_1, \alpha_2 | s_1, s_2)} \quad (3.183)$$

Это соотношение позволяет учесть явно каждую (проинтегрированную) вставку конкретного оператора $U_k(x_k)$, интегрируя по частям. Интеграл (3.180), таким образом, может быть сведен к граничным членам, которые, в принципе, определяются операторными разложениями элементов основного кольца и граничных физических полей W_a .

Глава 4. Дуальное описание МЛГ

Целью данной главы является исследование минимальной Лиувиллевской гравитации (МЛГ) [3] с помощью подхода, основанного на струнном уравнении Дугласа [138]. Изложение основано на результатах работ [28; 31; 32; 66]. Мы исследуем минимальную Лиувиллевскую гравитацию, используя связь между Фробениусовым многообразием и струнным уравнением Дугласа. Мы покажем, что основная задача заключается в решении струнного уравнения Дугласа и одновременном построении надлежащего преобразования параметров КдВ к Лиувиллевским, которые обеспечивают выполнение конформных правил отбора и правил слияния. Оказывается, что искомое решение струнного уравнения имеет явный и простой вид в плоских координатах на Фробениусовом многообразии в общем (p, q) случае минимальной Лиувиллевской гравитации.

4.1 Фробениусовы многообразия, уравнение Дугласа и МЛГ

Альтернативный подход к МЛГ развился из идеи триангуляций двумерных поверхностей, реализованной в терминах матричных моделей [21–23; 25; 139–141]. Одним из самых важных элементов подхода является струнное уравнение, которое было получено Дугласом [138] в подходе матричных моделей к двумерной гравитации. Предметом струнного уравнения является производящая функция корреляционных чисел, которая зависит от параметров задачи (так называемых КдВ-времен).

Новый прогресс в развитии дуального подхода к МЛГ [32; 66–68] произошел ввиду открытия связи между струнным уравнением Дугласа, интегрируемыми иерархиями Гельфанда-Дикого и так называемыми Фробениусовыми многообразиями A_q типа. Эта связь была использована в работе [66; 68] для анализа унитарной $M_{q, q+1}$ серии минимальных моделей, взаимодействующих с Лиувиллевской гравитацией. На основе свойств Фробениусовых многообразий A_q типа было заключено, что плоские координаты на Фробениусовом многообразии являются наиболее подходящими для анализа корреляционных функций. В част-

ности, было показано, что специальное решение струнного уравнения Дугласа, релевантное в МЛГ, в плоских координатах имеет простую форму. Эта идея была проверена на уровне одно- и двухточечных корреляционных чисел на сфере,¹ а также было показано, что только это решение позволяет удовлетворить основным требованиям метода, которые состоят в том, что так называемые правила отбора, наследуемые МЛГ от конформных правил слияния КТП-модели в ее материальном секторе, должны быть удовлетворены.

Следуя [31; 32; 66], мы будем предполагать, что уравнение Дугласа применимо к минимальной Лиувилевской гравитации так же, как и к матричным моделям двумерной гравитации. Данное предположение требует ответа на два следующих вопроса: как выбрать необходимое решение струнного уравнения Дугласа и как выбрать надлежащую форму так называемого резонансного преобразования [28] от КдВ-времен к константам взаимодействия Лиувилля. После того, как эти два вопроса разрешаются, производящая функция корреляционных функций в МЛГ дается в явном виде как проинтегрированная один-форма, однозначно определяемая для каждой (p, q) модели МЛГ, и совпадает со специальным выбором тау-функции бездисперсионного предела [143; 144] обобщенной КдВ-иерархии.

4.1.1 ФМ и интегрируемые иерархии

В этом и двух последующих разделах мы дадим определение и краткий обзор основных свойств Фробениусовых многообразий, необходимых для наших целей. Здесь мы следуем статье Б. Дубровина [144], см. также [32].

По определению коммутативная, ассоциативная алгебра A с единицей, снабженная невырожденной инвариантной билинейной формой (\cdot, \cdot) , называется Фробениусовой алгеброй. Инвариантность билинейной формы означает, что для любых трех векторов a, b, c в A :

$$(a \cdot b, c) = (a, b \cdot c). \quad (4.1)$$

¹См. работу [142] относительно результатов применения дуального подхода к МЛГ в случае тора.

Пусть M – n -мерное многообразие с плоской метрикой $\eta_{\alpha\beta}dv^\alpha dv^\beta$, которая постоянна в плоских координатах v^α .

Введем в касательном пространстве $T_{\mathbf{v}}M$ структуру Фробениусовой алгебры путем следующего отождествления базиса

$$\frac{\partial}{\partial v^\alpha} \rightarrow e_\alpha, \quad (4.2)$$

Таким образом, мы можем умножать касательные векторы в любой точке M

$$e_\alpha e_\beta = C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma. \quad (4.3)$$

Структурные константы $C_{\alpha\beta}^\gamma$ могут зависеть от v^α . Такое многообразие M можно назвать квазифробениусовым многообразием.

Определение 4.1.1. *Многообразие M называется Фробениусовым многообразием, если эти две структуры соотносятся друг с другом таким образом, что*

- (1) инвариантная билинейная форма $(\frac{\partial}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial}{\partial v^\beta})$ идентична метрике $\eta_{\alpha\beta}$;
- (2) структура Фробениусовой алгебры в каждой точке M и метрика на M ограничены следующим соотношением

$$\nabla_\rho C_{\alpha\beta\gamma} = \nabla_\alpha C_{\rho\beta\gamma}. \quad (4.4)$$

Последнее требование эквивалентно требованию существования на M функции F , которая связана со структурными константами Фробениусовой алгебры как

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 F}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\gamma}, \quad (4.5)$$

где

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \eta_{\alpha\rho} C_{\beta\gamma}^\rho. \quad (4.6)$$

Функция F называется Фробениусовым потенциалом. Согласование этого свойства с ассоциативностью Фробениусовой алгебры известно как WDVV условие [145]

$$\frac{\partial^3 F}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\rho} \eta^{\rho\lambda} \frac{\partial^3 F}{\partial v^\lambda \partial v^\mu \partial v^\nu} = \frac{\partial^3 F}{\partial v^\nu \partial v^\beta \partial v^\rho} \eta^{\rho\lambda} \frac{\partial^3 F}{\partial v^\lambda \partial v^\mu \partial v^\alpha}. \quad (4.7)$$

Следующее утверждение [144] вытекает из данных свойств Фробениусова многообразия M . Существует однопараметрическая плоская деформация $\tilde{\nabla}_\alpha$ связности ∇_α

$$\tilde{\nabla}_\alpha x^\gamma = \nabla_\alpha x^\gamma - z C_{\alpha\beta}^\gamma x^\beta, \quad (4.8)$$

или, эквивалентно,

$$[\tilde{\nabla}_\alpha(z), \tilde{\nabla}_\beta(z)] = 0. \quad (4.9)$$

Доказательство основывается на ассоциативности Фробениусовой алгебры и уравнении (4.4). Из (4.9) следует, что существует n линейно независимых решений

$$\theta^\alpha(v, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k^\alpha(v) z^k, \quad (4.10)$$

уравнения $\tilde{\nabla}_\alpha d\theta^\lambda(v, z) = 0$, которое эквивалентно

$$\frac{\partial^2 \theta^\lambda}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}(v, z) = z C_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \theta^\lambda}{\partial v^\gamma}(v, z), \quad (4.11)$$

или

$$\frac{\partial^2 \theta_{k+1}^\lambda}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}(v) = C_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \theta_k^\lambda}{\partial v^\gamma}(v). \quad (4.12)$$

Функции $\theta^\alpha(v, z)$ можно рассматривать как плоские координаты деформированной связности $\tilde{\nabla}_\alpha(z)$. Мы выбираем $\theta^\lambda(v, z)$ так, что $\theta^\lambda(v, 0) = \theta_0^\lambda(v) = v^\lambda$. Из (4.12) следует, что

$$\nabla(\nabla\theta^\alpha(v, z_1), \nabla\theta^\beta(v, z_2)) = (z_1 + z_2)\nabla\theta^\alpha(v, z_1) \cdot \nabla\theta^\beta(v, z_2), \quad (4.13)$$

откуда легко видеть, что скалярное произведение $(\nabla\theta^\alpha(v, z), \nabla\theta^\beta(v, -z)) = Const(z)$ не зависит от v^α . Для $z = 0$ мы находим $Const(0) = \eta^{\alpha\beta}$. Уравнение (4.12) инвариантно относительно преобразования

$$\theta^\mu(v, z) \rightarrow A_\nu^\mu(z)\theta^\nu(v, z), \quad (4.14)$$

где $A_\nu^\mu(0) = \delta_\nu^\mu$. Используя эти преобразования, можно зафиксировать нормировку таким образом, что

$$(\nabla\theta^\alpha(v, z), \nabla\theta^\beta(v, -z)) = \eta^{\alpha\beta}. \quad (4.15)$$

Фробениусово многообразие A_{q-1} типа. Нашим основным примером является Фробениусово многообразие A_{q-1} типа [145]. Пусть $Q(y)$ – полином от y

$$Q(y) = y^q + u_1 y^{q-2} + \dots + u_{q-1}, \quad (4.16)$$

и $\{u_\alpha\}$ представляют некоторые координаты на M . Мы называем $\{u_\alpha\}$ каноническими координатами.

Определение 4.1.2. *Фробениусова алгебра A_{q-1} типа – это пространство полиномов по модулю полинома $\frac{dQ}{dy}$:*

$$A_{q-1}(u) = \mathbb{C}[y] / \frac{dQ}{dy}. \quad (4.17)$$

Соответствующее многообразие M называется Фробениусовым многообразием A_{q-1} типа.

Полиномы

$$P_\alpha(y) = \frac{\partial Q}{\partial u_\alpha}, \quad (4.18)$$

образуют базис в касательном пространстве $T_{\mathbf{v}}M$. Инвариантная билинейная форма (которая эквивалентна метрике) определяется как

$$(P_\alpha, P_\beta) = \operatorname{res}_{y=\infty} \left(\frac{P_\alpha(y) P_\beta(y)}{\frac{dQ}{dy}(y)} \right). \quad (4.19)$$

С этим определением можно убедиться, что соответствующая метрика является плоской и

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma F(u). \quad (4.20)$$

Для этого мы выполняем преобразование от канонических координат $\{u_\alpha\}$ к новым координатам $\{v^\alpha\}$ с помощью следующего соотношения

$$y = z - \frac{1}{q} \left(\frac{v^{q-1}}{z} + \frac{v^{q-2}}{z^2} + \dots + \frac{v^1}{z^{q-1}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{q+1}}\right), \quad (4.21)$$

где $z^q = Q(y)$.

Некоторые полезные свойства новых координат сформулированы в следующей теореме.

Теорема 4.1.1. *Из преобразования (4.21) следует, что*

1. v^α образуют плоские координаты, т. е. метрика в этих координатах постоянна и

$$\eta_{\alpha\beta} = -q \left(\frac{\partial Q}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial Q}{\partial v^\beta} \right) = \delta_{\alpha+\beta, q}, \quad (4.22)$$

2.

$$C_{\alpha\beta\gamma} = -q \operatorname{res}_{y=\infty} \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial v^\alpha} \frac{\partial Q}{\partial v^\beta} \frac{\partial Q}{\partial v^\gamma}}{\frac{dQ}{dy}} \right) = \frac{\partial^3 F}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\gamma}. \quad (4.23)$$

3.

$$\theta_{\alpha, k} = -c_{\alpha, k} \operatorname{res}_{y=\infty} Q^{k+\frac{\alpha}{q}}(y), \quad (4.24)$$

где

$$c_{\alpha, k} = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{q})}{\Gamma(\frac{\alpha}{q} + k + 1)}. \quad (4.25)$$

Чтобы доказать эти утверждения удобно использовать базисные элементы A_{q-1} алгебры в плоских координатах, определяемые как $\Phi_\alpha(y) = \frac{\partial Q(y)}{\partial v^\alpha}$, которые обладают следующим свойством

$$\Phi_\alpha(y) = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dy} \left(Q^{\frac{\alpha}{q}} \right)_+. \quad (4.26)$$

Всюду далее мы используем следующее обозначение

$$\theta_{\mu, k} = \theta_{\mu-q[\mu/q], k+[\mu/q]}, \quad (4.27)$$

где $[\mu/q]$ – это целая часть μ/q . Ясно, что (4.27) согласуется с определением (4.24).

Интегрируемые иерархии. Пусть \mathcal{M} – пространство функций от x со значениями в M . Пусть I и J – функционалы на \mathcal{M} . Определим на \mathcal{M} скобку Пуассона как

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta v^\alpha(x)} \eta^{\alpha\beta} \frac{d}{dx} \frac{\delta I}{\delta v^\beta(x)} dx, \quad (4.28)$$

или

$$\{v^\alpha(x), v^\beta(y)\} = \eta^{\alpha\beta} \delta'(x - y), \quad (4.29)$$

где, как обычно в вариационном исчислении, подинтегральная функция определена по модулю полных производных. Функционалы

$$H_{\alpha,k} = \int \theta_{\alpha,k+1}(\vec{v}(x)) dx, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad k \geq 0, \quad (4.30)$$

взаимно коммутируют между собой

$$\{H_{\alpha,k}, H_{\beta,l}\} = 0. \quad (4.31)$$

Как результат, гамильтоновы потоки

$$\frac{\partial v^\mu}{\partial t_k^\alpha} = \{v^\mu, H_{\alpha,k}\} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \theta_{\alpha,k+1}}{\partial v^\nu} = C_\lambda^{\mu\rho} \frac{\partial \theta_{\alpha,k}}{\partial v^\rho} \frac{\partial v^\lambda}{\partial x}. \quad (4.32)$$

коммутируют, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t_l^\beta} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t_k^\alpha} = \frac{\partial}{\partial t_k^\alpha} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t_l^\beta}. \quad (4.33)$$

Из (4.32) следует, что $t_0^1 = x$.

4.1.2 Струнное уравнение Дугласа

Определим функцию $S(v, t)$ на M , зависящую от дополнительных параметров $\{t_k^\alpha\}$

$$S(v, t_k^\alpha) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k \geq 0} t_k^\alpha \theta_{\alpha,k}(v). \quad (4.34)$$

Данное уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial v^\alpha} = 0, \quad (4.35)$$

называется струнным уравнением. В случае Фробениусова многообразия A_{q-1} типа это не что иное, как струнное уравнение Дугласа, записанное в виде принципа наименьшего струнного действия [146]. Можно показать, что решения $\vec{v}(t_k^\alpha)$ струнного уравнения (4.35) также удовлетворяют (4.32).

Уравнение для тау-функции. Мы определяем функцию $Z[t] = \log \tau(t)$, где

$$Z[t] = \frac{1}{2} \int_0^{v=v^*(t)} \Omega, \quad (4.36)$$

и

$$\Omega = C_{\alpha}^{\beta\gamma}(v) \frac{\partial S(v,t)}{\partial v^{\beta}} \frac{\partial S(v,t)}{\partial v^{\gamma}} dv^{\alpha}, \quad (4.37)$$

является дифференциальной формой, а $v^*(t)$ – одним из решений струнного уравнения (4.35). Из ассоциативности A_{q-1} алгебры и уравнений (4.12) следует, что Ω – замкнутая 1-форма.

Лемма 4.1.1. *На решении струнного уравнения² $Z(t)$ удовлетворяет*

$$\frac{\partial^2 Z(t)}{\partial t_k^{\alpha} \partial t_0^1} = \theta_{\alpha,k}(v(t)). \quad (4.38)$$

В частности,

$$v^{\alpha}(t) = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 Z}{\partial t_0^{\beta} \partial t_0^1}, \quad (4.39)$$

и для $v^{q-1}(t) = u_1(t)$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = u_1(t). \quad (4.40)$$

Доказательство. Дифференцируя по t_k^{α} и t_0^1 и учитывая струнное уравнение, мы находим

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t_k^{\alpha} \partial t_0^1} = \int_0^{v^*(t)} C_{\lambda}^{\beta\gamma} \frac{\partial \theta_{\alpha,k}}{\partial v^{\beta}} \frac{\partial \theta_{1,0}}{\partial v^{\gamma}} dv^{\lambda} = \int_0^{v^*(t)} \frac{\partial \theta_{\alpha,k}}{\partial v^{\lambda}} dv^{\lambda} = \theta_{\alpha,k}. \quad (4.41)$$

Здесь мы использовали, что $\theta_{1,0} = v_1 = v^{q-1}$, $C_{\lambda}^{\beta,q-1} = \delta_{\lambda}^{\beta}$. \square

С учетом $\theta_{\alpha,0} = v_{\alpha}$ мы получаем из Леммы 4.1.1, что

$$\frac{\partial^2 Z(t)}{\partial t_0^{\alpha} \partial t_0^1} = v_{\alpha}(t). \quad (4.42)$$

В силу того, что Z удовлетворяет уравнениям (4.35) и (4.40), она является тау-функцией интегрируемой иерархии, связанной с соответствующим Фробениусовым многообразием.

²Для упрощения наших выражений мы пишем $v(t)$ вместо $v^*(t)$, когда это ясно из контекста.

ФМ A_{q-1} и бездисперсионный предел иерархии Гельфанда-Дикого. Уравнения бездисперсионного предела иерархии Гельфанда-Дикого формулируются следующим образом:

$$\frac{\partial Q}{\partial t_k^\alpha} = [A_{\alpha,k}, Q] = \frac{\partial A_{\alpha,k}}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial A_{\alpha,k}}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (4.43)$$

где

$$Q = y^q + u_1(x)y^{q-2} + \dots + u_{q-1}, \quad (4.44)$$

и

$$A_{\alpha,k} = \frac{1}{q} c_{\alpha,k} \left(Q^{k+\frac{\alpha}{q}} \right)_+. \quad (4.45)$$

Можно показать, что эти уравнения эквивалентны уравнению Гамильтона

$$\frac{\partial v^\mu}{\partial t_k^\alpha} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \theta_{\alpha,k+1}}{\partial v^\nu}. \quad (4.46)$$

Формула для тау-функции. Как было получено выше, логарифм тау-функции, $Z[\{t_k^\alpha\}]$, дается как

$$Z[\{t_k^\alpha\}] = \frac{1}{2} \int_0^{v^*(t)} C_\alpha^{\beta\gamma} \frac{\partial S}{\partial v^\beta} \frac{\partial S}{\partial v^\gamma} dv^\alpha, \quad (4.47)$$

где

$$S = \sum_{\alpha=1}^{q-1} \sum_k t_k^\alpha \theta_{\alpha,k}. \quad (4.48)$$

4.1.3 Группа резонансных преобразований

Свойство однородности струнного уравнения. Пусть теперь только конечное число параметров $\{t_k^\alpha\}$ отличны от нуля. Один из них мы возьмем равным единице, а другие будем перечислять с помощью двух целых чисел (m, n) . Здесь $1 \leq m \leq q-1$, $1 \leq n \leq p-1$, где p, q – два взаимно простых целых числа, $p > q$, и q является степенью полинома Q , определенного в (4.44). Таким образом, набор параметров $\{t_k^\alpha\}$ заменяется набором $\{t_{mn}\}$. Возьмем действие

в следующем виде

$$S = \operatorname{res}_{y=\infty} [Q^{\frac{p+q}{q}} + \sum_{m,n}^{pm-qn>0} t_{mn} Q^{\frac{pm-qn}{q}}], \quad (4.49)$$

Легко проверить, что $Q[y, u_\alpha]$ и $S[u_\alpha, t_{mn}]$ являются квазиоднородными функциями

$$Q[\rho y, \rho^{r_\alpha} u_\alpha] = \rho^q Q[y, u_\alpha], \quad S[\rho^{r_\alpha} u_\alpha, \rho^{\sigma_{mn}} t_{mn}] = \rho^{p+q} S[u_\alpha, t_{mn}]. \quad (4.50)$$

Здесь мы вводим

$$r_\alpha = q - \alpha - 1, \quad \sigma_{mn} = p + q - |pm - qn|. \quad (4.51)$$

Мы называем $\{\sigma_{mn}\}$ набором масштабных показателей набора $\{t_{mn}\}$. Как было обнаружено Дугласом [138], величины $\delta_{mn} = \frac{\sigma_{mn}}{2q}$ совпадают с гравитационными размерностями физических полей в (p, q) минимальной Лиувиллевской гравитации [20].

Функция $Z[t_{mn}]$ является квазиоднородной функцией

$$Z[\rho^{2q\delta_{mn}} t_{mn}] = \rho^{2(p+q)} Z[t_{mn}]. \quad (4.52)$$

Поскольку масштабные показатели являются целыми числами, имеет место следующее соотношение

$$\sigma_{mn} = \sigma_{k_1 l_1} + \sigma_{k_2 l_2} + \dots + \sigma_{k_N l_N}. \quad (4.53)$$

Оно известно как резонансное условие. Количество возможных резонансов растет при увеличении p и q . Преобразование $t_{mn} \rightarrow \lambda_{mn}$ вида

$$t_{mn} = \lambda_{mn} + \sum_{k_1, l_1, k_2, l_2} A_{mn}^{k_1 l_1; k_2, l_2} \lambda_{k_1, l_1} \lambda_{k_2, l_2} + \sum_{k_1, l_1, k_2, l_2, k_3, l_3} A_{mn}^{k_1 l_1; k_2, l_2; k_3, l_3} \lambda_{k_1, l_1} \lambda_{k_2, l_2} \lambda_{k_3, l_3} + \dots, \quad (4.54)$$

называется резонансным преобразованием, если (4.53) удовлетворяется для каждого члена. Кроме того, по определению мы полагаем, что масштабный показатель λ_{mn} равняется одному из t_{mn} .

Очевидно, что

$$t_{mn}(\{\rho^{\sigma_{kl}} \lambda_{kl}\}) = \rho^{\sigma_{mn}} t_{mn}(\{\lambda_{kl}\}), \quad (4.55)$$

и что резонансное преобразование не изменяет свойства однородности статсуммы $Z[t_{mn}(\{\lambda_{kl}\})] = \tilde{Z}[\lambda_{mn}]$

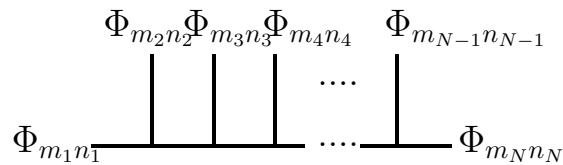
$$\tilde{Z}[\{\rho^{\sigma_{mn}} \lambda_{mn}\}] = \rho^{p+q} \tilde{Z}[\{\lambda_{mn}\}]. \quad (4.56)$$

Следовательно, если мы найдем какое-либо решение струнного уравнения (4.35) и построим $Z[t_{mn}]$, то мы получим семейство решений $\tilde{Z}[\{\lambda_{mn}\}] = Z[\{t_{mn}(\{\lambda_{kl}\})\}]$ с теми же свойствами однородности по отношению к резонансным преобразованиям.

Теперь мы можем сформулировать следующую задачу. Мы ищем такие решения струнного уравнения и такие резонансные преобразования, которые дают функцию $\tilde{Z}[\{\lambda_{mn}\}]$, удовлетворяющую бесконечному числу ограничений, известных как правила слияния для наблюдаемых и их корреляторов в минимальных моделях $M(p,q)$ КТП. Далее мы ограничиваемся рассмотрением сферической топологии. В данном случае эти правила могут быть сформулированы следующим образом.

Обозначим через Φ_{mn} , где $1 \leq m \leq p$ и $1 \leq n \leq q$, примарные поля в минимальной $M(p,q)$ модели конформной теории поля. Поля $\Phi_{m,n}$ и $\Phi_{q-m,p-n}$ отвечают одному примарному полю.

Следующее графическое представление позволяет сформулировать эти ограничения



Внешние линии здесь представляют (произвольно расположенные) примарные поля в корреляторе $\langle \Phi_{m_1 n_1} \Phi_{m_2 n_2} \dots \Phi_{m_N n_N} \rangle$ (здесь мы полагаем $N \geq 3$). Правила слияния приводят к требованию, что корреляционная функция должна равняться нулю, если не существует множества пар, приписываемых внешним линиям, для которого в любой вершине графа следующее условие на три пары

(m_i, n_i) ($i = 1, 2, 3$), отвечающие линиям, связанным с вершиной,

$$|m_1 - m_2| + 1 \leq m_3 \leq \min\{m_1 + m_2 - 1, 2q + 1 - m_1 - m_2\} \quad \text{с шагом } 2, \quad (4.57)$$

$$|n_1 - n_2| + 1 \leq n_3 \leq \min\{n_1 + n_2 - 1, 2p + 1 - n_1 - n_2\} \quad \text{с шагом } 2, \quad (4.58)$$

не может быть удовлетворено ни при какой перестановке пар.

Кроме того, из конформных правил отбора для $N = 1$ следует, что

$$\langle \Phi_{mn} \rangle = 0 \quad (4.59)$$

для $(m, n) \neq (1, 1)$, а для $N = 2$

$$\langle \Phi_{m_1 n_1} \Phi_{m_2 n_2} \rangle = 0, \quad (4.60)$$

если (m_1, n_1) не равно (m_2, n_2) или $(q - m_2, p - n_2)$.

Теперь мы собираемся дать более точную формулировку нашего основного утверждения.

Предложение 4.1.1. *Существует решение струнного уравнения и выбор резонансного преобразования, описанного выше, такие, что функция*

$$\tilde{Z}[\{\lambda_{mn}\}] = \langle \exp \sum_{m,n} \lambda_{m,n} O_{m,n} \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m_i, n_i} \frac{\lambda_{m_1 n_1} \dots \lambda_{m_N n_N}}{N!} \langle O_{m_1 n_1} \dots O_{m_N n_N} \rangle \quad (4.61)$$

суть производящая функция корреляторов в минимальной Лиувиллевской гравитации.

В частности, все корреляторы $\langle O_{m_1 n_1} \dots O_{m_N n_N} \rangle$, запрещенные конформными правилами слияния, исчезают.

4.1.4 Производящая функция корреляторов МЛГ

Для решения сформулированной выше задачи запишем действие $S(v_\alpha, t_{mn})$ и производящую функцию $Z[\{t_{mn}\}]$ в терминах новых переменных

$\{\lambda_{mn}\}$, используя резонансную замену переменных

$$\begin{aligned}
t_{mn} = & \lambda_{mn} + A_{mn}\mu^{\delta_{mn}} + \sum_{m_1, n_1}^{\delta_{m_1 n_1} \leq \delta_{mn}} A_{mn}^{m_1 n_1} \mu^{\delta_{mn} - \delta_{m_1 n_1}} \lambda_{m_1 n_1} + \\
& + \sum_{m_1, n_1, m_2, n_2}^{\delta_{m_1 n_1} + \delta_{m_2 n_2} \leq \delta_{mn}} A_{mn}^{m_1 n_1, m_2 n_2} \mu^{\delta_{mn} - \delta_{m_1 n_1} - \delta_{m_2 n_2}} \lambda_{m_1 n_1} \lambda_{m_2 n_2} + \dots, \quad (4.62)
\end{aligned}$$

где $\mu = \lambda_{11}$ называется космологической постоянной в непрерывном подходе к МЛГ.

После выполнения этого преобразования действие принимает вид

$$\begin{aligned}
\tilde{S}[v_\alpha, \{\lambda_{mn}\}] = & S^{(0)}(v_\alpha) + \sum_{m, n} \lambda_{mn} S^{(mn)}(v_\alpha) + \\
& + \sum_{m_1, n_1, m_2, n_2} \lambda_{m_1 n_1} \lambda_{m_2 n_2} S^{(m_1 n_1, m_2 n_2)}(v_\alpha) + \dots \quad (4.63)
\end{aligned}$$

Информация о форме резонансного преобразования кодируется в коэффициентах $S^{(0)}$, $S^{(mn)}$ и т. д. Мы находим

$$S^{(0)} = \operatorname{res}_{y=\infty} \left[Q^{\frac{p+q}{q}} + \sum_{l=1}^s A_{1l} \mu^{\frac{l+1}{2}} Q^{\frac{p-ql}{q}} \right], \quad (4.64)$$

где введены новые положительные целые числа s и p_0 такие, что $p = sq + p_0$ и $0 < p_0 < q$, а также

$$S^{(mn)} = \operatorname{res}_{y=\infty} \left[Q^{\frac{pm-qn}{q}} + \sum_{l=n+2}^{sm + \lfloor \frac{p_0 m}{q} \rfloor} A_{ml}^{mn} \mu^{\frac{l-n}{2}} Q^{\frac{pm-ql}{q}} \right], \quad (4.65)$$

где A_{kl}^{mn} являются коэффициентами резонансных соотношений, и разность $(l - n)$ – четная. Более старшие коэффициенты также могут быть легко записаны в терминах коэффициентов $A_{kl}^{\{m_i n_i\}}$.

Производящая функция дается как

$$\tilde{Z}[\{\lambda_{mn}\}] = \frac{1}{2} \int_0^{\mathbf{v}^*} C_\alpha^{\beta\gamma}(v) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial v^\beta} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial v^\gamma} dv^\alpha, \quad (4.66)$$

где \mathbf{v}^* определяется как функция параметров $\{\lambda_{mn}\}$ струнного уравнения Дугласа (4.35). Отныне мы будем опускать тильды над функциями $\tilde{S}(\{u_\alpha\}, \{\lambda_{mn}\})$ и $\tilde{Z}(\{\lambda_{mn}\})$.

Для того чтобы вычислить одноточечную функцию, даваемую интегралом

$$\langle O_{mn} \rangle = \int_0^{v_\alpha^0} C_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_\beta} \frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v_\gamma} dv_\alpha, \quad (4.67)$$

нам необходимо знать верхний предел в этом интеграле v_α^0 , который является решением струнного уравнения для всех констант взаимодействия (за исключением $\lambda_{11} = \mu$), положенных равными нулю

$$v_\alpha^0 = v_\alpha^*(\lambda_{mn}) \Big|_{\lambda_{mn}=0, \lambda_{11}=\mu}. \quad (4.68)$$

Явно, v_α^0 удовлетворяет

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_\mu} \Big|_{v_\alpha=v_\alpha^0} = 0. \quad (4.69)$$

С помощью (4.64), (4.65) и (4.24), $S^{(0)}$ и $S^{(mn)}$ могут быть записаны как

$$S^{(0)} = -\frac{\theta_{p_0, s+1}}{c_{p_0, s+1}} - \sum_{l=1}^s A_{1l} \mu^{\frac{l+1}{2}} \frac{\theta_{p_0, s-l}}{c_{p_0, s-l}}, \quad (4.70)$$

$$S^{(mn)} = -\frac{\theta_{p_0 m, sm-n}}{c_{p_0 m, sm-n}} - \sum_{l=n+2}^{sm + \lfloor \frac{p_0 m}{q} \rfloor} A_{ml}^{mn} \mu^{\frac{l+1}{2}} \frac{\theta_{p_0 m, sm-l}}{c_{p_0 m, sm-l}}. \quad (4.71)$$

Будем использовать следующее предложение из [66]:

Предложение 4.1.2. На оси $v_{i>1} = 0$,

$$\begin{cases} k - \text{чет.} : & \frac{\partial \theta_{\lambda, k}}{\partial v_\alpha} = \delta_{\lambda, \alpha} x_{\lambda, k} \left(-\frac{v_1}{q} \right)^{\frac{k}{2}q}, \\ k - \text{нечет.} : & \frac{\partial \theta_{\lambda, k}}{\partial v_\alpha} = \delta_{\lambda, q-\alpha} y_{\lambda, k} \left(-\frac{v_1}{q} \right)^{\frac{k-1}{2}q + \lambda}, \end{cases} \quad (4.72)$$

где

$$x_{\alpha, k} = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{q})}{\Gamma(\frac{\alpha}{q} + \frac{k}{2})(\frac{k}{2})!} \quad u \quad y_{\lambda, k} = -\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{q})}{\Gamma(\frac{\alpha}{q} + \frac{k+1}{2})(\frac{k-1}{2})!}. \quad (4.73)$$

Используя это утверждение вместе с (4.70), легко видеть, что струнное уравнение (4.69) имеет решения вида $v_\alpha^0 = 0$ для $\alpha \neq 1$, и координата v_1^0 является корнем уравнения

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{p_0}} = 0, \quad \text{если } s - \text{нечет.}, \quad (4.74)$$

или

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{q-p_0}} = 0, \quad \text{если } s - \text{чет.} \quad (4.75)$$

Здесь мы предполагаем, что после взятия производной, мы берем все v_α для $\alpha \neq 1$ равными нулю. Более явно эти уравнения можно записать в виде

$$\sum_{k=-1:2:s} B_{p_0,k}^{\text{odd}} \left(-\frac{v_1}{q} \right)^{\frac{s-k}{2}q} = 0, \quad \text{если } s - \text{нечет.}, \quad (4.76)$$

или

$$\sum_{k=-1:2:s} B_{p_0,k}^{\text{odd}} \left(-\frac{v_1}{q} \right)^{\frac{s-k-1}{2}q} = 0, \quad \text{если } s - \text{чет.}, \quad (4.77)$$

где

$$B_{p_0,k}^{\text{odd}} = \frac{x_{p_0,s-k}}{c_{p_0,s-k}} A_{1,k} \mu^{\frac{k+1}{2}}, \quad (4.78)$$

и

$$B_{p_0,k}^{\text{even}} = \frac{y_{p_0,s-k}}{c_{p_0,s-k}} A_{1,k} \mu^{\frac{k+1}{2}}, \quad (4.79)$$

где $A_{1,-1} = 1$.

Одноточечные функции. Как было показано в [66], структурная константа в плоских координатах на оси $v_{\alpha>0} = 0$ для $\alpha \geq \beta \geq \gamma$

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \left(-\frac{v_1}{q} \right)^{\frac{\alpha+\beta+\gamma-q-1}{2}}, \quad (4.80)$$

если $\frac{\alpha+\beta+\gamma-q-1}{2} \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha + \beta - \gamma \in [1, q-1]$, иначе 0,

где \mathbb{N}_0 является множеством неотрицательных целых чисел. С помощью (4.72) мы находим для нечетного s и четного $(sm - n)$

$$\langle O_{mn} \rangle = \int_0^{v_1^0} C_{q-1,p_0,p_0m} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{p_0}} \frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v_{p_0m}} dv_1. \quad (4.81)$$

Принимая во внимание (4.80), мы заключаем, что корреляционная функция равна нулю для $m \neq 1$. Таким образом, из правил отбора в этом случае мы получаем

$$\langle O_{1n} \rangle = \int_0^{v_1^0} \left(-\frac{v_1}{q}\right)^{p_0-1} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{p_0}} \frac{\partial S^{(1n)}}{\partial v_{p_0}} dv_1 = 0. \quad (4.82)$$

Для нечетного s и нечетного $(sm - n)$,

$$\langle O_{mn} \rangle = \int_0^{v_1^0} C_{q-1, p_0, q-p_0 m} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{p_0}} \frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v_{q-p_0 m}} dv_1, \quad (4.83)$$

и структурная константа в этом случае не равняется нулю, только если $q - p_0 m = p_0$, как следует из (4.109). Поэтому гравитационная размерность

$$[\langle O_{mn} \rangle] = \frac{p+q}{q} - \delta_{mn} = \frac{sm-n}{2} + \frac{s+1}{2} + \frac{p_0 m + p_0}{2q}, \quad (4.84)$$

является целой, корреляционная функция – аналитической, и мы не рассматриваем ее [32].

Аналогично, для четного s и четного $(sm - n)$ мы получаем из правил отбора следующий результат

$$\langle O_{1n} \rangle = \int_0^{v_1^0} \left(-\frac{v_1}{q}\right)^{q-p_0-1} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{q-p_0}} \frac{\partial S^{(1n)}}{\partial v_{q-p_0}} dv_1 = 0. \quad (4.85)$$

Наконец, если s – четное, а $(sm - n)$ – нечетное, мы снова находим, что выражения для одноточечных корреляционных функций являются аналитическими.

Несложный анализ показывает, что количество этих уравнений равняется числу коэффициентов, возникающих в первом порядке в резонансном соотношении. Следовательно, требование отсутствия одноточечных функций однозначно фиксирует неизвестные коэффициенты $B_{p_0, k}$ в выражениях (4.76) и (4.77).

Таким образом, мы приходим к выводу, что специальное решение струнного уравнения, рассмотренное выше, обеспечивает выполнение требований правил отбора в соответствии с общей процедурой, описанной в предыдущем разделе.

Отметим также, что разнообразие (p, q) моделей минимальной Лиувилевской гравитации разбивается на два подкласса в соответствии с четностью

$[p/q]$. В каждом случае мы находим различные наборы требований, сформулированные выше, которые приводят к нулевым значениям одноточечных функций.

Двухточечные функции. Теперь мы собираемся рассмотреть двухточечную функцию. Из (4.66) мы находим

$$\langle O_{m_1 n_1} O_{m_2 n_2} \rangle = \sum_{\gamma=1}^{q-1} \int_0^{v_1^0} dv_1 \left(-\frac{v_1}{q} \right)^{\gamma-1} \frac{\partial S^{(m_1 n_1)}}{\partial v_\gamma} \frac{\partial S^{(m_2 n_2)}}{\partial v_\gamma}. \quad (4.86)$$

Из (4.72) следует, что $\frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v_\gamma} \neq 0$, если удовлетворяется одно из следующих условий

$$\begin{aligned} 1) \quad & \gamma = mp_0 \bmod q \quad \text{и} \quad (sm - n) - \text{чет.}, \\ 2) \quad & \gamma = q - mp_0 \bmod q \quad \text{и} \quad (sm - n) - \text{нечет.} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Аналогично рассмотрению в предыдущем разделе мы находим четыре случая, когда двухточечная функция может быть отлична от нуля. В двух случаях, в одном из которых первая пара (m_1, n_1) удовлетворяет первому условию, тогда как вторая пара (m_2, n_2) является предметом второго условия, и наоборот во втором, мы находим регулярное выражение для двухточечной функции. Таким образом, мы остаемся с двумя возможностями, когда обе пары удовлетворяют либо первому, либо второму условию в (4.87).

Явно, в случае, когда обе разности $(sm - n_1)$ и $(sm - n_2)$ являются четными, мы получаем следующее требование

$$\langle O_{mn_1} O_{mn_2} \rangle = \int_0^{v_1^0} dv_1 \left(-\frac{v_1}{q} \right)^{mp_0-1} \frac{\partial S^{(mn_1)}}{\partial v_{mp_0}} \frac{\partial S^{(mn_2)}}{\partial v_{mp_0}} = 0, \quad \text{если} \quad n_1 \neq n_2. \quad (4.88)$$

Выполняя подстановку

$$t = 2 \left(\frac{v_1}{v_1^0} \right)^q - 1, \quad (4.89)$$

и обозначая

$$\frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v_{mp_0}} = L_{\frac{sm-n}{2}}(t), \quad (4.90)$$

мы находим из условия диагональности следующий результат

$$\langle O_{mn_1} O_{mn_2} \rangle = \int_{-1}^1 dt (1+t)^{\frac{mp_0-q}{q}} L_{\frac{sm-n_1}{2}}(t) L_{\frac{sm-n_2}{2}}(t) = 0, \quad \text{если } n_1 \neq n_2. \quad (4.91)$$

Таким образом, правила отбора для двухточечных корреляционных чисел требуют, чтобы многочлены $L_{\frac{sm-n}{2}}$ образовывали ортогональный набор многочленов Якоби

$$\frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v_{mp_0}} = \frac{pm - qn}{q} P_{\frac{sm-n}{2}}^{(0, \frac{mp_0-q}{q})}(t), \quad \text{для } (sm - n) - \text{ чет.} \quad (4.92)$$

Во втором случае, когда обе разности $(sm - n_1)$ и $(sm - n_2)$ являются нечетными, мы имеем

$$\langle O_{mn_1} O_{mn_2} \rangle = \int_0^{v_1^0} dv_1 \left(-\frac{v_1}{q}\right)^{q-mp_0-1} \frac{\partial S^{(mn_1)}}{\partial v_{q-mp_0}} \frac{\partial S^{(mn_2)}}{\partial v_{q-mp_0}} = 0, \quad \text{если } n_1 \neq n_2. \quad (4.93)$$

Обозначая

$$\frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v_{q-mp_0}} = (1+t)^{\frac{mp_0}{q}} L_{\frac{sm-n-1}{2}}(t), \quad (4.94)$$

мы находим из условия диагональности для двухточечных корреляторов в этом случае следующий результат

$$\langle O_{mn_1} O_{mn_2} \rangle = \int_{-1}^1 dt (1+t)^{\frac{mp_0}{q}} L_{\frac{sm-n_1-1}{2}}(t) L_{\frac{sm-n_2-1}{2}}(t) = 0, \quad \text{если } n_1 \neq n_2. \quad (4.95)$$

Это означает, что

$$\frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v_{q-mp_0}} = \frac{pm - qn}{q} (1+t)^{\frac{mp_0}{q}} P_{\frac{sm-n-1}{2}}^{(0, \frac{mp_0}{q})}(t) \quad \text{для } (sm - n) - \text{ нечет.} \quad (4.96)$$

Наконец, вставляя эти явные выражения для производных $S^{(mn)}$ в уравнения (4.82) и (4.85), мы приходим к следующему условию

$$\langle O_{1n} \rangle = \int_{-1}^1 (1+t)^{\frac{p_0-q}{q}} L_{\frac{s+1}{2}}(t) P_{\frac{s-n}{2}}^{(0, \frac{p_0-q}{q})}(t) dt = 0, \quad (4.97)$$

в случае, когда s является нечетным, а n – нечетным и большим 1. И

$$\langle O_{1n} \rangle = \int_{-1}^1 (1+t)^{\frac{p_0}{q}} L_{\frac{s}{2}}(t) P_{\frac{s-n-1}{2}}^{(0, \frac{p_0}{q})}(t) dt = 0, \quad (4.98)$$

в случае, когда s является четным, а n – нечетным и большим 1. Здесь мы ввели многочлен $L_n(t)$

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{p_0}}(t) = L_{\frac{s+1}{2}}(t), \quad (4.99)$$

для нечетного s ,

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{q-p_0}}(t) = (1+t)^{\frac{p_0}{q}} L_{\frac{s}{2}}(t). \quad (4.100)$$

для четного s .

Принимая во внимание данные уравнения, порядок многочленов $\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{p_0}}$ и $\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{q-p_0}}$, а также струнные уравнения (4.74), (4.75), мы получаем следующие явные выражения

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{p_0}} = \frac{p+q}{q} \left(P_{\frac{s+1}{2}}^{(0, \frac{p_0-q}{q})}(t) - P_{\frac{s-1}{2}}^{(0, \frac{p_0-q}{q})}(t) \right), \quad (4.101)$$

если s – нечетное, и

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_{q-p_0}} = \frac{p+q}{q} (1+t)^{\frac{p_0}{q}} \left(P_{\frac{s}{2}}^{(0, \frac{p_0}{q})}(t) - P_{\frac{s-2}{2}}^{(0, \frac{p_0}{q})}(t) \right), \quad (4.102)$$

если s – четное.

Мы описали связь между подходом к (p, q) моделям минимальной Лиувилевской гравитации на основе струнного уравнения Дугласа с одной стороны и Фробениусовыми многообразиями A_{q-1} типа с другой. Как результат этой связи, производящая функция корреляционных чисел МЛГ выражается логарифмом тау-функции соответствующей интегрируемой иерархии. Вся необходимая информация кодируется в решении струнного уравнения Дугласа и в резонансных соотношениях между параметрами интегрируемой иерархии и константами взаимодействия МЛГ. Используя это соотношение и некоторые специальные свойства плоских координат на Фробениусовом многообразии, мы нашли надлежащее решение струнного уравнения Дугласа. Мы показали, что надлежащее решение согласуется с основными требованиями конформных правил отбора, возникающими на уровне одно- и двухточечных корреляционных функций. А

именно, количество параметров резонансных преобразований в точности совпадает с количеством ограничений, вытекающих из правил отбора. Разрешая эти ограничения, мы нашли явный вид резонансных преобразований в терминах многочленов Якоби.

В следующем разделе мы обсудим вычисление высших корреляционных чисел на примере унитарной серии минимальных моделей Лиувиллевской гравитации [68].

4.2 Унитарная серия МЛГ

В этом разделе мы рассмотрим $M_{q,q+1}$ серию унитарных моделей, взаимодействующих с Лиувиллевской гравитацией в сферической топологии. В данном случае задача формулируется следующим образом. Действие S зависит от $q-1$ параметров u^1, u^2, \dots, u^{q-1} ,

$$S[u^\alpha] = \operatorname{res}_{y=\infty} \left(Q^{\frac{2q+1}{q}}(y) + \sum_{1 \leq n \leq m \leq q-1} t_{mn}(\mu, \{\lambda_{kl}\}) Q^{\frac{(q+1)m-qn}{q}}(y) \right), \quad (4.103)$$

где соответствующий полином есть

$$Q(y) = y^q + u^{q-1}y^{q-2} + u^{q-2}y^{q-3} + \dots + u^1y^0. \quad (4.104)$$

Набор λ_{kl} обозначает Лиувиллевские константы взаимодействия, а функции $t_{mn}(\mu, \lambda)$ определяются резонансными преобразованиями.

Производящая функция МЛГ имеет вид (4.66). Структурные константы Фробениусовой алгебры в плоских координатах $C_\alpha^{\beta\gamma} = C_{\alpha, q-\beta, q-\gamma}$ определяются здесь как

$$C_{\alpha\beta\gamma} = -q \operatorname{res}_{y=\infty} \frac{\frac{\partial Q(y)}{\partial v^\alpha} \frac{\partial Q(y)}{\partial v^\beta} \frac{\partial Q(y)}{\partial v^\gamma}}{Q'(y)}. \quad (4.105)$$

В частности, ввиду $C_{1\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ мы получаем

$$C_1^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha+\beta, q} \quad \text{и} \quad C_\alpha^{q-1, \beta} = \delta_{\alpha, \beta}. \quad (4.106)$$

Как следует из определения Фробениусова многообразия, существует функция $F(\mathbf{v})$ такая, что

$$C_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{v}) = \frac{\partial^3 F(\mathbf{v})}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n. \quad (4.107)$$

Учитывая вид производящей функции (4.66) и свойства релевантного решения \mathbf{v}_* , можно заметить, что для вычисления корреляционных функций нам нужны коэффициенты разложения

$$C_{\alpha\beta\gamma}(v_1, v_2, v_3, \dots) = C_{\alpha\beta\gamma}(v_1, 0, 0, \dots) + \sum_{\rho=1}^{q-1} v^\rho \partial_\rho C_{\alpha\beta\gamma}(v_1, 0, 0, \dots) + \dots \quad (4.108)$$

Мы интересуемся здесь трех- и четырехточечными корреляционными числами. Необходимые результаты для первых двух членов (4.108) приведены ниже. Для компактного представления введем функцию $\chi_{A,B}(x) = 1$, если $x \in [A, B]$, или ноль в противном случае. В нулевом порядке структурная константа в \mathbf{v} координатах на самом решении струнного уравнения имеет вид

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \chi_{1, q-1}(\alpha + \beta - \gamma) \left(-\frac{v_1}{q}\right)^{\frac{\alpha+\beta+\gamma-q-1}{2}} \text{ если } \frac{\alpha+\beta+\gamma-q-1}{2} \in \mathbb{N}, \text{ иначе } 0 \quad (4.109)$$

Первая производная $\partial_\rho C_{\alpha\beta\gamma}$ дается как

$$\begin{aligned} \partial_\rho C_{\alpha\beta\gamma} = & \left[(q - \rho) \chi_{1, \rho}(\alpha + \beta - \gamma) + \frac{2q + \gamma - \alpha - \beta - \rho}{2} \chi_{\rho+2, 2q-\rho-2}(\alpha + \beta - \gamma) \right] \times \\ & \times \frac{2q - \alpha - \beta - \gamma - \rho}{2q} \left(-\frac{v_1}{q}\right)^{\frac{\alpha+\beta+\gamma+\rho-2q-2}{2}} \text{ если } \frac{\alpha+\beta+\gamma+\rho-2q-2}{2} \in \mathbb{N}, \text{ иначе } 0 \quad (4.110) \end{aligned}$$

В (4.109) и (4.110) \mathbb{N} – множество неотрицательных целых чисел, и мы предполагаем следующее упорядочение $\rho \geq \alpha \geq \beta \geq \gamma$. Поскольку оба тензора являются симметричными, данная информация обеспечивает полный ответ. Некоторые детали вывода приводятся в Приложении Г.1.

4.2.1 Статсумма и одноточечные корреляторы

Мы начинаем наш анализ корреляционных функций, представляя результаты для нулевых, одно- и двухточечных корреляторов, найденные в [66]. Рассмотрение в этом и последующих разделах основывается на утверждении 4.1.2.

Статсумма. Чтобы определить независимые от нормировки величины, нам необходим явный вид статсуммы

$$Z_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\mathbf{v}_*^{(0)}} dv^\gamma C_\gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial v^\alpha} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial v^\beta}, \quad (4.111)$$

где $\mathbf{v}_*^{(0)}$ обозначает член нулевого порядка в разложении решения струнного уравнения по константе взаимодействия.

Для того чтобы найти Z_0 , напишем член нулевого порядка в разложении действия в явном виде в терминах деформированных плоских координат (4.24),

$$S^{(0)} = \operatorname{res}_{y=\infty} \left[Q^{\frac{2q+1}{q}} + \mu Q^{\frac{1}{q}} \right] = -\frac{\theta_{1,2}}{c_{1,2}} - \mu \frac{\theta_{1,0}}{c_{1,0}}. \quad (4.112)$$

Из (4.72) можно видеть, что уравнения (4.69) для $\alpha < q - 1$ решаются автоматически с помощью анзаца $\mathbf{v}_* = (v_{*1}, 0, 0, \dots)$, и мы, таким образом, остаемся с уравнением

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_1} = -\frac{1}{c_{1,2}} \frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial v_1} - \frac{\mu}{c_{1,0}} = 0, \quad (4.113)$$

которое дает

$$\mu = \frac{(1+q)(1+2q)}{q} \left(-\frac{v_{*1}}{q} \right)^q. \quad (4.114)$$

Данное уравнение определяет член нулевого порядка в разложении релевантного решения струнного уравнения. Контур интегрирования в (4.111) может быть взят вдоль оси v_1 , поскольку на оси $\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_k} = 0$ для $k > 1$, и мы остаемся с членом, содержащим $C_{q-1}^{q-1, q-1} = 1$. Явное вычисление дает

$$Z_0 = \frac{(1+q)(1+2q)}{q^{2q+2}} v_{*1}^{2q+1}. \quad (4.115)$$

Одноточечные функции. Для общих одноточечных корреляторов мы имеем

$$Z_{mn} = \int_0^{\mathbf{v}_*^{(0)}} dv^\gamma C_\gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial v^\alpha} \frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v^\beta}. \quad (4.116)$$

Учитывая, что $C_\alpha^{q-1,\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ на оси $v_{k>1} = 0$, и используя результаты предыдущего раздела, мы более явно получаем

$$Z_{mn} = \int_0^{\mathbf{v}_*^{(0)}} C_{q-1}^{q-1,\gamma} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial v^{q-1}} \frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v^\gamma} dv_1 = \int_0^{\mathbf{v}_*^{(0)}} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial v_1} \frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v_1} dv_1. \quad (4.117)$$

На основе Леммы 4.1.2 мы можем заключить [66], что одноточечные корреляционные числа для всех полей равны нулю.³

4.2.2 Двухточечные корреляторы

Важным требованием согласованности является диагональность двухточечных корреляторов. Она позволяет определить контрчлены первого порядка в резонансных преобразованиях. Дважды дифференцируя (4.66), получим

$$Z_{m_1 n_1, m_2 n_2} = \int_0^{\mathbf{v}_*^{(0)}} dv_1 C_{q-1}^{\alpha\beta} \frac{\partial S^{(m_1 n_1)}}{\partial v^\alpha} \frac{\partial S^{(m_2 n_2)}}{\partial v^\beta} + \int_0^{\mathbf{v}_*^{(0)}} dv_1 C_{q-1}^{\alpha\beta} \frac{\partial S^{(0)}}{\partial v^\alpha} \frac{\partial S^{(m_1 n_1, m_2 n_2)}}{\partial v^\beta}. \quad (4.118)$$

Второе слагаемое может быть отлично от нуля только для корреляторов с целыми гравитационными размерностями, которые мы не рассматриваем. Первое слагаемое дает

$$Z_{m_1 n_1, m_2 n_2} = \sum_{\gamma=1}^{q-1} (-q)^{1-\gamma} \int_0^{\mathbf{v}_*^{(0)}} dv_1 v_1^{\gamma-1} \frac{\partial S^{(m_1 n_1)}}{\partial v_\gamma} \frac{\partial S^{(m_2 n_2)}}{\partial v_\gamma}. \quad (4.119)$$

³Это утверждение выполняется с точностью до обычной неопределенности, связанной с корреляторами, которые имеют целые гравитационные размерности [31].

В работе [66] было найдено, что для $v_{i>1} = 0$,

$$\frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v_\alpha}(v_1) = \begin{cases} \delta_{m,\alpha} v_{*1}^{\frac{m-n}{2}q} (-q)^{\frac{\alpha-1}{2}} N_{mn} P_{\frac{m-n}{2}}^{(0, \frac{m-q}{q})}(t), & (m-n) \text{ чет.}, \\ \delta_{m,q-\alpha} v_{*1}^{\frac{m-n-1}{2}q+m} (-q)^{\frac{\alpha-1}{2}} N_{mn} \left(\frac{1+t}{2}\right)^{\frac{m}{q}} P_{\frac{m-n-1}{2}}^{(0, \frac{m}{q})}(t), & (m-n) \text{ нечет.}, \end{cases} \quad (4.120)$$

где

$$t = 2 \left(\frac{v_1}{v_{*1}} \right)^q - 1, \quad (4.121)$$

$P_n^{(0,b)}(t)$ – многочлены Якоби (см. Приложение Г.2), а N_{mn} обозначают t -независимые множители. Их явный вид не имеет значения для нашего дальнейшего рассмотрения. С этим результатом условие диагональности для двухточечных корреляторов,

$$Z_{m_1 n_1, m_2 n_2} \sim \delta_{m_1, m_2} \delta_{n_1, n_2}, \quad (4.122)$$

становится эквивалентно условию ортогональности для многочленов Якоби. Вычисление диагональных двухточечных функций дает

$$Z_{mn, mn} = \frac{N_{mn}^2}{(m-n)q+m} v_{*1}^{(m-n)q+m}. \quad (4.123)$$

4.2.3 Трехточечные корреляторы

Одно важное изменение, возникающее при переходе на уровень трехточечных функций, заключается в том, что в данном случае следует учитывать производную от верхнего предела интегрирования. Также на уровне трехточечных функций впервые возникает вклад контрчленов второго порядка. Используя снова аргументы, основанные на струнном уравнении и требованиях неаналитичности, мы получаем следующее выражение

$$Z_{123} = \sum_{\sigma} \int_0^{v_{*1}^{(0)}} dv^\gamma C_\gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial S^{(\sigma(1))}}{\partial v^\alpha} \frac{\partial S^{(\sigma(2)\sigma(3))}}{\partial v^\beta} + C_\gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial v_{*1}^\gamma}{\partial \lambda_3} \frac{\partial S^{(1)}}{\partial v^\alpha} \frac{\partial S^{(2)}}{\partial v^\beta}, \quad (4.124)$$

где индексы (m_i, n_i) заменяются на индекс i , а сумма берется по перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$. Далее в этом разделе мы используем латинские индексы исключительно в этом смысле, а индекс ноль означает член нулевого порядка в разложении по константе взаимодействия. В (4.124) и далее мы всегда предполагаем, что неинтегральный вклад вычисляется на решении струнного уравнения для всех констант взаимодействия, положенных равными нулю. Другие члены в (4.124) исчезают в силу того, что они содержат $\frac{\partial S^{(0)}}{\partial v^\alpha}(v_*) = 0$. Как следует из струнного уравнения

$$\frac{\partial S^{(i)}}{\partial v^\alpha} + \frac{\partial^2 S^{(0)}}{\partial v^\alpha \partial v^\gamma} \frac{\partial v_*^\gamma}{\partial \lambda_i} = 0, \quad (4.125)$$

что дает

$$\frac{\partial v_*^\gamma}{\partial \lambda_i} = T^{\gamma\beta} \frac{\partial S^{(i)}}{\partial v^\beta}. \quad (4.126)$$

Обратная матрица ($T^{\alpha\gamma} M_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha$)

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 S^{(0)}}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \quad (4.127)$$

может быть вычислена с помощью (4.64). Второй член не дает вклада в $M_{\alpha\beta}$ ввиду $\frac{\partial^2 \theta_{1,0}}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = 0$. Для первого члена мы используем (4.72),

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{c_{1,2}} \frac{\partial^2 \theta_{1,2}}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = \frac{1}{c_{1,2}} v_1 C_{\alpha\beta}^1. \quad (4.128)$$

С этим результатом мы можем легко найти обратную матрицу $T^{\gamma\beta}$:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{c_{1,2}}{v_1} \left(-\frac{v_1}{q} \right)^{1-\alpha} \delta_{\alpha,\beta}. \quad (4.129)$$

Трехточечная функция становится

$$Z_{123} = \sum_\sigma \int_0^{v_*^{(0)}} dv^\gamma C_\gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial S^{(\sigma(1))}}{\partial v^\alpha} \frac{\partial S^{(\sigma(2)\sigma(3))}}{\partial v^\beta} + C_\rho^{\alpha\beta} T^{\rho\gamma} \frac{\partial S^{(1)}}{\partial v^\alpha} \frac{\partial S^{(2)}}{\partial v^\beta} \frac{\partial S^{(3)}}{\partial v^\gamma}, \quad (4.130)$$

где второй член вычисляется на решении струнного уравнения.

Правила слияния и трехточечные функции. Сформулируем сначала одно полезное следствие из правил слияния для трехточечной функции в унитар-

ных минимальных моделях $M_{q,q+1}$. Напомним, что примарные поля Φ_{mn} перечисляются согласно правилу $m = 1, \dots, q - 1$ и $n \leq m$. Для трехточечной функции

$$G = \langle \Phi_{m_1 n_1} \Phi_{m_2 n_2} \Phi_{m_3 n_3} \rangle, \quad (4.131)$$

правила слияния удовлетворены, т. е. $G \neq 0$, если $P = (m_1 n_1, m_2 n_2, m_3 n_3)$ или один из его отраженных образов, генерируемых с помощью $(m_i, n_i) \rightarrow (q - m_i, q + 1 - n_i)$, принадлежит области

$$F = \{(m_1 n_1, m_2 n_2, m_3 n_3)\} \quad (4.132)$$

такой, что для некоторой перестановки (i, j, k) множества $\{1, 2, 3\}$ выполняется

$$\begin{cases} m_k \in [|m_i - m_j| + 1 : 2 : \min(m_i + m_j - 1, 2q - 1 - m_i - m_j)], \\ n_k \in [|n_i - n_j| + 1 : 2 : \min(n_i + n_j - 1, 2q + 1 - n_i - n_j)], \end{cases} \quad (4.133)$$

где $: 2 :$ обозначает шаг через 2. Мы можем классифицировать различные случаи по отношению к четностям $\sum_{i=1}^3 m_i$ и $\sum_{i=1}^3 n_i$. Легко получить следующий вывод из правил слияния для унитарных минимальных моделей.

Предложение 4.2.1. *В случае, когда обе суммы $\sum_i m_i$ и $\sum_i n_i$ являются четными, трехточечная функция $G = 0$.*

Действительно, для любого выбора образа отражения полей, одна из сумм $\sum_i m_i$ и $\sum_i n_i$ является четной, что запрещается (4.133).

Сравнение с результатами МЛГ. Для физически релевантных неаналитических корреляторов существует две возможности:

1. Правила слияния не удовлетворены, далее этот случай обозначается как *не физический*. В этом случае (4.130) должно давать ноль всегда, когда это разрешается с помощью резонансных преобразований. Это требование позволяет определить контрчлены второго порядка $S^{(12)}$.
2. Параметры $\{m_i, n_i\}$ трехточечной функции Z_{123} удовлетворяют вышеописанным правилам слияния. Мы называем это *физической областью*. В этом случае (4.130) должна давать такой же результат, как и результат, полученный в непрерывном подходе [30]. Это может быть достигнуто, если выполняются два условия:

- (а) Интегральный вклад в (4.130) в этой области равен нулю.
 (б) Неинтегральный вклад в (4.130) является ненулевым и приводит к правильному ответу для универсальных отношений.

Без ограничения общности мы можем зафиксировать $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3$. Общий анализ трехточечного сектора требует рассмотрения четырех различных областей: все три поля четные, одно из полей является нечетным, двое из полей являются нечетными, и все три поля нечетные. Далее мы подробно анализируем (1) и (2) в области, в которой все поля четные. Кроме того, мы накладываем дополнительное ограничение

$$m_{12} \leq m_{13} \leq m_{23} \leq q. \quad (4.134)$$

Отметим, что трехточечные функции в этой области всегда неаналитические. Действительно, размерность

$$[Z_{123}] = [Z] - \sum_{i=1}^3 \delta_i = -1 + \frac{m_1 + m_2 + m_3 - 1}{2q} + \sum_{i=1}^3 \frac{m_i - n_i}{2}, \quad (4.135)$$

где $m_1 + m_2 + m_3 \leq 2q - 1$, и, следовательно, (4.135) не целое.

Нефизическая область. Используя явный вид структурных констант и свойства контрчленов первого и второго порядка, напишем интегральный вклад IP в (4.130):

$$\text{IP} = \sum_{\sigma} \sum_{\gamma=1}^{q-1} \delta_{m_i, \gamma} \delta_{m_j + m_k - 1, \gamma} \int_0^{\mathbf{v}_*^{(0)}} dv_1 \left(-\frac{v_1}{q}\right)^{\gamma-1} \frac{\partial S^{(\sigma(i))}}{\partial v_{\gamma}} \frac{\partial S^{(\sigma(j), \sigma(k))}}{\partial v_{\gamma}}(v_1). \quad (4.136)$$

Чтобы найти контрчлен второго порядка, мы берем

$$m_3 = m_1 + m_2 - 1. \quad (4.137)$$

Легко видеть, что члены с перестановками исчезают. Прежде чем использовать замену (4.121), удобно выразить контрчлены второго порядка также в терминах безразмерных функций $X^{(m_1 n_1, m_2 n_2)}(t)$:

$$\frac{\partial S^{(m_1 n_1, m_2 n_2)}}{\partial v_{m_3}}(v_1) = N_1 N_2 c_{1,2} 2^{-\frac{m_3}{2}} (-q)^{\frac{2q-3+m_3}{2}} X^{(m_1 n_1, m_2 n_2)}(t) v_{*1}^{\frac{m_3 - n_1 - n_2 - 1}{2} q}. \quad (4.138)$$

Явный вид неинтегрального вклада NIP в (4.130) следующий

$$\text{NIP} = N_1 N_2 N_3 \frac{q^{q+1}}{(1+q)(1+2q)} v_{1*}^{\sum_i (\frac{m_i - n_i}{2} q + \frac{m_i}{2}) - \frac{1+2q}{2}}. \quad (4.139)$$

Собирая интегральный и неинтегральный вклады вместе, получим

$$Z_{123} = N_1 N_2 N_3 c_{1,2} (-q)^{q-2} \left[\int_{-1}^1 dt (1+t)^{\frac{m_3-q}{q}} P_{\frac{m_3-n_3}{2}}^{(0, \frac{m_3-q}{q})}(t) X^{(m_1 n_1, m_2 n_2)}(t) - 1 \right]. \quad (4.140)$$

Степень полинома $X^{(m_1 n_1, m_2 n_2)}(t)$ есть

$$\deg X^{(m_1 n_1, m_2 n_2)} = \frac{m_1 - n_1 + m_2 - n_2 - 2}{2}. \quad (4.141)$$

Поскольку $m_3 - n_3$ четно, $n_3 - n_1 - n_2$ должно быть нечетно:

$$n_3 = n_1 + n_2 + 1 + 2s, \quad s \in \mathbb{Z}. \quad (4.142)$$

Рассмотрим область $n_3 \geq n_1 + n_2$, в которой трехточечная функция в соответствии с правилами слияния должна равняться нулю. Ввиду требования четности n_3 принимает значения от $n_1 + n_2 + 1$ до m_3 с шагом 2 в этой области. Тогда степень многочлена Якоби в (4.140) меняется от 0 до $\deg X^{(12)}$ с шагом 1. Учитывая свойство полноты многочленов Якоби, получим

$$X^{(12)}(t) = \sum_{k=0}^{\deg X^{(12)}} \left(qk + \frac{m_1 + m_2 - 1}{2} \right) P_k^{(0, \frac{m_1+m_2-1}{q}-1)}(t), \quad (4.143)$$

где коэффициенты фиксируются (с использованием ортогональности (Г.21)) из требования $Z_{123} = 0$. Уравнение (Г.23) может быть использовано для получения представления

$$X^{(12)}(t) = q(1+t)^{1-\frac{m_1+m_2-1}{q}} \frac{d}{dt} \left[(1+t)^{\frac{m_1+m_2-1}{q}} P_{\frac{m_1-n_1+m_2-n_2}{2}-1}^{(0, \frac{m_1+m_2-1}{q})}(t) \right]. \quad (4.144)$$

Физическая область. Сначала мы должны убедиться, что если правила слияния удовлетворены, то неинтегральный вклад отличен от нуля. Из (4.109) мы

находим, что $\text{NIP} \neq 0$, если

$$m_3 = m_1 + m_2 - 1 - 2s, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.145)$$

и

$$1 \leq q - m_3 + m_2 - m_1 \leq q - 1. \quad (4.146)$$

Учитывая (4.134), мы замечаем, что условие (4.145) эквивалентно $m_3 \leq \min(m_1 + m_2 - 1, 2q - 1 - m_1 - m_2)$. Правое условие в (4.146) дает $m_2 - m_1 + 1 \leq m_3$, тогда как левое условие удовлетворено ввиду $q - m_3 + m_2 - m_1 \geq q - m_3$. Следовательно, если правила слияния удовлетворены, неинтегральный вклад в (4.130) отличен от нуля.

Следующий шаг состоит в проверке того, что, когда правила слияния удовлетворены, интегральный вклад в (4.130) отсутствует. Заметим, что $\text{IP} = 0$, если $m_3 \neq m_1 + m_2 - 1$. Следовательно, все, что остается проверить, это случай $m_3 = m_1 + m_2 - 1$. Из правил слияния мы имеем

$$|n_1 - n_2| + 1 \leq n_3 \leq n_1 + n_2 - 1, \quad (4.147)$$

где выбор правой части учитывает $n_i \leq m_i$ и (4.134). Из (4.141) мы получаем

$$\deg X^{(m_1 n_1, m_2 n_2)}(t) < \deg P_{\frac{m_3 - n_3}{2}}^{(0, \frac{m_3 - q}{q})}(t), \quad (4.148)$$

и с помощью свойств полноты и ортогональности многочленов Якоби мы заключаем, что интегральный вклад равен нулю.

Последний шаг заключается в проверке результата для трехточечного универсального отношения. Для общего (q, p) случая [30] оно имеет вид

$$\frac{\langle\langle O_1 O_2 O_3 \rangle\rangle^2}{\prod_{i=1}^3 \langle\langle O_i \rangle\rangle} = \frac{\prod_{i=1}^3 |pm_i - qn_i|}{p(p+q)(p-q)}, \quad (4.149)$$

где $\langle\langle \dots \rangle\rangle = \frac{\langle \dots \rangle}{\langle 1 \rangle}$. Для $p = q + 1$ это выражение совпадает с трехточечным универсальным отношением, полученным в дуальном подходе

$$\frac{(Z_{123})^2 Z_0}{Z_{11} Z_{22} Z_{33}} = \frac{\prod_{k=1}^3 ((q+1)m_k - qn_k)}{(1+q)(1+2q)}. \quad (4.150)$$

Здесь мы используем (4.139), (4.123) и (4.115).

4.2.4 Четырехточечные корреляторы

В этом разделе мы рассмотрим четырехточечные корреляторы. Из предыдущего рассмотрения может показаться, что роль параметров n_i несколько подавлена по отношению к роли параметров m_i . В самом деле, за исключением нормировки, кажется, что все, что они делают, состоит в выборе области в соответствии с четностями $m_i - n_i$, а сами значения n_i кажутся нерелевантными. Далее мы показываем, как восстанавливается баланс между m_i и n_i .

Общее выражение для четырехточечного коррелятора имеет вид

$$Z_{1234} = Z_{1234}^{\text{NIP}} + Z_{1234}^{\text{IP}}, \quad (4.151)$$

где⁴

$$\begin{aligned} Z_{1234}^{\text{NIP}} = & \frac{\partial^2 v_*^\gamma}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_4} C_\gamma^{\alpha\beta} S_\alpha^{(2)} S_\beta^{(1)} + \frac{\partial v_*^\gamma}{\partial \lambda_3} \frac{\partial v_*^\delta}{\partial \lambda_4} C_\gamma^{\alpha\beta} (S_\beta^{(1)} S_{\alpha\delta}^{(2)} + S_{\beta\delta}^{(1)} S_\alpha^{(2)}) + \\ & + \frac{\partial v_*^\gamma}{\partial \lambda_3} \frac{\partial C_\gamma^{\alpha\beta}}{\partial \lambda_4} S_\alpha^{(2)} S_\beta^{(1)} + \frac{\partial v_*^\gamma}{\partial \lambda_4} C_\gamma^{\alpha\beta} (S_\alpha^{(12)} S_\beta^{(3)} + \text{перестановки}), \end{aligned} \quad (4.152)$$

и

$$Z_{1234}^{\text{IP}} = \frac{1}{2} \int_0^{v_*+1} dv^\gamma C_\gamma^{\alpha\beta} (S_\alpha^{(1234)} S_\beta^{(0)} + S_\alpha^{(123)} S_\beta^{(4)} + S_\alpha^{(12)} S_\beta^{(34)} + \text{перестановки}). \quad (4.153)$$

В (4.152) и (4.153) мы используем $S_\alpha^{(i\dots)} = \frac{\partial S^{(i\dots)}}{\partial v^\alpha}$ и $S_{\alpha\beta}^{(i\dots)} = \frac{\partial^2 S^{(i\dots)}}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}$. В соответствии с общей схемой, мы полагаем, что интегральный вклад $Z_{1234}^{\text{IP}} = 0$ в области, в которой правила слияния удовлетворены.

Рассмотрим случай, в котором нет контрчленов высшего порядка, начиная со второго, а первые производные структурных констант равны нулю,⁵ и

⁴Для того чтобы сделать наши формулы менее громоздкими, мы просто помним, что полученное выражение должно вычисляться на решении струнного уравнения. Поэтому, в частности, в неинтегральном вкладе нет члена, который содержит $S_\alpha^{(0)}$.

⁵Это требование, конечно, дает дополнительные ограничения на параметры m_i, n_i четырехточечного коррелятора.

поэтому член с

$$\frac{\partial C_{\gamma}^{\alpha\beta}}{\partial \lambda_i} = T^{\rho\eta} \partial_{\rho} C_{\gamma}^{\alpha\beta} S_{\eta}^i \quad (4.154)$$

отсутствует. При этих предположениях в (4.152) выживают только первые два члена:

$$Z_{1234} = \frac{\partial^2 v_{*}^{\gamma}}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_4} C_{\gamma}^{\alpha\beta} S_{\alpha}^{(2)} S_{\beta}^{(1)} + \frac{\partial v_{*}^{\gamma}}{\partial \lambda_3} \frac{\partial v_{*}^{\delta}}{\partial \lambda_4} C_{\gamma}^{\alpha\beta} (S_{\beta}^{(1)} S_{\alpha\delta}^{(2)} + S_{\beta\delta}^{(1)} S_{\alpha}^{(2)}). \quad (4.155)$$

Аналогично (4.126) мы можем найти вторые производные решения струнного уравнения

$$\frac{\partial^2 v_{*}^{\gamma}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = T^{\gamma\rho} T^{\sigma\chi} (S_{\rho\sigma}^{(i)} S_{\chi}^{(j)} + S_{\rho\sigma}^{(j)} S_{\chi}^{(i)} + T^{\eta\delta} S_{\rho\sigma\eta}^{(0)} S_{\chi}^{(i)} S_{\delta}^{(j)}). \quad (4.156)$$

Собирая все вместе, получим структуру четырехточечного коррелятора:

$$\begin{aligned} Z_{1234} = & T^{\gamma\rho} T^{\sigma\chi} C_{\gamma}^{\alpha\beta} S_{\alpha}^{(1)} S_{\beta}^{(2)} (S_{\rho\sigma}^{(3)} S_{\chi}^{(4)} + S_{\chi}^{(3)} S_{\rho\sigma}^{(4)}) + \\ & T^{\gamma\mu} T^{\delta\nu} C_{\gamma}^{\alpha\beta} (S_{\beta}^{(1)} S_{\alpha\delta}^{(2)} + S_{\beta\delta}^{(1)} S_{\alpha}^{(2)}) S_{\mu}^{(3)} S_{\nu}^{(4)} + \\ & T^{\gamma\rho} T^{\sigma\chi} T^{\eta\delta} C_{\gamma}^{\alpha\beta} S_{\rho\sigma\eta}^{(0)} S_{\alpha}^{(1)} S_{\beta}^{(2)} S_{\chi}^{(3)} S_{\delta}^{(4)}. \end{aligned} \quad (4.157)$$

Даже без вклада высших контрчленов мы видим в этом выражении несколько новых объектов, которые требуют дополнительных вычислений. Детали вычислений приведены в Приложении Г.3. Для третьей производной $S_{\rho\sigma\eta}^{(0)}$ мы получаем

$$S_{\beta\rho\eta}^{(0)} = \frac{q - \beta - \rho - \eta - 1}{2c_{1,2}} C_{\beta\rho\eta}, \quad (4.158)$$

а вторая производная $S_{\alpha\beta}^{(i)}$ дается как

$$S_{\alpha\beta}^{(mn)} = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}^m \left(-\frac{v_1}{q} \right)^{m+1-q} R_{mn}, \quad (4.159)$$

где суммирование по m отсутствует, и

$$R_{mn} = \frac{1}{2} (m - n) (2m + q(m - n)). \quad (4.160)$$

В данном вычислении мы находим три основные структуры

$$F_1(\chi, \xi, \mu, \nu) = \sum_{\gamma=1}^{q-1} \theta(\gamma, \chi, \xi) \theta(\gamma, \mu, \nu), \quad (4.161)$$

$$F_2(\chi, \xi, \mu, \nu) = \sum_{\gamma=1}^{q-1} \theta(\gamma, \chi, \xi) \theta(q-\gamma, \mu, \nu), \quad (4.162)$$

$$F_3(\chi, \xi, \mu, \nu) = \sum_{\gamma=1}^{q-1} \gamma \theta(\gamma, \chi, \xi) \theta(\gamma, \mu, \nu). \quad (4.163)$$

Каждая функция $\theta(\alpha, \beta, \gamma)$ здесь связана с одной из структурных констант в (4.157), (4.158) или (4.159). Напомним, что она определяется явно в виде симметричного тензора такого, что $\theta(\alpha, \beta, \gamma) = \chi_{1, q-1}(\alpha + \beta - \gamma)$ при $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. После некоторых вычислений (детали которых можно найти в Приложении Г.3) мы получаем

$$F_1(\chi, \xi, \mu, \nu) = \quad (4.164)$$

$$q - \frac{\xi + \chi + \mu + \nu}{4} - \frac{|\chi - \xi| + |\mu - \nu| + \left| |\chi - \xi| - |\mu - \nu| \right| + |\mu + \nu - \xi - \chi|}{4},$$

$$F_2(\chi, \xi, \mu, \nu) = \quad (4.165)$$

$$q - \frac{\xi + \chi + \mu + \nu}{4} - \frac{|\chi - \xi| + |\mu - \nu| + |q + |\chi - \xi| - \mu - \nu| + |q + |\mu - \nu| - \chi - \xi|}{4},$$

$$F_3(\chi, \xi, \mu, \nu) = F_1(\chi, \xi, \mu, \nu) \times \quad (4.166)$$

$$\times \left[q + \frac{\chi + \xi + \mu + \nu}{4} - \frac{|\chi - \xi| + |\mu - \nu| + \left| |\chi - \xi| - |\mu - \nu| \right| - |\mu + \nu - \xi - \chi|}{4} - 1 \right].$$

В терминах этих функций с обозначением $R_i = R_{m_i n_i}$ четырехточечный коррелятор имеет вид

$$\begin{aligned} Z_{1234} = N & \left[R_1 F_1(m_4, m_3, q - m_1, q - m_2) + R_2 F_1(m_4, m_3, q - m_2, q - m_1) \right. \\ & + R_3 F_2(q - m_3, q - m_1, q - m_2, m_4) + R_4 F_2(q - m_4, q - m_1, q - m_2, m_3) \\ & \left. + (m_1 + m_2 - 2) F_1(q - m_1, q - m_2, m_3, m_4) - F_3(q - m_1, q - m_2, m_3, m_4) \right]. \end{aligned} \quad (4.167)$$

Первые четыре члена здесь происходят от членов в (4.157), которые содержат вторые производные от контрчленов первого порядка, а последние два члена

возникают от члена с третьей производной действия $S^{(0)}$. Общий нормировочный коэффициент⁶ есть

$$N = \frac{1}{2} c_{1,2}^2 q^{2q-4}. \quad (4.168)$$

Для четырехточечных корреляторов универсальное отношение, не зависящее от нормировок, может быть построено из (4.167), (4.123) и (4.115):

$$\langle\langle O_{m_1 n_1} O_{m_2 n_2} O_{m_3 n_3} O_{m_4 n_4} \rangle\rangle_{\text{norm}} = \frac{Z_{m_1 n_1, m_2 n_2, m_3 n_3, m_4 n_4} Z_0}{\left(\prod_{i=1}^4 Z_{m_i n_i, m_i n_i}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.169)$$

Этот результат подлежит сравнению с четырехточечным коррелятором в МЛГ, вычисленным в [30] с помощью стандартного непрерывного подхода,

$$\begin{aligned} \frac{\langle\langle O_{m_1 n_1} O_{m_2 n_2} O_{m_3 n_3} O_{m_4 n_4} \rangle\rangle}{\left(\prod_{i=1}^4 \langle\langle O_{m_i, n_i}^2 \rangle\rangle\right)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\prod_{i=1}^4 |m_i p - n_i q|}{2p(p+q)(p-q)} \times \\ &\times \left[\sum_{i=2}^4 \sum_{r=-(m_1-1)}^{m_1-1} \sum_{t=-(n_1-1)}^{n_1-1} |(m_i - r)p - (n_i - t)q| - m_1 n_1 (m_1 p + n_1 q) \right], \end{aligned} \quad (4.170)$$

где $p = q + 1$ для унитарной серии.

В качестве примера приведем несколько результатов для моделей гравитационного Изинга, трикритического Изинга и модели Поттса, которые соответствуют $M_{3,4}$, $M_{4,5}$ и $M_{5,6}$. Двумя нетривиальными, полностью симметричными четырехточечными корреляторами являются коррелятор четырех операторов спиновой плотности $\sigma = \Phi_{12}$ и коррелятор четырех операторов плотности энергии $\epsilon = \Phi_{13}$ в обкладках надлежащих Лиувиллевских экспоненциальных полей. Мы находим, что два выражения (4.169) и (4.170) дают одинаковые результаты:

	$\langle\langle \sigma\sigma\sigma\sigma \rangle\rangle_{\text{norm}}$	$\langle\langle \epsilon\epsilon\epsilon\epsilon \rangle\rangle_{\text{norm}}$
$M_{3,4}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{75}{11}$
$M_{4,5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{49}{5}$
$M_{5,6}$	$-\frac{8}{33}$	$\frac{162}{11}$

Отметим, что для получения этих результатов, мы должны взять пары (m, n) с $m \geq n$ в (4.169) и их отраженные образы $(q - m, p - n)$ в (4.170).

⁶Здесь мы опускаем обычный размерный фактор $v_{*1}^{\delta_{1234}}$.

4.3 Плоские структуры на деформациях киральных колец Гепнера

В этом разделе мы обсудим плоские структуры [147] на Фробениусовых многообразиях (ФМ) [144], которые возникают на деформациях изолированных особенностей. Физический интерес к теории особенностей [148] обусловлен ее связью [149; 150] с киральными кольцами $\mathcal{N} = 2$ суперконформных теорий поля. Мы опишем простой метод вычисления плоских координат и примитивных форм Сайто на Фробениусовых многообразиях деформаций колец Якоби, связанных с изолированными особенностями. Более детально мы рассмотрим случай деформированных киральных колец Гепнера.

Модели $\mathcal{N} = 2$ суперконформных теорий поля, классифицированные и явно построенные в [151], имеют важное значение ввиду их роли в теории струн. В работе [152] было показано, что после компактификации шести из десяти измерений $\mathcal{N} = 2$ суперконформная симметрия на мировом листе является необходимым условием для пространственно-временной суперсимметрии. Требование $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии в компактном секторе эквивалентно [153] геометрическому условию [154] компактификации на многообразия Калаби-Яу (КЯ). Безмассовый сектор теории струн отвечает множеству киральных полей $\mathcal{N} = 2$ суперконформной теории поля и после Виттеновского твиста [155] описывается топологической конформной теорией поля. Свойства лагранжиана сигма-модели, описывающего этот безмассовый сектор, полностью определяются в терминах многообразия КЯ и его зеркальной пары [156; 157].

Структура ФМ в топологической конформной теории поля впервые была обнаружена в работе [145], а затем математически исследована в работе [144]. В работе [145] было показано, что точное решение топологической конформной теории поля, то есть вычисление всех ее корреляционных функций, сводится к вычислению плоских координат на соответствующем ФМ. Таким специфическим свойством обладают $\hat{U}(2)_k \times \hat{U}(1)_1 / \hat{U}(1)_{k+1}$ модели, рассмотренные в [145]. В общем случае $\mathcal{N} = 2$ суперконформной теории поля, связанной с некоторой изолированной особенностью, также необходимо знать примитивную форму Сайто [147].

Как обсуждалось в предыдущих разделах, знание структуры ФМ позволяет найти точное решение моделей некритической теории струн или моделей

минимальной Лиувиллевской гравитации. Естественно предположить, что такой же подход может быть полезен и в решении \mathcal{W} обобщений Лиувиллевской гравитации. Явный вид плоских координат имеет важное значение также и для решения моделей топологической конформной теории поля, которые связаны с киральными кольцами Гепнера [158]. В работе [158] было показано, что данные модели, имеющие структуру косетных моделей Казама-Сузуки $A(N, k) = \hat{U}(N)_k \times \hat{U}(N-1)_1 / \hat{U}(N-1)_{k+1}$, связаны с определенным классом изолированных особенностей. Супер-потенциал в этом случае имеет вид

$$W_0(q_1, \dots, q_{N-1}) = \frac{1}{N+k} \sum_{i=1}^{N-1} q_i^{N+k}. \quad (4.171)$$

Таким образом, вычисление плоских координат и примитивной формы Сайто для Фробениусовых многообразий представляет собой значительную часть решения вышеупомянутых задач. Ниже мы опишем простой метод вычисления плоских координат на Фробениусовых многообразиях, которые возникают на деформациях изолированных особенностей [147; 159–162]. Подход основывается на гипотезе об интегральных представлениях для плоских координат и на теории когомологий Сайто [147] и позволяет свести задачу вычисления плоских координат и примитивной формы Сайто [147] к линейной задаче. В качестве примера мы применим данный подход к вычислению плоских координат и примитивной формы [70] для киральных колец Гепнера в частном случае моделей типа $A(3, k) = \hat{U}(3)_k \times \hat{U}(2)_1 / \hat{U}(2)_{k+1}$. Эта серия моделей интересна тем, что, в отличие от хорошо изученной серии $A(2, k)$, ее спектр содержит маргинальные и нерелевантные деформации.

4.3.1 Особенности, кольца Якоби и ФМ

Напомним основные факты о связи между Фробениусовыми многообразиями и топологическими конформными теориями поля, которые будут необходимы для нашего дальнейшего обсуждения.

В работе [145] было найдено точное решение минимальных моделей топологической конформной теории поля. Эти модели (далее DVV модели) являют-

ся моделями Ландау-Гинзбурга, суперпотенциал которых имеет вид

$$W_0(x) = \frac{1}{k+2} x^{k+2} . \quad (4.172)$$

Корреляционные функции в этих моделях определяются свободной энергией (также называемой Фробениусовым предпотенциалом) $\mathcal{F}(s^1, \dots, s^{k+1})$, где s^μ являются константами взаимодействия теории, а s^1 отвечает единичному оператору. Возмущенная трехточечная функция

$$C_{\alpha\beta\gamma}(s) = \langle \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma \exp \sum_\sigma s^\sigma \int d^2 z \Phi_\sigma^{1,1}(z) \rangle \quad (4.173)$$

определяется выражением

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial s^\alpha \partial s^\beta \partial s^\gamma} . \quad (4.174)$$

В работе [145] было показано, что в силу определенных свойств топологической конформной теории поля вся информация о произвольной n -точечной корреляционной функции кодируется в двух основных объектах: трех- и двухточечных функциях. Возмущенная двухточечная функция $\eta_{\alpha\beta}$ дается в явном виде

$$\eta_{\alpha\beta} = C_{1\alpha\beta} = \langle \Phi_\alpha \Phi_\beta \exp \sum_\sigma s^\sigma \int d^2 z \Phi_\sigma^{1,1}(z) \rangle , \quad (4.175)$$

где $\Phi_\alpha(z)$ – это киральное поле, а $\Phi_\sigma^{1,1}(z)$ – его суперпартнер.

С помощью конформных тождеств Уорда в работе [145] было доказано, что $\eta_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}(s)$ должны удовлетворять следующему набору ограничений

$$\partial_\delta C_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha C_{\delta\beta\gamma} , \quad (4.176)$$

$$C_{\alpha\beta}^\rho C_{\rho\gamma}^\delta = C_{\alpha\rho}^\delta C_{\beta\gamma}^\rho . \quad (4.177)$$

$$\partial_\alpha \eta_{\mu\nu} = 0 , \quad (4.178)$$

$$C_{\mu\nu\lambda} = C_{\nu\mu\lambda} = C_{\nu\lambda\mu} . \quad (4.179)$$

Во втором соотношении (условие ассоциативности) поднятие индексов осуществляется с помощью обратного тензора $\eta^{\lambda\rho}$. Из уравнений (4.176–4.179) следует, что $C_{\mu\nu}^\lambda$ является структурной константой некоторой Фробениусовой ал-

гебры. Эти соотношения означают, что мы имеем дело с римановым многообразием, с дополнительной алгебраической структурой, согласованной с римановой. Параметры s^α играют роль координат на этом многообразии, а $\eta_{\rho\nu}$ определяет его метрику. Отметим, что из третьего соотношения следует, что это многообразие плоское. В действительности соотношения (4.176–4.179) определяют Фробениусову структуру, лежащую в основе топологической конформной теории поля.

Параметры s_μ отвечают специальному выбору *плоских координат* на M . Метрика $\eta^{\mu\nu}$ в этих координатах постоянна. В произвольной системе координат $t = \{t^\mu\}$ аксиомы Фробениусова многообразия выглядят следующим образом

$$\nabla_\delta \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} = \nabla_\alpha \tilde{C}_{\delta\beta\gamma} , \quad (4.180)$$

$$\tilde{C}_{\alpha\beta}^{\rho} \tilde{C}_{\rho\gamma}^{\delta} = \tilde{C}_{\alpha\rho}^{\delta} \tilde{C}_{\beta\gamma}^{\rho} , \quad (4.181)$$

$$\tilde{C}_{\mu\nu\lambda} = \tilde{C}_{\nu\mu\lambda} = \tilde{C}_{\nu\lambda\mu} , \quad (4.182)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma}[g_{\alpha\beta}] = 0 , \quad (4.183)$$

где ∇_μ – это ковариантная производная, а $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ является тензором кривизны Римана. Структурные константы в новых координатах обозначены через $\tilde{C}_{\alpha\beta}^\gamma(t)$.

В работе [145] для случая минимальных моделей было доказано, что константы $C_{\mu\nu}^\lambda(s)$ являются структурными константами в плоских координатах Фробениусова многообразия, связанного с деформированной изолированной особенностью

$$W = W_0 + \sum_{\mu=1}^{k+1} t^\mu e_\mu(x) , \quad (4.184)$$

где $e_\mu(x) = x^{\mu-1}$, а параметры деформации t^μ представляют собой некоторые координаты на ФМ. Параметр t^1 здесь и далее отвечает единичному оператору e_1 кольца Якоби.

В t -системе структурные константы определяются через

$$e_\mu e_\nu = \tilde{C}_{\mu\nu}^\lambda(t) e_\lambda \text{ mod } \partial W / \partial x , \quad (4.185)$$

а метрика посредством

$$g_{\mu\nu} = \text{Res}_{x=\infty} \frac{e_\mu e_\nu \Omega}{\partial W / \partial x} , \quad (4.186)$$

где Ω является примитивной формой Сайто. В случае минимальных моделей

$$\Omega = dx . \quad (4.187)$$

Согласно вышеприведенному утверждению для того чтобы решить эту модель, нам необходимо знать вид плоских координат $s^\mu(t)$ на ФМ как функций параметров деформации. В случае плоской метрики плоские координаты $s^\mu(t)$ даются решениями следующего уравнения

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta s^\mu = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \nabla_\gamma s^\mu , \quad (4.188)$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ – это связность Леви-Чивита для $g_{\alpha\beta}(t)$.

Свободная энергия \mathcal{F} определяется из

$$C_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial s^\mu \partial s^\nu \partial s^\lambda} , \quad (4.189)$$

и

$$C_{\mu\nu\lambda} \frac{\partial s^\mu}{\partial t^\alpha} \frac{\partial s^\nu}{\partial t^\beta} \frac{\partial s^\lambda}{\partial t^\gamma} = \text{Res}_{x=\infty} \frac{e_\alpha e_\beta e_\gamma \Omega}{\partial W / \partial x_1 \cdots \partial W / \partial x_n} . \quad (4.190)$$

В действительности формулы (4.189) и (4.190) дают нам точное решение минимальных моделей топологической конформной теории поля, как только мы получаем явное выражение для плоских координат в виде функций параметров деформации.

Примитивная форма К. Сайто Пусть $W_0(x_1, \dots, x_n)$ – многочлен, связанный с изолированной квазиоднородной особенностью с целыми весами $[x_i] = \rho_i$ и $[W_0] = d$

$$W_0(\Lambda^{\rho_i} x_i) = \Lambda^d W_0(x_i) . \quad (4.191)$$

По определению соответствующее кольцо Якоби дается как

$$R_0 = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \left\{ \frac{\partial W_0[x]}{\partial x_i} \right\} . \quad (4.192)$$

Аналогично случаю с одной переменной *версальная деформация* кольца R_0 выражается следующим образом

$$W(x_i, t_\alpha) = W_0(x_i) + \sum_{\alpha=1}^M t^\alpha e_\alpha(x), \quad (4.193)$$

где e_α , $\alpha = 1, \dots, M$, представляют собой базис соответствующего деформированного кольца Якоби, а M – это число Милнора (размерность кольца Якоби)

$$R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \left\{ \frac{\partial W[x, t]}{\partial x_i} \right\}. \quad (4.194)$$

Обозначим веса элементов однородного базиса через $[e_\alpha] = \sigma_\alpha$. В соответствии с нашими соглашениями e_1 является единицей в кольце. Элементы e_α с $\sigma_\alpha < d$, $\sigma_\alpha = d$ и $\sigma_\alpha > d$ называются соответственно релевантными, маргинальными и нерелевантными деформациями.

Обобщение формулы (4.185) очевидно, тогда как аналог (4.186) дается с помощью

$$g_{\mu\nu} = \operatorname{Res}_{x=\infty} \frac{e_\mu e_\nu \Omega}{\prod_i \partial_i W}, \quad (4.195)$$

где примитивная форма имеет вид

$$\Omega(t, x) = \lambda(t^\alpha, x_i) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (4.196)$$

Далее мы будем использовать следующее важное утверждение, доказанное М. Сайто [163].

Теорема 4.3.1. *Если W_0 является изолированной особенностью, то существует такая n -форма $\Omega[x]$ или, что эквивалентно, функция $\lambda(x, t)$, $[\lambda] = 1$, что вышеопределенные $C_{\alpha\beta}^\gamma$ и $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяют всем аксиомам ФМ (4.176–4.179).*

Отметим, что в DVV-случае $\lambda(x, t) = 1$. В общем случае с маргинальными и/или нерелевантными деформациями $\lambda(x, t) \neq 1$.

Как следует из этой теоремы, существуют плоские координаты вида $s^\mu(t) = t^\mu + \mathcal{O}(t^2)$, такие, что $[s^\mu(t)] = [t^\mu]$. Кроме того, координата $s^1(t)$ фикси-

руется тем условием, что она дуальна единичному оператору, то есть

$$e_1 = \frac{\partial W}{\partial s^1} . \quad (4.197)$$

Из этого определения нетрудно получить, что

$$\frac{\partial s^\mu}{\partial t^1} = \delta_{\mu,1} , \quad (4.198)$$

с помощью простого анализа

$$e_1 = \frac{\partial W}{\partial t^1} = \frac{\partial W}{\partial s^\mu} \frac{\partial s^\mu}{\partial t^1} = \frac{\partial s^\mu}{\partial t^1} e_\mu . \quad (4.199)$$

Формула (4.198) накладывает жесткие ограничения на примитивную форму. В действительности они позволяют вычислять примитивную форму одновременно с плоскими координатами в явном виде.

4.3.2 Подход к вычислению плоских координат

Интегральное представление для плоских координат на ФМ. Как утверждалось в работе [162] на основе связи между кольцами Якоби деформированных особенностей и системами Гаусса-Манина (ГМ), плоские координаты s^μ , рассматриваемые как функции параметров t^μ , допускают простое интегральное представление. Это было проверено в [162] для случая простых особенностей, то есть когда кольцо Якоби содержит лишь релевантные деформации.

Здесь мы предполагаем, что аналогичные интегральные представления существуют и в общем случае, когда кольцо Якоби включает в себя маргинальные и, возможно, нерелевантные деформации. Контуры интегрирования должны быть замкнуты и выбраны так, чтобы принадлежать базису в гомологиях H_n для $\mathbb{C}^n \setminus \{W = 0\}$

$$s^\mu(t^\alpha) = \sum_{m_\alpha \in \Sigma_\mu} \left(\int_{\gamma_\mu} \exp(W_0(x)) \prod_\alpha e_\alpha^{m_\alpha} \Omega \right) \prod_\alpha \frac{t_\alpha^{m_\alpha}}{m_\alpha!} , \quad (4.200)$$

где неотрицательные целые числа $m_\alpha \in \Sigma_\mu$, если ⁷

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} [t^{\alpha}] = [s^{\mu}] . \quad (4.201)$$

Далее мы сосредоточимся на том случае, в котором все элементы e_α базиса кольца Якоби являются релевантными или маргинальными. В этом случае $\Omega(t, x)$ дается с помощью (4.196), а $\lambda(t)$ не зависит от x_i и является функцией только тех параметров t_α , которые отвечают маргинальным операторам. Таким образом, (4.200) можно переписать в следующем виде

$$s^{\mu}(t^{\alpha}) = \lambda(t) \sum_{m_{\alpha} \in \Sigma_{\mu}} \left(\int_{\gamma_{\mu}} \exp(W_0(x)) \prod_{\alpha} e_{\alpha}^{m_{\alpha}} dx \right) \prod_{\alpha} \frac{t_{\alpha}^{m_{\alpha}}}{m_{\alpha}!} . \quad (4.202)$$

С другой стороны, из соображений о размерности очевидно, что в общем виде

$$s^{\mu}(t^1, \dots, t^M) = t^{\mu} + \sum_{m_{\alpha} \in \Sigma_{\mu}} C_{\mu}(\vec{m}) \prod_{\alpha=1}^M \frac{t_{\alpha}^{m_{\alpha}}}{m_{\alpha}!} . \quad (4.203)$$

Далее мы покажем, как вычислить коэффициенты $C_{\mu}(\vec{m})$.

Когомологии Сайто и явные выражения для плоских координат.

Для явного вычисления интеграла в (4.200) мы будем использовать два нижеприведенных факта.

Во-первых, следующие интегралы являются равными

$$\int_{\gamma} \exp(W_0(x)) P_1(x) dx = \int_{\gamma} \exp(W_0(x)) P_2(x) dx , \quad (4.204)$$

если

$$P_1(x) dx = P_2(x) dx + D_{W_0} U , \quad (4.205)$$

где дифференциал К. Сайто имеет вид⁸

$$D_{W_0} = d + dW_0 , \quad (4.206)$$

⁷В целях удобства в (4.200) и всюду далее во избежание дополнительных скобок мы иногда заменяем верхние индексы нижними $t_{\alpha} \equiv t^{\alpha}$ и $s_{\alpha} \equiv s^{\alpha}$. Эта операция не имеет ничего общего с поднятием и опусканием индексов метрикой.

⁸Здесь d – это обычный дифференциал де Рама. Отметим, что $D_{W_0}^2 = 0$.

U является некоторой $(n - 1)$ -формой

$$U = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} A_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n \quad (4.207)$$

и контур γ замкнут.

Во-вторых, дифференциал Сайто определяет когомологии на пространстве дифференциальных форм. Размерность H^n , группы когомологий Сайто старшей степени, равняется M , т. е. размерности кольца Якоби изолированной особенности W_0 . В качестве базиса H^n можно выбрать n -формы $e_\mu dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ или кратко $e_\mu dx$, где e_μ являются базисом кольца Якоби. Поскольку формы $P(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ принадлежат H^n , они могут быть разложены по этому базису

$$P(x) dx = \sum_{\mu} C_{\mu} e_{\mu} dx + D_{W_0} U . \quad (4.208)$$

Такое разложение существует и единственно. Мы будем использовать этот факт, чтобы найти коэффициенты $C_{\mu}(\vec{m})$ из следующего уравнения

$$\prod_{\alpha} e_{\alpha}^{m_{\alpha}} dx = \sum_{\mu} C_{\mu}(\vec{m}) e_{\mu} dx + D_{W_0} U . \quad (4.209)$$

Данное уравнение может быть записано в более явном виде

$$\prod_{\alpha} e_{\alpha}^{m_{\alpha}} = \sum_{\mu} C_{\mu}(\vec{m}) e_{\mu} + \sum_{i=1}^n A_i(x) \frac{\partial W_0}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i(x)}{\partial x^i} . \quad (4.210)$$

Предполагая, что базисные контуры γ_{μ} выбираются дуальными к элементам $e_{\mu} dx$ базиса пространства когомологий, т. е.

$$\int_{\gamma_{\mu}} e_{\nu} dx = \delta_{\mu, \nu} , \quad (4.211)$$

и подставляя правую часть уравнения (4.209) в интегралы (4.200), мы приходим к явному выражению для плоских координат

$$s^{\mu}(t^{\alpha}) = \sum_{m_{\alpha}} C_{\mu}(m_{\alpha}) \prod_{\alpha} \frac{t_{\alpha}^{m_{\alpha}}}{(m_{\alpha})!} , \quad (4.212)$$

где коэффициенты $C_\mu(\vec{m})$ являются единственным решением системы линейных уравнений (4.209).

Когда изолированная особенность является однородной, $(n-1)$ -форма U может быть представлена в виде суммы однородных членов $\sum_{l=0}^L U_l$, и уравнение (4.209) принимает следующий вид

$$dW_0 U_0 = \prod_{\lambda} e_{\lambda}^{m_{\lambda}} dx, \quad (4.213)$$

$$dW_0 U_l = -dU_{l-1}, \quad (4.214)$$

$$\sum_{\mu} C_{\mu}(\vec{m}|n) e_{\mu} dx = -dU_L, \quad (4.215)$$

где $l = 1, \dots, L$ и $L = \sum m_{\alpha} - 1$.

В следующем разделе мы покажем, как данная процедура работает в случае колец Гепнера.

4.3.3 Киральные кольца Гепнера и их деформации

Киральные кольца, которые рассматривал Гепнер, связаны с моделями Казама-Сузуки $\hat{U}(N)_k \times \hat{U}(N-1)_1 / \hat{U}(N-1)_{k+1}$. Важным свойством этих колец является то, что их деформации обладают структурой Фробениусова многообразия. Это следует [158] из того факта, что эти киральные кольца связаны с изолированной однородной особенностью

$$W_0(x) = \frac{1}{N+k} \sum_{i=1}^{N-1} q_i^{N+k} \quad (4.216)$$

и изоморфны кольцам Якоби

$$R_0(N, k) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{N-1}] / \{\partial_1 W_0[x] \dots \partial_{N-1} W_0[x]\}, \quad (4.217)$$

где x_1, \dots, x_{N-1} являются элементарными симметрическими многочленами по q_1, \dots, q_{N-1} :

$$x_1 = \sum_{i=1}^{N-1} q_i, \quad x_2 = \sum_{i<j}^{N-1} q_i q_j, \quad \dots, \quad x_{N-1} = q_1 \dots q_{N-1}. \quad (4.218)$$

Отметим, что размерность кольца равняется

$$\dim R_0(N, k) = \frac{(N + k - 1)!}{k!(N - 1)!}. \quad (4.219)$$

Принимая во внимание симметричное свойство пространства кольца, легко видеть, что многочлены Шура

$$S_\lambda[q_1, \dots, q_{N-1}] = \frac{\det q_i^{N+\lambda_j-j}}{\det q_i^{N-j}} \quad (4.220)$$

могут быть выбраны в качестве естественного однородного базиса в $R^0(N, k)$. Напомним, что λ в (4.220) обозначает диаграмму Юнга $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ с $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N-1} \geq 0$ и $0 \leq \lambda_1 \leq k$.

Вычисление плоских координат для кирального кольца $SU(3)_3$. При $k \geq 3$ рассмотрение моделей, связанных с киральными кольцами Гепнера (4.217), становится более сложным ввиду того, что в спектре появляются маргинальные деформации. Рассмотрим частный случай $k = 3$, где

$$W_0(x_1, x_2) = \frac{1}{6}(q_1^6 + q_2^6). \quad (4.221)$$

В соответствии с (4.219) размерность пространства кольца $\dim R_0(3, 3) = 10$. Базисные элементы перечисляются диаграммами Юнга, которые ограничены прямоугольником размера $k \times (N - 1)$ с $k = 3$, $N = 3$. Для удобства мы будем

использовать следующие отождествления

$$\begin{aligned}
e_1 &\equiv e_{\emptyset} = 1, & e_2 &\equiv e_{\square} = q_1 + q_2, & e_3 &\equiv e_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} = q_1 q_2, \\
e_4 &\equiv e_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} = q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2, & e_5 &\equiv e_{\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}} = q_1 q_2 (q_1 + q_2), \\
e_6 &\equiv e_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} = q_1^3 + q_1^2 q_2 + q_1 q_2^2 + q_2^3, & e_7 &\equiv e_{\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}} = q_1^2 q_2^2, \\
e_8 &\equiv e_{\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}} = q_1 q_2 (q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2), & e_9 &\equiv e_{\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}} = q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2), \\
& & e_{10} &\equiv e_{\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}} = q_1^3 q_2^3. \tag{4.222}
\end{aligned}$$

После версальной деформации потенциал принимает следующий вид

$$W(q_1, q_2, t) = \frac{q_1^6 + q_2^6}{6} + \sum_{l=1}^{10} t^l e_l. \tag{4.223}$$

Ометим, что в данном случае имеется только одна маргинальная деформация, представленная e_{10} , все остальные возмущения e_1, \dots, e_9 в (4.223) являются релевантными. Таким образом, мы должны рассматривать примитивную форму (4.196) как функцию безразмерной константы связи t_{10} . Координаты в системе координат с постоянной метрикой даются следующим общим выражением

$$s^\mu(t^\alpha) = \lambda(t_{10}) \sum_{\{m_\lambda\} \in \Sigma_\mu} \sum_{n=0}^{\infty} C_\mu(m_\lambda | n) \prod_{1 \leq \lambda < 10} \frac{t_\lambda^{m_\lambda} t_{10}^n}{m_\lambda! n!}, \tag{4.224}$$

где Σ_μ определяется в (4.201). В соответствии с нашей основной гипотезой (4.200) коэффициенты $C_\mu(m_\lambda | n)$ фиксируются следующим условием

$$\prod_{\lambda} e_\lambda^{m_\lambda} e_{10}^n \Omega_0 = \sum_{\mu} C_\mu(m_\lambda | n) e_\mu \Omega_0 + D_{W_0} U, \tag{4.225}$$

где

$$\Omega_0 = (q_1 - q_2) dq_1 \wedge dq_2, \tag{4.226}$$

и сумма в (4.225) идет по тем μ , которые совместимы с размерным ограничением (4.201) для заданного набора m_λ . 1-форма U может быть представлена в удобном виде

$$U = A(q_1, q_2) dq_1 + B(q_1, q_2) dq_2, \tag{4.227}$$

так что $B(q_1, q_2) = A(q_2, q_1)$. Более явно мы находим

$$\prod_{\lambda} e_{\lambda}^{m_{\lambda}} e_{10}^n(q_1 - q_2) = \sum_{\mu} C_{\mu}(m_{\lambda}|n) e_{\mu}(q_1 - q_2) + \frac{\partial B}{\partial q_1} - \frac{\partial A}{\partial q_2} + Aq_2^5 - Bq_1^5. \quad (4.228)$$

Опираясь на аргументацию раздела 4.3.2, мы можем преобразовать данное выражение в набор рекуррентных соотношений, чтобы разложить его на однородные части

$$A = \sum_{s=0}^L A_s, \quad B = \sum_{s=0}^L B_s, \quad (4.229)$$

где L определяется из следующего условия

$$\left[\prod_{\lambda} e_{\lambda}^{m_{\lambda}} e_{10}^n \right] - [e_{\mu}] = 6L. \quad (4.230)$$

Первое соотношение рекурсии (4.213-4.215) имеет вид

$$\prod_{\lambda} e_{\lambda}^{m_{\lambda}}(q_1 - q_2) = A_0 q_2^5 - B_0 q_1^5. \quad (4.231)$$

Второе дает

$$\frac{\partial A_{s-1}}{\partial q_2} - \frac{\partial B_{s-1}}{\partial q_1} = A_s q_2^5 - B_s q_1^5, \quad 1 \leq s \leq L. \quad (4.232)$$

И, наконец, из последнего мы находим

$$\sum_{\mu} C_{\mu}(m_{\lambda}|n) e_{\mu}(q_1, q_2) = \frac{\partial A_L}{\partial q_2} - \frac{\partial B_L}{\partial q_1}. \quad (4.233)$$

Данные итерационные соотношения позволяют найти все коэффициенты A_s, B_s и выразить, наконец, искомые $C_{\mu}(m_{\lambda}|n)$ в терминах старших коэффициентов A_L, B_L .

Явные выражения для плоских координат при $t_{10} = 0$. Первый шаг состоит в рассмотрении случая с выключенным маргинальным возмущением. В этой ситуации наиболее общее преобразование координат, которое совместимо с требованием условия квазиоднородности (4.191) может включать в себя только

следующие вклады

$$s_{10} : \{t_{10}\} , \quad (4.234)$$

$$s_9 : \{t_9\} , \quad (4.235)$$

$$s_8 : \{t_8, t_9^2\} , \quad (4.236)$$

$$s_7 : \{t_7, t_9^2\} , \quad (4.237)$$

$$s_6 : \{t_6, t_8t_9, t_7t_9, t_9^3\} , \quad (4.238)$$

$$s_5 : \{t_5, t_8t_9, t_7t_9, t_9^3\} , \quad (4.239)$$

$$s_4 : \{t_4, t_6t_9, t_5t_9, t_8t_9^2, t_7t_9^2, t_8^2, t_7^2, t_7t_8, t_9^4\} , \quad (4.240)$$

$$s_3 : \{t_3, t_6t_9, t_5t_9, t_8t_9^2, t_7t_9^2, t_8^2, t_7^2, t_7t_8, t_9^4\} , \quad (4.241)$$

$$s_2 : \{t_2, t_4t_9, t_7^2t_9, t_7t_8t_9, t_8t_9^3, t_7t_9^3, t_9^5, t_3t_9, t_6t_8, t_6t_7, t_5t_8, t_5t_7, t_6t_9^2, t_5t_9^2, t_8^2t_9\} , \quad (4.242)$$

$$s_1 : \{t_1, t_2t_9, t_5t_6, t_6t_8t_9, t_6t_7t_9, t_5t_8t_9, t_5t_7t_9, t_6t_9^3, t_5t_9^3, t_8^3, t_7^3, t_7t_8^2, t_4t_8, t_7^2t_8, t_8^2t_9^2, t_7^2t_9^2, t_7t_8t_9^2, t_8t_9^4, t_7t_9^4, t_9^6, t_4t_7, t_3t_8, t_3t_7, t_4t_9^2, t_3t_9^2, t_6^2, t_5^2\} . \quad (4.243)$$

Здесь каждый одночлен, приведенный в правой части, появляется в выражениях для соответствующих плоских координат с коэффициентом, зависящим от t_{10} . При $t_{10} = 0$ наш подход, описанный в предыдущем разделе, дает следующие явные результаты

$$s_{10} = t_{10} , \quad (4.244)$$

$$s_9 = t_9 , \quad (4.245)$$

$$s_8 = t_8 + t_9^2 , \quad (4.246)$$

$$s_7 = t_7 , \quad (4.247)$$

$$s_6 = t_6 + t_8t_9 + t_7t_9 + \frac{5}{6}t_9^3 , \quad (4.248)$$

$$s_5 = t_5 + 2t_8t_9 + \frac{8}{3}t_9^3 , \quad (4.249)$$

$$s_4 = t_4 + t_6 t_9 + t_5 t_9 + \frac{1}{2} t_8^2 + t_7 t_8 + 2t_7 t_9^2 + 4t_8 t_9^2 + \frac{7}{2} t_9^4, \quad (4.250)$$

$$s_3 = t_3 + 2t_6 t_9 + 3t_8 t_9^2 + 3t_7 t_9^2 + t_8^2 + 2t_9^4, \quad (4.251)$$

$$s_2 = t_2 + \frac{63t_9^5}{8} + \frac{7}{2} t_7 t_9^3 + \frac{21}{2} t_8 t_9^3 + 3t_5 t_9^2 + \frac{3}{2} t_6 t_9^2 + \frac{3}{2} t_7^2 t_9 + \\ + 3t_8^2 t_9 + t_4 t_9 + 3t_7 t_8 t_9 + t_6 t_7 + t_5 t_8 + t_6 t_8, \quad (4.252)$$

$$s_1 = t_1 + \frac{119t_9^6}{15} + \frac{28}{3} t_7 t_9^4 + 14t_8 t_9^4 + \frac{7}{3} t_5 t_9^3 + \frac{13}{3} t_6 t_9^3 + \frac{13}{2} t_8^2 t_9^2 + t_3 t_9^2 + t_4 t_9^2 + \\ + 2t_5 t_7 t_9 + 7t_7 t_8 t_9^2 + 2t_5 t_8 t_9 + 2t_6 t_8 t_9 + \frac{t_7^3}{3} + \frac{t_8^3}{3} + t_7 t_8^2 + t_5 t_6 + t_4 t_8 - \frac{t_6^2}{2}. \quad (4.253)$$

Явные выражения для плоских координат при $t_{10} \neq 0$. При $t_{10} \neq 0$ плоские координаты являются рядами по t_{10} . Продемонстрируем общую идею предыдущего раздела на следующих примерах для $k = 3$.

В нашем первом примере мы вычислим вклад в s^1 , который содержит t^1 . Он имеет следующий вид

$$s^1 = \lambda(t_{10}) f_1(t_{10}) t^1 + \dots, \quad (4.254)$$

где точками обозначены возможные вклады других t^ν с $\nu \neq 1$. Наша цель сейчас состоит в том, чтобы найти $f_1(t_{10})$,

$$f_1(t_{10}) = \sum_n C(n) \frac{t_{10}^{2n}}{(2n)!}. \quad (4.255)$$

Как объяснялось выше, мы вычисляем коэффициенты $C(n)$ из следующего уравнения

$$e_1 e_{10}^{2n} \Omega = C(n) \Omega + D_{W_0} U. \quad (4.256)$$

Поскольку $e_1 = 1$, нам нужно решить

$$e_{10}^{2n} (q_1 - q_2) = C(n) (q_1 - q_2) + \frac{\partial B}{\partial q_1} - \frac{\partial A}{\partial q_2} + A q_2^5 - B q_1^5. \quad (4.257)$$

Для коэффициентов $C(n)$ удобно получить следующее рекуррентное соотношение

$$C(n+1) = P(n) C(n). \quad (4.258)$$

Поскольку $e_{10} = q_1^3 q_2^3$, мы получаем

$$q_1^{6n+6} q_2^{6n+6} (q_1 - q_2) = q_1^{6n} q_2^{6n} (q_1 - q_2) + \dots, \quad (4.259)$$

что может быть представлено в следующем виде

$$q_1^{6n+7} q_2^{6n+6} - q_1^{6n+6} q_2^{6n+7} = A q_2^5 - B q_1^5 + \frac{\partial B}{\partial q_1} - \frac{\partial A}{\partial q_2} + P(n) [q_1^{6n+1} q_2^{6n} - q_1^{6n+6} q_2^{6n+1}]. \quad (4.260)$$

Коэффициенты находятся легко: $A_0 = -q_1^{6n+6} q_2^{6n+2}$, $B_0 = -q_1^{6n+2} q_2^{6n+6}$. Таким образом,

$$\frac{\partial A_0}{\partial q_2} - \frac{\partial B_0}{\partial q_1} = (6n + 2) [q_1^{6n+1} q_2^{6n+6} - q_1^{6n+6} q_2^{6n+1}], \quad (4.261)$$

что, в свою очередь, должно равняться

$$(6n + 2) [q_1^{6n+1} q_2^{6n+6} - q_1^{6n+6} q_2^{6n+1}] = A_1 q_2^5 - B_1 q_1^5, \quad (4.262)$$

откуда $A_1 = (6n + 2) q_1^{6n+1} q_2^{6n+1}$, $B_1 = (6n + 2) q_1^{6n+1} q_2^{6n+1}$. Окончательное условие имеет вид

$$\frac{\partial A_1}{\partial q_2} - \frac{\partial B_1}{\partial q_1} = (6n + 1)(6n + 2) [q_1^{6n+1} q_2^{6n} - q_1^{6n} q_2^{6n+1}] = P(n) [q_1^{6n+1} q_2^{6n} - q_1^{6n} q_2^{6n+1}]. \quad (4.263)$$

Следовательно,

$$P(n) = (6n + 1)(6n + 2), \quad (4.264)$$

и

$$C(n) = \prod_{m=0}^{n-1} (6m + 1)(6m + 2). \quad (4.265)$$

Таким образом, мы заключаем, что

$$f_1(t_{10}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=0}^{n-1} (6m + 1)(6m + 2) \frac{t_{10}^{2n}}{(2n)!} = {}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right). \quad (4.266)$$

Принимая во внимание (4.198), мы получаем

$$\lambda(t_{10}) = \frac{1}{f_1(t_{10})} = \frac{1}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}. \quad (4.267)$$

Наш второй пример демонстрирует вычисление плоской координаты

$$s_{10} = \lambda(t_{10})t_{10}f_{10}(t_{10}) = \lambda(t_{10}) \sum_{n=1}^{\infty} C(n) \frac{t_{10}^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (4.268)$$

с $C(0) = 1$. Для коэффициентов $C(n)$ мы имеем следующие уравнения

$$e_{10}^{2n+1}\Omega_0 = C(n)e_{10}\Omega + D_{W_0}U \quad (4.269)$$

и

$$C(n+1) = P(n)C(n). \quad (4.270)$$

Или явно,

$$e_{10}^{2n+3}(q_1 - q_2) = P(n)e_{10}^{2n+1}(q_1 - q_2) + Aq_2^5 - Bq_1^5 + \frac{\partial B}{\partial q_1} - \frac{\partial A}{\partial q_2}. \quad (4.271)$$

Следовательно,

$$U = U_0 + U_1, \quad A = A_0 + A_1, \quad B = B_0 + B_1, \quad (4.272)$$

где

$$A_0 = -q_1^{6n+9}q_2^{6n+4}, \quad B_0 = -q_1^{6n+4}q_2^{6n+9}, \quad (4.273)$$

$$A_1 = (6n+4)q_1^{6n+3}q_2^{6n+5}, \quad B_1 = (6n+4)q_1^{6n+5}q_2^{6n+3}, \quad (4.274)$$

и

$$P(n) = (6n+4)(6n+5). \quad (4.275)$$

Таким образом, мы находим

$$f_{10}(t_{10}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=0}^{n-1} (6m+4)(6m+5) \frac{t_{10}^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4.276)$$

Легко видеть, что

$$s_{10}(t_{10}) = t_{10} \lambda(t_{10}) {}_2F_1 \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}; \frac{3}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right) = t_{10} \frac{{}_2F_1 \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}; \frac{3}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}. \quad (4.277)$$

Приведем еще несколько примеров явных результатов для плоских координат, когда окончательные выражения еще не слишком громоздки

$$s_9(t) = t_9 \frac{{}_2F_1 \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}, \quad (4.278)$$

$$s_8(t) = t_8 \frac{{}_2F_1 \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \middle| 3t_{10} \right)}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)} + t_9^2 \frac{{}_2F_1 \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \middle| 3t_{10} \right)}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}, \quad (4.279)$$

$$s_7(t) = t_7 \frac{{}_2F_1 \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)} + 6t_9^2 t_{10} \frac{{}_2F_1 \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}. \quad (4.280)$$

Продемонстрированная выше процедура, которая позволяет находить явные выражения для плоских координат, формула для примитивной формы Ω Сайто

$$\Omega = \lambda(t_{10}) dx = \frac{dx}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}, \quad (4.281)$$

вместе с утверждением о виде плоских координат (4.200), (4.209) являются основными результатами настоящего раздела.

4.3.4 Плоская структура для моделей Гепнера

В этом разделе мы рассмотрим задачу прямого вычисления плоской структуры (s^μ, Ω) на Фробениусовых многообразиях, возникающих на деформациях изолированных особенностей. Явное вычисление, обсуждаемое далее, позволяет проверить интегральное представление для плоских координат, которое было предложено в работе [69] и описано в предыдущем разделе.

Примитивная форма. Для начала мы заметим, что если для всех элементов $\sigma_\alpha \leq 1$, то с помощью комбинации (4.174) и (4.195) метрику можно представить в следующем виде

$$g_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}^{\lambda_{max}} h(t) , \quad (4.282)$$

где функция $h(t)$ можно быть записана схематически ⁹

$$h(t) = \operatorname{Res}_{x=\infty} \frac{e_{max}\Omega}{\prod_i \partial_i W} , \quad (4.283)$$

и e_{max} является базисным элементом максимального веса, $[e_{max}] = \max\{\sigma_\alpha\}$. Из соображений о размерности можно заключить, что все остальные элементы не дают вклада в (4.282). Поэтому для того чтобы найти плоские координаты $s^\mu(t)$, мы сначала вычисляем структурные константы в t -системе с помощью (4.174), затем из требования равенства нулю тензора Римана $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ для (4.282) мы получаем функцию $h(t)$ и, наконец, решая определяющие уравнения

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta s^\mu(t) = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \nabla_\gamma s^\mu(t) , \quad (4.284)$$

мы вычисляем плоские координаты. В (4.284) ∇_α обозначает ковариантную производную, а $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ являются символами Кристоффеля для метрики $g_{\mu\nu}$.

Наша первая задача состоит в том, чтобы вычислить структурные константы в t -системе. С этой целью мы используем определение (4.174). Идеал порождается $W_x = \partial_x W(x,y)$ и $W_y = \partial_y W(x,y)$. Основная идея вычисления состоит в том, что при умножении $W_{x,y}$ на x^a и y^b , где $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$, мы получаем достаточное количество линейных уравнений

$$x^a y^b W_x = 0 , \quad x^c y^d W_y = 0 , \quad (4.285)$$

которые могут быть использованы для определения всех необходимых правил умножения $e_i \times e_j$ в кольце R . Если веса базисных элементов достаточно велики, их произведение будет содержать мономы, чьи веса превышают 6. В результате решения (4.285) для $0 \leq a + 2b \leq 7$ и $0 \leq c + 2d \leq 8$ мономы, которые не принадлежат базису и рассматриваются как неизвестные переменные, могут быть выражены в терминах базисных элементов. Таким образом мы получаем

⁹Мы говорим “схематически”, так как, строго говоря, рецепт взятия предела в случае нескольких переменных x_i неоднозначен, однако мы не будем использовать это выражение для какого-либо явного вычисления.

все структурные константы. Результатом являются полиномы по релевантным константам связи и рациональные функции от маргинальной константы связи t_{10} .

Наша следующая цель состоит в нахождении явного вида метрики. В связи с маргинальным оператором e_{10} метрика выражается через структурную константу с точностью до некоторой неизвестной функции от t_{10} . Она может быть записана в виде

$$g_{ij} = h(t_{10})C_{ij}^{10} . \quad (4.286)$$

Мы находим $h(t_{10})$ из требования плоскостности. Вычисляя элементы тензора кривизны Римана, можно найти следующее условие

$$2(1 - 9x^2)^2 h(x)h''(x) - 3(1 - 9x^2)^2 (h'(x))^2 - 4(18x^2 + 7)h^2(x) = 0 , \quad (4.287)$$

где $x = t_{10}$. Используя следующую подстановку

$$h(x) = \frac{1}{(1 - 9x^2)y^2(x)} , \quad (4.288)$$

можно получить

$$(9x^2 - 1)y''(x) + 18xy'(x) + 2y(x) = 0 . \quad (4.289)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = c_1 P_{-\frac{1}{3}}(3x) + c_2 Q_{-\frac{1}{3}}(3x) , \quad (4.290)$$

где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ – это полиномы Лежандра. Общий коэффициент фиксируется начальным условием $h(0) = 1$, что позволяет определить постоянные интегрирования

$$c_1 = \frac{\Gamma(-\frac{1}{3})^2 \Gamma(\frac{2}{3})}{4 \cdot 2^{2/3} \sqrt{3}\pi} , \quad c_2 = \frac{\sqrt{3}\Gamma(\frac{2}{3}) \Gamma(\frac{5}{6})}{2\pi^{3/2}} . \quad (4.291)$$

Первые члены разложения $h(x)$ представлены ниже

$$h(x) = 1 + 7x^2 + \frac{170x^4}{3} + \frac{21482x^6}{45} + \frac{184337x^8}{45} + \frac{14387263x^{10}}{405} + \frac{20727458824x^{12}}{66825} + \dots . \quad (4.292)$$

С явной метрикой $g_{\alpha\beta}(t)$ и знанием структурных констант в t -системе можно найти решения (4.284) для плоских координат (4.178) с точностью до любой степени маргинальной константы связи t_{10} .

Сравнение с альтернативным вычислением. В работе [69] был использован альтернативный подход для вычисления плоских координат и примитивной формы. В случае $k = 3$ примитивная форма имеет вид

$$\Omega = \lambda(t_{10})dx dy . \quad (4.293)$$

Было получено, что

$$\lambda(t_{10}) = {}_2F_1^{-1} \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right) . \quad (4.294)$$

Для сравнения результатов обоих подходов мы можем использовать следующее соотношение

$$h(t) = \frac{\partial s^{10}(t)}{\partial t^{10}} . \quad (4.295)$$

Чтобы обосновать это соотношение мы используем преобразование координат для метрики

$$g_{\mu\nu} = h(t)C_{\mu\nu}^{10} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial s^\alpha(t)}{\partial t^\mu} \frac{\partial s^\beta(t)}{\partial t^\nu} . \quad (4.296)$$

Принимая теперь $\mu = 1$ и $\nu = 10$ и учитывая, что $C_{1,10}^{10} = 1$, мы получаем

$$h(t) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial s^\alpha(t)}{\partial t^1} \frac{\partial s^\beta(t)}{\partial t^{10}} . \quad (4.297)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial s^\alpha(t)}{\partial t^1} = \delta_{\alpha 1} . \quad (4.298)$$

Действительно, и t^1 , и s^1 отвечают единичному элементу кольца R . Подставляя это соотношение в (4.297), можно получить (4.295). Принимая во внимание явное выражение для s^{10} из [69] мы приходим к следующему выражению

$$h(t_{10}) = \frac{{}_2F_1 \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}; \frac{3}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)} + t_{10} \frac{\partial}{{\partial t^{10}}} \frac{{}_2F_1 \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}; \frac{3}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \middle| 9t_{10}^2 \right)} , \quad (4.299)$$

которое совпадает с (4.288).

Выражения для плоских координат, полученные прямым вычислением, также совпадают с результатами [69], описанными в предыдущем разделе, и, следовательно, подтверждают предложенное там интегральное представление для плоских координат.

Глава 5. АГТ дуальность

В работе [42] Алдай, Гайотто и Тачикава обнаружили связь между двумерными конформными теориями поля (КТП) и определенным классом $\mathcal{N} = 2$ четырехмерных суперсимметричных $SU(2)$ квиверных калибровочных теорий. В частности, оказалось, что конформные блоки [4] в полевой теории Лиувилля совпадают с инстантонными статсуммами Некрасова. Затем эта связь была обобщена [54;56;164;165] на конформные теории поля с аффинной и \mathcal{W}_k -симметрией.

Оказалось, что расширенная \mathcal{W}_k конформная симметрия связана с подсчетом инстантонов для калибровочной группы $SU(k)$. Этот вывод предполагает, что возможно для любого типа киральной алгебры существует явная связь между конформными блоками (а также другими составляющими КфТП) и инстантонными статсуммами.

Связь между аффинными алгебрами и геометрией многообразий модулей инстантонов была обнаружена довольно давно (см., например [46;166–168]). В этом контексте \mathcal{W} -алгебры возникают из так называемой тороидальной алгебры, зависящей от нескольких квантовых параметров, как результат некоторого специального «конформного» предела. Тороидальная алгебра действует на когомологиях (эквивариантных К-теориях) [169] пространств модулей инстантонов. В конформном пределе эта алгебра имеет вид $\hat{gl}_k(n)/\hat{gl}_k(n-1)$, где k обозначает уровень алгебры токов. В частном случае, когда $k = 2$, эта алгебра изоморфна $\mathcal{H} \times \mathcal{W}_2$, где \mathcal{H} является алгеброй Гейзенберга, а \mathcal{W}_2 – алгеброй Вирасоро с центральным зарядом, определенным в терминах параметра n . АГТ связь отвечает данной ситуации.

Многообразия модулей симметричных инстантонов были изучены в работе [170]. Это подпространство пространства модулей, состоящее из неподвижных точек действия некоторой конечной группы. Как только на пространстве модулей инстантонов вводится действие конечной группы, косет-теория, отвечающая конформному пределу, изменяется. Например, если указанной группой является \mathbb{Z}_2 , то \mathcal{W} -алгебра в конформном пределе есть $\hat{gl}_k(n)/\hat{gl}_k(n-2)$. В частности, при $k = 2$ эта алгебра изоморфна $\hat{gl}_2(2) \times \mathcal{NSR}$, где \mathcal{NSR} обозначает алгебру Навье-Шварца-Рамона. Поскольку \mathcal{NSR} является симметрией $\mathcal{N} = 1$ супер-Лиувиллевской теории поля, можно предположить, что инстантонное вы-

числение в данном случае связано с $\mathcal{N} = 1$ супер-Лиувилевскими конформными блоками, тогда как высшие циклические группы \mathbb{Z}_m могут соответствовать парафермионным конформным теориям поля.

Чтобы проиллюстрировать АГТ соответствие, рассмотрим четырехточечные конформные блоки на сфере, связанные с четырьмя примарными полями Φ_{Δ_i} конформных весов Δ_i . АГТ устанавливает равенство между инстантонной статсуммой и Лиувилевским конформным блоком. Т. е. для четырехточечных функций мы имеем следующее утверждение

$$\sum_{N=0}^{\infty} q^N \sum_{Y_1, Y_2}^{|Y_1|+|Y_2|=N} \mathcal{Z}_{Y_1, Y_2} \stackrel{AGT}{=} (1-q)^{2(\frac{Q}{2}+\lambda_1)(\frac{Q}{2}-\lambda_3)} F(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 | \Delta | q), \quad (5.1)$$

где функция $F = F(\Delta_i | \Delta | q)$, $i = 1, 2, 3, 4$ в правой части представляет собой конформный блок теории Лиувилля с центральным зарядом $c = 1 + 6Q^2$, фоновый заряд $Q = b + b^{-1}$ и b – Лиувилевская константа взаимодействия. Четырехточечный конформный блок также зависит от четырехточечного проективного инварианта q , четырех «внешних» размерностей Δ_i и «промежуточной» размерности Δ

$$\Delta = \frac{Q^2}{4} - P^2, \quad \Delta_i = \frac{Q^2}{4} - \lambda_i^2. \quad (5.2)$$

Функция конформного блока может быть представлена

$$F(\Delta_i | \Delta | q) = \sum_{N=0}^{\infty} q^N {}_{12}\langle N | N \rangle_{34}, \quad (5.3)$$

где векторы цепочки $|N\rangle_{12} \equiv |N\rangle_{\Delta_1 \Delta_2}$ даются в терминах генераторов Вирасоро L_k и строятся с помощью следующих рекуррентных соотношений

$$L_k |N\rangle_{\Delta_1 \Delta_2} = (\Delta + k\Delta_1 - \Delta_2 + N - k) |N - k\rangle_{\Delta_1 \Delta_2}, \quad (5.4)$$

для любого $k > 0$.

Функция \mathcal{Z}_{Y_1, Y_2} в (5.1) дается в следующем виде

$$\mathcal{Z}_{Y_1, Y_2} = \frac{Z_f(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_1) Z_f(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_2) Z_{af}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_3) Z_{af}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu_4)}{Z_{\text{vec}}(\vec{a}, \vec{Y})}. \quad (5.5)$$

Через \vec{Y} , \vec{a} , ... мы обозначаем пары (Y_1, Y_2) , (a_1, a_2) и т. д. В явном виде функции $Z_f(\vec{a}, \vec{Y}, \mu)$, $Z_{af}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu)$ и $Z_{\text{vec}}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu)$ выглядят следующим образом

$$Z_f(\vec{a}, \vec{Y}, \mu) = \prod_{i=1}^2 \prod_{s \in Y_i} (\phi(a_i, s) - \mu + Q), \quad (5.6)$$

$$Z_{af}(\vec{a}, \vec{Y}, \mu) = \prod_{i=1}^2 \prod_{s \in Y_i} (\phi(a_i, s) + \mu), \quad (5.7)$$

где $\phi(a, s)$ дается в (5.10) и

$$Z_{\text{vec}}(\vec{a}, \vec{Y}) = \prod_{i,j=1}^2 \prod_{s \in Y_i} E(a_i - a_j, Y_i, Y_j | s) \prod_{i,j=1}^2 \prod_{s \in Y_i} (Q - E(a_i - a_j, Y_i, Y_j | s)), \quad (5.8)$$

где $E(a_i - a_j, Y_i, Y_j | s)$ определена в (5.11). Коэффициенты в вышеприведенных произведениях, связанные с $Y = \emptyset$, принимаются равными 1.

В общем случае, разбиение $Y = [k_1, \dots, k_m]$, где целые числа упорядочены как в (5.29). Конкретное разбиение может быть представлено в виде диаграммы Юнга, расположенной тем или иным способом. Стандартный выбор состоит в том, чтобы k_i отвечали горизонтальным строкам. Это называется симметричным базисом, и соответствующая диаграмма представляет собой таблицу следующего вида¹

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & k'_1 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & k_1 \\ & & & & & k_2 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & k_{m-1} \\ & & & & & k_m \end{array} \quad (5.9)$$

Введем транспонированную диаграмму Юнга $Y^T = [k'_1, \dots, k'_l]$, связанную с диаграммой Y . Она дается просто путем перехода к антисимметричному базису, где упорядоченные целые k'_i отвечают столбцам. Самый левый столбец имеет высоту k'_1 .

Клетка $s \in Y$ имеет координаты (i, j) , где i и j обозначают соответствующие строку и столбец. Функции $\phi(a, s)$ и $E(a, Y_1, Y_2 | s)$ определяются следующим

¹Чтобы воспроизвести АГТ обозначение следует повернуть эту диаграмму против часовой стрелки на угол $\pi/2$ и переименовать $k_i = \lambda_i$.

образом

$$\phi(a, s) = a + b(i - 1) + b^{-1}(j - 1), \quad (5.10)$$

$$E(a, Y_1, Y_2 | s) = a + b(L_{Y_1}(s) + 1) - b^{-1}A_{Y_2}(s), \quad (5.11)$$

где функция длины руки $A_Y(s)$ и функция длины ноги $L_Y(s)$ для клетки $s \in Y$ даются как

$$A_Y(s) = k_i - j, \quad L_Y(s) = k'_j - i. \quad (5.12)$$

Параметры инстантонной статсуммы Некрасова связаны с параметрами конформного блока Δ_i , Δ и c следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{Q}{2} - (\lambda_1 + \lambda_2), & \mu_2 &= \frac{Q}{2} - (\lambda_1 - \lambda_2), \\ \mu_3 &= \frac{Q}{2} - (\lambda_3 + \lambda_4), & \mu_4 &= \frac{Q}{2} - (\lambda_3 - \lambda_4), \end{aligned} \quad (5.13)$$

и

$$\vec{a} = (a, -a), \quad a = P. \quad (5.14)$$

Вектор Уиттекера. В работах [55; 171] было предложено несколько вырожденных вариантов гипотезы АГТ. В частности, было показано, что норма вектора Уиттекера [172] совпадает со статсуммой Некрасова для чистой калибровочной теории. Вектор Уиттекера определяется следующим образом

$$V = \sum_{N=0}^{\infty} q^N |N\rangle, \quad (5.15)$$

где $|N\rangle$ удовлетворяет

$$\begin{cases} L_0 |N\rangle = (\Delta + N) |N\rangle, \\ L_1 |N\rangle = |N - 1\rangle, \\ L_k |N\rangle = 0 \text{ for } k > 1. \end{cases} \quad (5.16)$$

Найдем коэффициенты вектора Уиттекера

$$|N\rangle = \sum_{Y, |Y|=N} \beta_Y |Y\rangle, \quad (5.17)$$

Y здесь обозначает стандартный базис в модуле Верма. Как следует из этого разложения,

$$\beta_Y = (M^{-1})_{YY'} \langle Y'|N \rangle, \quad (5.18)$$

где M^{-1} – обратная матрица скалярного произведения $M_{Y',Y} = \langle Y'|Y \rangle$. Из (5.16) мы имеем

$$\langle Y'|N \rangle = \delta_{Y',1^N}, \quad (5.19)$$

и

$$\beta_Y = (M^{-1})_{Y,1^N}. \quad (5.20)$$

Таким образом, норма вектора Уиттекера дается следующим скалярным произведением

$$\langle N|N \rangle = \sum_{Y,|Y|=N} \beta_Y \langle N|Y \rangle = \sum_{Y,|Y|=N} \beta_Y \beta_{1^N} \delta_{Y,1^N} = [(M^{-1})_{1^N,1^N}]^2. \quad (5.21)$$

Легко видеть, что в пределе $\Delta_{1,2} \rightarrow \infty$ после надлежащего перемасштабирования векторов цепочки рекуррентные соотношения (5.4) воспроизводят (5.16). Так что норма вектора Уиттекера для $\Delta = \Delta(a)$ связана с соответствующим пределом четырехточечного конформного блока

$$\langle N|N \rangle = \sum_{\vec{Y},|Y|=N} \frac{1}{Z_{\text{vec}}(\vec{a}, \vec{Y})}. \quad (5.22)$$

В следующем разделе мы рассматриваем двумерную $\mathcal{N} = 1$ суперконформную теорию поля и показываем, что конформный блок в пределе Уиттекера связан с инстантонной статсуммой $SU(2)$ теории Янга - Миллса, вычисленной на \mathbb{Z}_2 симметричном пространстве модулей инстантонов. \mathbb{Z}_2 симметрия редуцирует пространство модулей и модифицирует инстантонную статсумму. Эта связь дает новое явное представление для функции $\mathcal{N} = 1$ суперконформного блока в терминах диаграмм Юнга.

5.1 Суперконформные блоки из $\mathcal{N} = 2$ калибровочных теорий

Напомним некоторые детали суперконформной теории поля, необходимые для предстоящего обсуждения. Используя параметризацию теории Лиувилля через константу связи b и фоновый заряд $Q = b^{-1} + b$, центральный заряд дается выражением

$$c = 1 + 2Q^2 . \quad (5.23)$$

Для удобства приведем здесь опять коммутационные соотношения алгебры Навье-Шварца-Рамона ($\mathcal{N}\mathcal{S}\mathcal{R}$)

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{8}(n^3 - n)\delta_{n+m} , \\ \{G_r, G_s\} &= 2L_{r+s} + \frac{1}{2}c(r^2 - \frac{1}{4})\delta_{n+m} , \\ [L_n, G_r] &= (\frac{1}{2}n - r)G_{n+r} . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Мы будем рассматривать НШ-сектор, задаваемый как

$$r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} . \quad (5.25)$$

Состояния соответствующего супер-конформного модуля строятся как упорядоченные векторы вида

$$|\Delta, Y\rangle = L_{-k_1} \dots L_{-k_m} G_{-r_1} \dots G_{-r_n} |\Delta\rangle , \quad (5.26)$$

где вектор старшего веса $|\Delta\rangle$ уничтожается всеми генераторами положительных частот и имеет конформную размерность Δ , определяемую из $L_0|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle$. Векторы $|\Delta\rangle$ и $G_{-1/2}|\Delta\rangle$ образуют примарный супердублет, который обозначается как $(\Phi_\Delta, \Psi_\Delta)$, и $L_0\Psi_\Delta = (\Delta + 1/2)\Psi_\Delta$. Параметризуем конформную размерность следующим образом

$$\Delta(\lambda) = \frac{Q^2}{8} - \frac{\lambda^2}{2} . \quad (5.27)$$

Индекс Y обозначает разбиение некоторого (полу-)целого числа N

$$Y = [k_1, \dots, k_m | r_1, \dots, r_n] \quad (5.28)$$

так что

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m, \quad r_1 > r_2 > \dots > r_n, \quad \sum_{i=1}^m k_i + \sum_{j=1}^n r_j = N. \quad (5.29)$$

Значение $N = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ фиксирует определенный уровень в суперконформном модуле.

$\mathcal{N} = 1$ **конформные блоки.** Четырехточечная корреляционная функция бозонных примарных полей Φ_i с конформными весами Δ_i дается следующим образом

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1(q) \Phi_2(0) \Phi_3(1) \Phi_4(\infty) \rangle = (q\bar{q})^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \sum_{\Delta} \left(C_{12}^{\Delta} C_{34}^{\Delta} F_0(\Delta_i | \Delta | q) F_0(\Delta_i | \Delta | \bar{q}) \right. \\ \left. + \tilde{C}_{12}^{\Delta} \tilde{C}_{34}^{\Delta} F_1(\Delta_i | \Delta | q) F_1(\Delta_i | \Delta | \bar{q}) \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Суперконформные блоки $F_{0,1}$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_0(\Delta_i | \Delta | q) &= \sum_{N=0,1,\dots} q^N F^{(N)}(\Delta_i | \Delta), \\ F_1(\Delta_i | \Delta | q) &= \sum_{N=1/2,3/2,\dots} q^N F^{(N)}(\Delta_i | \Delta), \end{aligned} \quad (5.31)$$

где

$$F^{(N)}(\Delta_i | \Delta) = {}_{12} \langle N | N \rangle_{34} \quad (5.32)$$

и векторы $|N\rangle_{12}$ для $N = 0, 1/2, 1, \dots$ определяются в терминах $\mathcal{N}\mathcal{S}\mathcal{R}$ генераторов как линейные комбинации на N -ом уровне, возникающие в операторном разложении произведения $\Phi_1(q)\Phi_2(0)$. Они удовлетворяют следующим рекур-

рентным соотношениям

$$\begin{cases} G_k|N\rangle_{12} = |\widetilde{N-k}\rangle_{12}, \\ G_k|\widetilde{N}\rangle_{12} = [\Delta + 2k\Delta_1 - \Delta_2 + N - k]|N-k\rangle_{12}, \end{cases} \quad (5.33)$$

где параметр k пробегает полуцелые значения, $k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$, а $|\widetilde{N}\rangle_{12}$ является вкладом потомков N -го уровня в операторном разложении произведения $\Psi_1(q)\Phi_2(0)$.

Суперсимметричный вектор Уиттекера. После надлежащего перемасштабирования векторов цепочки, процедура взятия предела $\Delta_{1,3} \rightarrow \infty$ для (5.33) дает следующие рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} G_{\frac{1}{2}}|N\rangle &= |\widetilde{N-\frac{1}{2}}\rangle, & G_r|N\rangle &= 0, & r > \frac{1}{2}, \\ G_{\frac{1}{2}}|\widetilde{N}\rangle &= |N-\frac{1}{2}\rangle, & G_r|\widetilde{N}\rangle &= 0, & r > \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Функция конформного блока в пределе Уиттекера

$$\begin{aligned} F_0(\Delta|q) &= \sum_{N=0,1,\dots} q^N \langle N|N\rangle, \\ F_1(\Delta|q) &= \sum_{N=1/2,3/2,\dots} q^N \langle N|N\rangle. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Приведем явные выражения для младших коэффициентов

$$\begin{aligned} \langle 0|0\rangle &= 1, \\ \langle \frac{1}{2}|\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{2\Delta}, \\ \langle 1|1\rangle &= \frac{1}{8\Delta}, \\ \langle \frac{3}{2}|\frac{3}{2}\rangle &= \frac{c+2\Delta}{8\Delta(c-6\Delta+2c\Delta+4\Delta^2)}, \\ \langle 2|2\rangle &= \frac{3c+3c^2-34\Delta+22c\Delta+32\Delta^2}{64\Delta(-3+3c+16\Delta)(c-6\Delta+2c\Delta+4\Delta^2)}, \\ \langle \frac{5}{2}|\frac{5}{2}\rangle &= \frac{-27c+42c^2+9c^3+2\Delta+50c\Delta+72c^2\Delta-228\Delta^2+140c\Delta^2+64\Delta^3}{128\Delta(-3+3c+16\Delta)(5+3c-11\Delta+3c\Delta+2\Delta^2)(c-6\Delta+2c\Delta+4\Delta^2)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

5.1.1 Конструкция ADHM и детерминанты векторного поля

В работах [45; 173] $\mathcal{N} = 2$ $SU(k)$ инстантонная статсумма была получена в виде интеграла эквивариантной формы, которая определяется в терминах векторного поля v , действующего на пространстве модулей \mathcal{M}_N (N – топологический заряд). С помощью метода локализации [174] вычисление интеграла по пространству модулей сводится к вычислению определителей [45; 46; 168; 173] векторного поля v в окрестности неподвижных точек

$$\mathcal{Z}_N(a, \epsilon_1, \epsilon_2) = \sum_n \frac{1}{\det_n v}. \quad (5.37)$$

n здесь перечисляет неподвижные точки векторного поля. Сформулируем конструкцию ADHM [175] для случая $SU(2)$ -инстантонов (см. также [176–179]). Она включает в себя следующие комплексные матрицы: две $N \times N$ матрицы B_1, B_2 , $N \times 2$ матрицу I и $2 \times N$ матрицу J , которые удовлетворяют определенному условию регулярности [175] и подчиняются следующим соотношениям

$$[B_1, B_2] + IJ = 0, \quad (5.38)$$

$$\left[B_1, B_1^\dagger \right] + \left[B_2, B_2^\dagger \right] + II^\dagger - J^\dagger J = 0, \quad (5.39)$$

где “ \dagger ” обозначает эрмитово сопряжение. Условие регулярности утверждает, что N -мерное комплексное пространство \mathbb{C}^N образовано полностью за счет многократного действия B_1 и B_2 на векторы столбцов $I_{1,2}$. Эти составляющие являются избыточными в том смысле, что матрицы, связанные $U(N)$ преобразованием,

$$B'_i = gB_i g^{-1}, \quad I' = gI, \quad J' = Jg^{-1}; \quad g \in U(N) \quad (5.40)$$

эквивалентны и представляют одну и ту же точку в \mathcal{M}_N (т. е. приводят к той же конфигурации Янга-Миллса).

Действие векторного поля v на ADHM составляющих дается следующим образом

$$B_l \rightarrow t_l B_l; \quad I \rightarrow I t_v; \quad J \rightarrow t_1 t_2 t_v^{-1} J, \quad (5.41)$$

где параметры $t_l \equiv \exp \epsilon_l \tau$, $l = 1, 2$ и $t_v = \exp a \sigma_3 \tau$.

Неподвижные точки определяются условиями:

$$t_l B_l = g^{-1} B_l g; \quad I t_v = g^{-1} I; \quad t_1 t_2 t_v^{-1} J = J g. \quad (5.42)$$

Решения этой системы можно параметризовать парами диаграмм Юнга (Y_1, Y_2) так, что общее число клеток $|Y_1| + |Y_2| = N$. Это следует из наблюдения того, что должно существовать N линейно независимых векторов вида $B_1^{i_1} B_2^{j_1} I_1$ и $B_1^{i_2} B_2^{j_2} I_2$, которые являются собственными векторами матрицы g . Эти векторы отвечают клеткам $(i_1, j_1) \in Y_1$ и $(i_2, j_2) \in Y_2$ соответственно. Структура диаграммы Юнга просто отражает особый способ упорядочения векторов. Их удобно использовать в качестве базиса в \mathbb{C}^N , при этом явный вид составляющих АДНМ определяется непосредственно как

$$\begin{aligned} g_{ss'} &= \delta_{ss'} t_1^{i_s-1} t_2^{j_s-1}, \\ (B_1)_{ss'} &= \delta_{i_s+1, i_{s'}} \delta_{j_s, j_{s'}}, \\ (B_2)_{ss'} &= \delta_{i_s, i_{s'}} \delta_{j_s+1, j_{s'}}, \\ (I_1)_s &= \delta_{s, 1}, \\ (I_2)_s &= \delta_{s, |Y_1|+1}, \\ J &= 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

где $s = (i_s, j_s)$.

Чтобы вычислить определитель векторного поля, необходимо найти все собственные векторы векторного поля на касательном пространстве, проходящем через неподвижные точки

$$\begin{aligned} t_i \delta B_i &= \Lambda g \delta B_i g^{-1}, \\ \delta I t &= \Lambda g \delta I, \\ t_1 t_2 t^{-1} \delta J &= \Lambda \delta J g^{-1}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Это эквивалентно следующему набору уравнений

$$\begin{aligned} \lambda (\delta B_i)_{ss'} &= (\epsilon_i + \phi_{s'} - \phi_s) (\delta B_i)_{ss'}, \\ \lambda (\delta I)_{sp} &= (a_p - \phi_s) (\delta I)_{sp}, \\ \lambda (\delta J)_{ps} &= (\epsilon_1 + \epsilon_2 - a_p + \phi_s) (\delta J)_{ps}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

где $\Lambda = \exp \lambda \tau$, $g_{ss} = \exp \phi_s \tau$ и

$$\phi_s = (i_s - 1)\epsilon_1 + (j_s - 1)\epsilon_2 + a_{p(s)}. \quad (5.46)$$

Система (5.45) дает все возможные собственные векторы векторного поля. Нам же нужно оставить лишь те, которые принадлежат касательному пространству. По сути это означает исключение вариаций, нарушающих ADHM ограничения. На пространстве модулей

$$[\delta B_1, B_2] + [B_1, \delta B_2] + \delta I J + I \delta J = 0, \quad (5.47)$$

$$\left[\delta B_l, B_l^\dagger \right] + [B_l, \delta B_l^\dagger] + \delta I I^\dagger + I \delta I^\dagger - \delta J^\dagger J - J^\dagger \delta J = 0. \quad (5.48)$$

Калибровочная симметрия может быть учтена следующим образом. Зафиксируем калибровку, в которой $\delta B_{1,2}, \delta I, \delta J$ являются ортогональными к любому калибровочному преобразованию $B_{1,2}, I, J$. Это дает дополнительное ограничение

$$\left[\delta B_l, B_l^\dagger \right] - [B_l, \delta B_l^\dagger] + \delta I I^\dagger - I \delta I^\dagger + \delta J^\dagger J - J^\dagger \delta J = 0. \quad (5.49)$$

Отметим, что (5.48) и (5.49) являются вещественной и мнимой частями следующего уравнения

$$\left[\delta B_l, B_l^\dagger \right] + \delta I I^\dagger - J^\dagger \delta J = 0. \quad (5.50)$$

Вариации в левых частях (5.47) и (5.50) должны быть исключены из (5.45). Соответствующие собственные значения определяются из следующих уравнений

$$\begin{aligned} t_1 t_2 ([\delta B_1, B_2] + [B_1, \delta B_2] + \delta I J + I \delta J) = \\ \Lambda g \left([\delta B_1, B_2] + [B_1, \delta B_2] + \delta I J + I \delta J \right) g^{-1}, \\ \left[\delta B_l, B_l^\dagger \right] + \delta I I^\dagger - J^\dagger \delta J = \Lambda g \left(\left[\delta B_l, B_l^\dagger \right] + \delta I I^\dagger - J^\dagger \delta J \right) g^{-1}. \end{aligned}$$

В результате получаются следующие собственные значения, которые следует исключить из (5.45):

$$\begin{aligned} \lambda &= (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \phi_s - \phi_{s'}), \\ \lambda &= (\phi_s - \phi_{s'}). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Таким образом, детерминант векторного поля (5.41) имеет вид

$$\det v = \frac{\prod_{s,s' \in \vec{Y}} (\epsilon_1 + \phi_{s'} - \phi_s)(\epsilon_2 + \phi_{s'} - \phi_s) \prod_{l=1,2; s \in \vec{Y}} (a_l - \phi_s)(\epsilon_1 + \epsilon_2 - a_l + \phi_s)}{\prod_{s,s' \in \vec{Y}} (\phi_{s'} - \phi_s)(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \phi_{s'} + \phi_s)} \quad (5.52)$$

Выраженное в терминах длин руки и ноги это выражение дает (5.8)

$$Z_{\text{vec}} = \det v, \quad (5.53)$$

если положить $\epsilon_1 = b^{-1}$ и $\epsilon_2 = b$.

5.1.2 Модифицированное пространство модулей

Определим подпространство \mathcal{M}_{sym} пространства модулей для калибровочной группы $SU(2)$, получаемое следующим дополнительным ограничением \mathbb{Z}_2 -симметрии

$$- B_{1,2} = P B_{1,2} P^{-1}; \quad I = P I; \quad J = J P^{-1}. \quad (5.54)$$

$P \in U(N)$ здесь представляет собой некоторое калибровочное преобразование.

Предложение 5.1.1. *$2N$ -инстантонный вклад в интеграл по пространству модулей, вычисляемый на \mathbb{Z}_2 -симметричном подпространстве пространства модулей \mathcal{M}_{sym} , воспроизводит коэффициенты N -го уровня в конформном блоке в секторе Навье-Шварца $\mathcal{N} = 1$ супер-Лиувиллевской теории с точностью до множителя, связанного с $\widehat{gl}_2(2)$.*

Прежде всего отметим, что \mathcal{M}_{sym} содержит все неподвижные точки векторного поля (5.41), найденные в предыдущем разделе. Действительно, из (5.54) можно найти явное действие P на базисных векторах

$$P(B_1^{i-1} B_2^{j-1} I_\alpha) = (-1)^{i+j} B_1^{i-1} B_2^{j-1} I_\alpha, \quad (5.55)$$

где матричные элементы даются в явном виде, $P_{ss'} = (-1)^{i_s + j_s} \delta_{ss'}$. Далее мы обозначаем $P(s) = (-1)^{i_s + j_s}$. Новой особенностью в сравнении с результатами предыдущего раздела является P -характеристика, присваиваемая каждой

клетке в диаграммах Юнга, которые связаны с неподвижными точками. Для визуализации этого свойства мы используем договоренность, что клетка с координатами одинаковой или разной четности является соответственно белой или черной, как если бы мы рисовали диаграммы Юнга на шахматной доске. Тогда $P(s) = 1$ для белых клеток и $P(s) = -1$ для черных клеток. Следовательно, неподвижные точки могут быть классифицированы по числу белых и черных клеток, N_+ и N_- . Это отражает новую структуру многообразия \mathcal{M}_{sym} в виде несвязного объединения компонент $\mathcal{M}_{\text{sym}}(N_+, N_-)$. Каждая компонента является связной и может рассматриваться отдельно.

Обратимся теперь к действию векторного поля (5.41) в \mathcal{M}_{sym} . Касательное пространство редуцируется дополнительным требованием (5.54)

$$-\delta B_{1,2} = P\delta B_{1,2}P^{-1}; \quad \delta I = P\delta I; \quad \delta J = \delta JP^{-1}, \quad (5.56)$$

или, на уровне матричных элементов,

$$-(\delta B_{1,2})_{ss'} = P(s)(\delta B_{1,2})_{ss'}P(s'); \quad (\delta I)_{sp} = P(s)(\delta I)_{sp}; \quad (\delta J)_{ps} = (\delta J)_{ps}P(s), \quad (5.57)$$

Первое соотношение в (5.57) означает, что Z_{sym} принадлежат только те собственные векторы $(\delta B_{1,2})_{ss'}$, у которых цвета s и s' различны. Аналогично, второе соотношение оставляет $(\delta J)_{ps}$, только если s является белым. Вариации, которые должны быть исключены (5.47) и (5.50), принадлежат \mathcal{M}_{sym} только для матричных элементов между состояниями одного цвета. Таким образом, мы получаем новый определитель векторного поля (5.41)

$$\det 'v =$$

$$\frac{\prod_{\substack{s,s' \in \vec{Y} \\ P(s) \neq P(s')}} (\epsilon_1 + \phi_{s'} - \phi_s)(\epsilon_2 + \phi_{s'} - \phi_s) \prod_{\substack{\alpha=1,2; s \in \vec{Y} \\ P(s)=1}} (a_\alpha - \phi_s)(\epsilon_1 + \epsilon_2 - a_\alpha + \phi_s)}{\prod_{\substack{s,s' \in \vec{Y} \\ P(s)=P(s')}} (\phi_{s'} - \phi_s)(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \phi_{s'} + \phi_s)}$$

Вышеприведенное рассмотрение приводит к следующему выражению

$$Z_{\text{vec}}^{\text{sym}}(\vec{a}, \vec{Y}) \equiv \det 'v = \prod_{\alpha, \beta=1}^2 \prod_{s \in \diamond Y_\alpha(\beta)} E(a_\alpha - a_\beta, Y_\alpha, Y_\beta | s)(Q - E(a_\alpha - a_\beta, Y_\alpha, Y_\beta | s)), \quad (5.58)$$

где область $\diamond Y_\alpha(\beta)$ определяется как

$$\diamond Y_\alpha(\beta) = \{(i, j) \in Y_\alpha \mid P(k'_j(Y_\alpha)) \neq P(k_i(Y_\beta))\}, \quad (5.59)$$

или, другими словами, как подмножество клеток с разной четностью факторов ноги и руки.

Итак, мы полагаем, что в чисто калибровочном случае имеет место следующее соотношение между \mathbb{Z}_2 инстантонной статсуммой, вычисляемой на $\mathcal{M}_{\text{sym}}(N_+, N_-)$, и супер-Лиувиллевскими конформными блоками в пределе Уиттекера (5.35):

$$\begin{aligned} \sum_{N=0,1,\dots} q^N \sum_{\vec{Y}, N_+(\vec{Y})=N, N_-(\vec{Y})=N} \frac{1}{Z_{\text{vec}}^{\text{sym}}(\vec{a}, \vec{Y})} &= F_0(\Delta(a)|q), \\ \sum_{N=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} q^N \sum_{\vec{Y}, N_+(\vec{Y})=N+\frac{1}{2}, N_-(\vec{Y})=N-\frac{1}{2}} \frac{1}{Z_{\text{vec}}^{\text{sym}}(\vec{a}, \vec{Y})} &= F_1(\Delta(a)|q). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Далее интересно получить представление для четырехточечных суперконформных блоков.

Четырехточечный супер-Лиувиллевский конформный блок. Рассмотрим теперь $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ теорию с 4 фундаментальными гипермультиплетами с массами μ . Эти гипермультиплеты дают некоторый дополнительный вклад ввиду появления N нулевых мод для каждого вида фермионов в фундаментальном представлении калибровочной группы. Амплитуды ψ нулевых мод можно рассматривать как слой V , сопоставленный одной из неподвижных точек \vec{Y} . Собственные значения векторного поля определяются из уравнения

$$\lambda \psi_s = (\mu + \phi_s) \psi_s. \quad (5.61)$$

Соответствующий вклад фундаментальных гипермультиплетов с массами μ_i выглядит следующим образом

$$Z_f(\mu_i, \vec{a}, \vec{Y}) = \prod_{i=1}^4 \prod_{\alpha=1}^2 \prod_{s \in Y_\alpha} (\phi(a_\alpha, s) + \mu_i). \quad (5.62)$$

Рассматривая случай \mathcal{M}_{sym} , мы накладываем ограничения на множество собственных векторов для фундаментальных мультиплетов. А именно, мы будем предполагать, что $\psi \in V_+$, если N – четное, и $\psi \in V_-$, если N – нечетное.

Вышеприведенное рассмотрение предполагает следующую форму вкладов фундаментальных гипермультиплетов

$$\begin{aligned} Z_f^{\text{sym}(0)}(\mu_i, \vec{a}, \vec{Y}) &= \prod_{i=1}^4 \prod_{\alpha=1}^2 \prod_{s \in Y_{\alpha, s} \text{-белое}} (\phi(a_{\alpha, s}) + \mu_i), \\ Z_f^{\text{sym}(1)}(\mu_i, \vec{a}, \vec{Y}) &= \prod_{i=1}^4 \prod_{\alpha=1}^2 \prod_{s \in Y_{\alpha, s} \text{-черное}} (\phi(a_{\alpha, s}) + \mu_i). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Первая из этих статсумм отвечает случаю с четным числом инстантонов, а вторая отвечает случаю с нечетным числом инстантонов.

Ниже мы приводим результаты [57] для нескольких первых коэффициентов в разложении (5.31) суперконформных блоков $F_{0,1}$:

$$F^{(0)} = 1, \quad (5.64)$$

$$F^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2\Delta}, \quad (5.65)$$

$$F^{(1)} = \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)}{2\Delta}, \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} F^{(\frac{3}{2})} &= \frac{(1 + 2\Delta + 2\Delta_1 - 2\Delta_2)(1 + 2\Delta + 2\Delta_3 - 2\Delta_4)}{8\Delta(1 + 2\Delta)} \\ &+ \frac{4(\Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_3 - \Delta_4)}{(1 + 2\Delta)(c + 2(-3 + c)\Delta + 4\Delta^2)}, \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= \frac{(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(1 + \Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)(1 + \Delta + \Delta_3 - \Delta_4)}{4\Delta(1 + 2\Delta)} \\ &+ \frac{(\Delta^2 - 3(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + 2\Delta(\Delta_1 + \Delta_2))(\Delta^2 - 3(\Delta_3 - \Delta_4)^2 + 2\Delta(\Delta_3 + \Delta_4))}{2\Delta(3 + 2\Delta)(-3 + 3c + 16\Delta)} \\ &+ \frac{(\Delta_1 - 2(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \Delta_2 + \Delta(-1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2))(\Delta_1, \Delta_2 \rightarrow \Delta_3, \Delta_4)}{(c + 2(-3 + c)\Delta + 4\Delta^2)(3 + 4\Delta(2 + \Delta))}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

На основании вышеприведенного анализа мы формулируем следующее представление для четырехточечных конформных НШ-блоков (5.31):

$$\begin{aligned} \sum_{N=0,1,\dots} q^N \sum_{\vec{Y}, N_+(\vec{Y})=N, N_-(\vec{Y})=N} Z_f^{\text{sym}(0)}(\mu_i, \vec{a}, \vec{Y}) Z_{\text{vec}}^{\text{sym}}(\vec{a}, \vec{Y}) &= (1-q)^A F_0(\Delta(\lambda_i) | \Delta(a) | q), \\ \sum_{N=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} q^N \sum_{\vec{Y}, N_+(\vec{Y})=N+\frac{1}{2}, N_-(\vec{Y})=N-\frac{1}{2}} Z_f^{\text{sym}(1)}(\mu_i, \vec{a}, \vec{Y}) Z_{\text{vec}}^{\text{sym}}(\vec{a}, \vec{Y}) &= \frac{1}{2} (1-q)^A F_1(\Delta(\lambda_i) | \Delta(a) | q). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Параметры функций конформного блока связаны с соответствующими параметрами инстантонной статсуммы следующим образом

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{Q}{2} - (\lambda_1 + \lambda_2), & \mu_2 &= \frac{Q}{2} - (\lambda_1 - \lambda_2), \\ \mu_3 &= \frac{Q}{2} - (\lambda_3 + \lambda_4), & \mu_4 &= \frac{Q}{2} - (\lambda_3 - \lambda_4), \end{aligned} \quad (5.70)$$

и

$$A = \left(\frac{Q}{2} - \lambda_1 \right) \left(\frac{Q}{2} - \lambda_3 \right). \quad (5.71)$$

Для первых коэффициентов эти формулы могут быть явно проверены сравнением с результатами прямых вычислений (A.59)-(5.68).

5.1.3 Характер неподвижных точек на компонентах связности

Норма вектора Уиттекера, найденная в [71], равняется сумме вкладов неподвижных точек на компонентах связности $\mathcal{M}_{\text{sym}}(N, N)$ и $\mathcal{M}_{\text{sym}}(N, N-1)$. В этом разделе мы вычислим число неподвижных точек на этих компонентах и обсудим полученный результат с точки зрения алгебры $\hat{gl}(2)_2 \times \mathcal{N} \mathcal{S} \mathcal{R}$.

Удобно ввести производящую функцию

$$\chi(q) = \sum_N |\mathcal{M}_{\text{sym}}(N, N)| q^N + \sum_N |\mathcal{M}_{\text{sym}}(N, N-1)| q^{N-1/2}, \quad (5.72)$$

где $|\mathcal{M}_{\text{sym}}(N_+, N_-)|$ – число неподвижных точек на $\mathcal{M}_{\text{sym}}(N_+, N_-)$. Это число равняется количеству пар диаграмм Юнга с N_+ белыми клетками и N_- черными клетками.

Обозначим через $d(Y) = N_+(Y) - N_-(Y)$ разность между числом белых и черных клеток в диаграмме Юнга Y . Для любого целого k обозначим посредством

$$\chi_k(q) = \sum_{d(Y)=k} q^{\frac{|Y|}{2}} \quad (5.73)$$

производящую функцию диаграмм Юнга с заданной разностью $d(Y)$. Эта функция имеет вид:

$$\chi_k(q) = q^{\frac{2k^2-k}{2}} \prod_{m \geq 0} \frac{1}{(1 - q^{m+1})^2}. \quad (5.74)$$

Формула (5.74) была доказана в [180] для $k = 0$. Множитель $q^{\frac{2k^2-k}{2}}$ отвечает наименьшей диаграмме Юнга с $d(Y) = k$. Для $k > 0$ эта диаграмма состоит из $2k - 1$ строк с длинами $2k - 1, 2k - 2, \dots, 1$. Для $k < 0$ эта диаграмма состоит из $2|k|$ строк с длинами $2|k|, 2|k| - 1, \dots, 1$.

Производящая функция пар диаграмм Юнга с $N_+ - N_- = k$ имеет вид

$$\chi_k^{(2)} = \sum_{k_1+k_2=k} \chi_{k_1} \chi_{k_2}. \quad (5.75)$$

Используя (5.74) и тождество Якоби для тройного произведения

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n t^n q^{n^2} = \prod_{m \geq 0} (1 - q^{2m+2})(1 - q^{2m+1}t)(1 - q^{2m+1}t^{-1}), \quad (5.76)$$

мы получаем

$$\chi(q) = \chi_0^{(2)}(q) + \chi_1^{(2)}(q) = \prod_{m \geq 0} \frac{(1 - q^{m+\frac{1}{2}})^2}{(1 - q^{m+1})^3} = \chi_B(q)^3 \chi_F(q)^2, \quad (5.77)$$

где

$$\chi_B(q) = \prod_{n \in \mathbb{Z}, n > 0} \frac{1}{(1 - q^n)}, \quad (5.78)$$

$$\chi_F(q) = \prod_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, r > 0} (1 + q^r). \quad (5.79)$$

Первые члены ряда $\chi(q)$ выглядят следующим образом

$$\chi(q) = 1 + 2q^{1/2} + 4q + 8q^{3/2} + 16q^2 + 28q^{5/2} + \dots \quad (5.80)$$

Вид формулы (5.77) указывает на следующее. Произведение $\chi_B(q)\chi_F(q)$ равняется характеру стандартного представления $\mathcal{N}\mathcal{S}\mathcal{R}$ алгебры с генераторами L_n, G_r . Оставшаяся же часть относится к алгебре $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{F}$, где \mathcal{B} является алгеброй Гейзенберга с генераторами b_n и соотношениями $[b_n, b_m] = n\delta_{n+m}$, а \mathcal{F} – алгеброй Клиффорда с генераторами f_r и соотношениями $\{f_r, f_s\} = r\delta_{r+s}$.

Таким образом, формула (5.77) означает, что производящая функция числа неподвижных точек на компонентах $\mathcal{M}_{\text{sym}}(N, N)$ и $\mathcal{M}_{\text{sym}}(N, N-1)$ равняется характеру представления алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{F} \times \mathcal{N}\mathcal{S}\mathcal{R}$. Этот взгляд с точки зрения теории представлений может быть использован аналогично [16] (см. также [17]).

Рассмотрим все пространство \mathcal{M}_{sym} . Производящая функция имеет вид

$$\chi(q) = \sum_N |\mathcal{M}_{\text{sym}}(N)| q^{\frac{N}{2}} = \prod_{n \in \mathbb{Z}, n > 0} \frac{1}{(1 - q^{\frac{n}{2}})^2}. \quad (5.81)$$

Полученный результат равняется характеру определенного представления алгебры $\hat{gl}(2)_2 \times \mathcal{N}\mathcal{S}\mathcal{R}$, а именно характеру тензорного произведения представления Фока алгебры Гейзенберга, вакуумного представления² алгебры $\hat{sl}(2)_2$ и NS -представления алгебры $\mathcal{N}\mathcal{S}\mathcal{R}$. Другими словами, производящая функция числа неподвижных точек на $\mathcal{M}_{\text{sym}}(N)$ равняется характеру представления алгебры $\mathcal{A} = \hat{gl}(2)_2 \times \mathcal{N}\mathcal{S}\mathcal{R}$.

5.2 N=2 суперконформные блоки и инстантонные статсуммы

В этом разделе мы рассматриваем задачу вычисления нерегулярных конформных блоков в двумерных конформных теориях поля, алгебра киральной симметрии которых является $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгеброй [181]. Полная суперконформная теория поля содержит две коммутирующих копии (голоморф-

²точнее характеру вакуумного представления в основной классификации

ную и антиголоморфную) $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебры. Основная причина интереса к $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметрии кроется в ее применениях в теории суперструн и в топологических теориях поля. Существует, однако, ряд важных аспектов $\mathcal{N} = (2,2)$ суперконформных теорий, которые все еще не исследованы. В частности, неизвестна явная конструкция конформных блоков.

В контексте АГТ соответствия возникает естественный вопрос: что представляют собой калибровочная теория и пространство модулей инстантонов, соответствующие $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебре? Даже несмотря на значительный прогресс в понимании отношений АГТ типа, общая теоретическая основа, которая позволила бы прямо ответить на этот вопрос, остается довольно неясной.

В [71] было предложено, что имеется связь между $\mathcal{N} = 2$ $SU(N)$ калибровочными теориями на $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_p$ и конформными теориями с алгеброй

$$\widehat{\mathfrak{u}}(1) \times \widehat{\mathfrak{sl}}(p)_N \times \frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(N)_\kappa \times \widehat{\mathfrak{sl}}(N)_p}{\widehat{\mathfrak{sl}}(N)_{\kappa+p}}, \quad (5.82)$$

где параметр κ относится к параметрам эквивариантной деформации [45; 182; 183] в калибровочной теории. Более глубокое понимание гипотезы из работы [71], а также различные обобщения были получены в работах [72; 184–190]. Среди теорий типа (5.82) можно найти различные расширения алгебры Вира-соро. Например, в $SU(2)$ случае $p=2$ отвечает $\mathcal{N} = 1$ суперконформной алгебре (алгебре Навье-Шварца-Рамона), рассмотренной в предыдущем разделе, а $p=4$ соответствует алгебре парафермионных токов спина $4/3$ [191]. С другой стороны, $\mathcal{N} = 2$ суперконформная алгебра не укладывается в эту общую схему.

Цель настоящей работы состоит в изучении $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебры с точки зрения соотношений между двумерными конформными теориями поля и пространствами модулей инстантонов. Нашей отправной точкой является реализация [192] $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебры в виде

$$\frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_k \times \widehat{\mathfrak{u}}(1)}{\widehat{\mathfrak{u}}(1)}, \quad (5.83)$$

где параметр k является уровнем аффинной $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебры. Конструкция (5.83) приводит к тесной связи между теорией представлений $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебры и теорией представлений аффинной $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебры [193]. Априори это

довольно неожиданно, поскольку две алгебры, так же как и их представления со старшим весом, выглядят совершенно по-разному. Однако эта связь не подразумевает какого-либо отображения между стандартными представлениями со старшим весом обеих алгебр. Вместо этого «стандартные» представления в одной алгебре связаны с «нестандартными» представлениями в другой алгебре. В частности, стандартный модуль старшего веса $\mathcal{N} = 2$ алгебры связан с нестандартным модулем — так называемым *ослабленным* модулем — аффинной $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебры.

Ниже мы проанализируем следствия связи из [193] для конформных блоков. Это позволит нам выразить $\mathcal{N} = 2$ суперконформные блоки в терминах $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ конформных блоков для примарных полей, связанных с ослабленными $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ представлениями. Заметим, что ослабленные $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ конформные блоки могут быть, в свою очередь, получены из обычных (неослабленных) $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ конформных блоков через хорошо определенное аналитическое продолжение, которое мы опишем явно. Как было показано в работах [56; 194], неослабленные $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ конформные блоки равняются инстантонным статсуммам в четырехмерных $\mathcal{N} = 2$ SU(2) калибровочных теориях с поверхностным дефектом (оператором). Осуществляя аналитическое продолжение инстантонной статсуммы, мы получим явное комбинаторное выражение для $\mathcal{N} = 2$ суперконформных блоков. Мы ограничиваемся рассмотрением случая нерегулярных суперконформных блоков, т. е. четырехточечных блоков на сфере в пределе Гайотто (Уиттекера).

5.2.1 $\mathcal{N} = 2$ суперконформная алгебра

В этом разделе мы напоминаем некоторые подробности, касающиеся $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебры и ее представлений. Также мы определяем состояние Уиттекера и вычисляем его норму для низших уровней.

$\mathcal{N} = 2$ алгебра и ее модули. $\mathcal{N} = 2$ суперконформная алгебра (которую мы иногда обозначаем как $S\text{Vir}_2$) порождается тензором энергии-импульса $T(z)$, двумя супертоками $G^+(z)$, $G^-(z)$ размерности $3/2$ и одномерным током $H(z)$. В терминах мод $\mathcal{N} = 2$ суперконформная алгебра удовлетворяет следующим

КОММУТАЦИОННЫМ СООТНОШЕНИЯМ

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m - n)L_{n+m} + \frac{c}{4}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} , \\
[L_m, H_n] &= -nH_{m+n} , \quad [L_m, G_r^\pm] = \left(\frac{m}{2} - r\right)G_{m+r}^\pm , \\
[H_m, H_n] &= c m \delta_{m+n,0} , \quad [H_m, G_r^\pm] = \pm G_{m+r}^\pm , \\
\{G_r^+, G_s^-\} &= 2L_{r+s} + (r - s)H_{r+s} + c(r^2 - \frac{1}{4})\delta_{r+s,0} .
\end{aligned} \tag{5.84}$$

c здесь является центральным зарядом. В дальнейшем мы рассматриваем только НШ-сектор. НШ-сектор замкнут относительно разложения операторного произведения и определяется следующим образом

$$m, n \in \mathbb{Z} \text{ и } r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} . \tag{5.85}$$

Эрмитовы сопряжения мод: $L_n^\dagger = L_{-n}$, $H_n^\dagger = H_{-n}$ и $(G_r^-)^\dagger = G_{-r}^+$.

Обозначим состояние старшего веса, отвечающее примарному полю $V_\Delta^\omega(z)$ $\mathcal{N} = 2$ алгебры, через $|\Delta, \omega\rangle$ ($\Delta, \omega \in \mathbb{C}$). Оно удовлетворяет

$$L_0|\Delta, \omega\rangle = \Delta|\Delta, \omega\rangle , \quad H_0|\Delta, \omega\rangle = \omega|\Delta, \omega\rangle , \tag{5.86}$$

и является таким, что подалгебра SVir_2^+ действует тривиально:

$$L_{n>0}|\Delta, \omega\rangle = 0 , \quad H_{n>0}|\Delta, \omega\rangle = 0 , \quad G_{r>0}^\pm|\Delta, \omega\rangle = 0 . \tag{5.87}$$

Модуль Верма $M_{\Delta, \omega}$ порождается потомками, получаемыми действием отрицательных мод (рождения) на состояние старшего веса; другими словами, он определяется действием обертывающей алгебры SVir_2^- на состояние старшего веса:

$$M_{\Delta, \omega} = \mathfrak{U}(\text{SVir}_2^-)|\Delta, \omega\rangle . \tag{5.88}$$

Модуль Верма раскладывается по L_0 -уровню и H_0 -заряду:

$$M_{\Delta, \omega} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{N \in n^2/2 + \mathbb{Z}_+} M_{\Delta, \omega}^{N, n} , \tag{5.89}$$

где

$$M_{\Delta,\omega}^{N,n} = \{|v\rangle \in M_{\Delta,\omega} \mid L_0|v\rangle = (\Delta + N)|v\rangle, H_0|v\rangle = (\omega + n)|v\rangle\}. \quad (5.90)$$

Матрица скалярных произведений потомков (матрица Шаповалова \mathcal{S}) в этом разложении является блочно-диагональной.

Состояние Уиттекера $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебры. Состояние (вектор) Уиттекера представляет собой особое состояние в модуле Верма, которое обладает определенными свойствами собственных значений и не уничтожается ни одной положительной модой. Априори имеется несколько возможных состояний Уиттекера, которые могут быть определены. Естественное определение состояния Уиттекера возникает в предельном случае четырехточечного конформного блока [171], приводящем к так называемому нерегулярному конформному блоку, который совпадает с нормой состояния Уиттекера. Как будет показано в разделе 5.2.3, четырехточечный $\mathcal{N} = 2$ блок в этом пределе распадается на два совершенно независимых сектора («BPS» и «анти-BPS»), каждый из которых имеет соответствующее состояние Уиттекера. Поскольку два независимых сектора и их состояния Уиттекера по существу эквивалентны, мы можем без ограничения общности сосредоточиться только на одном секторе.

Определим $\mathcal{N} = 2$ состояние Уиттекера с помощью следующих уравнений³

$$G_{1/2}^-|W\rangle = \sqrt{z}|W\rangle^-, \quad G_{1/2}^+|W\rangle^- = 2\sqrt{z}|W\rangle \quad \Rightarrow \quad L_1|W\rangle = z|W\rangle, \quad (5.91)$$

где H_1 и все остальные положительные моды уничтожают $|W\rangle$ и $|W\rangle^-$ (отметим, что $G_{1/2}^\pm$ и H_1 порождают SVir_2^+). Состояние Уиттекера может быть разложено как

$$|W\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} z^N|N\rangle, \quad |W\rangle^- = \sum_{N \in \mathbb{Z}^+ - \frac{1}{2}} z^N|N\rangle^-, \quad (5.92)$$

где состояния $|N\rangle, |N\rangle^-$ мы называем состояниями Гайотто.

Как и в случае Вирасоро [55;171], легко видеть, что норма состояния Уиттекера на заданном уровне равняется определенному диагональному элементу

³Определение состояния Уиттекера в другом секторе получается перестановкой $+ \leftrightarrow -$.

обратной матрицы Шаповалова (${}^{-}\langle N|$ здесь обозначает эрмитово сопряженное состояние $|N\rangle^{-}$):

$$\langle N|N\rangle = \mathcal{S}^{-1}(L_{-1}^N; L_{-1}^N), \quad \text{для целого } N, \quad (5.93)$$

$${}^{-}\langle N|N\rangle^{-} = 2^2 \mathcal{S}^{-1}(L_{-1}^{N-\frac{1}{2}} G_{-1/2}^{-}; L_{-1}^{N-\frac{1}{2}} G_{-1/2}^{-}), \quad \text{для полуцелого } N. \quad (5.94)$$

Состояния Гайотто удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям (см. раздел 5.2.3 для подробностей)

$$\begin{aligned} G_{\frac{1}{2}}^{-}|N\rangle &= |N-\frac{1}{2}\rangle^{-}, \\ G_{\frac{1}{2}}^{+}|N+\frac{1}{2}\rangle^{-} &= 2|N\rangle. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Заметим, что в сочетании с (5.92) рекуррентные соотношения (5.95) приводят к (5.91). Норма состояния Уиттекера на заданном уровне может быть получена из (5.93).

Этот раздел мы завершим некоторыми примерами. На уровнях 1 и 3/2 векторами стандартного базиса являются $\{L_{-1}, G_{-1/2}^{+} G_{-1/2}^{-}, H_{-1}\}$ и $\{L_{-1} G_{-1/2}^{-}, G_{-3/2}^{-}, H_{-1} G_{-1/2}^{-}\}$ соответственно. Нормы, получаемые из (5.93), имеют вид

$$\langle 1|1\rangle = \frac{2c - 2\Delta + 2c\Delta - \omega - c\omega}{(2\Delta - \omega)(c - 2\Delta + 2c\Delta - \omega^2)}, \quad (5.96)$$

$${}^{-}\langle \frac{3}{2}|\frac{3}{2}\rangle^{-} = \frac{2^2 (2c^2 - 2\Delta + 2c\Delta - \omega + 3c\omega)}{(2\Delta + \omega)(-2 + 2c + 2\Delta + 3\omega)(c - 2\Delta + 2c\Delta - \omega^2)}. \quad (5.97)$$

5.2.2 Аффинная $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебра

В этом разделе мы кратко обсудим $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебру и ее представления, акцентируя внимание на так называемых ослабленных модулях. В ослабленном модуле мы также определим состояние Уиттекера и вычислим его норму для низших уровней.

$\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебра и ее модули. Аффинная $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебра порождается модами J_n^A трех одномерных токов $J^A(z)$ с $A \in \{0, +, -\}$. Коммутационные соотношения, определяющие нетвистованную $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебру (с центральным расширением), даются следующим образом

$$[J_n^0, J_m^0] = \frac{k}{2} n \delta_{n+m,0}, \quad [J_n^0, J_m^\pm] = \pm J_{n+m}^\pm, \quad [J_n^+, J_m^-] = 2J_{n+m}^0 + k n \delta_{n+m,0} \quad (5.98)$$

где $n, m \in \mathbb{Z}$ и k является уровнем (центральным зарядом) $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$.

Существуют различные типы представлений $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебры. Стандартное представление со старшим весом определяется путем наложения следующих ограничений на состояние старшего веса $|j\rangle$:

$$J_0^0 |j\rangle = j |j\rangle, \quad J_{n>0}^0 |j\rangle = J_{n>0}^- |j\rangle = J_{n \geq 0}^+ |j\rangle = 0, \quad (5.99)$$

и свободно порождается действием остальных мод J_n^A .

Возможно менее известным примером является так называемое ослабленное представление, которое получается путем модификации (ослабления) условий (5.99). Ослабленный модуль Верма будет играть центральную роль в предстоящем обсуждении, поскольку он тесно связан [193] с (массивным) представлением старшего веса $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебры. Примарное поле $\Phi_j^\lambda(z)$ в ослабленном модуле параметризуется двумя комплексными числами j и λ . Соответствующий аналог состояния старшего веса определяется условиями

$$\begin{aligned} J_0^0 |j, \lambda\rangle &= \lambda |j, \lambda\rangle, \\ \mathbf{J}^2 |j, \lambda\rangle &= j(j+1) |j, \lambda\rangle, \end{aligned} \quad (5.100)$$

и следующими ослабленными требованиями уничтожения:

$$J_{n>0}^- |j, \lambda\rangle = 0, \quad J_{n>0}^0 |j, \lambda\rangle = 0, \quad J_{n>0}^+ |j, \lambda\rangle = 0. \quad (5.101)$$

Оператор \mathbf{J}^2 в (5.100) является обычным $\mathfrak{sl}(2)$ квадратичным оператором Казимира

$$\mathbf{J}^2 = [(J_0^0)^2 + \frac{1}{2}(J_0^+ J_0^- + J_0^- J_0^+)]. \quad (5.102)$$

Отметим, что из уравнения (5.100) следует

$$J_0^- J_0^+ |j, \lambda\rangle = [j(j+1) - \lambda(\lambda+1)] |j, \lambda\rangle, \quad (5.103)$$

так что при $j = \lambda$ ослабленный модуль сводится к неослабленному модулю старшего веса. Ослабленный модуль Верма $M_{j, \lambda}$, связанный с $|j, \lambda\rangle$, свободно порождается действием остальных мод J^A

$$M_{j, \lambda} = \mathfrak{U}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2^-) \otimes (\mathfrak{U}(J_0^-) \oplus \mathfrak{U}(J_0^+)) |j, \lambda\rangle. \quad (5.104)$$

Уровень (минус сумма чисел мод) определяет естественную градуировку в этом модуле. Вместе с J_0^0 -зарядом мы имеем следующее разложение

$$M_{j, \lambda} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{N \geq 0} M_{j, \lambda}^{N, n}, \quad (5.105)$$

где

$$M_{j, \lambda}^{N, n} = \{ |v\rangle \in M_{j, \lambda} \mid L_0^{\text{Sug}} |v\rangle = (\Delta^{\text{Sug}} + N) |v\rangle, J_0^0 |v\rangle = (\lambda + n) |v\rangle \}, \quad (5.106)$$

и L_0^{Sug} является нулевой модой стандартного тензора энергии-импульса Сугавары. Эрмитовы сопряжения мод: $(J_n^0)^\dagger = J_{-n}^0$ и $(J_n^-)^\dagger = J_{-n}^+$. Аналогично $\mathcal{N} = 2$ случаю матрица скалярных произведений потомков (матрица Шаповалова \mathcal{S}) имеет блочно-диагональную структуру относительно разложения (5.105).

Состояние Уиттекера в ослабленном $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ модуле. Как и для $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебры, состояние Уиттекера можно определить и в ослабленном $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ модуле. Определим ослабленное $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ состояние Уиттекера с помощью следующих уравнений⁴

$$J_1^- |W\rangle = z |W\rangle^-, \quad J_0^+ |W\rangle^- = 2 |W\rangle, \quad (5.107)$$

где все остальные моды, уничтожающие $|j, \lambda\rangle$, также уничтожают $|W\rangle$ и $|W\rangle^-$. Отметим, что из условий (5.107) следует

$$L_1^{\text{Sug}} |W\rangle = \frac{2z}{k+2} |W\rangle. \quad (5.108)$$

⁴Как и в $\mathcal{N} = 2$ случае, по существу эквивалентное определение получается перестановкой $+ \leftrightarrow -$.

Состояние Уиттекера может быть разложено как

$$|W\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} z^N |N,0\rangle, \quad |W\rangle^- = \sum_{N=0}^{\infty} z^{N+1} |N,-\rangle, \quad (5.109)$$

где состояния $|N,0\rangle$, $|N,-\rangle$ мы называем состояниями Гайотто.

Как и в случае Вирасоро [55;171], легко видеть, что норма состояния Уиттекера на заданном уровне равняется определенному диагональному элементу обратной матрицы Шаповалова ($\langle N,-|$ здесь обозначает эрмитово сопряженное состояние $|N,-\rangle$):

$$\begin{aligned} \langle N,0|N,0\rangle &= 2^{2N} \mathcal{S}^{-1}((J_{-1}^+)^N (J_0^-)^N; (J_{-1}^+)^N (J_0^-)^N), \\ \langle N,-|N,-\rangle &= 2^{2N+2} \mathcal{S}^{-1}((J_{-1}^+)^N (J_0^-)^{N+1}; (J_{-1}^+)^N (J_0^-)^{N+1}). \end{aligned} \quad (5.110)$$

Состояния Гайотто удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} J_1^- |N,0\rangle &= |N-1,-\rangle, \\ J_0^+ |N,-\rangle &= 2|N,0\rangle. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Заметим, что в сочетании с (5.109) рекуррентные соотношения (5.111) приводят к (5.107).

Этот раздел мы завершим некоторыми примерами. На уровне 1 векторами базиса в секторах с J_0^0 -зарядом 0 и -1 являются $\{J_{-1}^+ J_0^-, J_{-1}^0, J_{-1}^- J_0^+\}$ и $\{J_{-1}^+ J_0^- J_0^-, J_{-1}^0 J_0^-, J_{-1}^-\}$ соответственно. Нормы, получаемые из (5.110), имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle 1,0|1,0\rangle &= \frac{2^2 (2j + 2j^2 - 2k - k^2 - 2\lambda - 2k\lambda - 2\lambda^2)}{(2j-k)(2+k)(2+2j+k)(1+j-\lambda)(j+\lambda)}, \\ \langle 1,-|1,-\rangle &= \frac{2^4 (-2j - 2j^2 + k^2 - 2\lambda + 2k\lambda + 2\lambda^2)}{(2+k)(2j-k)(2+2j+k)(2+j-\lambda)(1+j-\lambda)(1-j-\lambda)(j+\lambda)}. \end{aligned} \quad (5.112)$$

5.2.3 N=2 состояния Гайотто как предел векторов цепочки

Вспомним, как в случае Вирасоро возникает состояние Уиттекера [171] в пределе Лиувилевского четырехточечного конформного блока на сфере, кото-

рый мы схематически запишем как

$$\langle V_1 | V_2(1) V_3(z) | V_4 \rangle. \quad (5.113)$$

Операторное произведение $V_3(z)V_4(0)$ допускает следующее разложение

$$[V_3(z) | V_4]_{\Delta} = z^{\Delta - \Delta_3 - \Delta_4} \sum_{N=0}^{\infty} z^N |N\rangle_{34}, \quad (5.114)$$

где состояния $|N\rangle_{34}$ мы называем векторами цепочки. Векторы цепочки удовлетворяют определенным рекуррентным соотношениям, которые фиксируют их полностью. После перемасштабирования $|N\rangle_{34} \rightarrow (-\Delta_4)^N |N\rangle_{34}$ состояния Гайотто $|N\rangle_G$ даются пределом $|N\rangle_{34}$ при Δ_4 , стремящемся к ∞ . При определении состояния Уиттекера в виде

$$|W\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} z^N |N\rangle_G \quad (5.115)$$

четырёхточечный блок сводится к $\langle W | W \rangle$.

В обычной КфТП [4] с алгеброй Вирасоро в качестве алгебры киральной симметрии конформная симметрия полностью определяет вклад потомков в разложение операторного произведения. Точнее, конформная симметрия приводит к рекуррентным соотношениям для коэффициентов разложения операторного произведения, которые однозначно определяют некоторые линейные комбинации потомков на N -м уровне в модуле Верма, дающие вклад в разложение операторного произведения любой заданной пары примарных полей. В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричном случае ситуация несколько усложняется. Вместо скалярных примарных полей появляются супердублеты примарных полей. С точки зрения разложения операторного произведения это расширение требует отдельного рассмотрения потомков двух компонент примарного супердублета.

В $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричном случае супермультиплет примарных полей состоит из четырех полей

$$\begin{aligned} V_{\Delta}^{\omega}, \\ V_{\Delta,\omega}^{+} &= G_{-1/2}^{+} V_{\Delta}^{\omega}, & V_{\Delta,\omega}^{-} &= G_{-1/2}^{-} V_{\Delta}^{\omega}, \\ \tilde{V}_{\Delta,\omega} &= \frac{1}{2} \left(G_{-1/2}^{+} G_{-1/2}^{-} - G_{-1/2}^{-} G_{-1/2}^{+} \right) V_{\Delta}^{\omega}, \end{aligned} \quad (5.116)$$

и конформная инвариантность предполагает четыре независимых канала в разложении операторного произведения.

Разложение операторного произведения $V_{\Delta_3}^{\omega_3}(z) V_{\Delta_4}^{\omega_4}(0)$ включает в себя потомков промежуточного состояния V_{Δ}^{ω} , где вклад N -го уровня мы обозначаем как $|N\rangle_{34}$. Сохранение H_0 -заряда дает следующее ограничение

$$\omega = \omega_3 + \omega_4 + n, \quad (5.117)$$

где n является некоторым целым числом. Когда это соотношение выполняется, вклад в разложение операторного произведения приходит только от подмодуля с H_0 -зарядом $\omega + n$:

$$[V_3(z)|V_4]_{\Delta}^{(n)} = z^{\Delta-\Delta_3-\Delta_4} \sum_{N=0}^{\infty} z^N |N\rangle_{34}, \quad (5.118)$$

где $|N\rangle_{34} \in M_{\Delta,\omega}^{N,n}$. Напомним, что $|N\rangle_{34} = 0$, если $N < n^2/2$. Состояния $|N\rangle_{34}$ и аналогичные состояния $|N\rangle_{34}^{+}$, $|N\rangle_{34}^{-}$, и $|\widetilde{N}\rangle_{34}$, появляющиеся в разложениях операторных произведений, которые задействуют другие компоненты примарного супермультиплета (5.116),

$$\begin{aligned} [V_3^{+}(z)|V_4]_{\Delta}^{(n+1)} &= z^{\Delta-\Delta_3-\Delta_4-\frac{1}{2}} \sum_{N=0}^{\infty} z^N |N\rangle_{34}^{+}, \\ [V_3^{-}(z)|V_4]_{\Delta}^{(n-1)} &= z^{\Delta-\Delta_3-\Delta_4-\frac{1}{2}} \sum_{N=0}^{\infty} z^N |N\rangle_{34}^{-}, \\ [\tilde{V}_3(z)|V_4]_{\Delta}^{(n)} &= z^{\Delta-\Delta_3-\Delta_4-1} \sum_{N=0}^{\infty} z^N |\widetilde{N}\rangle_{34}, \end{aligned} \quad (5.119)$$

удовлетворяют следующему набору рекуррентных соотношений [195]

$$\begin{aligned}
H_m |N+m\rangle_{34} &= \omega_3 |N\rangle_{34}, \\
H_m |\widetilde{N+m}\rangle_{34} &= 2m \Delta_3 |N\rangle_{34} + \omega_3 |\widetilde{N}\rangle_{34}, \\
H_m |N+m\rangle_{34}^{\pm} &= (\omega_3 \pm 1) |N\rangle_{34}^{\pm}, \\
G_m^{\pm} |N+m\rangle_{34} &= |N\rangle_{34}^{\pm}, \\
G_m^{\pm} |\widetilde{N+m}\rangle_{34} &= \mp [\Delta + 2m(\Delta_3 + \frac{1}{2}) - \Delta_4 \pm (m + \frac{1}{2})\omega_3 + N] |N\rangle_{34}^{\pm}, \\
G_m^{\pm} |N+m\rangle_{34}^{\mp} &= [\Delta + 2m\Delta_3 - \Delta_4 \pm (m + \frac{1}{2})\omega_3 + N] |N\rangle_{34} \pm |\widetilde{N}\rangle_{34}, \\
G_m^{\pm} |N+m\rangle_{34}^{\pm} &= 0,
\end{aligned} \tag{5.120}$$

где $m > 0$. Для удобства мы также напомним действие генераторов L_m несмотря на то, что этот результат непосредственно вытекает из (5.120),

$$\begin{aligned}
L_m |N+m\rangle_{34} &= [\Delta + m\Delta_3 - \Delta_4 + N] |N\rangle_{34}, \\
L_m |\widetilde{N+m}\rangle_{34} &= \frac{m(m+1)\omega_3}{2} |N\rangle_{34} + [\Delta + m(\Delta_3 + 1) - \Delta_4 + N] |\widetilde{N}\rangle_{34}, \\
L_m |N+m\rangle_{34}^{\pm} &= [\Delta + m(\Delta_3 + \frac{1}{2}) - \Delta_4 + N] |N\rangle_{34}^{\pm}.
\end{aligned}$$

Набор рекуррентных соотношений (5.120) не определяет векторы цепочки полностью. В частности, отношение $|N\rangle_{34}$ и $|\widetilde{N}\rangle_{34}$ не фиксируется.

Осуществив перемасштабирование,

$$|N\rangle_{34} \rightarrow (-\Delta_4)^N |N\rangle_{34}, \quad |N\rangle_{34}^{\pm} \rightarrow (-\Delta_4)^{N+\frac{1}{2}} |N\rangle_{34}^{\pm}, \quad |\widetilde{N}\rangle_{34} \rightarrow (-\Delta_4)^{N+1} |\widetilde{N}\rangle_{34} \tag{5.121}$$

мы находим, что в пределе Гайотто при Δ_4 , стремящемся к ∞ , рекуррентные соотношения (5.120) сводятся к

$$\begin{aligned}
G_{\frac{1}{2}}^{\pm} |N+\frac{1}{2}\rangle &= |N\rangle^{\pm}, \\
G_{\frac{1}{2}}^{\pm} |N+\frac{1}{2}\rangle^{\mp} &= |N\rangle \pm |\widetilde{N}\rangle, \\
G_{\frac{1}{2}}^{\pm} |\widetilde{N+\frac{1}{2}}\rangle &= \mp |N\rangle^{\pm}.
\end{aligned} \tag{5.122}$$

Оказывается, данная система является диагонализуемой (что, очевидно, не так в общем случае). Чтобы убедиться в этом, введем «симметричные» и «антисимметричные» комбинации

$$\begin{aligned} |N\rangle_s &= |N\rangle + |\widetilde{N}\rangle, \\ |N\rangle_a &= |N\rangle - |\widetilde{N}\rangle. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Подставляя эти выражения в (5.122), мы находим, что рекуррентные соотношения могут быть разделены на две полностью независимые части

$$G_{\frac{1}{2}}^+ |N + \frac{1}{2}\rangle_a = -2|N\rangle^+, \quad G_{\frac{1}{2}}^- |N + \frac{1}{2}\rangle^+ = |N\rangle_a, \quad G_{\frac{1}{2}}^- |N + \frac{1}{2}\rangle_a = 0, \quad (5.124)$$

и

$$G_{\frac{1}{2}}^- |N + \frac{1}{2}\rangle_s = 2|N\rangle^-, \quad G_{\frac{1}{2}}^+ |N + \frac{1}{2}\rangle^- = |N\rangle_s, \quad G_{\frac{1}{2}}^+ |N + \frac{1}{2}\rangle_s = 0. \quad (5.125)$$

Поскольку два сектора полностью независимы и по существу эквивалентны, мы без ограничения общности можем ограничиться одним из двух секторов. Далее мы фокусируемся на (5.125). Для простоты мы опускаем индекс s у $|N\rangle$ в последующих разделах.

5.3 Аффинная $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ и инстантонные статсуммы

5.3.1 Связь $\mathcal{N}=2$, ослабленных $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ и обычных $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ блоков

Целью данного раздела является выяснение связи между нерегулярными конформными блоками в $\mathcal{N}=2$, ослабленном $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ и обычном $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ случаях. Сначала мы обсудим связь между $\mathcal{N}=2$ и ослабленным $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ модулями. Затем мы обобщим эту связь на конформные блоки и, в частности, покажем эквивалентность между $\mathcal{N}=2$ и ослабленными $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ нерегулярными блоками. Наконец, мы покажем, что нерегулярные ослабленные $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ блоки могут быть получены из нерегулярных обычных $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ блоков с помощью процедуры аналитического

продолжения, которую мы опишем явно. Результаты данного раздела основаны на работах [73; 74]

$\mathcal{N} = 2$ суперконформная алгебра может быть реализована в терминах $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ и комплексного фермиона $\psi(z)$ ($\bar{\psi}(z)$) с помощью косетной конструкции Ди Веккия [192]. Эта конструкция является частным случаем так называемой конструкции Казама-Сузуки [151]. А именно, $\mathcal{N} = 2$ суперконформная алгебра является алгеброй вида

$$\frac{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_k \times \widehat{\mathfrak{u}}(1)}{\widehat{\mathfrak{u}}(1)}, \quad (5.126)$$

где k – это уровень аффинной $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебры. Для описания этой взаимосвязи удобно использовать язык разложений операторных произведений. Комплексный фермион и $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ алгебра токов обладают следующими разложениями операторных произведений

$$\begin{aligned} \psi(z)\bar{\psi}(w) &\sim \frac{1}{(z-w)}, & J^0(z)J^0(w) &\sim \frac{\frac{k}{2}\delta_{ab}}{(z-w)^2}, \\ J^0(z)J^\pm(w) &\sim \pm \frac{J^\pm(w)}{(z-w)}, & J^+(z)J^-(w) &\sim \frac{k}{(z-w)^2} + \frac{2J^0(w)}{(z-w)}, \end{aligned} \quad (5.127)$$

а сингулярные части разложения операторных произведений $\mathcal{N} = 2$ алгебры имеют вид

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{3c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial T(w), \\ T(z)H(w) &= \frac{1}{(z-w)^2}H(w) + \frac{1}{z-w}\partial H(w), \\ T(z)G^\pm(w) &= \frac{3/2}{(z-w)^2}G^\pm(w) + \frac{1}{z-w}\partial G^\pm(w), \\ H(z)H(w) &= \frac{c}{(z-w)^2}, & H(z)G^\pm(w) &= \pm \frac{1}{(z-w)}G^\pm(w), \\ G^\pm(z)G^\mp(w) &= \frac{2c}{(z-w)^3} \pm \frac{2}{(z-w)^2}H(w) + \frac{1}{z-w}(2T(w) \pm \partial H(w)). \end{aligned} \quad (5.128)$$

Алгебра $\widehat{\mathfrak{u}}(1)$ в числителе (5.126) отвечает сохраняющемуся току $\psi\bar{\psi}(z)$, тогда как $\widehat{\mathfrak{u}}(1)$ в знаменателе является диагональной подалгеброй, порожденной

$$K(z) = J^0(z) - \psi\bar{\psi}(z). \quad (5.129)$$

Несложно проверить, что нечетные генераторы G^\pm , построенные как

$$G^+(z) = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \psi(z) J^+(z), \quad G^-(z) = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \bar{\psi}(z) J^-(z), \quad (5.130)$$

обладают размерностью $3/2$ и имеют несингулярные разложения операторных произведений с $K(z)$. Кроме того, одномерный ток $H(z)$ и тензор энергии-импульса $T(z)$ $\mathcal{N} = 2$ алгебры однозначно определяются из разложения операторного произведения $G^+(z)G^-(w)$:

$$H(z) = \frac{1}{2(k+2)} J^0(z) + \frac{k}{k+2} \psi \bar{\psi}(z), \quad (5.131)$$

$$T(z) = \frac{1}{2(k+2)} (J^+ J^-(z) + J^- J^+(z)) + \frac{k}{k+2} \psi \bar{\psi}(z) + \frac{2}{k+2} J^0 \psi \bar{\psi}(z).$$

Разложение операторного произведения $G^+(z)G^-(w)$ также фиксирует нормировку $G^\pm(z)$. Центральный заряд $\mathcal{N} = 2$ алгебры в терминах $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ уровня имеет вид

$$c = \frac{k}{k+2}. \quad (5.132)$$

Для построения представления со старшим весом необходимо указать примарные поля $\mathcal{N} = 2$ алгебры. Они могут быть построены из ослабленных $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ примарных полей и экспонент $e^{\beta\phi}$ с подходящим образом выбранным β

$$V_\Delta^\omega(z) = \Phi_j^\lambda(z) e^{\beta\phi}(z), \quad (5.133)$$

где бозонное поле ϕ связано с током $K(z)$ как

$$K(z) = \partial\phi(z). \quad (5.134)$$

Параметр β фиксируется требованием нулевого разложения операторного произведения с $K(z)$. Это требование также фиксирует отношения между параметрами примарных полей (которые также следуют из (5.131))

$$\Delta = \frac{j(j+1) - \lambda^2}{k+2}, \quad \omega = \frac{2\lambda}{k+2}. \quad (5.135)$$

Основным инструментом сравнения структур представлений является вычисление характеров. Характер неприводимого ослабленного $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ представле-

ния $M_{j,\lambda}$, определяемый по модулю вклада нулевых мод J_0^\pm , имеет следующий вид

$$\chi_{j,\lambda}^{>0}(z,q) = \text{Tr}_{M_{j,\lambda}}(q^{L_0^{\text{Sug}}} z^{J_0^0}) = \frac{z^\lambda q^{\Delta_j}}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-zq^i) \prod_{i=1}^{\infty}(1-z^{-1}q^i) \prod_{i=1}^{\infty}(1-q^i)}, \quad (5.136)$$

где Δ_j представляет собой размерность Сугавары, а градуировка по переменной z определяет сектор с заданным значением J_0^0 -заряда. Дополнительное действие J_0^\pm генераторов в ослабленном модуле позволяет изменять этот заряд, не изменяя уровня. Фактически это означает, что суммирование должно вестись по всем секторам. Таким образом, мы находим характер ослабленного модуля для некоторого фиксированного заряда $J_0^0 = \lambda + n$

$$\chi_{j,\lambda}^{\text{sl}_2}(z,q) = \chi_{j,\lambda}^{>0}(1,q) \sim \chi_{\text{boson}}(q)^3 = 1 + 3q + 9q^2 + 22q^3 + 51q^4 + \dots \quad (5.137)$$

Отметим, что число состояний в ослабленном модуле не зависит от n . В (5.137) χ_{boson} является характером свободного бозона

$$\chi_{\text{boson}}(q) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-q^i)}. \quad (5.138)$$

Неприводимый характер $\mathcal{N} = 2$ модуля старшего веса выглядит следующим образом

$$\chi_{\Delta,\omega}^{\mathcal{N}=2}(z,q) = \text{Tr}_{M_{\Delta,\omega}}(q^{L_0} z^{H_0}) = \frac{z^\omega q^\Delta \prod_{k>0}(1+zq^{k-\frac{1}{2}}) \prod_{k>0}^{\infty}(1+z^{-1}q^{k-\frac{1}{2}})}{\prod_{k>0}(1-q^k) \prod_{k>0}^{\infty}(1-q^k)}. \quad (5.139)$$

Применяя тождество Якоби для тройного произведения, это выражение можно записать в следующем виде

$$\chi_{\Delta,\omega}^{\mathcal{N}=2}(z,q) = \frac{z^\omega q^\Delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n q^{\frac{n^2}{2}}}{\prod_{k>0}(1-q^k)^3} \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n q^{\frac{n^2}{2}} \chi_{\text{boson}}(q)^3, \quad (5.140)$$

Таким образом, с точностью до сдвига низшего уровня число состояний в $\mathcal{N} = 2$ модуле старшего веса с фиксированным значением H_0 -заряда совпадает с числом состояний в ослабленном $\widehat{\text{sl}}(2)$ модуле с произвольным фиксированным значением J_0^0 -заряда.

Эквивалентность между $\mathcal{N} = 2$ и ослабленными $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ блоками. Покажем теперь, что нерегулярные $\mathcal{N} = 2$ и ослабленные $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ конформные блоки равны, т. е. нормы состояний Уиттекера (5.92) и (5.109) совпадают

$$\langle W|W\rangle_{\mathcal{N}=2} = \langle W|W\rangle_{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)}, \quad {}^-\langle W|W\rangle_{\mathcal{N}=2} = {}^-\langle W|W\rangle_{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)}, \quad (5.141)$$

при условии, что мы также переопределим переменную z , используемую в обеих теориях, следующим образом

$$z_{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)} = \frac{k+2}{2} z_{\mathcal{N}=2}. \quad (5.142)$$

Это перемасштабирование необходимо ввиду наших нормировок, оно является следствием (5.108). В терминах состояний Гайотто вышеприведенное утверждение гласит (N здесь является целым числом)

$$\langle N|N\rangle_{\mathcal{N}=2} = \langle N,0|N,0\rangle_{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)}, \quad {}^-\langle N+\frac{1}{2}|N+\frac{1}{2}\rangle_{\mathcal{N}=2} = \langle N,-|N,-\rangle_{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)}. \quad (5.143)$$

Несложно проверить эти соотношения для $N=1$ путем сравнения (5.96), (5.97) с (5.112), (5.113), используя (5.135). Однако на самом деле мы докажем равенства (5.143) для любого N , показав, что состояния Гайотто в обеих теориях переходят друг в друга при отображении, описанном выше.

Как обсуждалось ранее, вектор цепочки в $\mathcal{N} = 2$ модуле Верма представляет собой состояние, которое появляется в разложении операторного произведения $V_3(z)V_4(0)$ двух $\mathcal{N} = 2$ примарных полей. Используя описанное соответствие, его можно записать как

$$|N\rangle_{34} = \sum_{m=0}^N |N-m,0\rangle_{34} |m\rangle_{\Psi}. \quad (5.144)$$

Здесь, в каждом члене суммы, первый множитель является вектором цепочки, связанным с разложением операторного произведения двух ослабленных $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ примарных полей $\Phi_3(z)\Phi_4(0)$, тогда как второй множитель является свободным фермионным вектором цепочки, который возникает в разложении операторного произведения бозонных одевающих экспонент $e^{\beta_3\phi(z)}e^{\beta_4\phi(0)}$. В силу того, что эти два сектора не взаимодействуют, мы имеем вид (5.144). Как уже обсуждалось в разделе 5.2.3, состояния Гайотто возникают в пределе векторов цепочки.

В $\mathcal{N}=2$ случае состояния Гайотто $|N\rangle, |N+\frac{1}{2}\rangle^-$ однозначно определяются рекуррентными соотношениями, приведенными в разделе 5.2.1,

$$\begin{aligned} G_{\frac{1}{2}}^- |N\rangle &= |N-\frac{1}{2}\rangle^-, \\ G_{\frac{1}{2}}^+ |N+\frac{1}{2}\rangle^- &= 2|N\rangle. \end{aligned} \quad (5.145)$$

При этом действие всех остальных положительных мод уничтожает эти состояния. Заметим, что из вида алгебры (5.84) следует, что все положительные моды порождаются генераторами $G_{1/2}^\pm$ и H_1 .

Ослабленные $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ состояния Гайотто $|N,0\rangle, |N-1,-\rangle$ однозначно определяются рекуррентными соотношениями, приведенными в разделе 5.2.2,

$$\begin{aligned} J_1^- |N,0\rangle &= |N-1,-\rangle, \\ J_0^+ |N,-\rangle &= 2|N,0\rangle. \end{aligned} \quad (5.146)$$

При этом действие всех остальных неотрицательных мод уничтожает эти состояния. Заметим, что из вида алгебры (5.98) следует, что все неотрицательные моды порождаются генераторами J_0^\pm и J_1^0 .

Следовательно, для доказательства эквивалентности (5.143) необходимо показать, что рекуррентные соотношения для $\mathcal{N}=2$ состояний Гайотто следуют из соотношений для $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ состояний Гайотто и соотношений для свободных фермионных векторов цепочки.

В секторе свободных фермионов предел Гайотто вектора цепочки является вакуумным состоянием $|0\rangle_\Psi$, поскольку $\Psi_r^\pm |N\rangle_\Psi = 0$ для $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$. Таким образом, в сумме (5.144) вклад дает только первый член, и мы находим, что $\mathcal{N}=2$ состояние Гайотто имеет факторизованную форму

$$|N\rangle = |N,0\rangle |0\rangle_\Psi. \quad (5.147)$$

С этим результатом мы уже можем проверить, приводят ли рекуррентные соотношения (5.146) к (5.145). Нам необходимо лишь несколько первых членов

явного вида отображения (5.130)

$$\begin{aligned} G_{1/2}^+ &= J_1^+ \Psi_{-1/2}^+ + J_0^+ \Psi_{1/2}^+ + \dots \\ G_{1/2}^- &= J_1^- \Psi_{-1/2}^- + J_0^- \Psi_{1/2}^- + \dots \\ H_1 &= J_1^0 + \Psi_{1/2}^+ \Psi_{1/2}^- + \dots \end{aligned} \quad (5.148)$$

а также для тока $K(z)$, определенного в (5.129),

$$K_1 = J_1^0 - \Psi_{1/2}^+ \Psi_{1/2}^- + \dots \quad (5.149)$$

Отметим, что по построению $\mathcal{N} = 2$ сектор коммутирует с $K(z)$, так что все $\mathcal{N} = 2$ состояния Гайотто должны уничтожаться K_1 . Используя свойства $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ состояния Гайотто $|N, 0\rangle$, легко проверить, что $\mathcal{N} = 2$ состояние Гайотто (5.147) уничтожается K_1 , а также H_1 и $G_{1/2}^+$.

Используя второе уравнение в (5.148), мы находим из первых уравнений в (5.145) и (5.146), что

$$|N + \frac{1}{2}\rangle^- = |N, -\rangle \Psi_{-1/2}^- |0\rangle_\Psi. \quad (5.150)$$

Состояние $|N\rangle^-$ уничтожается $K(z)$, поскольку оно получается действием $G_{1/2}^-$ на $|N\rangle$ и $K(z)$ коммутирует с $\mathcal{N} = 2$ алгеброй. Оно также уничтожается H_1 и $G_{1/2}^-$. Это следует из свойств $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ состояния Гайотто $|N, -\rangle$ вместе с очевидным требованием $\Psi_{-1/2}^2 = 0$.

Наконец, действуя $G_{1/2}^+$ и используя второе уравнение в (5.146), мы находим

$$G_{1/2}^+ |N + \frac{1}{2}\rangle = J_0^+ |N, 0\rangle \Psi_{+1/2}^+ \Psi_{-1/2}^- |0\rangle_\Psi = 2 |N, 0\rangle |0\rangle_\Psi = 2 |N\rangle, \quad (5.151)$$

что является вторым уравнением в (5.145). Таким образом, мы показали, что $|N\rangle$, $|N + \frac{1}{2}\rangle$ удовлетворяют $\mathcal{N} = 2$ рекуррентным соотношениям (5.145) при условии, что $|N, 0\rangle$, $|N, -\rangle$ удовлетворяют $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ рекуррентным соотношениям (5.146), что доказывает (5.143).

Связь обычных и ослабленных $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ блоков. Далее мы покажем, что обычные (неослабленные) $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ нерегулярные конформные блоки связаны с

нерегулярными конформными блоками, относящимися к ослабленному $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ модулю, через определенное аналитическое продолжение.

Эта связь вытекает из следующих соображений. Рассмотрим в ослабленном модуле базис потомков на уровне m с (J_0^0) зарядом s . Обозначим базисные элементы через $B_i^{(s)}|j, \lambda\rangle$, где $B_i^{(s)}$ является строкой в J_n^A , а i перечисляет различные возможные варианты. Базисные элементы могут быть построены следующим образом. Сначала построим всех возможных потомков уровня m любого заряда с помощью генераторов только ненулевых мод (т. е. J_n^A с $n > 0$). Каждый из этих потомков может быть использован для построения потомка на уровне m с требуемым зарядом s с помощью включения либо дополнительного числа J_0^- , либо дополнительного числа J_0^+ . Заметим, что одновременное использование J_0^- и J_0^+ не приводит к независимым базисным элементам, поскольку пару $J_0^- J_0^+$ можно убрать с помощью свойств собственных значений ослабленного модуля (5.103).

Далее на том же уровне рассмотрим ослабленный случай, но уже с зарядом $s - n$, где n много больше, чем $|s|$. Сначала построим потомков на требуемом уровне с помощью ненулевых мод, как указано выше. Поскольку $n \gg |s|$, каждый из этих потомков может быть использован для построения потомка с зарядом $s - n$ включением соответствующего числа дополнительных J_0^- . Однако, в качестве альтернативы мы также можем использовать потомков вида $B_i^{(s)}(J_0^-)^n|j\rangle$ в роли наших базисных элементов, где $B_i^{(s)}$ является точно такой же строкой в J_n^A , как и в ослабленном модуле. Это является просто линейным преобразованием базиса в сравнении с базисом, использующим только J_0^- . Это следует из того факта, что все J_0^+ , присутствующие в $B_i^{(s)}$, могут быть перемещены вправо и уничтожены при действии на состояние старшего веса $|j\rangle$, в результате чего остается лишь линейная комбинация членов, связанных только с ненулевыми модами и J_0^- .

Наконец, в качестве базисных элементов в рассматриваемых случаях мы можем взять потомков $B_i^{(s)}|j, \lambda\rangle$ (ослабленный случай) и $B_i^{(s)}(J_0^-)^n|j\rangle$ (неослабленный случай) с тем же $B_i^{(s)}$ в обоих случаях.

Как для ослабленного, так и неослабленного $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ модулей матрица скалярных произведений потомков (матрица Шаповалова) имеет блочно-диагональную структуру, где каждый блок содержит потомков только заданного уровня m и с одинаковым значением заряда s . Используя базисные элементы, выбран-

ные выше, легко видеть, что после исключения ненулевых мод с помощью алгебры и свойств модулей, каждый элемент в матрице Шаповалова сводится к сумме слагаемых вида (коэффициенты зависят от уровня и являются одинаковыми в обоих случаях, поскольку алгебра одна и та же, а r и q – некоторые целые числа):

$$\langle j, \lambda | (J_0^+)^q (J_0^0)^r (J_0^-)^q | j, \lambda \rangle = (\lambda - q)^r \prod_{\ell=0}^{q-1} (j - \lambda + \ell + 1)(j + \lambda - \ell), \quad (5.152)$$

для ослабленного модуля и

$$\langle j | (J_0^+)^{q+n} (J_0^0)^r (J_0^-)^{q+n} | j \rangle = M(n) (j - n - q)^r \prod_{\ell=0}^{q-1} (n + \ell + 1)(2j - n - \ell), \quad (5.153)$$

для неослабленного модуля, где (см. также [196])

$$M(n) \equiv \langle j | (J_0^+)^n (J_0^-)^n | j \rangle = (-2j)_n n! (-1)^n. \quad (5.154)$$

Если теперь заменить n на $j - \lambda$ в неослабленном случае с зарядом $s - n$ и нормировать полученное выражение путем деления на $M(n)$, то в результате получится ослабленный случай того же уровня с зарядом s . Поскольку норма вектора Уиттекера дается в терминах фиксированного элемента обратной матрицы Шаповалова, см. также (5.110), из вышеприведенного анализа мы заключаем, что коэффициент при порядке z^m нормы вектора Уиттекера в ослабленном случае может быть получен из коэффициента при порядке $x^n z^m$ (с большим n) нормы вектора Уиттекера в неослабленном случае путем умножения на $M(n)$ и замены n на $j - \lambda$.

5.3.2 Поверхностный дефект и инстантонные статсуммы

С точки зрения калибровочных теорий дуальное описание $\widehat{\mathfrak{sl}}(N)$ конформных блоков действует $\mathcal{N} = 2$ $SU(N)$ калибровочные теории с определенным

поверхностным дефектом [56; 194; 196]. Релевантное пространство модулей инстантонов известно как аффинное пространство Ломона [197]. Эквивалентно оно может быть рассмотрено как орбифолд стандартного ADHM инстантонного пространства модулей и на этом языке называется цепным квивером. С помощью языка аффинного пространства Ломона инстантонная статсумма была вычислена в работе [197], а с использованием языка орбифолда в работе [198].

Поверхностный дефект, связанный с $\widehat{\mathfrak{sl}}(N)$ алгеброй, принадлежит к более общему классу поверхностных дефектов в $SU(N)$ калибровочных теориях, которые классифицируются по разбиениям N [199]. Относительно $\mathcal{N}=2$ $SU(N)$ калибровочных теорий с поверхностным дефектом, принадлежащим этому классу, было высказано предположение [200; 201] о том, что они связаны с алгебрами киральной симметрии, которые получаются путем квантовой редукции Дринфельда-Соколова из $\widehat{\mathfrak{sl}}(N)$. Эти алгебры также классифицируются по разбиениям N . Инстантонные статсуммы для случая, соответствующего общему разбиению N , были предложены в работе [201] и подтверждены в работе [198]. Пространства модулей инстантонов, соответствующие общему разбиению N , также могут быть сформулированы двумя способами. Анализ, проведенный в [198], использует язык орбифолда цепного квивера, который мы будем использовать далее.

В комплексных координатах орбифолд цепного квивера действует в пространстве-времени калибровочной теории как $\mathbb{C} \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z}_p)$, где $(z_1, z_2) \rightarrow (z_1, \omega z_2)$ с $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{p})$. p здесь представляет собой определяющую поверхностный дефект длину разбиения N . Сам поверхностный дефект расположен в $z_2 = 0$. Хотя основной интерес для нас представляет случай $N = p = 2$, мы обсудим для начала общий случай, а затем сфокусируемся на том, что нам нужно. Мы сформулируем результат для инстантонных статсумм несколько иным (но эквивалентным) способом [73] по сравнению с подходом в [198]. Наш подход близок к тому, что использовался в [202] для другого \mathbb{Z}_p орбифолда \mathbb{C}^2 , отвечающего A_{p-1} АЛЕ пространству. Орбифолд там действует как $(z_1, z_2) \rightarrow (\omega z_1, \omega^{-1} z_2)$ с $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{p})$.

Напомним сначала основные элементы конструкции ADHM пространства модулей инстантонов, а затем опишем, как орбифолд модифицирует это пространство, и, наконец, выразим инстантонную статсумму для $\mathcal{N}=2$ $SU(N)$ ка-

либровочной теории с наличием поверхностного дефекта в терминах цветных диаграмм Юнга [73].

Общее k -инстантонное решение в четырехмерной евклидовой $SU(N)$ теории дается с помощью конструкции ADHM в терминах матриц B_1, B_2, I, J с соответствующими размерностями $k \times k, k \times k, k \times N$ и $N \times k$. Вводя два векторных пространства V и W с $\dim_{\mathbb{C}} V = k$ и $\dim_{\mathbb{C}} W = N$, мы имеем $I \in \text{Hom}(V, W)$, $J \in \text{Hom}(W, V)$ и $B_{1,2} \in \text{End}(V)$. Эти матрицы удовлетворяют

$$[B_1, B_2] + IJ = 0. \quad (5.155)$$

Пространство модулей инстантонов $\mathcal{M}_N(k)$ является пространством $GL(k, \mathbb{C})$ калибровочных орбит в пространстве решений (5.155). $GL(k, \mathbb{C})$ калибровочное преобразование действует как

$$B_{1,2} \rightarrow GB_{1,2}G^{-1}, \quad I \rightarrow GI, \quad J \rightarrow JG^{-1}, \quad (5.156)$$

где $G \in GL(k, \mathbb{C})$.

Дополнительные ограничения на составляющие ADHM, налагаемые \mathbb{Z}_p орбиформом, кодируются в следующих уравнениях

$$\begin{aligned} B_1 &= \gamma B_1 \gamma^{-1}, & \omega B_2 &= \gamma B_2 \gamma^{-1}, \\ I &= \gamma I \Upsilon, & \omega J &= \Upsilon^\dagger J \gamma^{-1}, \end{aligned} \quad (5.157)$$

где $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{p})$, $\gamma \in GL(k)$ и $\Upsilon \in U(N)$. Заметим, что эта система согласуется с ограничением ADHM (5.155). Из (5.157) вытекает, что $\gamma^p = \mathbb{1}_k$ и $\Upsilon^p = \mathbb{1}_N$, и это позволяет взять в качестве γ и Υ диагональные матрицы со следующей структурой

$$\gamma = \left(\begin{array}{c|c|c} \omega \mathbb{1}_{k_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \omega^p \mathbb{1}_{k_p} \end{array} \right), \quad \Upsilon = \left(\begin{array}{c|c|c} \omega \mathbb{1}_{N_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \omega^p \mathbb{1}_{N_p} \end{array} \right), \quad (5.158)$$

где

$$\sum_{L=1}^p k_L = k, \quad \sum_{L=1}^p N_L = N. \quad (5.159)$$

Второе уравнение определяет разбиение⁵ N , указывающее на тип поверхностного дефекта.

Удобно ввести обозначение q_α , $\alpha \in 1, \dots, N$ для собственных значений Υ , так что $\Upsilon_{\alpha, \alpha'} = \omega^{q_\alpha} \delta_{\alpha, \alpha'}$. Каждая пара $(\{k_L\}, \{q_\alpha\})$ связана с некоторой компонентой связности пространства модулей. Обозначим соответствующую компоненту связности как $\mathcal{M}_{N,p}(\{k_L\}, \{q_\alpha\})$. Заметим, что если какой-либо из N_L равен нулю, то соответствующая компонента $\{q_\alpha\}$ не имеет непосредственной интерпретации поверхностного дефекта (мы вернемся к этому вопросу позже). Из уравнений (5.157) следует, что матрицы B_1, B_2 обладают блочной структурой. Например, из $[B_1, \gamma] = 0$ следует, что B_1 является блочно-диагональной с теми же размерами блоков, что и в матрице γ . Перечисляя блоки парами (L_1, L_2) , мы получим

$$B_1^{(L_1 L_2)} \sim \delta_{L_1, L_2}, \quad B_2^{(L_1 L_2)} \sim \delta_{L_1+1, L_2 \bmod p}. \quad (5.160)$$

Когда $p = 2$, $B_{1,2}$ являются блочными матрицами 2×2 , при этом B_1 – блочно-диагональной, а B_2 – блочно-оффдиагональной.

Далее мы опишем неподвижные точки векторного поля, индуцированного действием тора T на многообразии $\mathcal{M}_{N,p}(\{k_L\}, \{q_\alpha\})$

$$T : \quad B_1 \mapsto t_1 B_1; \quad B_2 \mapsto t_2 B_2; \quad I_{i\alpha} \mapsto I_{i\alpha} t_\alpha; \quad J_{\alpha i} \mapsto t_1 t_2 t_\alpha^{-1} J_{\alpha i}, \quad (5.161)$$

где $t_1 = e^{\epsilon_1}$, $t_2 = e^{\epsilon_2}$, $t_\alpha = e^{a_\alpha}$ и $\prod_{\alpha=1}^r t_\alpha = 1$. Утверждение, представляющее важное значение для нашего рассмотрения, состоит в том, что уравнения (5.157), определяющие орбиформ, фактически являются требованием симметрии относительно некоторого элемента тора, а именно: $t_1 = 1$, $t_2 = \omega$ и $t_\alpha = \Upsilon_{\alpha\alpha}$. Это означает, что в качестве альтернативы мы можем думать об орбиформинге как о действии следующего вида

$$a_\alpha \rightarrow a_\alpha + q_\alpha \frac{2\pi i}{p} \quad \epsilon_2 \rightarrow \epsilon_2 + \frac{2\pi i}{p} \quad \epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1. \quad (5.162)$$

Все неподвижные точки действия тора автоматически принадлежат \mathbb{Z}_p симметричному подпространству (5.157). Неподвижные точки действия тора (5.161)

⁵Точнее, оно определяет композицию N . Различные композиции, связанные с одним и тем же разбиением, отвечают одному и тому же поверхностному дефекту, но приводят к разным выражениям для инстантонных статсумм, см. [198] для обсуждения.

хорошо известны [45; 173] и перечисляются с помощью N -мерных диаграмм Юнга $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$.

Характер χ касательного пространства в неподвижной точке ($\chi = \sum_i \Lambda_i$, где Λ_i являются собственными значениями T) до орбиформинга дается как

$$\chi(t_1, t_2, e_\alpha) = -V^* V(t_1 - 1)(t_2 - 1) + W^* V + V^* W t_1 t_2, \quad (5.163)$$

где

$$V = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{j_\alpha=1}^{\ell_\alpha} \sum_{i_\alpha=1}^{\nu_{j_\alpha}} e^{a_\alpha} e^{-\epsilon_1(i_\alpha-1)} e^{-\epsilon_2(j_\alpha-1)}, \quad W = \sum_{\alpha=1}^N e^{a_\alpha}, \quad (5.164)$$

и верхний индекс $*$ означает изменение знака в показателях всех членов. Индексы i_α и j_α перечисляют строки и столбцы Y_α , ν_{j_α} обозначает число клеток в столбце j_α , а ℓ_α – количество столбцов. Характер (5.163) также может быть переписан в виде

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_{s_\alpha \in Y_\alpha} \left[e^{a_\alpha - a_\beta} e^{-\epsilon_1 L_\alpha(s_\alpha)} e^{\epsilon_2 (A_\beta(s_\alpha) + 1)} + e^{a_\beta - a_\alpha} e^{\epsilon_1 (L_\alpha(s_\alpha) + 1)} e^{-\epsilon_2 A_\beta(s_\alpha)} \right], \quad (5.165)$$

где $L_{Y_\beta}(s_\alpha)$, $A_{Y_\beta}(s_\alpha)$ являются факторами длин ноги и руки для клетки $s_\alpha \in Y_\alpha$ относительно диаграммы Юнга Y_β .

Для произвольного элемента $v = (\epsilon_1, \epsilon_2, a_\alpha)$ детерминант v на касательном пространстве $p_{\vec{Y}}$, получаемом из (5.165), имеет вид

$$\det v_r \Big|_{p_{\vec{Y}}} = \prod_{\alpha, \beta=1}^N \prod_{s_\alpha \in Y_\alpha} E_{Y_\alpha, Y_\beta}(a_\beta - a_\alpha | s_\alpha) (\epsilon - E_{Y_\alpha, Y_\beta}(a_\beta - a_\alpha | s_\alpha)), \quad (5.166)$$

где $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ и

$$E_{Y_\alpha, Y_\beta}(x | s_\alpha) = x + \epsilon_1 (L_{Y_\alpha}(s_\alpha) + 1) - \epsilon_2 A_{Y_\beta}(s_\alpha). \quad (5.167)$$

Опишем теперь эффект орбиформинга. Даже если все неподвижные точки являются такими же, как и до орбиформинга, касательное пространство, которое определяет детерминанты векторного поля, редуцируется дополнительными ограничениями (5.157). Из (5.162) мы видим, что клетка $(i, j) = (1, 1)$ диаграммы Y_α преобразуется в q_α -представление \mathbb{Z}_p ; мы называем $q_\alpha \in 0, \dots, p - 1$ цветом клетки. Цвет клеток в каждом столбце диаграммы

одинаков и отличается на 1 между соседними столбцами, как показано в следующем примере для $SU(2)$ и $p = 2$ с $q_1 = 0, q_2 = 1$:

$$Y_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & & \\ \hline 0 & & & \\ \hline \end{array} \quad Y_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & \\ \hline \end{array} \quad (5.168)$$

По сравнению с АЛЕ случаем [202] мы, таким образом, получаем полосатые диаграммы Юнга вместо клетчатых. Это естественно, поскольку строки и столбцы отвечают $\epsilon_{1,2}$, которые соответствуют $z_{1,2}$, и ввиду того, что орби́фолдинг цепного квивера действует только на z_2 , мы ожидаем окрашивания только в одном направлении. В то время как общее число клеток множества диаграмм \vec{Y} равняется топологическому заряду (числу инстантонов) k , количество клеток различных цветов определяет, какой компоненте связности пространства $\mathcal{M}_{N,p}(\{k_L\}, \{q_\alpha\})$ принадлежит заданная неподвижная точка. Точнее, k_L равняется общему числу клеток с цветом $L - 1$ (клетка с координатами (i, j) в диаграмме Юнга Y_α имеет цвет $(q_\alpha + j \bmod p)$). В приведенном выше примере $(Y_1, Y_2) \in \mathcal{M}_{2,2}(\{9, 8\}, \{0, 1\})$.

После орби́фолдинга следует оставлять только те собственные значения, которые отвечают частям характера, инвариантным относительно (5.162). Это приводит к

$$\det v_{N,p}(\{q_\alpha\}) \Big|_{p\vec{Y}} = \prod_{\alpha, \beta=1}^N \prod_{s_\alpha \in Y_{\alpha, \beta}^{(0)}} E_{Y_\alpha, Y_\beta}(a_\beta - a_\alpha | s_\alpha) \prod_{s_\alpha \in Y_{\alpha, \beta}^{(1)}} (\epsilon - E_{Y_\alpha, Y_\beta}(a_\beta - a_\alpha | s_\alpha)), \quad (5.169)$$

где $(g = 0, 1)$

$$Y_{\alpha, \beta}^{(g)} = \{s_\alpha \in Y_\alpha \mid q_\beta - q_\alpha - A_{Y_\beta}(s_\alpha) = g \bmod p\}. \quad (5.170)$$

Теперь мы можем сформулировать ответ для инстантонной статсуммы чистой $\mathcal{N} = 2$ $SU(N)$ калибровочной теории с поверхностным дефектом, соответствующим определенному разбиению, определяемому фиксированным набором

q_α . Она дается следующей суммой по диаграммам Юнга

$$\mathcal{Z}_{N,p}(\{q_\alpha\}) = \sum_{\vec{Y}} \frac{\prod_{L=1}^p y_L^{k_L}}{\prod_{\alpha,\beta=1}^N \prod_{s_\alpha \in Y_{\alpha,\beta}^{(0)}} E_{Y_\alpha, Y_\beta}(a_\beta - a_\alpha | s_\alpha) \prod_{s_\alpha \in Y_{\alpha,\beta}^{(1)}} (\epsilon - E_{Y_\alpha, Y_\beta}(a_\beta - a_\alpha | s_\alpha))}, \quad (5.171)$$

где $Y_{\alpha,\beta}^{(g)}$ определено в (5.170).

В качестве примера мы применим этот результат к $SU(2)$ случаю с поверхностным дефектом, определяемым разбиением $2 = 1 + 1$. Инстантонные числа k_1, k_2 даются следующим образом

$$\sum_{j=1} [(Y_1)_{2j-1} + (Y_2)_{2j}] = k_1, \quad \sum_{j=1} [(Y_1)_{2j} + (Y_2)_{2j-1}] = k_2, \quad (5.172)$$

где Y_j обозначает высоту столбца j в диаграмме Y . Инстантонная статсумма для $q_1 = 0$ (белый) и $q_2 = 1$ (черный) имеет вид

$$\mathcal{Z}_{2,2}(\{0,1\}) = \sum_{Y_1, Y_2} Z(Y_1, Y_2) y_1^{k_1} y_2^{k_2}, \quad (5.173)$$

где k_1, k_2 представляют собой количество белых и черных клеток и

$$\begin{aligned} Z^{-1}(Y_1, Y_2) = & \quad (5.174) \\ & \prod_{\substack{s_1 \in Y_1 \\ A(s_1) - \text{нечет.}}} E_{Y_1, Y_2}(-2a | s_1) (\epsilon - E_{Y_1, Y_1}(0 | s_1)) \prod_{\substack{s_1 \in Y_1 \\ A(s_1) - \text{чет.}}} E_{Y_1, Y_1}(0 | s_1) (\epsilon - E_{Y_1, Y_2}(-2a | s_1)) \\ & \times \prod_{\substack{s_\alpha \in Y_2 \\ A(s_2) - \text{нечет.}}} E_{Y_2, Y_1}(2a | s_2) (\epsilon - E_{Y_2, Y_2}(0 | s_2)) \prod_{\substack{s_2 \in Y_2 \\ A(s_2) - \text{чет.}}} E_{Y_2, Y_2}(0 | s_2) (\epsilon - E_{Y_2, Y_1}(2a | s_2)). \end{aligned}$$

Здесь, в соответствии с определением (5.167), факторы длины руки всегда вычисляются по отношению ко второй диаграмме в индексе функции E .

Результат (5.171) может быть согласован с выражениями в [197; 198; 201] переопределением переменных. Например, для $SU(2)$ с $1 + 1$ поверхностным дефектом следует сделать данные замены

$$\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_2/2, \quad \epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1, \quad a \rightarrow a + \epsilon_2/4. \quad (5.175)$$

Отметим, что при выборе, например, $N = p = 2$ и $q_1 = 1, q_2 = 1$ в (5.171), (5.170) приводит к хорошо определенному выражению, но не связанному напрямую с инстантонными статсуммами в [197; 198; 201]. Это будет играть роль в следующем разделе.

5.3.3 Комбинаторные выражения для $N=2$ блоков

В разделе 5.3.1 мы обнаружили, что (нерегулярные) $\mathcal{N} = 2$ суперконформные блоки связаны с аналитически продолженными (нерегулярными) $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ конформными блоками. Точнее, выражение при порядке z^N в $\mathcal{N} = 2$ блоке связано с точностью до множителя $M(n)$ с аналитическим продолжением по n выражения при порядке $x^{n+N}(z/x)^N$ (с очень большим n) в $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ блоке. Последнее выражение имеет дуальное описание с точки зрения калибровочной теории [56; 194], вытекающее из выражения при порядке $y_1^{n+N}y_2^N$ в инстантонной статсумме $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ калибровочной теории с поверхностным дефектом. Это означает, что нерегулярный конформный блок $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебры при порядке z^N может быть получен из $SU(2)$ инстантонной статсуммы с поверхностным дефектом при порядке $y_1^{n+N}y_2^N$ с помощью замены переменных, умножения на $M(n)$ и аналитического продолжения по n . Аналогичным образом, вклад при порядке $z^{N+\frac{1}{2}}$ в $\mathcal{N} = 2$ блоке может быть получен из $SU(2)$ инстантонной статсуммы с поверхностным дефектом при порядке $y_1^{n+N+1}y_2^N$ с помощью замены переменных, умножения на $M(n)$ и аналитического продолжения по n . Ниже мы приводим комбинаторные выражения для нерегулярных $\mathcal{N} = 2$ суперконформных блоков, которые получаются путем осуществления аналитического продолжения в $SU(2)$ инстантонной статсумме с поверхностным дефектом.

Как было показано выше, инстантонная статсумма $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ калибровочной теории с поверхностным дефектом при порядке $y_1^{n+s+N}y_2^N$ получается путем суммирования по неподвижным точкам, которые перечисляются парой диаграмм Юнга (Y_1, Y_2) с $k_1 = n+s+N$ и $k_2 = N$, где $k_{1,2}$ были даны в (5.172). Вклад от каждой неподвижной точки может быть определен по характеру, при-

веденному в (5.163), (5.164), при условии, что выживут лишь те члены, которые инвариантны относительно действия (5.162).

Теперь положим n очень большим. Учитывая вид $k_{1,2}$ (5.172), легко видеть, что первый столбец диаграммы Юнга Y_1 должен иметь высоту $n+s+r$, где $|r|$ много меньше n . Все остальные столбцы в Y_1 и Y_2 должны иметь высоту, меньшую чем $N+1$ (в противном случае k_2 стало бы очень большим). Y_1 без первого столбца также является диаграммой Юнга, которую мы обозначим как \tilde{Y}_1 . Мы также используем обозначение $\tilde{Y}_2 = Y_2$ и

$$\tilde{a}_1 = a_1 - \epsilon_2, \quad \tilde{a}_2 = a_2. \quad (5.176)$$

Отсюда следует, что \tilde{Y}_1 и \tilde{Y}_2 удовлетворяют следующим ограничениям

$$\sum_{j \geq 1} [(\tilde{Y}_1)_{2j-1} + (\tilde{Y}_2)_{2j-1}] = N, \quad \sum_{j \geq 1} [(\tilde{Y}_1)_{2j} + (\tilde{Y}_2)_{2j}] = N-r, \quad 0 \leq r \leq N, \quad (5.177)$$

где $(\tilde{Y})_j$ обозначает высоту столбца j в \tilde{Y} . Ограничения на r следуют из свойств диаграмм Юнга (таких как $(\tilde{Y})_j \geq (\tilde{Y})_{j+1}$).

Рассмотрим теперь характер (5.163). Разобьем V и V^* на часть (геометрическую сумму), которая включает в себя первый столбец в Y_1 , и часть, содержащую остальные члены:

$$\begin{aligned} V &= e^{a_1} \frac{t_1}{t_1 - 1} (1 - e^{-\epsilon_1(n+s+r)}) + \tilde{V}, \\ V^* &= -e^{-a_1} \frac{1}{t_1 - 1} (1 - e^{\epsilon_1(n+s+r)}) + \tilde{V}^*. \end{aligned} \quad (5.178)$$

Легко видеть, что \tilde{V} принимает точно такую же форму как и V (5.164), но с Y_α и a_α , замененными на \tilde{Y}_α и \tilde{a}_α . Подставляя разложения (5.178) в (5.163), мы находим

$$\chi(a, Y_1, Y_1) = \chi_{\tilde{M}(n)} + \tilde{\chi}(\tilde{a}, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, r), \quad (5.179)$$

где

$$\chi_{\tilde{M}(n)} = (1 + e^{\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1}) \sum_{i=1}^n e^{i \epsilon_1}, \quad (5.180)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\tilde{a}, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, r) = & -\tilde{V} \tilde{V}^*(t_1 - 1)(t_2 - 1) + \tilde{W}^* \tilde{V} + \tilde{V}^* \tilde{W} t_1 t_2 \\ & + \tilde{U}^* \tilde{V}(1 - t_2) + \tilde{V}^* \tilde{U}(t_1 t_2 - t_1) + \tilde{Z}, \end{aligned} \quad (5.181)$$

с

$$\tilde{Z} = (1 + e^{\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1}) e^{\epsilon_1 n} \sum_{i=1}^{r+s} e^{i \epsilon_1}, \quad \tilde{U} = e^{\tilde{a}_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1(n+s+r)}, \quad \tilde{W} = \sum_{\alpha=1}^2 e^{\tilde{a}_\alpha}. \quad (5.182)$$

Чтобы получить результат (5.181), мы опустили некоторые члены, не зависящие от \tilde{V} и \tilde{V}^* , которые не инвариантны относительно проекции орбифолда (5.162) и, следовательно, не дают вклада.

Напомним, что для получения результата для $\mathcal{N} = 2$ суперконформного блока на уровне $N + \frac{s}{2}$ ($s = 0, 1$) мы должны умножить коэффициент при порядке $x^{n+s+N} (z/x)^N$ в $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ блоке на $M(n)$ (5.154) и аналитически продолжить его по n . Множитель в инстантонной статсумме при порядке $y_1^{n+s+N} y_2^N$, возникающий от $\chi_{\tilde{M}(n)}$, просто сокращает умножение на $M(n)$, если используется отображение, данное в [56; 196] (с учетом (5.175) и (5.176))

$$\tilde{a}_1 = -\tilde{a}_2 = j + \frac{1}{2}, \quad 2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = -k - 2, \quad y_1 = -x, \quad y_2 = -\frac{z}{x}. \quad (5.183)$$

В частности, $(-1)^n$ в $M(n)$ сокращается при использовании соотношения между y_1 и x . В результате мы остаемся с вкладом, приходящим от характера (5.181). Поскольку от n в этом выражении зависят только \tilde{U} и \tilde{Z} и эта зависимость проста, аналитическое продолжение является тривиальным, состоящим просто в замене n на $j - \lambda$.

Результат (5.181) может быть еще упрощен. Заметим, что первая строка в (5.181) является просто характером (5.163), записанным в переменных \tilde{a} , и, следовательно, она может быть переписана в виде (5.165). Таким образом, мы получаем вклад того же вида, как в выражении (5.171) с (5.170). Однако, здесь есть существенная разница: поскольку первоначальные диаграммы Юнга Y_1 и Y_2 имели $q_1 = 0$ и $q_2 = 1$, \tilde{Y}_α будут иметь $q_1 = 1$ и $q_2 = 1$. Помимо этого, первая строка в (5.181) дает такой же вклад, как и для $SU(2)$ теории с поверхностным

дефектом, и $k_1 = N$, $k_2 = N - r$. Вклад от членов второй строки в (5.181) определяется легко.

Мы будем использовать обозначение $\langle W|W \rangle^{(s)}$, где $s = 0, 1$, для нормы состояния Уиттекера (т. е. нерегулярного блока). В обозначениях разделов 5.2.1 и 5.2.2 мы имеем $\langle W|W \rangle^{(0)} \equiv \langle W|W \rangle$ и $\langle W|W \rangle^{(1)} \equiv -\langle W|W \rangle^-$. Комбинаторный результат для $\langle W|W \rangle^{(s)}$ получается благодаря сведению всего вместе

$$\begin{aligned} \langle W|W \rangle^{(s)} &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, r} z^{(|\tilde{Y}_1| + |\tilde{Y}_2| + s + r)/2} \frac{1}{\epsilon_1^{2(r+s)} (-1)^{r+s} (n+1)_{r+s} (-\frac{2\tilde{a}}{\epsilon_1} + n+1)_{r+s}} \\ &\times \prod_{\alpha=1}^2 \prod_{s_\alpha \in \tilde{Y}_\alpha^{(0)}} \frac{F(\tilde{a}_\alpha - \tilde{a}_1 - \epsilon_2 + \epsilon_1(n+r+s-1)|s_\alpha)}{F(\tilde{a}_\alpha - \tilde{a}_1 - \epsilon_2 + \epsilon_1(n+r+s)|s_\alpha)} \prod_{s_\alpha \in \tilde{Y}_\alpha^{(1)}} \frac{F(\tilde{a}_\alpha - \tilde{a}_1 + \epsilon_1(n+r+s)|s_\alpha)}{F(\tilde{a}_\alpha - \tilde{a}_1 - 2\epsilon_2 + \epsilon_1(n+r+s-1)|s_\alpha)} \\ &\times \left[\prod_{\alpha, \beta=1}^2 \prod_{s_\alpha \in \tilde{Y}_{\alpha, \beta}^{(0)}} E_{\tilde{Y}_\alpha, \tilde{Y}_\beta}(\tilde{a}_\beta - \tilde{a}_\alpha | s_\alpha) \prod_{s_\alpha \in \tilde{Y}_{\alpha, \beta}^{(1)}} (\epsilon_1 + \epsilon_2 - E_{\tilde{Y}_\alpha, \tilde{Y}_\beta}(\tilde{a}_\beta - \tilde{a}_\alpha | s_\alpha)) \right]^{-1}, \quad (5.184) \end{aligned}$$

где сумма по $(r, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2)$ ограничена соотношениями (5.177),

$$\begin{aligned} F(x|s_\alpha) &= x - \epsilon_1(i_\alpha - 1) - \epsilon_2(j_\alpha - 1), \\ E_{\tilde{Y}_\alpha, \tilde{Y}_\beta}(x|s_\alpha) &= x + \epsilon_1(L_{\tilde{Y}_\alpha}(s_\alpha) + 1) - \epsilon_2 A_{\tilde{Y}_\beta}(s_\alpha), \end{aligned} \quad (5.185)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_\alpha^{(g)} &= \{s_\alpha = (i_\alpha, j_\alpha) \in \tilde{Y}_\alpha \mid j_\alpha = g \pmod{2}\}, \\ \tilde{Y}_{\alpha, \beta}^{(g)} &= \{s_\alpha \in \tilde{Y}_\alpha \mid A_{\tilde{Y}_\beta}(s_\alpha) = -g \pmod{2}\}. \end{aligned} \quad (5.186)$$

После использования соотношений

$$n = j - \lambda, \quad \tilde{a}_1 = -\tilde{a}_2 = j + \frac{1}{2}, \quad 2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = -k - 2, \quad (5.187)$$

наш результат (5.184) дает нерегулярные $\mathcal{N} = 2$ суперконформные блоки, записанные в терминах ослабленных $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ переменных. Чтобы перейти к $\mathcal{N} = 2$ переменным, необходимо использовать (5.135), (5.132) и (5.142).

Заметим, что в ослабленном $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ случае вышеприведенное выражение (5.184) также имеет смысл и для любого неотрицательного целого s , так что на

самом деле мы имеем вычисленную производящую функцию

$$Z_{\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{\text{rel}}}(x, z) = \sum_{s=0}^{\infty} \langle W|W \rangle^{(s)} x^s. \quad (5.188)$$

Завершая этот раздел, заметим, что поскольку связь между инстантонной статсуммой в $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ теории с поверхностным дефектом и ослабленными нерегулярными $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ блоками была доказана в [194] и поскольку мы определили отношения между нерегулярными $\mathcal{N} = 2$ и ослабленными $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ блоками, а также связали их с неослабленными нерегулярными $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ блоками, мы, таким образом, имеем полное доказательство представленного выше комбинаторного выражения.

5.4 АГТ и \mathcal{W}_N минимальные модели

Исходное АГТ соответствие является утверждением о том, что инстантонные статсуммы четырехмерных линейных и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий с циклическим $U(2)$ квивером с точностью до множителя Гейзенберга совпадают с Вирасоровскими конформными блоками на сфере и торе соответственно, с неминимальными центральными зарядами. Это соответствие было расширено на отождествление, также с точностью до множителя Гейзенберга, инстантонных статсумм в четырехмерных линейных и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теориях с циклическим $U(N)$ квивером с конформными блоками в \mathcal{W}_N конформных теориях поля ⁶ на сфере и торе с неминимальными центральными зарядами [54; 164; 204]. Последнее отождествление ограничивается классом \mathcal{W}_N конформных блоков с неминимальными центральными зарядами, который характеризуется условием, обсуждаемым в соответствующих работах Фатеевым и Литвиновым [205], а также Виллардом [54].

Рассмотрим \mathcal{W}_N конформный блок Тоды, состоящий из n последовательных каналов, связанный с коррелятором $(n + 3)$ \mathcal{W}_N вертексных операторов. Каждый вертексный оператор отвечает \mathcal{W}_N состоянию старшего веса,

⁶ Мы полагаем \mathcal{W}_N бесконечномерной алгеброй, порожденной киральными токами спина-2, \dots , спина- N , которая обозначается как $\mathcal{W}(2, 3, \dots, N)$ в работе [203].

которое характеризуется $(N - 1)$ -компонентным вектором заряда, определенным в A_{N-1} решетке весов, натянутой на фундаментальные весовые векторы $\{\vec{\omega}_1, \dots, \vec{\omega}_{N-1}\}$.

\mathcal{W}_N АГТ соответствие применимо к n -канальным \mathcal{W}_N конформным блокам, которые включают в себя $(n + 3)$ вертексных оператора, состоящих из \mathcal{W}_N множителя и множителя Гейзенберга, так что A_{N-1} вектор заряда двух из этих операторов может указывать в любом направлении A_{N-1} весовой решетки, а направление векторов заряда остальных $(n + 1)$ операторов ограничено лишь одним направлением $\vec{\omega}_1$, или направлением, связанным с $\vec{\omega}_1$ отражением Вейля. Далее мы называем это условие ФЛВ-условием.

Применение АГТ соответствия к \mathcal{W}_N конформным блокам, которое состоит в отождествлении $U(N)$ инстантонных статсумм с конформными блоками с точностью до множителей Гейзенберга, имеет определенный смысл для конформных теорий поля с неминимальными центральными зарядами.

Инстантонные статсуммы представляют собой суммы по произведениям рациональных функций параметров теории. Каждая сумма отвечает калибровочной группе в квиверной калибровочной теории. Члены в этих суммах параметризуются множеством всевозможных N -разбиений. И какие-либо ограничения на разбиения отсутствуют. С конформной стороны АГТ соответствия каждый член в сумме отвечает состоянию в модуле Верма алгебры $\mathcal{W}_N \times \mathcal{H}$, где \mathcal{H} – это алгебра Гейзенберга. Тот факт, что мы суммируем по всем возможным N -разбиениям, отвечает тому, что мы разрешаем всем возможным состояниям, проживающим в \mathcal{W}_N модуле Верма, протекать в каналах конформного блока.

Выбор параметров инстантонных статсумм, при котором с конформной стороны АГТ получаются минимальные модели, приводит к нулям в знаменателях инстантонных статсумм. Эти сингулярности являются нефизическими и могут быть отнесены к тому факту, что при суммировании по всем возможным состояниям в \mathcal{W}_N модулях, которые протекают по каналам конформных блоков, мы допускаем появление состояний, которые должны быть исключены.

Один из методов устранения этих нефизических сингулярностей состоит в обеспечении правил слияния на уровне инстантонных статсумм. Это требует того, чтобы мы аналитически продолжали инстантонные статсуммы таким способом, который сохраняет правила слияния, а затем показывали, что для каждого нуля в знаменателе слагаемого есть более высокий нулевой порядок в

числителе, так что соответствующее нулевое состояние исчезает в надлежащем пределе.

Далее мы следуем другому подходу. Он состоит в том, чтобы описать множества N -разбиений, которые приводят к нулевым состояниям, и исключить их из упомянутых сумм. Этот подход был использован для получения конформных блоков в Вирасоровских минимальных моделях в работах [75;206] и привел к хорошо определенным выражениям для минимальных конформных блоков. Предположение [75; 206] заключается в том, что эти выражения могут быть отождествлены с конформными блоками минимальных моделей с точностью до множителей Гейзенберга, что было проверено в ряде нетривиальных примеров. В этом разделе мы описываем расширение этого соответствия [75; 206] на $U(N)$ инстантонные статсуммы и \mathcal{W}_N минимальные конформные блоки.

Пусть $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p',\mathcal{H}}$ – конформный блок с n последовательными каналами χ_ι , $\iota = 1, \dots, n$ в конформной теории поля $\mathcal{M}_N^{p,p'} \times \mathcal{M}^{\mathcal{H}}$, где $\mathcal{M}_N^{p,p'}$ – это \mathcal{W}_N минимальная модель, генерируемая киральными токами спина-2, \dots , спина- N и характеризуемая двумя взаимно простыми числами p и p' , $1 < p < p'$, а $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$ – конформная теория поля свободного бозона. Нашей дальнейшей целью является описание модификации АГТ соотношений для $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p',\mathcal{H}}$.

5.4.1 \mathcal{W}_N алгебры и конформные теории поля

Напомним основные определения, связанные с \mathcal{W}_N алгебрами, а затем основные определения, связанные с \mathcal{W}_N конформными теориями поля.

\mathcal{W} алгебры представляют собой расширения алгебры Вирасоро, порожденные киральными полями высших спинов. Для всестороннего обзора см. [203]. Далее мы используем \mathcal{W}_N для указания бесконечномерной алгебры, порожденной киральными полями спина 2, 3, \dots , N , которая обозначается как $\mathcal{W}(2, 3, \dots, N)$ в работе [203].

Возьмем $\mathcal{M}_N \times \mathcal{M}^{\mathcal{H}}$ в качестве двумерной конформной теории поля, которая состоит из множителя \mathcal{M}_N , связанного с бесконечномерной \mathcal{W}_N алгеброй, и множителя $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$, связанного с алгеброй Гейзенберга \mathcal{H} . Нас будут интересовать минимальные модели $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_N^{p,p'}$.

Минимальная \mathcal{W}_N модель $\mathcal{M}_N^{p,p'}$ характеризуется двумя взаимно простыми целыми числами p и p' , $1 < p < p'$. Центральный заряд $c_N^{p,p'}$ модели $\mathcal{M}_N^{p,p'}$ имеет вид

$$c_N^{p,p'} = (N - 1) \left(1 - N(N + 1) \alpha_0^2 \right), \quad (5.189)$$

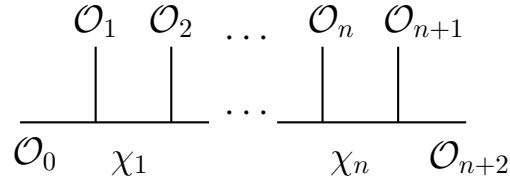
где α_0 – параметр фонового заряда

$$\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-, \quad (5.190)$$

а α_+ и α_- являются параметрами скрининга заряда

$$\alpha_+ = \left(\frac{p'}{p} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_- = - \left(\frac{p}{p'} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.191)$$

Мы интересуемся вычислением линейных конформных блоков $\mathcal{B}_N^{p,p'}$ в \mathcal{W}_N минимальных моделях $\mathcal{M}_N^{p,p'}$, которые схематически могут быть представлены так, как на рисунке



Конформный блок $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p'}$ представляет собой среднее значение $(n + 2)$ \mathcal{W}_N вертексных операторов \mathcal{O}_i , $i = 1, \dots, n + 1$, между начальным и конечным состояниями, так что состояния, протекающие в канале χ_ι , $\iota = 1, \dots, n$, между двумя последовательными вставками, принадлежат одному и только одному \mathcal{W}_N неприводимому представлению со старшим весом \mathcal{H}_ι . Далее мы укажем параметры, характеризующие вертексные операторы \mathcal{O}_i и представления со старшим весом χ_ι .

Вертексные операторы. Вертексный оператор \mathcal{O}_i модели $\mathcal{M}_N^{p,p'}$ характеризуется двумя наборами ненулевых положительных целых чисел $\vec{r} = \{r_1, \dots, r_{N-1}\}$ и $\vec{s} = \{s_1, \dots, s_{N-1}\}$, которые удовлетворяют

$$1 \leq \left(\sum_{i=1}^{N-1} r_i \right) \leq p, \quad 1 \leq \left(\sum_{i=1}^{N-1} s_i \right) \leq p'. \quad (5.192)$$

Полезно определить еще два ненулевых положительных целых числа r_N и s_N , таких, что

$$\sum_{i=1}^N r_i = p, \quad \sum_{i=1}^N s_i = p'. \quad (5.193)$$

Каждый оператор $\mathcal{O}_i(z_i)$ характеризуется вектором заряда $a_{\vec{r}_i \vec{s}_i}$, который имеет $(N - 1)$ компонент, параметризованных как

$$\vec{a}_{\vec{r}_i \vec{s}_i} = \sum_{i=1}^N \left((1 - r_i) \alpha_+ + (1 - s_i) \alpha_- \right) \vec{\omega}_i. \quad (5.194)$$

В сокращенной записи \mathcal{O}_i подразумевает $\mathcal{O}_{\vec{r}_i \vec{s}_i}(z_i)$. Начальное и конечное состояния отвечают вертексным операторам $\mathcal{O}_0(z_0)$ и $\mathcal{O}_{n+2}(z_{n+2})$. В качестве векторов заряда для $\mathcal{O}_0(z_0)$ и $\mathcal{O}_{n+2}(z_{n+2})$ мы берем произвольные векторы, а векторы заряда всех остальных вертексных операторов выбираются так, чтобы удовлетворить ФЛВ-условию

$$\vec{a}_{\vec{r}_i \vec{s}_i} = a_{r_1 s_1} \vec{\omega}_1 = \left((1 - r_1) \alpha_+ + (1 - s_1) \alpha_- \right) \vec{\omega}_1, \quad i = 1, \dots, n + 1. \quad (5.195)$$

Заряды состояний старшего веса, протекающих в каналах. На рисунке каналы χ_ι , $\iota = 1, \dots, n$, представлены внутренними отрезками. В \mathcal{W}_N минимальных моделях каждый канал χ_ι несет состояния, принадлежащие вырожденному \mathcal{W}_N неприводимому представлению со старшим весом $\mathcal{H}_{\vec{r}_\iota \vec{s}_\iota}^{p, p'}$. Каждое из этих представлений образовано состоянием старшего веса и бесконечным множеством потомков. Состояние старшего веса представления $\mathcal{H}_{\vec{r}_\iota \vec{s}_\iota}^{p, p'}$ характеризуется зарядом, протекающим между вертексным оператором в z_i и вертексным оператором в z_{i+1} , $i = 1, \dots, n$.

Конформные размерности. A_{N-1} вектор заряда $\vec{P}_{\vec{r} \vec{s}}$ вырожденного \mathcal{W}_N неприводимого представления со старшим весом $\mathcal{H}_{\vec{r} \vec{s}}^{p, p'}$ определяется как

$$\vec{P}_{\vec{r}\vec{s}} = - \sum_{i=1}^{N-1} \left(r_i \alpha_+ + s_i \alpha_- \right) \vec{\omega}_i, \quad (5.196)$$

где $\vec{\omega}_i$, $i = 1, \dots, N$, — A_{N-1} фундаментальные весовые векторы.

Конформная размерность $\Delta_{\vec{r}\vec{s}}$ вертексного оператора $\mathcal{O}_{\vec{r}\vec{s}}$, который переносит вектор заряда $\vec{P}_{\vec{r}\vec{s}}$, имеет вид

$$\Delta_{\vec{r}\vec{s}} = \frac{1}{2} \left(\vec{P}_{\vec{r}\vec{s}} + \alpha_0 \varrho \right) \cdot \left(\vec{P}_{\vec{r}\vec{s}} - \alpha_0 \varrho \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{P}_{\vec{r}\vec{s}}^2 - \alpha_0^2 \varrho^2 \right), \quad (5.197)$$

где произведение в среднем члене формулы (5.197) является скалярным произведением двух векторов, а \vec{P}^2 и ϱ^2 представляют собой квадраты норм вектора заряда \vec{P} и вектора Вейля ϱ ,

$$\varrho = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{\omega}_i. \quad (5.198)$$

Вырожденные представления со старшим весом получаются из соответствующих модулей Верма факторизацией по подмодулям, которые содержат состояния нулевой нормы и их потомков. Можно показать, что в представлении, ассоциированном с $\mathcal{O}_{\vec{r}\vec{s}}$, имеется $(N-1)$ состояний нулевой нормы с конформными размерностями $\Delta_{\vec{r}\vec{s}} + r_i s_i$, $i = 1, \dots, N-1$.

Следуя [42; 54], мы вводим вспомогательную теорию свободного бозона $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$, вычисляем конформные блоки $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p',\mathcal{H}}$ в $\mathcal{M}_N^{p,p'} \times \mathcal{M}^{\mathcal{H}}$, а затем факторизуем по вкладу Гейзенберга $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$, который известен. Перед тем как это сделать, нам необходимо вспомнить основные определения, связанные с $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p'}$.

Вертексные операторы в $\mathcal{M}_N^{p,p'}$. Вертексный оператор $\mathcal{O}_{\vec{r}\vec{s}}$ в $\mathcal{M}_N^{p,p'}$ представляется на операторном уровне как вертексный оператор. В представлении кулоновского газа \mathcal{W}_N минимальных моделей вертексный оператор представляется в виде экспоненты $(N-1)$ свободных бозонов, ϕ_i , $i = 1, \dots, N-1$, проживающих в A_{N-1} узловой решетке,

$$\mathcal{O}_{\vec{r},\vec{s}}(z) = e^{i\vec{a} \cdot \vec{\phi}(z)}, \quad \vec{a} = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \vec{\omega}_i, \quad \vec{\phi}(z) = \sum_{i=1}^{N-1} \phi_i(z) \vec{\alpha}_i, \quad (5.199)$$

где $\vec{\alpha}_i$ и $\vec{\omega}_i$, $i = 1, \dots, N - 1$, – это фундаментальные корни и веса A_{N-1} . Мы рассматриваем вертексные операторы, которые удовлетворяют ФЛВ-условию

$$\vec{a}_{FLW} = a_1 \vec{\omega}_1. \quad (5.200)$$

Вертексные операторы в $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$. Как будет видно далее, модификация \mathcal{W}_N АГТ-прескрипции, получаемая путем ограничения диаграмм Юнга, обеспечит нас хорошо определенными выражениями, которые мы отождествим с \mathcal{W}_N конформными блоками, удовлетворяющими ФЛВ-условию, в $\mathcal{M}_N^{p,p'} \times \mathcal{M}^{\mathcal{H}}$ конформных теориях поля. Данные конформные блоки представляют собой средние значения голоморфных вертексных операторов, состоящих из двух множителей. Один из множителей принадлежит $\mathcal{M}_N^{p,p'}$. Другой множитель принадлежит $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$ и имеет вид

$$\mathcal{O}^{\mathcal{H}}(z) = e^{i(\alpha_0 - \alpha_N) \phi_N^+(z)} e^{i\alpha_N \phi_N^-(z)}, \quad (5.201)$$

где ϕ_N^+ и ϕ_N^- являются вкладками положительных и отрицательных частот голоморфной компоненты N -го независимого свободного бозона ϕ_N . Данный вертексный оператор, в котором не возникает нулевой моды, впервые появился в работе [207] и далее был изучен в работе [16].

Конформные блоки в $\mathcal{M}_N^{p,p'} \times \mathcal{M}^{\mathcal{H}}$. Мы хотим вычислить $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p',\mathcal{H}}$. В этом случае каждый вертексный оператор является произведением двух вертексных операторов, $\mathcal{O}_l^{p,p'}(z_l) \times \mathcal{O}^{\mathcal{H}}(z_l)$, где $\mathcal{O}_l^{p,p'}(z_l)$ принадлежит $\mathcal{M}_N^{p,p'}$, а $\mathcal{O}^{\mathcal{H}}(z_l)$ принадлежит $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$, и заряд $\mathcal{O}^{\mathcal{H}}(z_l)$ полностью определяется зарядом $\mathcal{O}_l^{p,p'}(z_l)$ путем задания

$$\alpha_N = \alpha_1, \quad (5.202)$$

где α_1 является параметром заряда $\mathcal{O}_l^{p,p'}(z_l)$, как в уравнении (5.199), который удовлетворяет ФЛВ-условию, как в уравнении (5.200), а α_N – параметром заряда $\mathcal{O}^{\mathcal{H}}(z_l)$, как в уравнении (5.201).

Голоморфный линейный конформный блок, состоящий из n последовательных каналов, представляет собой среднее значение $(n + 3)$ голоморфных вертексных операторов в точках $z_i, i = 0, \dots, n + 3$,

$$\mathcal{B}_{N,n}^{p,p'} = \langle \mathcal{O}_{\vec{r}_0 \vec{s}_0}(z_0) \mathcal{O}_{r_1 s_1}(z_1) \cdots \mathcal{O}_{r_{n+1} s_{n+1}}(z_{n+1}) \mathcal{O}_{\vec{r}_{n+2} \vec{s}_{n+2}}(z_{n+2}) \rangle, \quad (5.203)$$

где вертексные операторы \mathcal{O}_{r_i, s_i} , $i = 1, \dots, n+1$, указаны ниже. Глобальная конформная инвариантность на сфере может быть использована для задания $z_0 = 0$, $z_{n+1} = 1$, $z_{n+2} = \infty$, а затем для скейлинга позиций остальных точек так, что

$$q_\iota = \frac{|z_\iota|}{|z_{\iota+1}|} < 1, \quad \iota = 1, \dots, n. \quad (5.204)$$

Конформный блок $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p',\mathcal{H}}$, который включает в себя вклад алгебры Гейзенберга, зависит от тех же параметров, что и $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p'}$. Эти два выражения связаны между собой следующим образом

$$\mathcal{B}_{N,n}^{p,p',\mathcal{H}} = \prod_{\iota=1}^n \prod_{l=\iota}^n \left(1 - q_\iota \cdots q_l \right)^{\frac{a_{\iota+1}(\alpha_0 - a_{l+2})}{N}} \mathcal{B}_{N,n}^{p,p'}, \quad (5.205)$$

где переменные q_ι , $\iota = 1, \dots, n$, были определены в (5.204), а a_ι являются сокращенными обозначениями для a_{r_ι, s_ι} . Коэффициент перед $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p'}$ в правой части (5.205) является множителем Гейзенберга.

5.4.2 \mathcal{W}_N АГТ соответствие

В этом разделе мы напомним основные определения, связанные с разбиениями, а затем обсудим \mathcal{W}_N АГТ соответствие.

Разбиение π целого числа $|\pi|$ представляет собой множество неотрицательных целых чисел $\{\pi_1, \dots, \pi_p\}$, где p является количеством частей, $\pi_i \geq \pi_{i+1}$ и $\sum_{i=1}^p \pi_i = |\pi|$. π изображается диаграммой Юнга Y , которая представляет собой набор из p строк $\{Y_1, \dots, Y_p\}$, таких, что \mathbb{R} -я строка имеет $Y_{\mathbb{R}} = \pi_{\mathbb{R}}$ клеток, $Y_{\mathbb{R}} \geq Y_{\mathbb{R}+1}$ и $|Y| = \sum_{\mathbb{R}} Y_{\mathbb{R}} = |\pi|$. Мы используем $Y_{\mathbb{R}}$ для обозначения \mathbb{R} -й строки, а также для числа клеток в этой строке. Y^T обозначает результат транспонирования Y .

Мы используем обозначение \square для клетки в диаграмме Юнга Y , которая представляет собой квадрат в юго-восточном квадранте плоскости с координатами $\{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$, так что \mathbf{R} является номером строки при счете сверху вниз, а \mathbf{C} – номером столбца при счете слева направо.

A_{\square, Y_i} представляет собой руку \square в Y_i , то есть число клеток в той же строке, но расположенных справа от \square в Y_i , а L_{\square, W_j} является ногой \square относительно ее положения в W_j , то есть число клеток в том же столбце, но расположенных ниже \square в Y_i . Определим $A_{\square, Y_i}^+ = A_{\square, Y_i} + 1$.

N -разбиения. АГТ представление $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p',\mathcal{H}}$ включает в себя мультисумму по $(n+2)$ N -разбиениям \vec{Y}^ι , $\iota = 0, \dots, n+1$, где \vec{Y}^ι представляет собой набор из N диаграмм Юнга $\{Y_1^\iota, \dots, Y_N^\iota\}$, а $|\vec{Y}^\iota| = |Y_1^\iota| + \dots + |Y_N^\iota|$ – это общее число клеток в \vec{Y}^ι . N -разбиения $\{Y_1^\iota, \dots, Y_N^\iota\}$, $\iota \in 1, \dots, n$, представляют собой непустые диаграммы Юнга, в то время как $\{Y_1^\iota, \dots, Y_N^\iota\}$, $\iota = 0, n+1$ являются пустыми, $\vec{Y}^{(0)} = \vec{Y}^{(n+1)} = \vec{\emptyset}$, где $\vec{\emptyset}$ является N -разбиением, состоящим из N пустых диаграмм Юнга.

АГТ соответствие [42], расширенное до $\mathcal{W}_N \oplus \mathcal{H}$ в работе [164] и [54], отождествляет класс конформных блоков в $\mathcal{M}_N^{non.min,\mathcal{H}}$, который мы укажем ниже, с инстантонными статсуммами в четырехмерных $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных квиверных $U(N)$ калибровочных теориях [45].

\mathcal{W}_N АГТ выражение для конформного блока $\mathcal{B}_{N,n}^{non.min,\mathcal{H}}$, который имеет n последовательных каналов χ_ι , $\iota = 1, \dots, n$, представляет собой n -кратную сумму⁷,

$$\mathcal{B}_{N,n}^{non.min,\mathcal{H}} = \sum_{\vec{Y}^1, \dots, \vec{Y}^n} \prod_{\iota=1}^{n+1} q_\iota^{|\vec{Y}^\iota|} Z_{bb}^\iota \left(\vec{P}_{(\iota-1)}, \vec{Y}^{\iota-1} \mid a_\iota \mid \vec{P}_{(\iota)}, \vec{Y}^\iota \right). \quad (5.206)$$

Каждый множитель Z_{bb}^ι является рациональной функцией, зависящей от двух N -разбиений *неограниченных* диаграмм Юнга $\{Y_1^{\iota-1}, \dots, Y_N^{\iota-1}\}$ и $\{Y_1^\iota, \dots, Y_N^\iota\}$. Знаменатель z_{den}^ι множителя Z_{bb}^ι представляет собой произведение норм состояний, протекающих в предшествующем канале $\chi^{\iota-1}$ и последующем канале χ^ι . Поскольку Z_{bb}^ι характеризуется неограниченными N -разбиениями, и суммы ве-

⁷ Напомним, что N -разбиения \vec{Y}^0 и \vec{Y}^{n+1} пусты.

дуются по всем возможным неограниченным N -разбиениям, состояния, которые протекают в каждом канале, принадлежат модулю Верма $\mathcal{W}_N^{non.min,\mathcal{H}}$.

Функция Z_{bb} имеет вид

$$Z_{bb} \left(\vec{a}, \vec{Y} \mid \mu \mid \vec{b}, \vec{W} \right) = \frac{z_{num} \left(\vec{a}, \vec{Y} \mid \mu \mid \vec{b}, \vec{W} \right)}{z_{den} \left(\vec{a}, \vec{Y} \mid \vec{b}, \vec{W} \right)}, \quad (5.207)$$

и содержит следующие ингредиенты. N -компонентный вектор $\vec{a}^\iota = \{a_1^\iota, \dots, a_N^\iota\}$ с $\sum_{i=1}^N a_i^\iota = 0$ представляет собой заряд состояния старшего веса \mathcal{W}_N неприводимого представления в промежуточном канале χ_ι . Каждое из двух множеств N -разбиений $\vec{V}^\iota = \{V_1^\iota, \dots, V_N^\iota\}$ и $\vec{W}^\iota = \{W_1^\iota, \dots, W_N^\iota\}$ перечисляет элементы специального ортогонального базиса в модуле Верма $\mathcal{M}_N \times \mathcal{M}^{\mathcal{H}}$, который связан с вертексным оператором в канале χ_ι . В формуле 5.206 \vec{Y} и \vec{W} относятся к отрезкам слева и справа от данной вершины соответственно. Скаляр μ^ι является зарядом вертексного оператора, который соединяет каналы χ_ι и $\chi_{\iota+1}$. Ингредиенты правой части (5.207) имеют следующий явный вид

$$z_{num} \left(\vec{a}, \vec{Y} \mid \mu \mid \vec{b}, \vec{W} \right) = \prod_{i,j=1}^N \prod_{\square \in Y_i} \left(E[a_i - b_j, Y_i, W_j, \square] - \mu \right) \prod_{\blacksquare \in W_j} \left(\epsilon_1 + \epsilon_2 - E[b_j - a_i, W_j, Y_i, \blacksquare] - \mu \right), \quad (5.208)$$

где элементарная функция $E[x, Y_i, W_j, \square]$ определяется как

$$E[x_{ij}, Y_i, W_j, \square] = x_{ij} + A_{\square, Y_i}^+ \epsilon_2 - L_{\square, W_j} \epsilon_1, \quad (5.209)$$

x_{ij} является переменной, а $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ – это комплексные параметры, связанные с центральным зарядом, который будет указан ниже. И знаменатель

$$z_{den} \left(\vec{a}, \vec{Y} \mid \vec{b}, \vec{W} \right) = \left(z_{norm} \left(\vec{a}, \vec{Y} \right) z_{norm} \left(\vec{b}, \vec{W} \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.210)$$

$$z_{norm} \left(\vec{a}, \vec{Y} \right) = z_{num} \left(\vec{a}, \vec{Y} \mid 0 \mid \vec{a}, \vec{Y} \right). \quad (5.211)$$

В калибровочной теории z_{norm} представляет собой коэффициент нормировки, связанный с вкладом векторных мультиплетов [42].

5.4.3 Минимальные модели и N -условия Берджа

Поскольку нас интересуют минимальные модели, удобно использовать параметры $\{\alpha_-, \alpha_+\}$, нежели параметры деформации Некрасова $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, положив

$$\alpha_- = \epsilon_1, \quad \alpha_+ = \epsilon_2, \quad (5.212)$$

где α_- и α_+ вещественны и удовлетворяют $\alpha_- < 0 < \alpha_+$. Мы пишем

$$E[x_i, x_j, Y_i, W_j, \square] = x_i - x_j + A_{\square, i}^+ \alpha_+ - L_{\square, j} \alpha_-. \quad (5.213)$$

Параметры x_i и x_j в (5.213) являются скалярными компонентами вектора параметров Кулона в калибровочной теории $\{x_1, \dots, x_N\}$, которые удовлетворяют $\sum_{i=1}^N x_i = 0$ и $A_{\square, i}^+ = A_{\square, i} + 1$. Мы связываем параметры Кулона с параметрами минимальной модели путем задания

$$x_i = x_i^+ \alpha_+ + x_i^- \alpha_-, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.214)$$

и следующего выбора

$$x_i^+ = - \sum_{j=1}^{N-1} \langle \vec{\omega}_j | \vec{h}_i \rangle r_j, \quad x_i^- = - \sum_{j=1}^{N-1} \langle \vec{\omega}_j | \vec{h}_i \rangle s_j, \quad (5.215)$$

где $\vec{\omega}_i$, $i = 1, \dots, N-1$, являются A_{N-1} фундаментальными весовыми векторами, \vec{h}_i , $i = 1, \dots, N-1$, – весовыми векторами первого фундаментального представления алгебры Ли A_{N-1} , а $\langle \vec{\omega}_j | \vec{h}_i \rangle$ – скалярным произведением векторов $\vec{\omega}_j$ и \vec{h}_i , которые рассматриваются как N -компонентные векторы на решетке весов A_{N-1} . Замечая, что $\vec{h}_i - \vec{h}_{i+1} = \vec{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, N-1$, где $\vec{\alpha}_i$ являются простыми корнями A_{N-1} , и что $\langle \vec{\omega}_i | \vec{\alpha}_j \rangle = \delta_{ij}$, где $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ для $i \neq j$, согласно вышеприведенным определениям мы можем написать

$$x_i^+ - x_{i+1}^+ = -r_i, \quad x_i^- - x_{i+1}^- = -s_i, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (5.216)$$

Рассмотрим знаменатель z_{den} функции Z_{bb} . Для нахождения нулей в z_{den} достаточно найти нули в $z_{norm}[\vec{x}, \vec{Y}]$, который определен в (5.211). Рассмотрим $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p',\mathcal{H}}$ и сосредоточимся на канале, который переносит состояния, принадлежащие вырожденному \mathcal{W}_n неприводимому представлению со старшим весом $\mathcal{H}_{r,s}^{p,p'}$, где p и p' взаимно просты, $0 < p < p'$, $r = r_1, \dots, r_{N-1}$ и $s = s_1, \dots, s_{N-1}$. Напомним, что мы также определяем $r_N = p - \sum_{i=1}^{N-1} r_i$ и $s_N = p' - \sum_{i=1}^{N-1} s_i$ и что $0 < r_i < p$ и $0 < s_i < p'$, $i = 1, \dots, N$.

Предложение 5.4.1. $z_{norm}[\vec{x}, \vec{Y}] \neq 0$, тогда и только тогда, когда

$$Y_{i+1, \mathbf{R}} - Y_{i, \mathbf{R}+s_i-1} \geq -r_i + 1, \quad (5.217)$$

где $Y_{i, \mathbf{R}}$ является \mathbf{R} -й строкой в Y_i , $i = 1, \dots, N$, r_i и s_i , $i = 1, \dots, N$, – это целые числа, параметризующие вырожденное \mathcal{W}_N неприводимое представление со старшим весом, которое протекает в рассматриваемом канале, $r_N = p - \sum_{i=1}^{N-1} r_i$ и $s_N = p' - \sum_{i=1}^{N-1} s_i$.

Доказательство предложения 5.4.1 получено в [76]. Условия (5.217) представляют собой специальный случай тех условий, которые были введены и изучены в работе [208]. N -разбиения, которые удовлетворяют таким условиям, называют в [208] *цилиндрическими разбиениями*. В такой специальной форме они появились в работе [209].

Таким образом, мы описали модифицированную версию \mathcal{W}_N АГТ соответствия, позволяющую вычислять конформные блоки $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p'} \mathcal{W}_N$ минимальных моделей. Мы стартовали из выражения для $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p',\mathcal{H}}$ в терминах сумм (5.206), каждая из которых содержит произведение строительных блоков Z_{bb}^l . Мы описали сингулярности в Z_{bb}^l , которые приводят к плохо определенным выражениям, и устранили эти состояния нулевой нормы путем ограничения N -разбиений, которые появляются в (5.206), на N -разбиения $\vec{Y} = \{Y_1, \dots, Y_N\}$, удовлетворяющие N -условиям Берджа

$$Y_{i, \mathbf{R}} - Y_{i+1, \mathbf{R}+s_i-1} \geq -r_i + 1, \quad (5.218)$$

где $Y_{i,R}$ является R -й строкой $Y_i, i = 1, \dots, N$, а r_i и s_i – это параметры, характеризующие \mathcal{W}_N неприводимый модуль со старшим весом в промежуточном канале конформного блока и удовлетворяющие условиям (5.193), и $Y_{N+1} = Y_1$. В полной общности они появились в работе [208] и [209]. Мы показали, что при ограничении АГТ для вычисления $\mathcal{B}_{N,n}^{p,p',\mathcal{H}}$ мы получаем выражения

$$\mathcal{B}_{N,n}^{p,p',\mathcal{H}} = \sum'_{\vec{Y}^1, \dots, \vec{Y}^n} \prod_{\ell=1}^{n+1} q_i^{|\vec{Y}^\ell|} Z_{bb}^\ell \left(\vec{P}_{\vec{r}_{i-1} \vec{s}_{i-1}}, \vec{Y}^{\ell-1} \mid a_{m_i n_i} \mid \vec{P}_{\vec{r}_i \vec{s}_i}, \vec{Y}^\ell \right), \quad (5.219)$$

где \sum' обозначает, что сумма ограничена на N -разбиения, удовлетворяющие N -условиям Берджа (5.218), которые мы отождествляем с конформными блоками \mathcal{W}_N минимальных моделей, помноженными на множители Гейзенберга.

Заключение

В заключении перечислим результаты, полученные в данной диссертации.

1. Разработан и обоснован метод вычисления конформных блоков суперсимметричной конформной теории. Получены рекуррентные соотношения для конформных блоков $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной конформной теории поля, рассматриваемых как функции центрального заряда. Для конформных блоков, рассматриваемых как функции конформных размерностей, получены эллиптические рекуррентные соотношения.
2. Предложен вывод структурных констант операторной алгебры в секторе Невье-Шварца $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной конформной теории поля, который позволяет рассматривать этот сектор независимо от сектора Рамона.
3. С помощью эллиптических рекуррентных соотношений для конформных блоков, а также явных выражений для супер-лиувиллевских структурных констант выполнена программа конформного бутстрапа в суперсимметричной теории поля Лиувилля. Это вычисление представляет собой доказательство самосогласованности конформного бутстрапа и гипотезы о структуре операторного разложения $\mathcal{N} = 1$ теории Лиувилля.
4. В контексте исследования массивных интегрируемых теорий, рассматриваемых как возмущения конформных теорий, развит метод конформной теории возмущений для вычисления корреляционных функций в возмущенных конформных теориях, обладающий свойством интегрируемости. Впервые предложен способ учета полей потомков в вычислении возмущенных структурных функций.
5. На уровне локальных полей и корреляционных функций установлено соответствие между методами конформной теории возмущений и подходом спектрального разложения, основанным на конструкции формфакторов локальных полей в интегрируемых массивных теориях с факторизованным рассеянием. Произведены численные исследования, показывающие, что построенное таким образом комбинированное описа-

- ние интегрируемых возмущений дает возможность вычисления корреляционных функций на всех масштабах.
6. В минимальной суперсимметричной теории гравитации Лиувилля получено соотношение между физическими БРСТ когомологиями с духовым зарядом $N_{gh} = 1$ и логарифмическими полями в суперсимметричной теории Лиувилля. Это соотношение выведено с помощью высших уравнений движения суперсимметричной теории Лиувилля, описывающей гравитационный сектор минимальной супергравитации. Получены высшие уравнения движения в конформной теории Лиувилля с границей. Как следствие, получено соотношение между физическими БРСТ когомологиями с $N_{gh} = 1$ и логарифмическими производными когомологий с $N_{gh} = 0$.
 7. Разработан метод вычисления корреляционных чисел в суперсимметричной теории минимальной гравитации Лиувилля. Задача вычисления интегралов по пространству модулей римановых поверхностей, входящих в определение корреляционных чисел, сведена к учету граничных членов, определяемых известными свойствами операторной алгебры теории.
 8. Развита метод вычислений в альтернативном подходе к минимальной теории некритической струны, основанном на струнном уравнении Дугласа. Путем использования связи струнного уравнения со структурой фробениусовых многообразий, найдено релевантное для минимальных моделей гравитации Лиувилля решение струнного уравнения Дугласа. Показано, что для нахождения решения струнного уравнения, обеспечивающего требуемые свойства корреляционных чисел, и для установления вида резонансных соотношений в общем случае минимальной (q,p) гравитации необходимо использовать плоские координаты на фробениусовом многообразии. Разработан метод вычисления плоских координат.
 9. Исходя из требования выполнения конформных правил отбора, которым подчиняются корреляционные числа теории, найден явный вид резонансного преобразования между константами связи теории Лиувилля и соответствующими параметрами, возникающими в альтернативном подходе.

10. Изучено представление производящей функции корреляционных чисел минимальной гравитации в общем (q,p) случае в виде тау-функции, соответствующей специальной интегрируемой иерархии. Эта конструкция включает в себя структурные константы фробениусовой алгебры. Получены явные выражения для структурных констант фробениусовых алгебр, связанных с минимальной гравитацией Лиувилля. Путем использования структурных констант и перехода к плоским координатам, получены явные выражения для корреляционных чисел в унитарной серии минимальных моделей гравитации Лиувилля.
11. В рамках исследования АГТ соответствия получены соотношения дuality между двумерной конформной теорией с $\mathcal{N} = 1$ суперконформной киральной алгеброй и специальным классом четырехмерных калибровочных теорий, определенных на орбифолде $\mathbb{R}_4/\mathbb{Z}_2$.
12. Установлено обобщение АГТ соответствия для класса конформных теорий, включающего суперсимметричные и W_N расширения конформной алгебры. С помощью найденного соответствия получено явное комбинаторное представление для конформных блоков $\mathcal{N} = 1$ и $\mathcal{N} = 2$ КфТП, а также минимальных моделей с W_N симметрией.

Список литературы

1. *Паташинский А. З . Покровский В. Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. — Москва: Наука, 1981.
2. *Kadanoff L. P.* Critical Behavior. Universality And Scaling // *Varenna 1970, Proceedings, Critical Phenomena, New York.* — 1971. — Pp. 100–117.
3. *Polyakov Alexander M.* Quantum Geometry of Bosonic Strings // *Phys. Lett.* — 1981. — Vol. B103. — Pp. 207–210.
4. *Belavin A. A., Polyakov Alexander M., Zamolodchikov A. B.* Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. B241. — Pp. 333–380.
5. *Witten Edward.* Nonabelian Bosonization in Two-Dimensions // *Commun. Math. Phys.* — 1984. — Vol. 92. — Pp. 455–472.
6. *Zamolodchikov A. B.* Infinite Additional Symmetries in Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory // *Theor. Math. Phys.* — 1985. — Vol. 65. — Pp. 1205–1213. — [Теор. Мат. Физ.65,347(1985)].
7. *Knizhnik V. G., Zamolodchikov A. B.* Current Algebra and Wess-Zumino Model in Two-Dimensions // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. B247. — Pp. 83–103.
8. *Kac V. G., Kazhdan D. A.* Structure of representations with highest weight of infinite dimensional Lie algebras // *Adv. Math.* — 1979. — Vol. 34. — Pp. 97–108.
9. *Feigin B. L., Fuks D. B.* Invariant skew symmetric differential operators on the line and verma modules over the Virasoro algebra // *Funct. Anal. Appl.* — 1982. — Vol. 16. — Pp. 114–126. — [Funkt. Anal. Pril.16,47(1982)].
10. *Goddard P., Olive David I.* Kac-Moody Algebras, Conformal Symmetry and Critical Exponents // *Nucl. Phys.* — 1985. — Vol. B257. — Pp. 226–252.
11. *Goddard Peter, Olive David I.* Kac-Moody and Virasoro Algebras in Relation to Quantum Physics // *Int. J. Mod. Phys.* — 1986. — Vol. A1. — P. 303.

12. *Zamolodchikov A. B.* Integrable field theory from conformal field theory // *Adv. Stud. Pure Math.* — 1989. — Vol. 19. — Pp. 641–674.
13. *Zamolodchikov A. B.* Two point correlation function in scaling Lee-Yang model // *Nucl. Phys.* — 1991. — Vol. B348. — Pp. 619–641.
14. *Guida Riccardo, Magnoli Nicodemo.* All order IR finite expansion for short distance behavior of massless theories perturbed by a relevant operator // *Nucl. Phys.* — 1996. — Vol. B471. — Pp. 361–388.
15. *Smirnov F. A.* Form-factors in completely integrable models of quantum field theory // *Adv. Ser. Math. Phys.* — 1992. — Vol. 14. — Pp. 1–208.
16. On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture / *Vasyl A. Alba, Vladimir A. Fateev, Alexey V. Litvinov, Grigory M. Tarnopolskiy* // *Lett. Math. Phys.* — 2011. — Vol. 98. — Pp. 33–64.
17. *Belavin A., Belavin V.* AGT conjecture and Integrable structure of Conformal field theory for $c=1$ // *Nucl. Phys.* — 2011. — Vol. B850. — Pp. 199–213.
18. *Polyakov Alexander M.* Quantum Geometry of Fermionic Strings // *Phys. Lett.* — 1981. — Vol. B103. — Pp. 211–213.
19. *Polyakov Alexander M.* Quantum Gravity in Two-Dimensions // *Mod. Phys. Lett.* — 1987. — Vol. A2. — P. 893.
20. *Knizhnik V. G., Polyakov Alexander M., Zamolodchikov A. B.* Fractal Structure of 2D Quantum Gravity // *Mod. Phys. Lett.* — 1988. — Vol. A3. — P. 819.
21. *Gross David J., Migdal Alexander A.* Nonperturbative Two-Dimensional Quantum Gravity // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 64. — P. 127.
22. *Kazakov V. A., Migdal Alexander A., Kostov I. K.* Critical Properties of Randomly Triangulated Planar Random Surfaces // *Phys. Lett.* — 1985. — Vol. B157. — Pp. 295–300.
23. *Kazakov V. A.* Ising model on a dynamical planar random lattice: Exact solution // *Phys. Lett.* — 1986. — Vol. A119. — Pp. 140–144.

24. *David F.* A Model of Random Surfaces with Nontrivial Critical Behavior // *Nucl. Phys.* — 1985. — Vol. B257. — Pp. 543–576.
25. *Douglas Michael R., Shenker Stephen H.* Strings in Less Than One-Dimension // *Nucl. Phys.* — 1990. — Vol. B335. — P. 635.
26. *Witten Edward.* Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space // *Surveys Diff. Geom.* — 1991. — Vol. 1. — Pp. 243–310.
27. *Kontsevich Maxim.* Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // *Comm. Math. Phys.* — 1992. — Vol. 147, no. 1. — Pp. 1–23. — URL: <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104250524>.
28. *Moore Gregory W., Seiberg Nathan, Staudacher Matthias.* From loops to states in 2-D quantum gravity // *Nucl. Phys.* — 1991. — Vol. B362. — Pp. 665–709.
29. *Zamolodchikov A.* Higher equations of motion in Liouville field theory // *Int. J. Mod. Phys.* — 2004. — Vol. A19S2. — Pp. 510–523.
30. *Belavin A. A., Zamolodchikov A. B.* Integrals over moduli spaces, ground ring, and four-point function in minimal Liouville gravity // *Theor. Math. Phys.* — 2006. — Vol. 147. — Pp. 729–754. — [Teor. Mat. Fiz.147,339(2006)].
31. *Belavin A. A., Zamolodchikov A. B.* On Correlation Numbers in 2D Minimal Gravity and Matrix Models // *J. Phys.* — 2009. — Vol. A42. — P. 304004.
32. *Belavin Alexander, Dubrovin Boris, Mukhametzhanov Baur.* Minimal Liouville Gravity correlation numbers from Douglas string equation // *JHEP.* — 2014. — Vol. 01. — P. 156.
33. *Dubrovin Boris.* Geometry of 2D topological field theories // Integrable Systems and Quantum Groups: Lectures given at the 1st Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993 / Ed. by Mauro Francaviglia, Silvio Greco. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1996. — Pp. 120–348. — URL: <https://doi.org/10.1007/BFb0094793>.
34. *van de Leur J.W., Martini R.* The Construction of Frobenius Manifolds from KP tau-Functions // *Communications in Mathematical Physics.* — 1999. —

- Sep. — Vol. 205, no. 3. — Pp. 587–616. — URL: <https://doi.org/10.1007/s002200050691>.
35. *Givental Alexander B.* Gromov - Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians // *Moscow Math. J.* — 2001. — Vol. 1, no. 4. — Pp. 551–568.
 36. *Feigin Evgeny.* N=1 formal genus 0 Gromov-Witten theories and Givental's formalism // *J. Geom. Phys.* — 2009. — Vol. 59. — Pp. 1127–1136.
 37. *Feigin Evgeny, van de Leur Johan, Shadrin Sergey.* Givental symmetries of Frobenius manifolds and multi-component KP tau-functions // *Advances in Mathematics.* — 2010. — Vol. 224, no. 3. — Pp. 1031 – 1056. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870809003879>.
 38. *Chekhov L., Eynard B.* Hermitean matrix model free energy: Feynman graph technique for all genera // *JHEP.* — 2006. — Vol. 03. — P. 014.
 39. *Chekhov Leonid, Eynard Bertrand, Orantin Nicolas.* Free energy topological expansion for the 2-matrix model // *JHEP.* — 2006. — Vol. 12. — P. 053.
 40. *Chekhov Leonid, Eynard Bertrand.* Matrix eigenvalue model: Feynman graph technique for all genera // *JHEP.* — 2006. — Vol. 12. — P. 026.
 41. *Eynard Bertrand, Orantin Nicolas.* Invariants of algebraic curves and topological expansion // *Commun. Num. Theor. Phys.* — 2007. — Vol. 1. — Pp. 347–452.
 42. *Alday Luis F., Gaiotto Davide, Tachikawa Yuji.* Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories // *Lett. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 91. — Pp. 167–197.
 43. *Seiberg N., Witten Edward.* Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD // *Nucl. Phys.* — 1994. — Vol. B431. — Pp. 484–550.
 44. *Seiberg N., Witten Edward.* Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory // *Nucl. Phys.* — 1994. — Vol. B426. — Pp. 19–52. — [Erratum: Nucl. Phys.B430,485(1994)].

45. *Nekrasov Nikita A.* Seiberg-Witten prepotential from instanton counting // *Adv. Theor. Math. Phys.* — 2003. — Vol. 7, no. 5. — Pp. 831–864.
46. *Nakajima Hiraku, Yoshioka Kota.* Instanton counting on blowup. 1. // *Invent. Math.* — 2005. — Vol. 162. — Pp. 313–355.
47. *Nekrasov Nikita, Okounkov Andrei.* Seiberg-Witten theory and random partitions // *Prog. Math.* — 2006. — Vol. 244. — Pp. 525–596.
48. *Braverman Alexander, Etingof Pavel.* Instanton counting via affine Lie algebras II: From Whittaker vectors to the Seiberg-Witten prepotential. — 2004.
49. *Nekrasov Nikita A., Shatashvili Samson L.* Supersymmetric vacua and Bethe ansatz // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* — 2009. — Vol. 192-193. — Pp. 91–112.
50. *Nekrasov Nikita A., Shatashvili Samson L.* Quantum integrability and supersymmetric vacua // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* — 2009. — Vol. 177. — Pp. 105–119.
51. *Dorn Harald, Otto H. J.* Two and three point functions in Liouville theory // *Nucl. Phys.* — 1994. — Vol. B429. — Pp. 375–388.
52. *Zamolodchikov Alexander B., Zamolodchikov Alexei B.* Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory // *Nucl. Phys.* — 1996. — Vol. B477. — Pp. 577–605.
53. *Maulik Daves, Okounkov Andrei.* Quantum Groups and Quantum Cohomology. — 2012.
54. *Wyllard Niclas.* $A(N-1)$ conformal Toda field theory correlation functions from conformal $N = 2$ $SU(N)$ quiver gauge theories // *JHEP.* — 2009. — Vol. 11. — P. 002.
55. *Marshakov A., Mironov A., Morozov A.* On non-conformal limit of the AGT relations // *Phys. Lett.* — 2009. — Vol. B682. — Pp. 125–129.
56. *Alday Luis F., Tachikawa Yuji.* Affine $SL(2)$ conformal blocks from 4d gauge theories // *Lett. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 94. — Pp. 87–114.

57. *Belavin V. A.* N=1 supersymmetric conformal block recursion relations // *Theor. Math. Phys.* — 2007. — Vol. 152. — Pp. 1275–1285. — [Teor. Mat. Fiz.152,476(2007)].
58. Bootstrap in Supersymmetric Liouville Field Theory. I. NS Sector / A. Belavin, V. Belavin, A. Neveu, Al. Zamolodchikov // *Nucl. Phys.* — 2007. — Vol. B784. — Pp. 202–233.
59. *Belavin V. A.* On the N=1 super Liouville four-point functions // *Nucl. Phys.* — 2008. — Vol. B798. — Pp. 423–442.
60. On correlation functions in the perturbed minimal models $M(2,2n+1)$ / A. A. Belavin, V. A. Belavin, A. V. Litvinov et al. // *Nucl. Phys.* — 2004. — Vol. B676. — Pp. 587–614.
61. *Belavin V. A., Miroshnichenko O. V.* Correlation functions of descendants in the scaling Lee-Yang model // *JETP Lett.* — 2005. — Vol. 82. — Pp. 679–684. — [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.82,775(2005)].
62. *Belavin A., Belavin V.* Four-point function in Super Liouville Gravity // *J. Phys.* — 2009. — Vol. A42. — P. 304003.
63. *Belavin V. A.* Modular Integrals in Minimal Super Liouville Gravity // *Theor. Math. Phys.* — 2009. — Vol. 161. — Pp. 1361–1375.
64. *Belavin V.* Torus Amplitudes in Minimal Liouville Gravity and Matrix Models // *Phys. Lett.* — 2011. — Vol. B698. — Pp. 86–90.
65. *Belavin A., Belavin V.* Higher Equations of Motion in Boundary Liouville Field Theory // *JHEP.* — 2010. — Vol. 02. — P. 010.
66. *Belavin V.* Unitary Minimal Liouville Gravity and Frobenius Manifolds // *JHEP.* — 2014. — Vol. 07. — P. 129.
67. *Belavin A. A., Belavin V. A.* Frobenius manifolds, Integrable Hierarchies and Minimal Liouville Gravity // *JHEP.* — 2014. — Vol. 09. — P. 151.
68. *Belavin V.* Correlation Functions in Unitary Minimal Liouville Gravity and Frobenius Manifolds // *JHEP.* — 2015. — Vol. 02. — P. 052.

69. *Belavin Alexander, Belavin Vladimir*. On exact solution of topological CFT models based on Kazama–Suzuki cosets // *J. Phys.* — 2016. — Vol. A49, no. 41. — P. 41LT02.
70. *Belavin Alexander, Belavin Vladimir*. Flat structures on the deformations of Gepner chiral rings // *JHEP*. — 2016. — Vol. 10. — P. 128.
71. *Belavin V., Feigin B.* Super Liouville conformal blocks from N=2 SU(2) quiver gauge theories // *JHEP*. — 2011. — Vol. 07. — P. 079.
72. *Belavin A., Belavin V., Bershtein M.* Instantons and 2d Superconformal field theory // *JHEP*. — 2011. — Vol. 09. — P. 117.
73. *Belavin V.* Conformal blocks of Chiral fields in N=2 SUSY CFT and Affine Laumon Spaces // *JHEP*. — 2012. — Vol. 10. — P. 156.
74. *Belavin V., Wyllard Niclas*. N=2 superconformal blocks and instanton partition functions // *JHEP*. — 2012. — Vol. 06. — P. 173.
75. *Alkalaev K. B., Belavin V. A.* Conformal blocks of W_N minimal models and AGT correspondence // *JHEP*. — 2014. — Vol. 07. — P. 024.
76. *Belavin Vladimir, Foda Omar, Santachiara Raoul*. AGT, N-Burge partitions and W_N minimal models // *JHEP*. — 2015. — Vol. 10. — P. 073.
77. *Zamolodchikov Alexei B.* Three-point function in the minimal Liouville gravity // *Theor. Math. Phys.* — 2005. — Vol. 142. — P. 183.
78. *Teschner J.* Liouville theory revisited // *Class. Quant. Grav.* — 2001. — Vol. 18. — Pp. R153–R222.
79. *Ginsparg Paul H., Moore Gregory W.* Lectures on 2-D gravity and 2-D string theory // Yale Univ. New Haven - YCTP-P23-92 (92,rec.Apr.93) 197 p. Los Alamos Nat. Lab. - LA-UR-92-3479 (92,rec.Apr.93) 197 p. e: LANL hep-th/9304011, In *Boulder 1992, Proceedings, Recent directions in particle theory* 277-469. and Yale Univ. New Haven - YCTP-P23-92 (92,rec.Apr.93) 197 p. and Los Alamos Nat. Lab. - LA-UR-92-3479 (92,rec.Apr.93) 197 p. — 1993. — URL: http://www.osti.gov/energycitations/product.biblio.jsp?osti_id=6917311.

80. *Di Francesco P., Ginsparg Paul H., Zinn-Justin Jean.* 2-D Gravity and random matrices // *Phys. Rept.* — 1995. — Vol. 254. — Pp. 1–133.
81. *Zamolodchikov A. B.* Conformal symmetry in two-dimensional space: an explicit recurrence formula for the conformal partial wave amplitude // *Commun. Math. Phys.* — 1984. — Vol. 96. — Pp. 419–422.
82. *Mussardo G., Sotkov G., Stanishkov H.* Fine Structure of the Supersymmetric Operator Product Expansion Algebras // *Nucl. Phys.* — 1988. — Vol. B305. — Pp. 69–108.
83. *Distler Jacques, Hlousek Zvonimir, Kawai Hikaru.* Superliouville Theory as a Two-Dimensional, Superconformal Supergravity Theory // *Int. J. Mod. Phys.* — 1990. — Vol. A5. — P. 391.
84. *Alvarez-Gaume Luis, Zaugg P.* Structure constants in the N=1 superoperator algebra // *Annals Phys.* — 1992. — Vol. 215. — Pp. 171–230.
85. *Poghossian R. H.* Structure constants in the N=1 superLiouville field theory // *Nucl. Phys.* — 1997. — Vol. B496. — Pp. 451–464.
86. *Neveu A., Schwarz J. H.* Factorizable dual model of pions // *Nucl. Phys.* — 1971. — Vol. B31. — Pp. 86–112.
87. *Ramond Pierre.* Dual Theory for Free Fermions // *Phys. Rev.* — 1971. — Vol. D3. — Pp. 2415–2418.
88. *Rashkov R. C., Stanishkov M.* Three point correlation functions in N=1 super-Liouville theory // *Phys. Lett.* — 1996. — Vol. B380. — Pp. 49–58.
89. *Fukuda Takeshi, Hosomichi Kazuo.* Super Liouville theory with boundary // *Nucl. Phys.* — 2002. — Vol. B635. — Pp. 215–254.
90. *Hadasz Leszek, Jaskolski Zbigniew, Suchanek Paulina.* Recursion representation of the Neveu-Schwarz superconformal block // *JHEP.* — 2007. — Vol. 03. — P. 032.
91. *Zamolodchikov A. B.* Conformal symmetry in two-dimensional space: recursion representation of conformal block // *Theor. Math. Phys.* — 1987. — Vol. 73. — P. 1088.

92. *Ponsot B., Tschner J.* Liouville bootstrap via harmonic analysis on a non-compact quantum group. — 1999. — hep-th/9911110.
93. *Fateev V., Zamolodchikov Alexander B., Zamolodchikov Alexei B.* Boundary Liouville field theory. 1. Boundary state and boundary two point function. — 2000. — hep-th/0001012.
94. *Dotsenko V. S., Fateev V. A.* Conformal Algebra and Multipoint Correlation Functions in Two-Dimensional Statistical Models // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. B240. — P. 312.
95. *Dotsenko V. S., Fateev V. A.* Four Point Correlation Functions and the Operator Algebra in the Two-Dimensional Conformal Invariant Theories with the Central Charge $c < 1$ // *Nucl. Phys.* — 1985. — Vol. B251. — Pp. 691–734.
96. *Tschner Jorg.* On the Liouville three point function // *Phys. Lett.* — 1995. — Vol. B363. — Pp. 65–70.
97. *Kac V.* Infinite-dimensional Lie algebras // *Prog. Math., Birkhauser, Boston.* — 1984. — Vol. 44.
98. *Belavin A., Zamolodchikov Al.* Higher equations of motion in $N = 1$ SUSY Liouville field theory // *JETP Lett.* — 2006. — Vol. 84. — Pp. 418–424.
99. Spin spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: Exact theory in the scaling region / Tai Tsun Wu, Barry M. McCoy, Craig A. Tracy, Eytan Barouch // *Phys. Rev.* — 1976. — Vol. B13. — Pp. 316–374.
100. *Sato Mikio, Miwa Tetsuji, Jimbo Michio.* Studies on Holonomic Quantum Fields. 1. // *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto.* — 1978. — Vol. 14. — Pp. 223–267.
101. *Sato Mikio, Miwa Tetsuji, Jimbo Michio.* HOLONOMIC QUANTUM FIELDS. 4. // *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto.* — 1979. — Vol. 15. — Pp. 871–972.
102. *Sato Mikio, Miwa Tetsuji, Jimbo Michio.* HOLONOMIC QUANTUM FIELDS. 5. // *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto.* — 1980. — Vol. 16. — Pp. 531–584.

103. *Andrews G. E., Baxter R. J., Forrester P. J.* Eight vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan type identities // *J. Statist. Phys.* — 1984. — Vol. 35. — Pp. 193–266.
104. *Zamolodchikov Alexei B.* Mass scale in the sine-Gordon model and its reductions // *Int. J. Mod. Phys.* — 1995. — Vol. A10. — Pp. 1125–1150.
105. *Lukyanov Sergei L., Zamolodchikov Alexander B.* Exact expectation values of local fields in quantum sine-Gordon model // *Nucl. Phys.* — 1997. — Vol. B493. — Pp. 571–587.
106. Expectation values of local fields in Bullough-Dodd model and integrable perturbed conformal field theories / Vladimir Fateev, Sergei L. Lukyanov, Alexander B. Zamolodchikov, Alexei B. Zamolodchikov // *Nucl. Phys.* — 1998. — Vol. B516. — Pp. 652–674.
107. *Smirnov F. A.* Reductions of the sine-Gordon model as a perturbation of minimal models of conformal field theory // *Nucl. Phys.* — 1990. — Vol. B337. — Pp. 156–180.
108. *LeClair Andre.* Restricted Sine-Gordon Theory and the Minimal Conformal Series // *Phys. Lett.* — 1989. — Vol. B230. — Pp. 103–107.
109. *Bazhanov V. V., Reshetikhin N. Yu.* Scattering amplitudes in off critical models and RSOS integrable models // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* — 1990. — Vol. 102. — Pp. 301–318.
110. *Karowski M., Weisz P.* Exact Form-Factors in (1+1)-Dimensional Field Theoretic Models with Soliton Behavior // *Nucl. Phys.* — 1978. — Vol. B139. — Pp. 455–476.
111. *Mussardo Giuseppe.* Off critical statistical models: Factorized scattering theories and bootstrap program // *Phys. Rept.* — 1992. — Vol. 218. — Pp. 215–379.
112. *Koubek A.* Form-factor bootstrap and the operator content of perturbed minimal models // *Nucl. Phys.* — 1994. — Vol. B428. — Pp. 655–680.
113. *Koubek A., Mussardo G.* On the operator content of the sinh-Gordon model // *Phys. Lett.* — 1993. — Vol. B311. — Pp. 193–201.

114. *Freund P. G. O., Klassen T. R., Melzer E.* S Matrices for Perturbations of Certain Conformal Field Theories // *Phys. Lett.* — 1989. — Vol. B229. — Pp. 243–247.
115. *Lukyanov Sergei L.* Form-factors of exponential fields in the Sine-Gordon model // *Mod. Phys. Lett.* — 1997. — Vol. A12. — Pp. 2543–2550.
116. *Delfino Gesualdo, Niccoli Giuliano.* Matrix elements of the operator $T \bar{T}$ in integrable quantum field theory // *Nucl. Phys.* — 2005. — Vol. B707. — Pp. 381–404.
117. *Zamolodchikov Alexander B.* Expectation value of composite field $T \bar{T}$ in two-dimensional quantum field theory. — 2004.
118. *Zamolodchikov A. B.* Thermodynamic Bethe Ansatz in Relativistic Models. Scaling Three State Potts and Lee-yang Models // *Nucl. Phys.* — 1990. — Vol. B342. — Pp. 695–720.
119. *David F.* Conformal Field Theories Coupled to 2D Gravity in the Conformal Gauge // *Mod. Phys. Lett.* — 1988. — Vol. A3. — P. 1651.
120. *Hadasz Leszek, Jaskolski Zbigniew, Suchanek Paulina.* Elliptic recurrence representation of the $N = 1$ Neveu-Schwarz blocks // *Nucl. Phys.* — 2008. — Vol. B798. — Pp. 363–378.
121. *Hadasz Leszek, Jaskolski Zbigniew, Suchanek Paulina.* Elliptic recurrence representation of the $N=1$ superconformal blocks in the Ramond sector // *JHEP.* — 2008. — Vol. 11. — P. 060.
122. *Polchinski J.* String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond. — Cambridge University Press, 2007.
123. *Klebanov Igor R., Polyakov Alexander M.* Interaction of discrete states in two-dimensional string theory // *Mod. Phys. Lett.* — 1991. — Vol. A6. — Pp. 3273–3281.
124. *Witten Edward.* Ground ring of two-dimensional string theory // *Nucl. Phys.* — 1992. — Vol. B373. — Pp. 187–213.

125. *Belavin A., Tarnopolsky G.* Two dimensional gravity in genus one in Matrix Models, Topological and Liouville approaches // *JETP Lett.* — 2010. — Vol. 92. — Pp. 257–267.
126. *Polchinski J.* String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string. — Cambridge University Press, 2007.
127. *Fateev V. A., Litvinov A. V.* On AGT conjecture // *JHEP.* — 2010. — Vol. 02. — P. 014.
128. *Poghossian Rubik.* Recursion relations in CFT and N=2 SYM theory // *JHEP.* — 2009. — Vol. 12. — P. 038.
129. *Di Francesco P., Mathieu P., Senechal D.* Conformal Field Theory. Graduate Texts in Contemporary Physics. — New York: Springer-Verlag, 1997. — URL: <http://www-spires.fnal.gov/spires/find/books/www?cl=QC174.52.C66D5::1997>.
130. *Bershadsky Michael, Klebanov Igor R.* Genus one path integral in two-dimensional quantum gravity // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 65. — Pp. 3088–3091.
131. *Goulian M., Li Miao.* Correlation functions in Liouville theory // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Vol. 66. — Pp. 2051–2055.
132. *Di Francesco P., Kutasov D.* World sheet and space-time physics in two-dimensional (Super)string theory // *Nucl. Phys.* — 1992. — Vol. B375. — Pp. 119–170.
133. *Cardy John L.* Conformal Invariance and Surface Critical Behavior // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. B240. — Pp. 514–532.
134. *Hosomichi Kazuo.* Bulk boundary propagator in Liouville theory on a disc // *JHEP.* — 2001. — Vol. 11. — P. 044.
135. *Ponsot B., Tschner J.* Boundary Liouville field theory: Boundary three point function // *Nucl. Phys.* — 2002. — Vol. B622. — Pp. 309–327.
136. *Hosomichi Kazuo.* Minimal Open Strings // *JHEP.* — 2008. — Vol. 06. — P. 029.

137. *Kutasov David, Martinec Emil J., Seiberg Nathan.* Ground rings and their modules in 2-D gravity with $c \leq 1$ matter // *Phys. Lett.* — 1992. — Vol. B276. — Pp. 437–444.
138. *Douglas Michael R.* Strings in Less Than One-dimension and the Generalized K^-D^-V Hierarchies // *Phys. Lett.* — 1990. — Vol. B238. — P. 176.
139. *Kazakov V. A.* The Appearance of Matter Fields from Quantum Fluctuations of 2D Gravity // *Mod. Phys. Lett.* — 1989. — Vol. A4. — P. 2125.
140. *Staudacher Matthias.* The Yang-lee Edge Singularity on a Dynamical Planar Random Surface // *Nucl. Phys.* — 1990. — Vol. B336. — P. 349.
141. *Brezin E., Kazakov V. A.* Exactly Solvable Field Theories of Closed Strings // *Phys. Lett.* — 1990. — Vol. B236. — Pp. 144–150.
142. *Spodyneiko Lev.* Minimal Liouville gravity on the torus via the Douglas string equation // *J. Phys.* — 2015. — Vol. A48, no. 6. — P. 065401.
143. *Krichever I.* The Dispersionless Lax equations and topological minimal models // *Commun. Math. Phys.* — 1992. — Vol. 143. — Pp. 415–429.
144. *Dubrovin B.* Integrable systems in topological field theory // *Nucl. Phys.* — 1992. — Vol. B379. — Pp. 627–689.
145. *Dijkgraaf Robbert, Verlinde Herman L., Verlinde Erik P.* Topological strings in $d < 1$ // *Nucl. Phys.* — 1991. — Vol. B352. — Pp. 59–86.
146. (p, q) STRING ACTIONS / Paul H. Ginsparg, M. Goulian, M. R. Plesser, Jean Zinn-Justin // *Nucl. Phys.* — 1990. — Vol. B342. — Pp. 539–563.
147. *Saito K.* Period mapping associated to a primitive form // *Publ.Res.Inst.Math.Sci.Kyoto.* — 1983. — Vol. 19. — Pp. 1231–1264.
148. *Arnold V., Gusein-Zade S., Varchenko A.* Singularities of Differentiable Maps // *Birkhäuser.* — 1988. — Vol. Volume II: Monodromy and Asymptotic Integrals.
149. *Lerche W., Vafa C., Warner N.* Chiral rings in $N = 2$ superconformal theories // *Nucl. Phys.* — 1989. — Vol. B234. — P. 427.

150. *Martinec Emil J.* Algebraic Geometry and Effective Lagrangians // *Phys. Lett.* — 1989. — Vol. B217. — Pp. 431–437.
151. *Kazama Yoichi, Suzuki Hisao.* New N=2 Superconformal Field Theories and Superstring Compactification // *Nucl. Phys.* — 1989. — Vol. B321. — Pp. 232–268.
152. *Gepner Doron.* Space-Time Supersymmetry in Compactified String Theory and Superconformal Models // *Nucl. Phys.* — 1988. — Vol. B296. — P. 757.
153. *Gepner Doron.* Scalar Field Theory and String Compactification // *Nucl. Phys.* — 1989. — Vol. B322. — Pp. 65–81.
154. Vacuum Configurations for Superstrings / P. Candelas, Gary T. Horowitz, Andrew Strominger, Edward Witten // *Nucl. Phys.* — 1985. — Vol. B258. — Pp. 46–74.
155. *Witten Edward.* Topological Quantum Field Theory // *Commun. Math. Phys.* — 1988. — Vol. 117. — P. 353.
156. A Pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory / Philip Candelas, Xenia C. De La Ossa, Paul S. Green, Linda Parkes // *Nucl. Phys.* — 1991. — Vol. B359. — Pp. 21–74.
157. Periods for Calabi-Yau and Landau-Ginzburg vacua / Per Berglund, Philip Candelas, Xenia De La Ossa et al. // *Nucl. Phys.* — 1994. — Vol. B419. — Pp. 352–403.
158. *Gepner Doron.* Fusion rings and geometry // *Commun. Math. Phys.* — 1991. — Vol. 141. — Pp. 381–411.
159. *Noumi M.* Expansion of the Solutions of a Gauss-Manin System at a Point of Infinity // *Tokyo J. of Math.* — 1984. — Vol. 7. — Pp. 1–60.
160. *Blok B., Varchenko A.* Topological conformal field theories and the flat coordinates // *Int.J.Mod.Phys.* — 1992. — Vol. 7. — Pp. 1467–1490.
161. *Losev A.* 'Hodge strings' and elements of K. Saito's theory of the primitive form // Topological field theory, primitive forms and related topics. Proceedings, 38th Taniguchi Symposium, Kyoto, Japan, December 9-13, 1996

- and RIMS Symposium, Kyoto, Japan, December 16-19, 1996. — 1998. — Pp. 305–335. — URL: <http://alice.cern.ch/format/showfull?sysnb=0268126>.
162. *Belavin Alexander, Gepner Doron, Kononov Yakov*. Flat coordinates for Saito Frobenius manifolds and String theory. — 2015.
163. *Saito M*. On the structure of Brieskorn lattice // *Annales Inst.Fourier*. — 1989. — Vol. 39. — Pp. 27–72.
164. *Mironov A., Morozov A*. On AGT relation in the case of $U(3)$ // *Nucl. Phys.* — 2010. — Vol. B825. — Pp. 1–37.
165. *Taki Masato*. On AGT Conjecture for Pure Super Yang-Mills and W-algebra // *JHEP*. — 2011. — Vol. 05. — P. 038.
166. *Lusztig G*. Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras // *J. Amer. Math. Soc.* 4. — 1991. — Vol. 2. — Pp. 365–421.
167. *Nakajima Hiraku*. Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras // *Duke Math. J.* — 1994. — 11. — Vol. 76, no. 2. — Pp. 365–416. — URL: <http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-94-07613-8>.
168. *Nakajima Hiraku, Yoshioka Kota*. Instanton counting on blowup. II. K-theoretic partition function. — 2005.
169. *Feigin B. L., Tsybaliuk A. I*. Equivariant K -theory of Hilbert schemes via shuffle algebra // *Kyoto J. Math.* — 2011. — Vol. 51, no. 4. — Pp. 831–854. — URL: <http://dx.doi.org/10.1215/21562261-1424875>.
170. *Nagao Kentaro*. K-theory of quiver varieties, q-Fock space and nonsymmetric Macdonald polynomials // *Osaka J. Math.* — 2009. — 09. — Vol. 46, no. 3. — Pp. 877–907. — URL: <http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1256564211>.
171. *Gaiotto Davide*. Asymptotically free $\mathcal{N} = 2$ theories and irregular conformal blocks // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2013. — Vol. 462, no. 1. — P. 012014.
172. *Kostant Bertram*. On Whittaker Vectors and Representation Theory. // *Inventiones mathematicae*. — 1978. — Vol. 48. — Pp. 101–184. — URL: <http://eudml.org/doc/142586>.

173. *Flume R., Poghossian R.* An Algorithm for the microscopic evaluation of the coefficients of the Seiberg-Witten prepotential // *Int. J. Mod. Phys.* — 2003. — Vol. A18. — P. 2541.
174. *Bismut J. M.* Localization formulas, superconnections, and the index theorem for families // *Commun. Math. Phys.* — 1986. — Vol. 103, no. 1. — Pp. 127–166.
175. Construction of Instantons / M. F. Atiyah, Nigel J. Hitchin, V. G. Drinfeld, Yu. I. Manin // *Phys. Lett.* — 1978. — Vol. A65. — Pp. 185–187.
176. Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations / A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin // *Phys. Lett.* — 1975. — Vol. B59. — Pp. 85–87.
177. *Belavin A. A., Zakharov V. E.* Yang-Mills Equations as Inverse Scattering Problem // *Phys. Lett.* — 1978. — Vol. B73. — Pp. 53–57.
178. *Atiyah M. F., Ward R. S.* Instantons and Algebraic Geometry // *Commun. Math. Phys.* — 1977. — Vol. 55. — Pp. 117–124.
179. The Calculus of many instantons / Nick Dorey, Timothy J. Hollowood, Valentin V. Khoze, Michael P. Mattis // *Phys. Rept.* — 2002. — Vol. 371. — Pp. 231–459.
180. *Kuznetsov A.* Quiver varieties and Hilbert schemes // *Mosc. Math. J.* — 2007. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 673–697.
181. *Ademollo M. et al.* Supersymmetric Strings and Color Confinement // *Phys. Lett.* — 1976. — Vol. B62. — Pp. 105–110.
182. *Moore Gregory W., Nekrasov Nikita, Shatashvili Samson.* Integrating over Higgs branches // *Commun. Math. Phys.* — 2000. — Vol. 209. — Pp. 97–121.
183. *Lossev A., Nekrasov N., Shatashvili Samson L.* Testing Seiberg-Witten solution // Strings, branes and dualities. Proceedings, NATO Advanced Study Institute, Cargese, France, May 26-June 14, 1997. — 1997. — Pp. 359–372. — URL: <http://alice.cern.ch/format/showfull?sysnb=0266564>.
184. *Nishioka Tatsuma, Tachikawa Yuji.* Central charges of para-Liouville and Toda theories from M-5-branes // *Phys. Rev.* — 2011. — Vol. D84. — P. 046009.

185. *Bonelli Giulio, Maruyoshi Kazunobu, Tanzini Alessandro.* Instantons on ALE spaces and Super Liouville Conformal Field Theories // *JHEP.* — 2011. — Vol. 08. — P. 056.
186. *Bonelli Giulio, Maruyoshi Kazunobu, Tanzini Alessandro.* Gauge Theories on ALE Space and Super Liouville Correlation Functions // *Lett. Math. Phys.* — 2012. — Vol. 101. — Pp. 103–124.
187. *Wyllard Niclas.* Coset conformal blocks and N=2 gauge theories. — 2011.
188. *Ito Yuto.* Ramond sector of super Liouville theory from instantons on an ALE space // *Nucl. Phys.* — 2012. — Vol. B861. — Pp. 387–402.
189. *Alfimov M. N., Tarnopolsky G. M.* Parafermionic Liouville field theory and instantons on ALE spaces // *JHEP.* — 2012. — Vol. 02. — P. 036.
190. Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory / A. A. Belavin, M. A. Bershtein, B. L. Feigin et al. // *Commun. Math. Phys.* — 2013. — Vol. 319. — Pp. 269–301.
191. *Fateev V. A., Zamolodchikov A. B.* Parafermionic Currents in the Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory and Selfdual Critical Points in $Z(n)$ Invariant Statistical Systems // *Sov. Phys. JETP.* — 1985. — Vol. 62. — Pp. 215–225. — [Zh. Eksp. Teor. Fiz.89,380(1985)].
192. Explicit Construction of Unitary Representations of the N=2 Superconformal Algebra / P. Di Vecchia, J. L. Petersen, M. Yu, H. B. Zheng // *Phys. Lett.* — 1986. — Vol. B174. — Pp. 280–284.
193. *Feigin B. L., Semikhatov A. M., Tipunin I. Yu.* Equivalence between chain categories of representations of affine $sl(2)$ and N=2 superconformal algebras // *J. Math. Phys.* — 1998. — Vol. 39. — Pp. 3865–3905.
194. *Braverman Alexander.* Instanton counting via affine Lie algebras. 1. Equivariant J functions of (affine) flag manifolds and Whittaker vectors // CRM Workshop on Algebraic Structures and Moduli Spaces Montreal, Canada, July 14-20, 2003. — 2004.

195. *Dorrrzapf Matthias*. Singular vectors of the $N=2$ superconformal algebra // *Int. J. Mod. Phys.* — 1995. — Vol. A10. — Pp. 2143–2180.
196. Affine $sl(N)$ conformal blocks from $N=2$ $SU(N)$ gauge theories / Can Kozcaz, Sara Pasquetti, Filippo Passerini, Niclas Wyllard // *JHEP*. — 2011. — Vol. 01. — P. 045.
197. Yangians and cohomology rings of Laumon spaces / Boris Feigin, Michael Finkelberg, Andrei Negut, Leonid Rybnikov // *Selecta Mathematica*. — 2011. — Vol. 17, no. 3. — Pp. 573–607. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00029-011-0059-x>.
198. *Kanno Hiroaki, Tachikawa Yuji*. Instanton counting with a surface operator and the chain-saw quiver // *JHEP*. — 2011. — Vol. 06. — P. 119.
199. *Gukov Sergei, Witten Edward*. Gauge Theory, Ramification, And The Geometric Langlands Program. — 2006.
200. A Finite analog of the AGT relation I: Finite W -algebras and quasimaps' spaces / Alexander Braverman, Boris Feigin, Michael Finkelberg, Leonid Rybnikov // *Commun. Math. Phys.* — 2011. — Vol. 308. — Pp. 457–478.
201. *Wyllard Niclas*. W -algebras and surface operators in $N=2$ gauge theories // *J. Phys.* — 2011. — Vol. A44. — P. 155401.
202. *Fucito Francesco, Morales Jose F., Poghossian Rubik*. Multi instanton calculus on ALE spaces // *Nucl. Phys.* — 2004. — Vol. B703. — Pp. 518–536.
203. *Bouwknegt Peter, Schoutens Kareljan*. W symmetry in conformal field theory // *Phys. Rept.* — 1993. — Vol. 223. — Pp. 183–276.
204. *Fateev V. A., Litvinov A. V.* Integrable structure, W -symmetry and AGT relation // *JHEP*. — 2012. — Vol. 01. — P. 051.
205. *Fateev V. A., Litvinov A. V.* Correlation functions in conformal Toda field theory II // *JHEP*. — 2009. — Vol. 01. — P. 033.
206. *Bershtein M., Foda O.* AGT, Burge pairs and minimal models // *JHEP*. — 2014. — Vol. 06. — P. 177.

207. Carlsson Erik, Okounkov Andrei. Exts and vertex operators // *Duke Math. J.* — 2012. — 06. — Vol. 161, no. 9. — Pp. 1797–1815. — URL: <http://dx.doi.org/10.1215/00127094-1593380>.
208. Gessel I., Ch Krattenthaler C. Cylindric partitions // *Trans.Amer.Math.Soc.* — 1997. — Pp. 349–429.
209. Quantum continuous \mathfrak{gl}_∞ : Semiinfinite construction of representations / B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo et al. // *Kyoto J. Math.* — 2011. — Vol. 51, no. 2. — Pp. 337–364. — URL: <http://dx.doi.org/10.1215/21562261-1214375>.

Список рисунков

1.1	Результаты сравнения при различных значениях квантового параметра b , определяющего значение центрального заряда суперсимметричной теории Лиувилля.	54
2.1	Вклады форм-факторов на малых расстояниях.	76
2.2	Корреляционная функция двух спиновых операторов (в единицах $t^{\frac{8}{7}}$) в модели $\mathcal{M}_{2,7}$, возмущенной полем Φ_{13}	77
2.3	Результаты сравнения УФ-разложения и ИК-данных с параметром фитирования μ при $s = 0$	85
Б.1	Контуры C_1, C_2, C_3, C_4	291

Список таблиц

1	Численные данные для функции $f(t)$, определенной в (4.287), при значениях параметра Лиувилля $b = 0.8$ и $b = i\pi/4$	55
2	Численные данные для корреляционной функции $\langle \Psi(x)\Psi(0) \rangle$. . .	78
3	Численные данные для корреляционной функции $\langle T\bar{T}(x)\Theta(0) \rangle$. . .	86
4	Численные данные для корреляционной функции $\langle T\bar{T}(x)T\bar{T}(0) \rangle$. . .	87

Приложение А

А.1 Суперпроективная инвариантность и трехточечная функция

В этом приложении мы рассматриваем только те тождества Уорда, которые связаны с правой суперконформной алгеброй, образованной голоморфными компонентами $S(z)$ и $T(z)$. Соответственно, супермультиплеты состоят из векторов старшего веса V_i или $\bar{\Lambda}_i$, определенные как в (3.47) (ниже мы заменяем параметр a примарного поля идентификационным номером 1,2 и т.д.), и «верхних компонент» Λ_i или W_i . Для определенности мы будем говорить о мультиплете (V_i, Λ_i) .

Чтобы описать все 2^3 возможные трехточечные функции, обозначим

$$\begin{aligned} C_{123} &= \langle V_1 V_2 V_3 \rangle , \\ C_{\widehat{1}23} &= \langle \Lambda_1 V_2 V_3 \rangle , \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Из операторного разложения (1.7) имеем следующие супертоковые тождества Уорда

$$\begin{aligned} \langle S(z) \Lambda_1 V_2 V_3 \rangle &= \left(\frac{2\Delta_1}{(z-x_1)^2} + \frac{1}{z-x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) C_{123} - \frac{1}{z-x_2} C_{\widehat{1}23} - \frac{1}{z-x_3} C_{\widehat{1}2\widehat{3}} , \\ \langle S(z) V_1 \Lambda_2 V_3 \rangle &= \left(\frac{2\Delta_2}{(z-x_2)^2} + \frac{1}{z-x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) C_{123} + \frac{1}{z-x_1} C_{\widehat{1}23} - \frac{1}{z-x_3} C_{1\widehat{2}\widehat{3}} , \\ \langle S(z) V_1 V_2 \Lambda_3 \rangle &= \left(\frac{2\Delta_3}{(z-x_3)^2} + \frac{1}{z-x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) C_{123} + \frac{1}{z-x_1} C_{\widehat{1}2\widehat{3}} + \frac{1}{z-x_2} C_{1\widehat{2}\widehat{3}} , \end{aligned} \tag{A.2}$$

где Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 соответственно являются размерностями V_1 , V_2 и V_3 . Поскольку $S(z) = O(z^{-3})$ при $z \rightarrow \infty$, имеют место следующие суперпроективные тожде-

ства

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} C_{123} &= C_{\widehat{123}} + C_{\widehat{1\widehat{23}}} , \\
\frac{\partial}{\partial x_2} C_{123} &= -C_{\widehat{123}} + C_{\widehat{1\widehat{23}}} , \\
\frac{\partial}{\partial x_3} C_{123} &= -C_{\widehat{123}} - C_{\widehat{1\widehat{23}}} , \\
\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\Delta_1 \right) C_{123} &= x_2 C_{\widehat{123}} + x_3 C_{\widehat{1\widehat{23}}} , \\
\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2\Delta_2 \right) C_{123} &= -x_1 C_{\widehat{123}} + x_3 C_{\widehat{1\widehat{23}}} , \\
\left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + 2\Delta_3 \right) C_{123} &= -x_1 C_{\widehat{123}} - x_2 C_{\widehat{1\widehat{23}}} .
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Эти тождества включают корреляционные функции только с четным числом «фермионов» Λ_i . Устраняя производные, находим

$$\begin{aligned}
2\Delta_1 C_{123} &= -x_{12} C_{\widehat{123}} + x_{31} C_{\widehat{1\widehat{23}}} , \\
2\Delta_2 C_{123} &= -x_{12} C_{\widehat{123}} - x_{23} C_{\widehat{1\widehat{23}}} , \\
2\Delta_3 C_{123} &= x_{31} C_{\widehat{123}} - x_{23} C_{\widehat{1\widehat{23}}} ,
\end{aligned} \tag{A.4}$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned}
C_{\widehat{123}} &= -\frac{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}{x_{23}} C_{123} , \\
C_{\widehat{1\widehat{23}}} &= \frac{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2}{x_{31}} C_{123} , \\
C_{\widehat{1\widehat{23}}} &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3}{x_{12}} C_{123} .
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Подставляя в дифференциальные уравнения, приходим к

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} C_{123} &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3}{x_{12}} C_{123} - \frac{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2}{x_{13}} C_{123} , \\
\frac{\partial}{\partial x_2} C_{123} &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3}{x_{21}} C_{123} - \frac{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}{x_{23}} C_{123} , \\
\frac{\partial}{\partial x_3} C_{123} &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2}{x_{31}} C_{123} - \frac{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}{x_{32}} C_{123} .
\end{aligned} \tag{A.6}$$

И, наконец,

$$C_{123} = \frac{C}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} x_{31}^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}}, \quad (\text{A.7})$$

где C есть константа интегрирования, не зависящая от x_1 , x_2 и x_3 .

Еще одно тождество Уорда, имеющее место для функций с четным числом фермионов, имеет вид

$$\begin{aligned} \langle S(z)\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 \rangle &= \left(\frac{2\Delta_1}{(z-x_1)^2} + \frac{1}{z-x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) C_{1\widehat{23}} \\ &- \left(\frac{2\Delta_2}{(z-x_2)^2} + \frac{1}{z-x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) C_{\widehat{123}} + \left(\frac{2\Delta_3}{(z-x_3)^2} + \frac{1}{z-x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) C_{\widehat{12\widehat{3}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Таким же образом оно дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} C_{1\widehat{23}} - \frac{\partial}{\partial x_2} C_{\widehat{123}} + \frac{\partial}{\partial x_3} C_{\widehat{12\widehat{3}}} &= 0, \\ \left(2\Delta_1 + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) C_{1\widehat{23}} - \left(2\Delta_2 + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) C_{\widehat{123}} + \left(2\Delta_3 + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) C_{\widehat{12\widehat{3}}} &= 0. \end{aligned}$$

Достаточно просто убедиться, что эти соотношения тождественны с явными выражениями (A.5).

Для функций с нечетным числом фермионов рассмотрим тождество Уорда

$$\langle S(z)V_1V_2V_3 \rangle = \frac{1}{z-x_1} C_{\widehat{123}} + \frac{1}{z-x_2} C_{1\widehat{23}} + \frac{1}{z-x_3} C_{12\widehat{3}}. \quad (\text{A.9})$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} C_{\widehat{123}} + C_{1\widehat{23}} + C_{12\widehat{3}} &= 0, \\ x_1 C_{\widehat{123}} + x_2 C_{1\widehat{23}} + x_3 C_{12\widehat{3}} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Эта система решается в терминах одной функции \tilde{C}_{123}

$$\begin{aligned} C_{\widehat{123}} &= x_{23} \tilde{C}_{123}, \\ C_{1\widehat{23}} &= x_{31} \tilde{C}_{123}, \\ C_{12\widehat{3}} &= x_{12} \tilde{C}_{123}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Далее, нам понадобятся тождества

$$\begin{aligned}
\langle S(z)V_1\Lambda_2\Lambda_3 \rangle &= \frac{1}{z-x_1}C_{\widehat{12\hat{3}}}, \\
&+ \left(\frac{2\Delta_2}{(z-x_2)^2} + \frac{1}{z-x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) C_{12\hat{3}} - \left(\frac{2\Delta_3}{(z-x_3)^2} + \frac{1}{z-x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) C_{\widehat{123}}, \\
\langle S(z)\Lambda_1V_2\Lambda_3 \rangle &= -\frac{1}{z-x_2}C_{\widehat{12\hat{3}}} \\
&+ \left(\frac{2\Delta_1}{(z-x_1)^2} + \frac{1}{z-x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) C_{12\hat{3}} - \left(\frac{2\Delta_3}{(z-x_3)^2} + \frac{1}{z-x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) C_{\widehat{123}}, \\
\langle S(z)\Lambda_1\Lambda_2V_3 \rangle &= \frac{1}{z-x_3}C_{\widehat{12\hat{3}}} \\
&+ \left(\frac{2\Delta_1}{(z-x_1)^2} + \frac{1}{z-x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) C_{12\hat{3}} - \left(\frac{2\Delta_2}{(z-x_2)^2} + \frac{1}{z-x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) C_{\widehat{123}}.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Они приводят к соотношениям

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_2}C_{12\hat{3}} - \frac{\partial}{\partial x_3}C_{\widehat{123}} + C_{\widehat{12\hat{3}}} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial x_1}C_{12\hat{3}} - \frac{\partial}{\partial x_3}C_{\widehat{123}} - C_{\widehat{12\hat{3}}} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial x_1}C_{\widehat{123}} - \frac{\partial}{\partial x_2}C_{\widehat{123}} + C_{\widehat{12\hat{3}}} &= 0, \\
\left(2\Delta_2 + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) C_{12\hat{3}} - \left(2\Delta_3 + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) C_{\widehat{123}} + x_1 C_{\widehat{12\hat{3}}} &= 0, \\
\left(2\Delta_1 + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) C_{12\hat{3}} - \left(2\Delta_3 + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) C_{\widehat{123}} - x_2 C_{\widehat{12\hat{3}}} &= 0, \\
\left(2\Delta_1 + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) C_{\widehat{123}} - \left(2\Delta_2 + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) C_{\widehat{123}} + x_3 C_{\widehat{12\hat{3}}} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Все из них удовлетворяются при

$$\tilde{C}_{123} = \frac{\tilde{C}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3+1/2} x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1+1/2} x_{31}^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2+1/2}}, \tag{A.14}$$

с новой константой интегрирования \tilde{C} , и

$$C_{\widehat{12\hat{3}}} = (1/2 - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)\tilde{C}_{123}. \tag{A.15}$$

A.2 Дискретное операторное разложение из непрерывного

Полезно показать, как общее непрерывное ОР (3.8) приводится к дискретному ОР (3.62), если один из параметров a_1 или a_2 полагается равным вырожденному значению минус b . Возьмем $a_2 = -b + \epsilon$ и рассмотрим первый член в (3.8) с \mathbb{C}_{a_1, a_2}^p в виде (3.9)

$$\mathbb{C}_{a_1, a_2}^p = \left(\pi \mu \gamma \left(\frac{Qb}{2} \right) b^{1-b^2} \right)^{(p-a_1-a_2)/b} \times \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\Upsilon'_{\text{NS}}(0) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_1) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_2) \Upsilon_{\text{NS}}(2Q - 2p)}{\Upsilon_{\text{NS}}(Q + p - a_1 - a_2) \Upsilon_{\text{NS}}(a_2 + p - a_1) \Upsilon_{\text{NS}}(a_1 + p - a_2) \Upsilon_{\text{NS}}(a_1 + a_2 + p - Q)}.$$

При $a_2 \rightarrow -b$ это выражение обращается в ноль в связи с нулевым множителем $\Upsilon_{\text{NS}}(2a_2)$. Это означает, что интегральный член в (3.8) исчезает, и остаются вклады только дискретных членов. Последние возникают из-за сингулярностей интеграла, которые приходят от полюсов подынтегральной функции. Выражение (A.16) имеет полюсы по p в¹

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - Q - mb^{-1} - nb \quad \text{и} \quad a_1 + a_2 + mb^{-1} + nb \\ a_1 - a_2 - mb^{-1} - nb \quad \text{и} \quad Q + a_1 - a_2 + mb^{-1} + nb \\ a_2 - a_1 - mb^{-1} - nb \quad \text{и} \quad Q + a_2 - a_1 + mb^{-1} + nb \\ Q - a_1 - a_2 - mb^{-1} - nb \quad \text{и} \quad 2Q - a_1 - a_2 + mb^{-1} + nb \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

где (m, n) – любая пара неотрицательных целых чисел одинаковой четности. При $a_2 = -b + \epsilon$ полюса в $p = a_1 - b + \epsilon$ и $p = a_1 + b + \epsilon$ первого множителя в знаменателе (A.16) встречаются с полюсами в $p = a_1 - b - \epsilon$ и $p = a_1 + b - \epsilon$ второго множителя, производя два сингулярных члена. Такая же сингулярность приходит от двух «зеркально симметричных» точек $p = Q - a_1 + b$ и $p = Q - a_1 - b$. Ввиду свойств симметрии подынтегрального выражения и соотношения отражения (1.20) «отраженные» члены дают те же вклады и не требуют отдельного рассмотрения.

¹Четыре линии сингулярностей отвечают здесь соответственно четырем множителям в знаменателе (A.16).

Во-первых, давайте возьмем полюс в $p = a_1 - b - \epsilon$

$$\operatorname{res}_{p=a_1-b-\epsilon} \mathbb{C}_{a_1, a_2}^p = \frac{\Upsilon'_{\text{NS}}(0) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_1) \Upsilon_{\text{NS}}(-2b + 2\epsilon) \Upsilon_{\text{NS}}(2Q - 2a_1 + 2b)}{\Upsilon_{\text{NS}}(Q - 2\epsilon) \Upsilon'_{\text{NS}}(-2b) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_1) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_1 - 2b - Q)} = 1. \quad (\text{A.18})$$

Аналогичное вычисление для вычета в $p = a_1 + b - \epsilon$ приводит к

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=a_1+b-\epsilon} \mathbb{C}_{a_1, a_2}^p &= \left(\pi \mu \gamma \left(\frac{Qb}{2} \right) b^{1-b^2} \right)^2 \frac{\Upsilon_{\text{NS}}(2a_1) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_1 + 2b - Q)}{\Upsilon_{\text{NS}}(2a_1 + 2b) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_1 - Q)} \\ &= \left(\gamma \left(\frac{Qb}{2} \right) \right)^2 \frac{(\pi \mu)^2 b^4 \gamma(a_1 b - 1/2 - b^2/2)}{\gamma(1/2 + b^2/2 + a_1 b)}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

где мы систематически используем соотношения сдвига (1.16).

Во-вторых, давайте вычислим вклад второго члена с

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{C}}_{a_1, a_2}^p &= \left(\pi \mu \gamma \left(\frac{Qb}{2} \right) b^{1-b^2} \right)^{(p-a_1-a_2)/b} \times \\ &\frac{2i \Upsilon'_{\text{NS}}(0) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_1) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_2) \Upsilon_{\text{NS}}(2Q - 2p)}{\Upsilon_{\text{R}}(Q + p - a_1 - a_2) \Upsilon_{\text{R}}(a_2 + p - a_1) \Upsilon_{\text{R}}(a_1 + p - a_2) \Upsilon_{\text{R}}(a_1 + a_2 + p - Q)}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Структура полюсов задается той же формулой (A.17), где (m, n) теперь является парой неотрицательных целых чисел противоположной четности. При $a_2 = -b + \epsilon$ мы должны взять сингулярный член в $p = a_1 - \epsilon$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=a_1-\epsilon} \tilde{\mathbb{C}}_{a_1, -b+\epsilon}^p &= \\ &= \left(\pi \mu \gamma \left(\frac{Qb}{2} \right) \right) \frac{2i \Upsilon'_{\text{NS}}(0) \Upsilon_{\text{NS}}(2a_1) \Upsilon_{\text{NS}}(-2b + 2\epsilon) \Upsilon_{\text{NS}}(2Q - 2p)}{\Upsilon_{\text{R}}(Q + b - 2\epsilon) \Upsilon'_{\text{R}}(-b) \Upsilon_{\text{R}}(2a_1 + b) \Upsilon_{\text{R}}(2a_1 - b - Q)} \\ &= \frac{2\pi i \mu}{\gamma(-b^2) \gamma(ba_1) \gamma(1 + b^2 - ba_1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Вычеты (A.18), (A.19) и (A.21) можно сравнить со специальными структурными константами, полученными в разделе 1.2.1 в терминах «скрининговых» интегралов.

А.3 Дифференциальные уравнения из условия нуль-вектора

Для целей данного приложения удобно использовать суперполевым формализм. Примарные НШ суперполя имеют вид

$$\Phi_{\Delta}(z) = \Phi_{\Delta}(x) + \theta\Psi_{\Delta}(x) \quad \text{с} \quad \Psi_{\Delta}(z) = G_{-\frac{1}{2}}\Phi_{\Delta}(z), \quad (\text{A.22})$$

где x и θ являются голоморфными координатами $(2+2)$ -мерного суперпространства (θ является антикоммутирующей, «нечетной» координатой).

Конформные тождества Уорда ограничивают возможную координатную зависимость корреляционных функций. В частности, двухточечные функции определяются полностью:

$$\langle \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2) \rangle \sim \frac{\delta_{\Delta_1, \Delta_2}}{|z_{12}|^{4\Delta_1}}, \quad (\text{A.23})$$

где $z_{ik} = x_i - x_k + \theta_i\theta_k$. Трехточечная функция зависит от произвольной функции «нечетного» суперпроективного инварианта трех точек,

$$\theta_{123} = \frac{z_{23}\theta_1 + z_{31}\theta_2 + z_{12}\theta_3 - \theta_1\theta_2\theta_3}{(z_{12}z_{13}z_{23})^{1/2}}, \quad (\text{A.24})$$

и представляется в виде

$$\langle \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3) \rangle = \frac{C_{123} + |\theta_{123}|^2\tilde{C}_{123}}{|z_{12}|^{2(\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3)}|z_{13}|^{2(\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2)}|z_{23}|^{2(\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1)}}. \quad (\text{A.25})$$

Вырожденное примарное поле Φ_{mn} имеет сингулярный вектор на уровне $N = mn/2$ [97]. Первый нулевой вектор в НШ-секторе возникает на уровне $N = \frac{3}{2}$:

$$D_{13}\Phi_{13} = \left(L_{-1}G_{-\frac{1}{2}} + b^2G_{-\frac{3}{2}} \right) \Phi_{13} = 0. \quad (\text{A.26})$$

Рассмотрим четырехточечную корреляционную функцию примарных суперполей в НШ-секторе. Для четырехточечной корреляционной функции имеются три независимых суперпроективных инварианта, один «четный» и два «нечетных» (см., например, [84]). Используя суперконформную инвариантность

(аналогично рассмотрению в [77]), мы можем написать

$$\mathbf{G} \equiv \langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \Phi_3(z_3) \Phi_4(z_4) \rangle = |z_{34}|^{2\gamma_{34}} |z_{13}|^{2\gamma_{13}} |z_{23}|^{2\gamma_{23}} |z_{12}|^{2\gamma_{12}} g(z, \bar{z}, \tau_1, \bar{\tau}_1, \tau_2, \bar{\tau}_2), \quad (\text{A.27})$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{34} &= -2\Delta_4, \\ \gamma_{13} &= -\Delta_1 - \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_2, \\ \gamma_{23} &= -\Delta_2 - \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_1, \\ \gamma_{12} &= -\Delta_4 - \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

и мы выбираем три независимых инварианта:

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_{41} z_{23}}{z_{43} z_{21}}, \\ \tau_1 &= \theta_{213}, \\ \tau_2 &= -[z(z-1)]^{1/2} \theta_{214}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Учитывая суперпроективную инвариантность, мы можем, например, зафиксировать

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, & \theta_2 &= 0, & \theta_3 &= R\eta, \\ x_1 &= 0, & x_2 &= 1, & x_3 &= R, & x_4 &= x, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

где $R \rightarrow \infty$. Функция g связана с корреляционной функцией бозонных компонент супермультиплета (A.22):

$$\langle \Phi_1(0) \Phi_2(1) \Phi_3(\infty) \Phi_4(z, \bar{z}) \rangle = g(z, \bar{z}, 0, 0, 0, 0) = g_0(z, \bar{z}). \quad (\text{A.31})$$

В дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением суперконформных блоков, дающих вклад в корреляционную функцию g_0 . Обобщение на другие компоненты достаточно простое.

Поскольку сингулярный вектор (A.26) обращается в нуль, имеет место дифференциальное уравнение

$$\left\{ -b^{-2} \partial_4 D_4 + \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{2\Delta_i}{z_{4i}^2} \theta_{4i} + \frac{1}{z_{4i}} \left[2\theta_{4i} \partial_i - D_i \right] \right\} \right\} \mathbf{G} = 0, \quad (\text{A.32})$$

где

$$D = \partial_\theta - \theta \partial_x. \quad (\text{A.33})$$

Вместе с (A.27) это уравнение сводится к дифференциальному уравнению для $g(z, \bar{z}, \tau_1, \bar{\tau}_1, \tau_2, \bar{\tau}_2)$

$$\left[-b^{-2} \partial_4 D_4 - b^{-2} \frac{\gamma_{34}}{z_{34}} \left(\theta_{43} \partial_4 - D_4 \right) + \sum_{i=1}^3 \left[\frac{2\Delta_i}{z_{4i}^2} \theta_{4i} + \frac{1}{z_{4i}} \left(2\theta_{4i} \partial_i - D_i \right) \right] + \frac{\gamma_{12}(\theta_{41} + \theta_{42})}{z_{41} z_{42}} + \frac{\gamma_{13}(\theta_{41} + \theta_{43})}{z_{41} z_{43}} + \frac{\gamma_{23}(\theta_{42} + \theta_{43})}{z_{42} z_{43}} + \frac{\gamma_{34} \theta_{43}}{z_{43}^2} \right] g = 0, \quad (\text{A.34})$$

В соответствии с (A.31) мы представляем $g = g_0(z) + g_1(z)\tau_1 + g_2(z)\tau_2 + g_3(z)\tau_1\tau_2$ (поскольку дифференциальный оператор не затрагивает антиголоморфную зависимость). Уравнение (A.34) распадается на две независимые системы обыкновенных дифференциальных уравнений для g_i . В частности, для g_0 и g_3 имеем следующую систему уравнений

$$-b^{-2} z g_0'' + \frac{3z-2}{z-1} g_0' + b^{-2} g_3' + \left[\frac{\gamma_{13}}{z} + \frac{\gamma_{23}}{z-1} \right] g_0 + \frac{1-2z}{z(z-1)} g_3 = 0, \quad (\text{A.35})$$

$$b^{-2} g_0'' + \frac{1-3z}{z(z-1)} g_0' + \left[\frac{2\Delta_1}{z^2} + \frac{2\Delta_2}{(z-1)^2} + \frac{2\gamma_{12}}{z(z-1)} \right] g_0 + \frac{1}{z(z-1)} g_3 = 0, \quad (\text{A.36})$$

из которой следует дифференциальное уравнение третьего порядка (1.35) для функции $g_0(z)$.²

Три независимых решения для g_0 с диагональной монодромией около $x = 0$ являются s -канальными конформными блоками со специальным выбором параметров $\Delta_1 = \Delta_{13}$, $\Delta_2 = \Delta(\lambda_1)$, $\Delta_3 = \Delta(\lambda_2)$, $\Delta_4 = \Delta(\lambda_3)$ и $\Delta = \Delta^{(\pm)} = \Delta(\lambda_1 \pm b)$ или $\Delta = \Delta^{(0)} = \Delta(\lambda_1)$,

$$g_0^{(\pm)} = x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\pm)} x^n = F_0(\Delta^{(\pm)}, \Delta_i, c, x), \quad (\text{A.37})$$

$$g_0^{(0)} = x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2 + 1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(0)} x^n = F_1(\Delta^{(0)}, \Delta_i, c, x). \quad (\text{A.38})$$

Согласно принятой нормировке, $A_0^{(\pm)} = 1$ и $A_0^{(0)} = 1/(2\Delta(\lambda_1))$. Первые коэффициенты могут быть легко найдены с помощью подстановки этих разложений в дифференциальные уравнения (A.35) и (A.36) и решения рекуррентных соот-

²Поскольку в основном тексте речь идет лишь об одной функции, включающей только нижние компоненты супермультиплетов, индекс 0 там опускается.

ношений для коэффициентов порядок за порядком,

$$A_0^{(+)} = 1, \quad (\text{A.39})$$

$$A_1^{(+)} = (1 + 2b^2 - 3b^4 - 8b^3\lambda_1 - 4b^2\lambda_1^2 - 4b^2\lambda_2^2 + 4b^2\lambda_3^2)(4(-1 + b^2 + 2b\lambda_1))^{-1}, \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} A_2^{(+)} = & (21 + 4b^2 - 90b^4 + 84b^6 - 19b^8 - 62b\lambda_1 - 152b^3\lambda_1 + 380b^5\lambda_1 - 184b^7\lambda_1 \\ & + 8b^2\lambda_1^2 + 432b^4\lambda_1^2 - 472b^6\lambda_1^2 + 96b^8\lambda_1^2 + 112b^3\lambda_1^3 - 416b^5\lambda_1^3 + 176b^7\lambda_1^3 - 112b^4\lambda_1^4 \\ & + 128b^6\lambda_1^4 + 32b^5\lambda_1^5 - 72b^2\lambda_2^2 + 176b^4\lambda_2^2 - 40b^6\lambda_2^2 + 240b^3\lambda_1\lambda_2^2 - 288b^5\lambda_1\lambda_2^2 \\ & + 48b^7\lambda_1\lambda_2^2 - 224b^4\lambda_1^2\lambda_2^2 + 128b^6\lambda_1^2\lambda_2^2 + 64b^5\lambda_1^3\lambda_2^2 - 48b^4\lambda_2^4 + 32b^5\lambda_1\lambda_2^4 \\ & + 24b^2\lambda_3^2 - 144b^4\lambda_3^2 + 56b^6\lambda_3^2 - 112b^3\lambda_1\lambda_3^2 + 288b^5\lambda_1\lambda_3^2 - 48b^7\lambda_1\lambda_3^2 + 160b^4\lambda_1^2\lambda_3^2 \\ & - 128b^6\lambda_1^2\lambda_3^2 - 64b^5\lambda_1^3\lambda_3^2 + 96b^4\lambda_2^2\lambda_3^2 - 64b^5\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2 - 48b^4\lambda_3^4 + 32b^5\lambda_1\lambda_3^4 + 18b^9\lambda_1) \\ & \times (64(-1 + b\lambda_1)(-3 + b^2 + 2b\lambda_1)(-1 + b^2 + 2b\lambda_1))^{-1}, \quad (\text{A.41}) \end{aligned}$$

$$A_0^{(0)} = 4b^2((1 + b^2 - 2b\lambda_1)(1 + b^2 + 2b\lambda_1))^{-1}, \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} A_1^{(0)} = & (-2b^4(9 + 6b^2 + b^4 - 4b^2\lambda_1^2 - 8\lambda_2^2 - 4b^2\lambda_2^2 + 8\lambda_3^2 + 4b^2\lambda_3^2)) \\ & \times ((1 + b^2 - 2b\lambda_1)(3 + b^2 - 2b\lambda_1)(1 + b^2 + 2b\lambda_1)(3 + b^2 + 2b\lambda_1))^{-1}, \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^{(0)} = & (b^2(-72 - 534b^2 - 287b^4 + 48b^6 + 62b^8 + 14b^{10} + b^{12} + 32b^2\lambda_1^2 + 288b^4\lambda_1^2 \\ & - 8b^6\lambda_1^2 - 48b^8\lambda_1^2 - 8b^{10}\lambda_1^2 - 32b^6\lambda_1^4 + 16b^8\lambda_1^4 + 544b^2\lambda_2^2 + 128b^4\lambda_2^2 - 200b^6\lambda_2^2 \\ & - 80b^8\lambda_2^2 - 8b^{10}\lambda_2^2 - 128b^4\lambda_1^2\lambda_2^2 + 32b^8\lambda_1^2\lambda_2^2 + 128b^4\lambda_2^4 + 96b^6\lambda_2^4 + 16b^8\lambda_2^4 \\ & - 256b^2\lambda_3^2 + 208b^4\lambda_3^2 + 328b^6\lambda_3^2 + 96b^8\lambda_3^2 + 8b^{10}\lambda_3^2 - 64b^6\lambda_1^2\lambda_3^2 - 32b^8\lambda_1^2\lambda_3^2 \\ & - 256b^4\lambda_2^2\lambda_3^2 - 192b^6\lambda_2^2\lambda_3^2 - 32b^8\lambda_2^2\lambda_3^2 + 128b^4\lambda_3^4 + 96b^6\lambda_3^4 + 16b^8\lambda_3^4)) \\ & \times (2(1 + b^2 - 2b\lambda_1)(3 + b^2 - 2b\lambda_1)(5 + b^2 - 2b\lambda_1) \\ & \times (1 + b^2 + 2b\lambda_1)(3 + b^2 + 2b\lambda_1)(5 + b^2 + 2b\lambda_1))^{-1}. \quad (\text{A.44}) \end{aligned}$$

Отметим, что данные выражения совпадают с выражениями для соответствующих коэффициентов конформных блоков (A.59-A.64), вычисленных при тех же значениях параметров с использованием \hat{c} -рекуррентных соотношений (1.93).

Уравнение типа Доценко-Фатеева. Покажем теперь, что дифференциальное уравнение (1.35) относится к типу уравнений Доценко-Фатеева [94], мы находим интегральные представления решений и рассматриваем их свойства

монодромии. Подстановка

$$g = x^{a_1 b} (1-x)^{a_2 b} F \quad (\text{A.45})$$

преобразует (1.35) к виду

$$\begin{aligned} & x^2(1-x)^2 F''' - x(1-x)(K_1 x - K_2(1-x)) F'' \\ & + (L_1 x^2 + L_2(1-x)^2 - L_3 x(1-x)) F' + (M_1 x - M_2(1-x)) F = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= -2g - 3B - 3C, & K_2 &= -2g - 3A - 3C, \\ L_1 &= (B+C)(2B+2C+2g+1), & L_2 &= (A+C)(2A+2C+2g+1), \\ L_3 &= 4AB + 4(2A+2B+2C+1)C + 4(A+B+3C)g + 4g^2 + 2g, & & (\text{A.47}) \\ M_1 &= -2C(A+B+C+g+1)(2B+2C+2g+1), \\ M_2 &= -2C(A+B+C+g+1)(2A+2C+2g+1), \end{aligned}$$

тогда как параметры A , B , C и g связаны с a_1 , a_2 , a_3 и b как в (1.42).

Рассмотрим двукратные контурные интегралы

$$I_{\alpha\beta}(x) = \int_{C_\alpha} \int_{C_\beta} dt_1 dt_2 |t_1 t_2|^A |(1-t_1)(1-t_2)|^B |(x-t_1)(x-t_2)|^C |t_1 - t_2|^{2g}, \quad (\text{A.48})$$

при $\alpha \neq \beta$ и

$$I_{\alpha\alpha}(x) = \frac{1}{2} \int_{C_\alpha} \int_{C_\alpha} dt_1 dt_2 |t_1 t_2|^A |(1-t_1)(1-t_2)|^B |(x-t_1)(x-t_2)|^C |t_1 - t_2|^{2g}, \quad (\text{A.49})$$

где контуры C_α , $\alpha = 1, 2, 3, 4$ выбраны следующим образом

$$C_1 = (-\infty, 0], \quad C_2 = [0, x], \quad C_3 = [x, 1], \quad C_4 = [1, \infty). \quad (\text{A.50})$$

Непосредственно проверяется,³ что все эти интегралы являются решениями уравнения (A.46).

³Подразумевается, что параметры выбираются так, чтобы обеспечить сходимость всех этих интегралов. В противном случае применяется стандартная регуляризация.

Однако из девяти интегралов только три являются независимыми. В качестве базиса можно выбрать набор с диагональной монодромией вокруг точки $x = 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1(x) &= I_{44}(x) \sim \mathcal{I}_1^{(0)}(1 + \dots), \\ \mathcal{I}_2(x) &= I_{24}(x) \sim x^{1+A+C} \mathcal{I}_2^{(0)}(1 + \dots), \\ \mathcal{I}_3(x) &= I_{22}(x) \sim x^{2+2A+2C+2g} \mathcal{I}_3^{(0)}(1 + \dots),\end{aligned}\tag{A.51}$$

где \dots обозначает регулярный ряд по x . Константы

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1^{(0)} &= \frac{\Gamma(2g)\Gamma(1+B)\Gamma(1+B+g)\Gamma(-1-2g-A-B-C)\Gamma(-1-g-A-B-C)}{\Gamma(g)\Gamma(-g-A-C)\Gamma(-A-C)}, \\ \mathcal{I}_2^{(0)} &= \frac{\Gamma(1+A)\Gamma(1+B)\Gamma(1+C)\Gamma(-1-2g-A-B-C)}{\Gamma(2+A+C)\Gamma(-2g-A-C)}, \\ \mathcal{I}_3^{(0)} &= \frac{\Gamma(2g)\Gamma(1+A)\Gamma(1+A+g)\Gamma(1+C)\Gamma(1+C+g)}{\Gamma(g)\Gamma(2+A+C+g)\Gamma(2+A+C+2g)},\end{aligned}\tag{A.52}$$

вычислены с помощью интеграла Сельберга

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 \prod_{i=1}^n dt_i t_i^{\mu-1} (1-t_i)^{\nu-1} \prod_{i>j} |t_i - t_j|^{2g} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(g+kg)\Gamma(\mu+kg)\Gamma(\nu+kg)}{\Gamma(g)\Gamma(\mu+\nu+(n-1+k)g)}.\tag{A.53}$$

Другой базис

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1(x) &= I_{11}(x) \sim \mathcal{J}_1^{(0)}(1 + \dots), \\ \mathcal{J}_2(x) &= I_{13}(x) \sim (1-x)^{1+B+C} \mathcal{J}_2^{(0)}(1 + \dots), \\ \mathcal{J}_3(x) &= I_{33}(x) \sim (1-x)^{2+2B+2C+2g} \mathcal{J}_3^{(0)}(1 + \dots),\end{aligned}\tag{A.54}$$

где точки заменяют теперь регулярный ряд по $1-x$, удовлетворяет диагональной монодромии вокруг $x = 1$. Очевидно,

$$\mathcal{I}_\alpha = \sum_{\beta} \mathcal{M}_{\alpha\beta} \mathcal{J}_\beta,\tag{A.55}$$

где «матрица слияния» $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ вычисляется путем манипулирования с контурами интегрирования. Она имеет следующие элементы [95]

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{11} &= \frac{\sin \pi A \sin \pi(g + A)}{\sin \pi(C + B) \sin \pi(g + C + B)} \\
\mathcal{M}_{12} &= -\frac{\sin \pi A \sin \pi C}{\sin \pi(C + B) \sin \pi(2g + C + B)} \\
\mathcal{M}_{13} &= \frac{\sin \pi C \sin \pi(g + C)}{\sin \pi(g + C + B) \sin \pi(2g + C + B)} \\
\mathcal{M}_{21} &= -\frac{2 \cos \pi g \sin \pi(g + A) \sin \pi(g + A + B + C)}{\sin \pi(C + B) \sin \pi(g + C + B)} \\
\mathcal{M}_{22} &= \frac{\sin \pi C \sin \pi(g + A + B + C)}{\sin \pi(C + B) \sin \pi(g + C + B)} - \frac{\sin \pi(g + B) \sin \pi A}{\sin \pi(g + C + B) \sin \pi(2g + C + B)} \\
\mathcal{M}_{23} &= \frac{2 \cos \pi g \sin \pi(g + C) \sin \pi(g + B)}{\sin \pi(g + C + B) \sin \pi(2g + C + B)} \\
\mathcal{M}_{31} &= \frac{\sin \pi(g + A + B + C) \sin \pi(2g + A + B + C)}{\sin \pi(C + B) \sin \pi(g + C + B)} \\
\mathcal{M}_{32} &= \frac{\sin \pi B \sin \pi(2g + A + B + C)}{\sin \pi(C + B) \sin \pi(2g + C + B)} \\
\mathcal{M}_{33} &= \frac{\sin \pi B \sin \pi(g + B)}{\sin \pi(g + C + B) \sin \pi(2g + C + B)}
\end{aligned} \tag{A.56}$$

Далее, проверяется [95], что комбинация

$$X_1 \mathcal{I}_1(x) \mathcal{I}_1(\bar{x}) + X_2 \mathcal{I}_2(x) \mathcal{I}_2(\bar{x}) + X_3 \mathcal{I}_3(x) \mathcal{I}_3(\bar{x}) \tag{A.57}$$

является однозначной функцией от (x, \bar{x}) , если

$$\begin{aligned}
\frac{X_3}{X_1} &= \frac{\sin^{-1} \pi(B + g) \sin \pi A \sin \pi C \sin \pi(A + C) \sin \pi(A + g) \sin \pi(C + g)}{\sin \pi B \sin \pi(A + B + C + g) \sin \pi(A + C + 2g) \sin \pi(A + B + C + 2g)}, \\
\frac{X_2}{X_1} &= \frac{\sin \pi(A + C + g) \sin \pi A \sin \pi C}{2 \cos \pi g \sin \pi(B + g) \sin \pi(A + B + C + g) \sin \pi(A + C + 2g)}.
\end{aligned} \tag{A.58}$$

A.4 Пример использования рекуррентных соотношений

С помощью рекуррентных соотношений (1.93), мы можем легко находить коэффициенты разложения конформных блоков. Ниже приведены несколько первых коэффициентов:

$$F_e^{(0)} = f_e^{(0)}(\Delta),$$

$$F_e^{(1)} = f_e^{(1)}(\Delta),$$

$$F_e^{(2)} = f_e^{(2)}(\Delta) + \frac{\widehat{B}_{1,3}^{(o)}}{\widehat{c} - \widehat{c}_{1,3}} f_o^{(0)}\left(\Delta + \frac{3}{2}\right) + \frac{\widehat{B}_{2,2}^{(e)}}{\widehat{c} - \widehat{c}_{2,2}} f_e^{(0)}(\Delta + 2),$$

$$F_o^{(0)} = f_o^{(0)}(\Delta),$$

$$F_o^{(1)} = f_o^{(1)}(\Delta) + \frac{\widehat{B}_{1,3}^{(o)}}{\widehat{c} - \widehat{c}_{1,3}} f_e^{(0)}\left(\Delta + \frac{3}{2}\right),$$

$$F_o^{(2)} = f_o^{(2)}(\Delta) + \frac{\widehat{B}_{1,3}^{(e)}}{\widehat{c} - \widehat{c}_{1,3}} f_e^{(1)}\left(\Delta + \frac{3}{2}\right) + \frac{\widehat{B}_{2,2}^{(o)}}{\widehat{c} - \widehat{c}_{2,2}} f_o^{(0)}(\Delta + 2) + \frac{\widehat{B}_{1,5}^{(e)}}{\widehat{c} - \widehat{c}_{1,5}} f_e^{(0)}\left(\Delta + \frac{5}{2}\right).$$

Используя явные выражений для вычетов $\widehat{B}_{m,n}^{(e,o)}$, а также выражений для асимптотических членов $f_{e,o}^{(N)}$, мы можем написать эти коэффициенты в явном виде:

$$F_e^{(0)} = 1, \tag{A.59}$$

$$F_e^{(1)} = (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)(2\Delta)^{-1}, \tag{A.60}$$

$$\begin{aligned} F_e^{(2)} &= (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(1 + \Delta + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta + \Delta_3 - \Delta_4)(1 + \Delta + \Delta_3 - \Delta_4) \\ &\quad \times (4\Delta(1 + 2\Delta))^{-1} \\ &\quad + (\Delta^2 - 3(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + 2\Delta(\Delta_1 + \Delta_2)) \\ &\quad \times (\Delta^2 - 3(\Delta_3 - \Delta_4)^2 + 2\Delta(\Delta_3 + \Delta_4))(2\Delta(3 + 2\Delta)(-3 + 3\widehat{c} + 16\Delta))^{-1} \\ &\quad + (\Delta_1 - 2(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \Delta_2 + \Delta(-1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2)) \\ &\quad \times (\Delta_3 - 2(\Delta_3 - \Delta_4)^2 + \Delta_4 + \Delta(-1 + 2\Delta_3 + 2\Delta_4)) \\ &\quad \times ((\widehat{c} + 2(-3 + \widehat{c})\Delta + 4\Delta^2)(3 + 4\Delta(2 + \Delta)))^{-1}, \end{aligned} \tag{A.61}$$

$$F_o^{(0)} = (2\Delta)^{-1}, \tag{A.62}$$

$$\begin{aligned} F_o^{(1)} &= (1 + 2\Delta + 2\Delta_1 - 2\Delta_2)(1 + 2\Delta + 2\Delta_3 - 2\Delta_4)(8\Delta(1 + 2\Delta))^{-1} \\ &\quad + 4(\Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_3 - \Delta_4)((\widehat{c} + 2(-3 + \widehat{c})\Delta + 4\Delta^2)\Delta(1 + 2\Delta))^{-1}, \end{aligned} \tag{A.63}$$

$$F_o^{(2)} = 128^{-1}(1 + 2\Delta + 2\Delta_1 - 2\Delta_2)(3 + 2\Delta + 2\Delta_1 - 2\Delta_2)(1 + 2\Delta + 2\Delta_3 - 2\Delta_4)$$

$$\begin{aligned}
& \times (3 + 2\Delta + 2\Delta_3 - 2\Delta_4)(\Delta(1 + 3\Delta + 2\Delta^2))^{-1} \\
& + (3 + 2\Delta + 2\Delta_1 - 2\Delta_2)(\Delta_1 - \Delta_2)(3 + 2\Delta + 2\Delta_3 - 2\Delta_4)(\Delta_3 - \Delta_4) \\
& \times ((\widehat{c} + 2(-3 + \widehat{c})\Delta + 4\Delta^2)(3 + 4\Delta(2 + \Delta)))^{-1} \\
& + (1 + 4\Delta_1 + 4\Delta_2 + 2(-6(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \Delta(-1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2))) \\
& \times (\Delta_1, \Delta_2 \rightarrow \Delta_3, \Delta_4)(64\Delta(1 + \Delta)(2 + \Delta)(5 - 11\Delta + 2\Delta^2 + 3\widehat{c}(1 + \Delta)))^{-1} \\
& + (3(-1 + 4\Delta_1 + 4\Delta_2) + 4(\Delta^2 - 3(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + \Delta(1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2))) \\
& \times (\Delta_1, \Delta_2 \rightarrow \Delta_3, \Delta_4)(64\Delta(2 + \Delta)(3 + 2\Delta)(-3 + 3\widehat{c} + 16\Delta))^{-1}. \quad (\text{A.64})
\end{aligned}$$

Приложение Б

Б.1 Интегралы для первых поправок теории возмущений

Интегралы от корреляционных функций, которые появляются в поправках первого порядка, могут быть представлены в виде двойных интегралов по плоскости ввиду уравнения

$$\begin{aligned} & \pi \frac{\gamma(a+1)\gamma(c+1)}{\gamma(a+c+2)} \int d^2x |x|^{2(a+d+c+1)} |1-x|^{2e} \left| {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+1, & -b \\ a+c+2 & \end{matrix} \middle| x \right) \right|^2 \\ & + \pi \frac{\gamma(b+1)\gamma(a+c+1)}{\gamma(a+b+c+2)} \int d^2x |x|^{2d} |1-x|^{2e} \left| {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -a-b-c-1, & -c \\ -a-c & \end{matrix} \middle| x \right) \right|^2 \\ & = \int d^2x \int d^2y |x|^{2a} |1-x|^{2b} |y|^{2d} |1-y|^{2e} |x-y|^{2c}. \end{aligned}$$

С практической точки зрения удобно разложить этот интеграл в сумму голоморфной и антиголоморфной частей. Начиная с интеграла

$$J = \int \int d^2x d^2y |x|^{2a} |1-x|^{2b} |y|^{2d} |1-y|^{2e} |x-y|^{2c}, \quad (\text{Б.1})$$

после поворота Вика

$$x_2 = ix_0(1-2i\epsilon), \quad y_2 = iy_0(1-2i\epsilon),$$

и используя новые переменные

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_0, & \bar{x} &= x_1 - x_0, \\ y &= y_1 + y_0, & \bar{y} &= y_1 - y_0, \end{aligned}$$

мы легко получаем

$$\begin{aligned}
J = & -\frac{1}{4} \iint dx dy x^a (x-1)^b y^d (y-1)^e (x-y)^c \\
& \times \iint d\bar{x} d\bar{y} (\bar{x} + i\epsilon(x-\bar{x}))^a (\bar{x}-1 + i\epsilon(x-\bar{x}))^b (\bar{y} + i\epsilon(y-\bar{y}))^d \\
& \times (\bar{y}-1 + i\epsilon(y-\bar{y}))^e (\bar{x}-\bar{y} + i\epsilon((x-\bar{x}) - (y-\bar{y})))^c.
\end{aligned} \tag{Б.2}$$

Интеграл (Б.2) имеет точки ветвления

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= -i\epsilon x, & \bar{y} &= -i\epsilon y, \\
\bar{x} &= 1 - i\epsilon(x-1), & \bar{y} &= 1 - i\epsilon(y-1). \\
\bar{x} &= \bar{y} - i\epsilon(x-y),
\end{aligned} \tag{Б.3}$$

Деформируя контуры интегрирования, легко показать, что нетривиальные вклады в (Б.2) приходят только от двух областей интегрирования, а именно,

$$\{0 < x < 1, \quad 0 < y < x\} \quad \text{and} \quad \{0 < x < 1, \quad x < y < 1\}. \tag{Б.4}$$

Можно заметить, что интеграл J представляется в виде суммы

$$J = I(a,b,d,e,c) + I(d,e,a,b,c), \tag{Б.5}$$

где

$$\begin{aligned}
I(a,b,d,e,c) = & -\frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_0^x dy x^a (x-1)^b y^d (y-1)^e (x-y)^c \times \\
& \times \int_{C_1} d\bar{x} \int_{C_2} d\bar{y} \bar{x}^a (\bar{x}-1)^b \bar{y}^d (\bar{y}-1)^e (\bar{x}-\bar{y})^c,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(d,e,a,b,c) = & -\frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_x^1 dy x^a (x-1)^b y^d (y-1)^e (x-y)^c \times \\
& \times \int_{C_4} d\bar{y} \int_{C_3} d\bar{x} \bar{x}^a (\bar{x}-1)^b \bar{y}^d (\bar{y}-1)^e (\bar{x}-\bar{y})^c,
\end{aligned}$$

Мы вводим обозначения $I(a,b,d,e,c)$, $I(d,e,a,b,c)$ для указанных выше интегралов, поскольку два интеграла связаны преобразованием $a \rightarrow d$, $b \rightarrow e$, что может быть легко проверено путем замены переменных. Контурные интегрирования

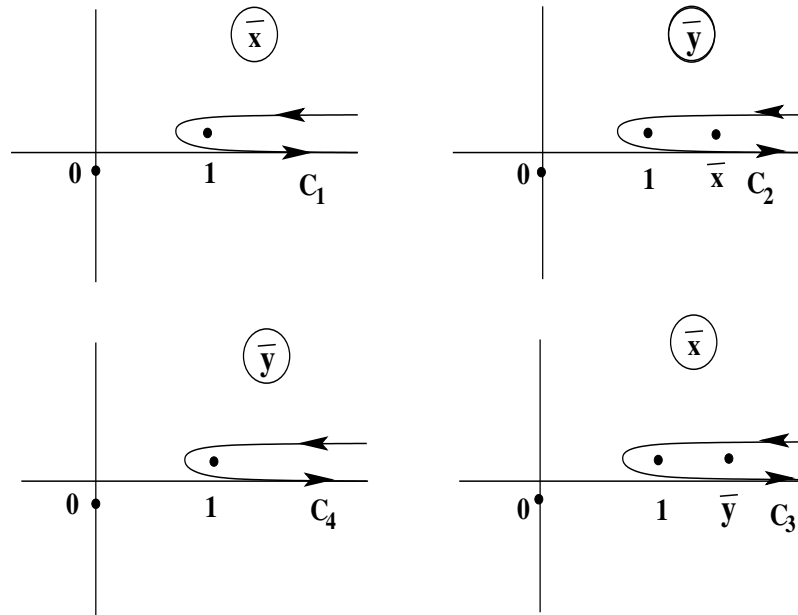


Рисунок Б.1 — Контурные C_1, C_2, C_3, C_4 .

показаны на рис. Б.1. Преобразуем теперь контурные интегралы $I(a,b,d,e,c)$ к интегралам стандартного типа. Это достигается путем определенных манипуляций с контурами. Мы получаем следующее выражение

$$I(a,b,d,e,c) = \sin \pi b K(a,b,d,e,c) [\sin \pi e L(a,b,d,e,c) + \sin \pi(e+c) L(d,e,a,b,c)], \quad (\text{Б.6})$$

где

$$K = \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{a+d+c+1} (1-x)^b y^d (1-y)^c (1-xy)^e, \quad (\text{Б.7})$$

$$L = \int_0^1 dy \int_0^1 dx x^{-a-b-c-2} (1-x)^c y^{-a-b-d-e-c-3} (1-y)^e (1-xy)^b.$$

Теперь можно использовать стандартные формулы для интегральных представлений гипергеометрических функций

$$\int_0^1 dy y^p (1-y)^q (1-xy)^r = B(p+1, q+1) {}_2F_1\left(\begin{matrix} -r, & p+1 \\ p+q+2 \end{matrix} \middle| x\right),$$

$$\int_0^1 x^s (1-x)^t {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, & b \\ c \end{matrix} \middle| x\right) dx = B(s+1, t+1) {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, & b, & s+1 \\ s+t+2, & c \end{matrix} \middle| 1\right),$$

чтобы найти, что интегралы K и L допускают другое представление в терминах высших гипергеометрических функций. Здесь $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ является бета-функцией. А именно,

$$K = B(d+1, c+1)B(a+d+c+2, b+1) \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} -e, & a+d+c+2, & d+1 \\ a+d+c+3+b, & d+2+c \end{matrix} \middle| 1\right), \quad (\text{Б.8})$$

$$L = B(-a-b-d-e-c-2, e+1)B(-a-b-c-1, c+1) \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} -b, & -a-b-d-e-c-2, & -a-b-c-1 \\ -a-b-d-c-1, & -a-b \end{matrix} \middle| 1\right).$$

Уравнения (Б.5), (Б.6) и (Б.8) дают удобную для численных исследований форму. Отметим, что функции ${}_3F_2$ в единице удовлетворяют специальным тождествам, что упрощает ответ и приводит к (2.29).

Б.2 Контурные вычисления в теории с границей

Объемный член. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\text{Im}z > 0} d^2z (z\bar{z})^A [(1-z)(1-\bar{z})]^B |z-\bar{z}|^C. \quad (\text{Б.9})$$

Удобно расширить область интегрирования на всю комплексную плоскость:

$$I = \frac{2^C}{1 + e^{i\pi C}} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (x^2 + y^2)^A [(1-x)^2 + y^2]^B y^C. \quad (\text{Б.10})$$

Для практических вычислений удобно разложить этот интеграл в сумму голоморфной и антиголоморфной частей. Осуществляя поворот Вика $y \rightarrow iy(1-2i\epsilon)$ (с бесконечно малым $\epsilon > 0$) и вводя новые переменные $u = x - y$ и $v = x + y$, мы можем написать данный интеграл в факторизованном виде

$$I = \frac{i^{C+1}}{2(1 + e^{i\pi C})} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} du (v - i(v-u)\epsilon)^A (u + i(v-u)\epsilon)^A \cdot (1-u - i(v-u)\epsilon)^B (1-v + i(v-u)\epsilon)^B (v-u - i(v-u)\epsilon)^C. \quad (\text{Б.11})$$

На u -плоскости мы имеем три точки ветвления $u = -i\epsilon v$, $u = 1 - i(v-1)\epsilon$ и $u = v + i\epsilon$. Деформируя контур интегрирования, мы можем легко показать, что нетривиальные вклады приходят только от двух областей интегрирования, а именно, когда $0 < v < 1$ и $v > 1$,

$$I = \frac{i^{C+1}}{2(1 + e^{i\pi C})} [I_1 + I_2], \quad (\text{Б.12})$$

где

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_0^1 dv v^A (1-v)^B \left\{ e^{i\pi C} \int_v^1 du u^A (1-u)^B (u-v)^C \right. \\ & + e^{-i\pi C} \int_1^{\infty} du u^A (1-u)^B (u-v)^C \\ & + e^{i\pi(C+B)} \int_1^{\infty} du u^A (u-1)^B (u-v)^C + e^{-i\pi(C+B)} \int_{\infty}^1 du u^A (u-1)^B (u-v)^C \left. \right\}, \\ I_2 = & e^{i\pi B} \int_1^{\infty} dv v^A (1-v)^B \left\{ e^{i\pi(-B+C)} \int_v^{\infty} du u^A (u-1)^B (u-v)^C \right. \\ & + e^{i\pi(-B-C)} \int_{\infty}^v du u^A (u-1)^B (u-v)^C \left. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

В более компактной форме,

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2i \sin \pi C \int_0^1 dv v^{2A+C+1} (1-v)^B \int_0^1 du u^A (1-u)^C (1-vu)^B + \\
&\quad + 2i \sin \pi(C+B) \int_0^1 dv v^A (1-v)^B \int_0^1 du u^{-A-B-C-2} (1-u)^B (1-vu)^C, \\
I_2 &= 2i \sin \pi C \int_0^1 dv v^{-2A-2B-C-3} (1-v)^B \int_0^1 du u^{-A-B-C-2} (1-u)^C (1-vu)^B.
\end{aligned} \tag{Б.14}$$

Мы получаем следующее выражение

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi C}{2} \right)^{-1} \left[\sin \pi(C+B) I_0(A, B, -A-B-C-2, B, C) + \right. \\
&\quad \sin \pi C I_0(2A+C+1, B, A, C, B) + \\
&\quad \left. \sin \pi C I_0(-2A-2B-C-3, B, -A-B-C-2, C, B) \right],
\end{aligned} \tag{Б.15}$$

где

$$I_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) = \int_0^1 dv v^\alpha (1-v)^\beta \int_0^1 du u^\gamma (1-u)^\delta (1-vu)^\epsilon. \tag{Б.16}$$

Теперь мы используем стандартные формулы для интегральных представлений высших гипергеометрических функций

$$\begin{aligned}
I_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) &= B(\gamma+1, \delta+1) \int_0^1 dv v^\alpha (1-v)^\beta {}_2F_1(-\epsilon, \gamma+1, \gamma+\delta+2; x) = \\
&= B(\gamma+1, \delta+1) B(\alpha+1, \beta+1) {}_3F_2(-\epsilon, \gamma+1, \alpha+1; \gamma+\delta+2, \alpha+\beta+2; 1),
\end{aligned} \tag{Б.17}$$

где $B(x, y)$ – это бета-функция. В наших случаях интеграл I_0 появляется при специальных значениях параметров и может быть выражен в терминах гамма-

функций ввиду следующей формулы

$${}_3F_2(a, b, c; a - b + 1, a - c + 1; 1) = \frac{\Gamma(1 + a/2)\Gamma(1 + a - b)\Gamma(1 + a - c)\Gamma(1 + a/2 - b - c)}{\Gamma(1 + a)\Gamma(1 + a/2 - b)\Gamma(1 + a/2 - c)\Gamma(1 + a - b - c)}. \quad (\text{Б.18})$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I_0(A, B, -A - B - C - 2, B, C) &= \\ &= \frac{1}{2\pi^3} \sin \pi C \sin \pi \left(A + B + \frac{C}{2}\right) \sin \pi \left(A + \frac{C}{2}\right) \cdot J(A, B, C), \\ I_0(2A + C + 1, B, A, C, B) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi^3} \sin \frac{\pi C}{2} \sin \pi \left(A + B + \frac{C}{2}\right) \sin \pi (A + B + C) \cdot J(A, B, C), \quad (\text{Б.19}) \\ I_0(-2A - 2B - C - 3, B, -A - B - C - 2, C, B) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi^3} \sin \frac{\pi C}{2} \sin \pi \left(A + \frac{C}{2}\right) \sin \pi A \cdot J(A, B, C), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J(A, B, C) &= \\ &= \Gamma(A + 1)\Gamma(B + 1)\Gamma(C + 1)\Gamma\left(-\frac{C}{2}\right)\Gamma(-A - B - C - 1)\Gamma\left(-A - B - \frac{C}{2} - 1\right) \\ &\times \Gamma\left(B + \frac{C}{2} + 1\right)\Gamma\left(A + \frac{C}{2} + 1\right). \quad (\text{Б.20}) \end{aligned}$$

Подстановка (Б.19) в (Б.15) дает

$$I = -\frac{1}{4\pi^3} \left(\cos \frac{\pi C}{2}\right)^{-1} \sin \pi A \sin \pi B \sin \pi C \sin \pi (A + B + C) J(A, B, C). \quad (\text{Б.21})$$

Граничные члены. Здесь мы описываем вычисление интегралов, которые появляются при расчете коэффициента K_{12} . Параметризация границы выбирается следующим образом. Интервалы $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ обозначаются соответственно как C_1 , C_2 и C_3 . Соответствующие космологические параметры – это s_3 , s_1 и s_2 . Мы интересуемся следующими интегралами

$$I_{ij} = \int_{C_i} dx_1 \int_{C_j} dx_2 |x_1|^A |x_2|^A |1 - x_1|^B |1 - x_2|^B |x_1 - x_2|^C. \quad (\text{Б.22})$$

Учитывая, что $I_{ij} = I_{ji}$, достаточно рассмотреть $i \leq j$. Далее мы часто используем следующий результат для двумерного интеграла Сельберга

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 |x_1|^{\mu-1} |x_2|^{\mu-1} |1-x_1|^{\nu-1} |1-x_2|^{\nu-1} |x_1-x_2|^{2g} = \\ = 2 \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\mu+g)\Gamma(\nu+g)}{\Gamma(g)\Gamma(\mu+\nu+g)\Gamma(\mu+\nu+2g)}. \end{aligned} \quad (\text{Б.23})$$

Первый интеграл имеет вид интеграла Сельберга и может быть записан как

$$I_{11} = -\frac{1}{\pi^3} \sin \frac{\pi C}{2} \sin \pi(A+B+\frac{C}{2}) \sin \pi(A+B+C)N. \quad (\text{Б.24})$$

Интеграл I_{12} сводится к функции I_0 , представленной в (Б.17) (в предыдущем приложении), после $x_2 \rightarrow 1/x_2$,

$$I_{12} = I_0(A, B, -A-B-C-2, B, C). \quad (\text{Б.25})$$

Чтобы вычислить I_{13} , рассмотрим контурный интеграл в комплексной плоскости x_2 , так что контур проходит по вещественной оси выше точек ветвления 0, x_1 и 1. Контур может быть перемещен в бесконечность, и это дает следующее соотношение

$$I_{13} + e^{-i\pi A} \int_0^1 \int_0^{x_1} + e^{-i\pi(A+C)} \int_0^1 \int_{x_1}^1 + e^{-i\pi(A+C+B)} \int_0^1 \int_1^\infty = 0 \quad (\text{Б.26})$$

или

$$I_{13} + e^{-i\pi A} \int_0^1 \int_0^{x_1} + e^{-i\pi(A+C)} \left[I_{11} - \int_0^1 \int_0^{x_1} \right] + e^{-i\pi(A+C+B)} I_{12} = 0. \quad (\text{Б.27})$$

В интервале $(0, x_1)$ интеграл совпадает с $I_0(2A+C+1, B, A, C, B)$. Учитывая, что все интегралы вещественны, получим

$$\begin{aligned} I_{13} = -\cos \pi(A+C)I_{11} - \cos \pi(A+B+C)I_{12} + \\ + [\cos \pi(A+C) - \cos \pi A]I_0(2A+C+1, B, A, C, B). \end{aligned} \quad (\text{Б.28})$$

Интеграл I_{22} сводится к интегралу Сельберга после $x_2 \rightarrow 1/x_2$ и $x_2 \rightarrow 1/x_2$,

$$I_{22} = -\frac{1}{\pi^3} \sin \frac{\pi C}{2} \sin \pi \left(A + \frac{C}{2}\right) \sin \pi A J(A, B, C). \quad (\text{Б.29})$$

Для вычисления интеграла I_{23} мы проделываем тот же трюк, что и для интеграла I_{13} . Выполняются следующие соотношения

$$I_{23} + e^{-i\pi A} \int_1^\infty \int_0^1 + e^{-i\pi(A+B)} \int_1^\infty \int_1^{x_1} + e^{-i\pi(A+C+B)} \int_1^\infty \int_{x_1}^\infty = 0 \quad (\text{Б.30})$$

и

$$I_{23} + e^{-i\pi A} I_{12} + e^{-i\pi(A+B)} [I_{22} - \int_1^\infty \int_{x_1}^\infty] + e^{-i\pi(A+C+B)} \int_1^\infty \int_{x_1}^\infty = 0. \quad (\text{Б.31})$$

В интервале (x_1, ∞) интеграл совпадает с $I_0(-2A - 2B - C - 3, B, -A - B - C - 2, C, B)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{23} = & -\cos \pi A I_{12} - \cos \pi(A + B) I_{22} + [\cos \pi(A + B) - \cos \pi(A + B + C)] \\ & \cdot I_0(-2A - 2B - C - 3, B, -A - B - C - 2, C, B). \end{aligned} \quad (\text{Б.32})$$

Интеграл I_{33} находится из соотношения

$$\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{x_1} + e^{-i\pi C} \int_{-\infty}^0 \int_{x_1}^0 + e^{-i\pi(C+A)} \int_{-\infty}^0 \int_0^1 + e^{-i\pi(A+C+B)} \int_{-\infty}^0 \int_1^\infty = 0. \quad (\text{Б.33})$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{x_1} = \int_{-\infty}^0 \int_{x_1}^0 = \frac{I_{33}}{2}, \quad (\text{Б.34})$$

мы получаем

$$\frac{1 + e^{-i\pi C}}{2} I_{33} + e^{-i\pi(C+A)} I_{13} + e^{-i\pi(A+C+B)} I_{23} = 0 \quad (\text{Б.35})$$

и

$$I_{33} = -\frac{1}{\cos \frac{\pi C}{2}} \left[\cos \pi \left(A + \frac{C}{2}\right) I_{13} + \cos \pi \left(A + B + \frac{C}{2}\right) I_{23} \right]. \quad (\text{Б.36})$$

Вычисляя граничные интегралы, мы, таким образом, получаем следующие выражения

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= -\frac{1}{\pi^3} \sin \frac{\pi C}{2} \sin \pi \left(A + B + \frac{C}{2} \right) \sin \pi (A + B + C) J(A, B, C), \\
 I_{12} &= -\frac{1}{2\pi^3} \sin \pi C \sin \pi \left(A + B + \frac{C}{2} \right) \sin \pi \left(A + \frac{C}{2} \right) J(A, B, C), \\
 I_{13} &= -\frac{1}{2\pi^3} \sin \pi C \sin \pi \left(A + B + \frac{C}{2} \right) \sin \pi \left(B + \frac{C}{2} \right) J(A, B, C), \\
 I_{22} &= -\frac{1}{\pi^3} \sin \frac{\pi C}{2} \sin \pi \left(A + \frac{C}{2} \right) \sin \pi A J(A, B, C), \\
 I_{23} &= -\frac{1}{2\pi^3} \sin \pi C \sin \pi \left(A + \frac{C}{2} \right) \sin \pi \left(B + \frac{C}{2} \right) J(A, B, C), \\
 I_{33} &= -\frac{1}{\pi^3} \sin \frac{\pi C}{2} \sin \pi \left(B + \frac{C}{2} \right) \sin \pi B J(A, B, C).
 \end{aligned} \tag{Б.37}$$

Приложение В

В.1 Баланс числа духов на сфере

Сохранение фермионного духового тока обеспечивает следующее соотношение

$$\oint_C \frac{du}{2\pi i} \langle J^{bc}(u) X(z_1, \dots, z_n) \rangle = (N_c - N_b) \langle X(z_1, \dots, z_n) \rangle, \quad (\text{B.1})$$

где $X(z_1, \dots, z_n)$ обозначает множество физических полей, контур C представляет собой любой контур, охватывающий все вставки полей, и N_c и N_b есть общие количества духов в X . С другой стороны мы можем деформировать контур, переместив его в бесконечность. Для этого мы должны знать закон преобразования J^{bc} . Во-первых, определим его инфинитезимальную версию. Канонические операторные произведения

$$\begin{aligned} T(u)b(z) &= \frac{2}{(u-z)^2}b(z) + \frac{1}{u-z}b'(z), \\ T(u)c(z) &= \frac{-1}{(u-z)^2}c(z) + \frac{1}{u-z}c'(z), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

отвечают следующей духовой части тензора энергии-импульса

$$T^{bc}(u) = :c(u)b(u): + 2:\partial c(u)b(u):, \quad (\text{B.3})$$

который определяет (см. (3.24)) сингулярную часть операторного произведения

$$T^{bc}(u)J^{bc}(z) = -\frac{3}{(u-z)^3} + \frac{J^{bc}(z)}{(u-z)^2} + \frac{\partial J^{bc}(z)}{(u-z)}. \quad (\text{B.4})$$

Вместе с определением

$$\delta_\epsilon = \oint \epsilon(u)T(u)\frac{du}{2\pi i}, \quad (\text{B.5})$$

это приводит к

$$\delta_\epsilon J^{bc}(z) = -\frac{3}{2}\epsilon''(z) + \epsilon'(z)J^{bc}(z) + \epsilon \frac{\partial J^{bc}(z)}{\partial z}. \quad (\text{B.6})$$

Данная инфинитезимальная форма позволяет реконструировать конечную версию преобразования

$$J^{bc}(z) \rightarrow \tilde{J}^{bc}(z) = \frac{dw}{dz} J^{bc}(w(z)) - \frac{3}{2} \frac{w''}{w'} \quad \text{при } z \rightarrow w(z). \quad (\text{B.7})$$

Учитывая также трансформационные свойства физических полей, мы делаем инверсию корреляционной функции в (B.1),

$$\oint_C \frac{du}{2\pi i} \langle J^{bc}(u) X \rangle = \oint_{C_\infty} \frac{du}{2\pi i} \left[-\frac{1}{u^2} \langle J^{bc}(1/u) X(1/z_1, \dots, 1/z_n) \rangle + \frac{3}{u} \langle X(1/z_1, \dots, 1/z_n) \rangle \right] = 3 \langle X(1/z_1, \dots, 1/z_n) \rangle, \quad (\text{B.8})$$

где первый член равняется нулю, поскольку $1/u = 0$ является регулярной точкой корреляционной функции. Снова выполняя инверсию коррелятора $\langle X(1/z_1, \dots, 1/z_n) \rangle$, мы получаем

$$(N_c - N_b - 3) \langle X(z_1, \dots, z_n) \rangle = 0, \quad (\text{B.9})$$

что означает, что либо $N_c - N_b = 3$, либо соответствующий коррелятор равен нулю.

Анализ для бозонного духового тока $J^{\beta\gamma}(z)$ напрямую следует из анализа для фермионного духового тока. Рассмотрим интеграл

$$\oint_C \frac{du}{2\pi i} \langle J^{\beta\gamma}(u) X(z_1, \dots, z_n) \rangle = (-N_{\delta(\gamma)} + N_\gamma + N_{\delta(\beta)} - N_\beta) \langle X(z_1, \dots, z_n) \rangle, \quad (\text{B.10})$$

$$T^{\beta\gamma}(u) = -\frac{1}{2} : \beta'(u) \gamma(u) : - \frac{3}{2} : \gamma'(u) \beta(u) :, \quad (\text{B.11})$$

и

$$T^{\beta\gamma}(u) J^{\beta\gamma}(z) = \frac{2}{(u-z)^3} + \frac{J^{\beta\gamma}(z)}{(u-z)^2} + \frac{\partial J^{\beta\gamma}(z)}{(u-z)}. \quad (\text{B.12})$$

Следовательно, инфинитезимальная форма преобразования имеет вид

$$\delta_\epsilon J^{\beta\gamma}(z) = \epsilon''(z) + \epsilon'(z)J^{\beta\gamma}(z) + \epsilon \frac{\partial J^{\beta\gamma}(z)}{\partial z}, \quad (\text{B.13})$$

а конечная версия есть

$$J^{\beta\gamma}(z) \rightarrow \tilde{J}^{\beta\gamma}(z) = \frac{dw}{dz} J^{\beta\gamma}(w(z)) + \frac{w''}{w'} \quad \text{при } z \rightarrow w(z). \quad (\text{B.14})$$

Единственное отличие состоит в другом коэффициенте в законе преобразования. Таким образом, мы заключаем, что

$$(-N_{\delta(\gamma)} + N_\gamma + N_{\delta(\beta)} - N_\beta + 2)\langle X(z_1, \dots, z_n) \rangle = 0. \quad (\text{B.15})$$

В.2 Некоторые свойства БРСТ когомологий

БРСТ свойства поля \tilde{W}_a . Здесь мы доказываем, что \tilde{W}_a замкнуто. Т.е. мы должны проверить, что

$$Q\tilde{W}_a = Q(G_{-1/2}^{M+L} + \frac{1}{2}G_{-1/2}^g)|\Omega_a\rangle_0 = Q(G_{-1/2}^{M+L} - b_{-1}\gamma_{1/2})|\Omega_a\rangle_0 = 0, \quad (\text{B.16})$$

где второе равенство следует из разложения $G_{1/2}^g$ по модам. В соответствии с определением (4.104) разобьем оператор Q на три части Q_1 , Q_2 и Q_3 . Тогда

$$\begin{aligned} Q_1 G_{-1/2}^{M+L} |\Omega_a\rangle_0 &= \frac{1}{2} c_0 G_{-1/2} |\Omega_a\rangle_0, \\ Q_2 G_{-1/2}^{M+L} |\Omega_a\rangle_0 &= \left(\gamma_{1/2} L_{-1} + \gamma_{-1/2} + \gamma_{1/2}^2 G_{-1/2} b_{-1} - \frac{1}{4} c_0 G_{-1/2} \right) |\Omega_a\rangle_0, \\ Q_3 G_{-1/2}^{M+L} |\Omega_a\rangle_0 &= -\frac{1}{4} c_0 G_{-1/2} |\Omega_a\rangle_0. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Сумма этих вкладов есть

$$Q G_{-1/2}^{M+L} |\Omega_a\rangle_0 = (\gamma_{1/2} L_{-1} + \gamma_{-1/2} + \gamma_{1/2}^2 G_{-1/2} b_{-1}) |\Omega_a\rangle_0. \quad (\text{B.18})$$

Аналогично, действие оператора Q на второй член в \tilde{W}_a имеет вид

$$\begin{aligned} Q_1 b_{-1} \gamma_{1/2} |\Omega_a\rangle_0 &= \left(\gamma_{1/2} L_{-1} + \frac{1}{2} \gamma_{-1/2} + \frac{3}{4} c_0 b_{-1} \gamma_{1/2} \right) |\Omega_a\rangle_0, \\ Q_2 b_{-1} \gamma_{1/2} |\Omega_a\rangle_0 &= \left(\gamma_{1/2}^2 G_{-1/2} b_{-1} + \frac{1}{2} \gamma_{-1/2} - \frac{1}{2} c_0 b_{-1} \gamma_{1/2} \right) |\Omega_a\rangle_0, \\ Q_3 b_{-1} \gamma_{1/2} |\Omega_a\rangle_0 &= -\frac{1}{4} c_0 b_{-1} \gamma_{1/2} |\Omega_a\rangle_0. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Снова суммируя эти вклады, получаем

$$Q b_{-1} \gamma_{1/2} |\Omega_a\rangle_0 = (\gamma_{1/2} L_{-1} + \gamma_{-1/2} + \gamma_{1/2}^2 G_{-1/2} b_{-1}) |\Omega_a\rangle_0. \quad (\text{B.20})$$

Это совпадает с действием БРСТ заряда на первый член (B.18). Итак, мы убедились, что поля \tilde{W}_a образуют класс когомологий.

Основное соотношение между БРСТ когомологиями. Рассмотрим сначала действие голоморфного БРСТ заряда на дискретное состояние $O_{m,n}$. Мы предполагаем, что имеем дело с модулем Верма в секторе Лиувилля (т.е. вырожденное представление не факторизуется на подмодуль сингулярного вектора). Из соображений размерности, а также учитывая духовый заряд оператора Q , мы можем сделать вывод, что наиболее общая форма этого действия имеет вид

$$Q O_{m,n} = (x G_{-1/2}^M + y G_{-1/2}^L + z G_{-1/2}^g) \Phi_{m,n} D_{m,n}^L V_{m,n} c. \quad (\text{B.21})$$

Действительно, исключение сингулярного вектора в таком случае обеспечивает тот факт, что $O_{m,n}$ является БРСТ точным. Явный расчет дает $x = y = 1$ и $z = -1/2$. Учитывая действие антиголоморфного \bar{Q} , мы получаем основное соотношение (3.53). Рассмотрим теперь «квазидискретное» состояние

$$O_a = \bar{H}_{m,n} H_{m,n} \Phi_{m,n} V_a, \quad (\text{B.22})$$

для которого параметр a принимает значение близкое к вырожденному, т.е. разность $\epsilon = a - a_{m,n}$ мала. Из аналитичности очевидно, что

$$\bar{Q} Q O_a = [\bar{J}_{m,n} + \epsilon \bar{K}_{m,n}] [J_{m,n} + \epsilon K_{m,n}] \Phi_{m,n} V_a, \quad (\text{B.23})$$

где $J_{m,n}$ определено в (3.52) и $K_{m,n}$ является оператором, построенным из супервирасоровских генераторов всех трех секторов. Дифференцирование (B.23) по a дает

$$\begin{aligned}\bar{Q}QO'_a &= \bar{J}_{m,n}J_{m,n}\Phi_{m,n}V'_{m,n} \\ &= \left(\bar{G}_{-1/2}^{M+L} - \frac{1}{2}\bar{G}_{-1/2}^g\right)\left(G_{-1/2}^{M+L} - \frac{1}{2}G_{-1/2}^g\right)\Phi_{m,n}\bar{D}_{m,n}^L D_{m,n}^L V'_{m,n}\bar{c}c, \quad (\text{B.24})\end{aligned}$$

поскольку член

$$(\bar{K}_{m,n}J_{m,n} + K_{m,n}\bar{J}_{m,n})\Phi_{m,n}V_{m,n} \quad (\text{B.25})$$

исчезает в результате действия операторов $D_{m,n}^L$ и $\bar{D}_{m,n}^L$ внутри $J_{m,n}$ и $\bar{J}_{m,n}$ на $V_{m,n}$. Соотношение (B.24) в сочетании с высшими уравнениями движения (3.14) приводит к (3.54).

В.3 Разложение операторного произведения $O_{1,3}W_a$

Вычислим по отдельности вклад каждого члена в (3.60) в операторное произведение $O_{1,3}(x)W_a(0)$. Первый член дает (пишем явно только голоморфную часть)

$$\begin{aligned}\Phi'_{13}(x)V_{13}(x)\Phi_{a-b}(0)V_a(0)c(0)\delta(\gamma(0)) \\ &= \left(x^{1-ab}C_+^M(a-b)\Phi_{a-2b}(0) + x^{1-b^2}\tilde{C}_0^M(a-b)\Psi_{a-b}(0) + x^{ab-b^2}C_-^M(a-b)\Phi_a(0)\right)' \\ &\quad \times \left(x^{ab}C_-^L(a)V_{a-b}(0) + x^{1+b^2}\tilde{C}_0^L(a)\Lambda_{a-b}(0) + x^{1-ab+b^2}C_+^L(a)V_{a+b}(0)\right)C(0)\delta(\gamma(0)) \\ &= (1-ab)C_+^{(M)}(a-b)C_-(a)W_{a-b}(0) + (ab-b^2)C_-^{(M)}(a-b)C_+(a)W_{a+b}(0).\end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Вклад второго члена в (3.60) имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi_{13}(x)V'_{13}(x)\Phi_{a-b}(0)V_a(0)C(0)\delta(\gamma(0)) \\ &= abC_+^M(a-b)C_-^L(a)W_{a-b}(0) + (1-ab+b^2)C_-^M(a-b)C_+^L(a)W_{a+b}(0).\end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Третий член дает

$$\Psi_{13}(x)\Lambda_{13}(x)\Phi_{a-b}(0)V_a(0)c(0)\delta(\gamma(0)) = \tilde{C}_0^M(a-b)\tilde{C}_0^L(a)W_a(0). \quad (\text{B.28})$$

Используя основное операторное произведение в духовом секторе, получаем

$$\beta(x)\delta(\gamma(0)) = \frac{\delta'(\gamma(0))}{x} \quad (\text{B.29})$$

и

$$\gamma(x)\delta'(\gamma(0)) \sim \gamma(0)\delta'(\gamma(0)) \sim -\delta(\gamma(0)). \quad (\text{B.30})$$

Откуда, вклад четвертого члена есть

$$\begin{aligned} & \Phi_{13}(x)\Phi_{a-b}(0)V_{13}(x)V_a(0)\beta(x)\gamma(x)c(0)\delta(\gamma(0)) = \\ & -C_+^M(a-b)C_-^L(a)W_{a-b}(0) - C_-^M(a-b)C_+^L(a)W_{a+b}(0). \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Последний член дает

$$\begin{aligned} & \Phi_{13}(x)\Phi_{a-b}(0)V_{13}(x)V_a(0)b(x)c(x)c(0)\delta(\gamma(0)) = \\ & C_+^M(a-b)C_-^L(a)W_{a-b}(0) + C_-^M(a-b)C_+^L(a)W_{a+b}(0). \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Собирая все вместе, а также учитывая антиголоморфную часть, мы получаем (3.66).

Трехточечное корреляционное число в СЛГ. Здесь мы явно получаем трехточечное число (3.74),

$$\langle\langle a_1 a_2 a_3 \rangle\rangle_{\text{SLG}} = C_{\text{I}}^{\text{SLG}}(a_1, a_2, a_3) + C_{\text{II}}^{\text{SLG}}(a_1, a_2, a_3), \quad (\text{B.33})$$

где

$$\begin{aligned} C_{\text{I}}^{\text{SLG}}(a_1, a_2, a_3) &= C^L(a_1, a_2, a_3)\tilde{C}^M(a_1 - b, a_2 - b, a_3 - b), \\ C_{\text{II}}^{\text{SLG}}(a_1, a_2, a_3) &= \tilde{C}^L(a_1, a_2, a_3)C^M(a_1 - b, a_2 - b, a_3 - b). \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Вместо того чтобы рассматривать эти два сектора по отдельности, мы находим более конструктивным решить соотношения сдвига для структурных констант

СЛГ. Ниже мы показываем, что

$$\frac{C_{I,II}^{\text{SLG}}(a_1 + b, a_2, a_3)}{C_{I,II}^{\text{SLG}}(a_1 - b, a_2, a_3)} = [\pi \mu b^2 \gamma(1/2 + b^2/2)]^{-2} (1/2 - ba + b^2/2)(1/2 - ba - b^2/2) \times \left[\frac{\gamma(ab + b^2/2 + 1/2)}{\gamma(ab - 3b^2/2 + 1/2)} \right]^{1/2}. \quad (\text{B.35})$$

Эти соотношения сдвига дают

$$\langle\langle a_1 a_2 a_3 \rangle\rangle_{\text{SLG}} = \text{const} \prod_{i=1}^3 N(a_i), \quad (\text{B.36})$$

где $N(a)$ определен в ф-ле (3.69). Чтобы определить константу, мы берем $a_i = b$. Соответствующие структурные константы в материальном секторе есть $C^{\text{M}}(0,0,0) = 1$ и $\tilde{C}^{\text{M}}(0,0,0) = 0$. Также, имея в виду, что $C^{\text{L}}(b,b,b)$ может быть определено из (3.9) и выражается только в терминах гамма-функций, мы заключаем, что $\text{const} = \Omega(b)$ (см. ф-лу (3.76)). Соотношения сдвига для структурных констант в СЛГ (B.35) получены путем объединения соответствующих соотношений сдвига в Лиувиллевском и материальном секторах,

$$\frac{C_{\text{I}}^{\text{SLG}}(a_1 + b, a_2, a_3)}{C_{\text{I}}^{\text{SLG}}(a_1 - b, a_2, a_3)} = \frac{C^{\text{L}}(a_1 + b, a_2, a_3) \tilde{C}^{\text{M}}(a_1, a_2 - b, a_3 - b)}{C^{\text{L}}(a_1 - b, a_2, a_3) \tilde{C}^{\text{M}}(a_1 - 2b, a_2 - b, a_3 - b)}, \quad (\text{B.37})$$

что следует из соотношений бутстрапа и свойств монодромии дифференциального уравнения, отвечающего исключению сингулярного вектора. Для полноты мы воспроизведем здесь две основные формулы, касающиеся Лиувиллевского сектора в [58]. Первая имеет вид

$$\frac{C_{-}^{\text{L}}(a_1) C_{a_1+b, a_2, a_3}^{\text{L}}}{C_{+}^{\text{L}}(a_1) C_{a_1-b, a_2, a_3}^{\text{L}}} = - \frac{\gamma(ba_1) \gamma(ba_1 - b^2) \gamma^2(1/2 - b^2/2 + ba_1)}{(1/2 - ba_1 + b^2/2)^2} \times \frac{\gamma(1/2 + ba_{2+3-1}/2) \gamma(ba_{2+3-1}/2 - b^2/2)}{\gamma(1/2 + ba_{1+3-2}/2) \gamma(ba_{1+3-2}/2 - b^2/2)} \times \frac{\gamma(3/2 - ba_{1+2+3}/2 + b^2) \gamma(1 - ba_{1+2+3}/2 + b^2/2)}{\gamma(1/2 + ba_{1+2-3}/2) \gamma(ba_{1+2-3}/2 - b^2/2)}, \quad (\text{B.38})$$

а вторая есть

$$\begin{aligned}
\frac{C_-^L(a_1)\tilde{C}^L(a_1+b,a_2,a_3)}{C_+^L(a_1)\tilde{C}^L(a_1-b,a_2,a_3)} &= \frac{\gamma(ba_1)\gamma(ba_1-b^2)}{\gamma(ba_{1+2-3}/2)\gamma(ba_{1-2+3}/2)} \\
&\times \frac{\gamma(a_1b-b^2/2+1/2)\gamma(a_1b-b^2/2-1/2)}{\gamma(ba_{1+2+3}/2-b^2)\gamma((1+ba_{1-2+3}-b^2)/2)} \\
&\times \frac{\gamma(ba_{-1+2+3}/2)\gamma((1+ba_{-1+2+3}-b^2)/2)}{\gamma((-1+ba_{1+2+3}-b^2)/2)\gamma((1+ba_{1+2-3}-b^2)/2)} \\
&= S(a_1,a_2,a_3). \tag{B.39}
\end{aligned}$$

Учитывая (3.63), мы получаем

$$\begin{aligned}
\frac{C^L(a_1+b,a_2,a_3)}{C^L(a_1-b,a_2,a_3)} &= \left[\pi\mu b^2 \gamma\left(\frac{Qb}{2}\right) \right]^{-2} \frac{\gamma(ba_1)\gamma(ba_1-b^2)}{\gamma(1/2+ba_{1+3-2}/2)} \\
&\times \frac{\gamma(a_1b+b^2/2+1/2)\gamma(a_1b-b^2/2+1/2)}{\gamma(ba_{1+3-2}/2-b^2/2)} \\
&\times \frac{\gamma(1-ba_{1+2+3}/2+b^2/2)\gamma(3/2-ba_{1+2+3}/2+b^2)}{\gamma(1/2+ba_{1+2-3}/2)} \\
&\times \frac{\gamma(1/2+ba_{2+3-1}/2)\gamma(ba_{2+3-1}/2-b^2/2)}{\gamma(ba_{1+2-3}/2-b^2/2)} \tag{B.40}
\end{aligned}$$

из (B.38). Соотношения сдвига для структурных констант в материальном секторе могут быть получены, начиная с соответствующих соотношений в секторе Лиувилля, в два этапа. Во-первых, поменяем нормировку полей в соответствии со стандартным требованием $\langle \Phi_a \Phi_a \rangle = 1$ в материальном секторе. В этой нормировке специальные структурные константы совпадают с трехточечными функциями (чтобы отличать эти структурные константы от оригинальных, мы не маркируем их индексом L):

$$\begin{aligned}
C_-(a) &= C(-b,a,a+b), \\
C_+(a) &= C(-b,a,a-b). \tag{B.41}
\end{aligned}$$

Полагая $a_2 = a_1$ и $a_3 = -b$ в (B.38), получаем

$$\left[\frac{C_-(a_1)}{C_+(a_1)} \right]^2 = \frac{\gamma(a_1b-b^2/2+1/2)\gamma(-a_1b+3b^2/2+3/2)}{\gamma(-a_1b+b^2/2+3/2)\gamma(a_1b+b^2/2+1/2)} = M(a_1). \tag{B.42}$$

Объединяя это соотношение с (B.39), мы выводим

$$\frac{\tilde{C}(a_1 + b, a_2, a_3)}{\tilde{C}(a_1 - b, a_2, a_3)} = S(a_1, a_2, a_3) M^{-1/2}(a_1). \quad (\text{B.43})$$

Второй шаг теперь состоит в замене $a_i \rightarrow i(a_i - b)$ и $b \rightarrow -ib$,

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{C}^M(a_1, a_2 - b, a_3 - b)}{\tilde{C}^M(a_1 - 2b, a_2 - b, a_3 - b)} = \frac{M^{1/2}(i(a_1 - b); -ib)}{S(i(a_1 - b), i(a_2 - b), i(a_3 - b); -ib)} = \\ & = \frac{\gamma(a_1 b - b^2/2 + 1/2) \gamma(-a_1 b - b^2/2 + 3/2)}{\gamma(-a_1 b + b^2/2 + 3/2) \gamma(a_1 b - 3b^2/2 + 1/2)} [\gamma(ba_1)]^{-1/2} \\ & \times [\gamma(ba_1 - b^2) \gamma(a_1 b + b^2/2 + 1/2) \gamma(a_1 b - b^2/2 + 1/2)]^{-1/2} \\ & \times \frac{\gamma(1/2 + ba_{1+3-2}/2) \gamma(ba_{1+3-2}/2 - b^2/2)}{\gamma(1 - ba_{1+2+3}/2 + b^2/2) \gamma(3/2 - ba_{1+2+3}/2 + b^2)} \\ & \times \frac{\gamma(1/2 + ba_{1+2-3}/2) \gamma(ba_{1+2-3}/2 - b^2/2)}{\gamma(1/2 + ba_{2+3-1}/2) \gamma(ba_{2+3-1}/2 - b^2/2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Отметим, что зависимость от гамма-функций, содержащих различные комбинации a_i в (B.40) и (B.44) в точности сокращается, и мы получаем (B.35).

B.4 Специальные функции Барнса

Здесь мы собираем определения и некоторые свойства специальных функций Γ_b , Υ_b и S_b . Двойная гамма-функция, введенная Барнсом, определяется следующим образом

$$\log \Gamma_2(s | \omega_1, \omega_2) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} (s + n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2)^{-t} \right)_{t=0}.$$

Гамма-функция Барнса определяется как

$$\Gamma_b(x) \equiv \frac{\Gamma_2(x | b, b^{-1})}{\Gamma_2(Q/2 | b, b^{-1})}. \quad (\text{B.45})$$

Функция $\Gamma_b(x)$ удовлетворяет функциональным соотношениям

$$\Gamma_b(x+b) = \frac{\sqrt{2\pi}b^{bx-\frac{1}{2}}}{\Gamma(bx)}\Gamma_b(x),$$

$$\Gamma_b(x+1/b) = \frac{\sqrt{2\pi}b^{-\frac{x}{b}+\frac{1}{2}}}{\Gamma(x/b)}\Gamma_b(x)$$

и является мероморфной функцией по x , полюсы которой расположены в точках $x = -nb - mb^{-1}, n, m \in \mathbb{N}$. Интегральное представление сходится при $0 < \operatorname{Re}x$:

$$\log\Gamma_b(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\frac{e^{-xt} - e^{-Qt/2}}{(1 - e^{-bt})(1 - e^{-t/b})} - \frac{(Q/2 - x)^2}{2} e^{-t} - \frac{Q/2 - x}{t} \right].$$

Синус-функция Барнса определяется как

$$S_b(x) \equiv \frac{\Gamma_b(x)}{\Gamma_b(Q-x)}. \quad (\text{B.46})$$

Соотношения сдвига имеют вид

$$S_b(x+b) = 2\sin(\pi bx)S_b(x),$$

$$S_b(x+1/b) = 2\sin(\pi x/b)S_b(x),$$

и $S_b(x)$ является мероморфной функцией по x , полюсы которой расположены в точках $x = -nb - mb^{-1}, n, m \in \mathbb{N}$, а нули – в точках $x = Q + nb + mb^{-1}, n, m \in \mathbb{N}$. Интегральное представление сходится в полосе $0 < \operatorname{Re}x < Q$:

$$\log S_b(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\frac{\sinh(\frac{Q}{2} - x)t}{2\sinh(\frac{bt}{2})\sinh(\frac{t}{2b})} - \frac{(Q-2x)}{t} \right].$$

Наконец Υ -функция определяется как

$$\Upsilon_b(x)^{-1} \equiv \Gamma_b(x)\Gamma_b(Q-x). \quad (\text{B.47})$$

Функциональные соотношения имеют вид

$$\Upsilon_b(x+b) = \frac{\Gamma(bx)}{\Gamma(1-bx)} b^{1-2bx} \Upsilon_b(x),$$

$$\Upsilon_b(x+1/b) = \frac{\Gamma(x/b)}{\Gamma(1-x/b)} b^{2x/b-1} \Upsilon_b(x),$$

и $\Upsilon_b(x)$ является целой функцией по x , нули которой расположены в точках $x = -nb - mb^{-1}$ и $x = Q + nb + mb^{-1}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Интегральное представление сходится в полосе $0 < \operatorname{Re} x < Q$:

$$\log \Upsilon_b(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\left(\frac{Q}{2} - x \right)^2 e^{-t} - \frac{\sinh^2\left(\frac{Q}{2} - x\right)\frac{t}{2}}{\sinh\frac{bt}{2}\sinh\frac{t}{2b}} \right].$$

Приложение Г

Г.1 Структурные константы Фробениусовой алгебры

Начнем с нескольких замечаний по поводу закона умножения на кокасательном расслоении в исходных координатах u^i ,

$$du^i \cdot du^j = \tilde{C}_k^{ij}(u) du^k. \quad (\text{Г.1})$$

На Фробениусовых многообразиях A_q типа мы можем построить так называемые канонические¹ координаты w^i , метрика в которых является диагональной (но не постоянной). Умножение касательных векторов в канонических координатах имеет простой вид

$$\frac{\partial}{\partial w^i} \cdot \frac{\partial}{\partial w^j} = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial w^i}. \quad (\text{Г.2})$$

Если на кокасательном пространстве мы определим

$$dQ(z) = du_1 z^{q-2} + du_2 z^{q-3} + \dots + du_{q-1} \quad (\text{Г.3})$$

с помощью канонических координат, то сможем легко проверить полезное свойство закона умножения

$$dQ(y) \cdot dQ(z) = \frac{Q'(y)dQ(z) - Q'(z)dQ(y)}{y - z}. \quad (\text{Г.4})$$

В левой части (Г.4) мы имеем

$$\sum_{m,n=0}^q du_{m-1} \cdot du_{n-1} y^{q-m} z^{q-n}, \quad (\text{Г.5})$$

¹Отметим, что на Фробениусовом многообразии существует три естественных выбора – исходные, плоские и канонические координаты, – и каждый из них имеет свои преимущества.

а в правой части у нас есть следующее

$$\frac{1}{y-z} \sum_{m,n=0}^q (q-m) u_{m-1} du_{n-1} [y^{q-m-1} z^{q-n} - z^{q-m-1} y^{q-n}]. \quad (\Gamma.6)$$

Выражение в скобках теперь может быть записано в виде

$$[\dots] = \begin{cases} (y-z) y^{q-m-2} z^{q-n} \sum_{k=0}^{n-m-2} \left(\frac{z}{y}\right)^k, & n-m \geq 2 \\ 0, & n-m = 1, \\ (y-z) y^{q-n-1} z^{q-m-1} \sum_{k=0}^{m-n} \left(\frac{z}{y}\right)^k, & n-m \leq 0. \end{cases} \quad (\Gamma.7)$$

Следовательно, правая часть в (Г.4) становится

$$\sum_{m,n=0}^q (q-m) u_{m-1} du_{n-1} [\theta(n-m-2) \sum_{k=0}^{n-m-2} y^{q-m-k-2} z^{q-n+k} - \theta(m-n) \sum_{k=0}^{m-n} y^{q-n-k-1} z^{q-m+k-1}], \quad (\Gamma.8)$$

где $\theta(x) = 1$, если $x \geq 0$, и 0 в противном случае. Собирая члены $y^i z^j$ в (Г.4), мы получаем следующий ответ [66]

$$\tilde{C}_i^{jk} = (q+i-j-k+1) u_{j+k-i-2} \Theta(i,j,k), \quad (\Gamma.9)$$

где мы вводим функцию

$$\Theta(i,j,k) = \begin{cases} 1 & \text{если } j,k \leq i \text{ и } j+k > i, \\ -1 & \text{если } j,k > i \text{ и } j+k \leq i+q, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (\Gamma.10)$$

и $u_{-1} = 1, u_0 = 0$. С другой стороны, метрика в плоских координатах является простой, и опускание индекса α состоит просто в его замене на $q - \alpha$. Таким образом,

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial v^{q-\alpha}}{\partial u^i} \frac{\partial v^{q-\beta}}{\partial u^j} \frac{\partial u^k}{\partial v^\gamma} \tilde{C}_k^{ij}. \quad (\Gamma.11)$$

Мы можем написать разложение в окрестности \mathbf{v}_* ($\delta\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_*$):

$$\frac{\partial u^k}{\partial v^\gamma}(\mathbf{v}) = U_\gamma^k + \delta v^\rho U_{\rho\gamma}^k + \dots, \quad (\text{Г.12})$$

$$\frac{\partial v^\gamma}{\partial u^k}(\mathbf{v}) = V_k^\gamma + \delta v^\rho V_{\rho k}^\gamma + \dots, \quad (\text{Г.13})$$

коэффициенты в котором могут быть найдены в терминах биномиальных коэффициентов,

$$U_\gamma^k = \binom{\frac{\gamma-k+q-2}{2}}{\frac{\gamma+k-q}{2}} \left(\frac{v_1}{2}\right)^{\frac{\gamma+k-q}{2}} \quad \text{если} \quad \frac{\gamma+k-q}{2} \in \mathbb{N}, \quad (\text{Г.14})$$

$$V_j^\rho = \frac{2\rho}{q+\rho-j} \binom{q-j-1}{\frac{q-\rho-j}{2}} \left(-\frac{v_1}{2}\right)^{\frac{q-\rho-j}{2}} \quad \text{если} \quad \frac{q-\rho-j}{2} \in \mathbb{N}, \quad (\text{Г.15})$$

$$U_{\alpha\beta}^k = \frac{q-k}{q} \binom{\frac{\alpha+\beta-k-1}{2}}{q-k} \left(\frac{v_1}{2}\right)^{\frac{k+\alpha+\beta-2q-1}{2}} \quad \text{если} \quad \frac{k+\alpha+\beta-2q-1}{2} \in \mathbb{N}, \quad (\text{Г.16})$$

$$V_{\beta k}^\alpha = -\frac{\alpha}{q} \binom{q-1-k}{\frac{\beta-\alpha-k-1}{2}} \left(-\frac{v_1}{2}\right)^{\frac{\beta-\alpha-k-1}{2}} \quad \text{если} \quad \frac{\beta-\alpha-k-1}{2} \in \mathbb{N}. \quad (\text{Г.17})$$

Если условия в (Г.14)–(Г.17) не выполняются, то соответствующие значения равны нулю.

В частности, из (Г.14) мы получаем $\mathbf{u}(\mathbf{v}_*)$,

$$u^k = \frac{2q}{k+1} \binom{\frac{2q-k-1}{2}}{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{v_1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2}} \quad \text{if} \quad \frac{k+1}{2} \in \mathbb{N}. \quad (\text{Г.18})$$

В этих обозначениях мы имеем

$$C_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{v}_*) = V_i^{q-\alpha} V_j^{q-\beta} U_\gamma^k \tilde{C}_k^{ij}, \quad (\text{Г.19})$$

$$\partial_\rho C_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{v}_*) = \quad (\text{Г.20})$$

$$V_{\rho i}^{q-\alpha} V_j^{q-\beta} U_\gamma^k \tilde{C}_k^{ij} + V_i^{q-\alpha} V_{\rho j}^{q-\beta} U_\gamma^k \tilde{C}_k^{ij} + V_i^{q-\alpha} V_j^{q-\beta} U_{\rho\gamma}^k \tilde{C}_k^{ij} + V_i^{q-\alpha} V_j^{q-\beta} U_\gamma^k \tilde{C}_{\rho k}^{ij}.$$

Некоторые манипуляции с биномиальными коэффициентами дают (4.109) и (4.110).

Г.2 Некоторые свойства многочленов Якоби

Многочлены $P_n^{(0,b)}(t)$ удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{-1}^1 dt (1+t)^b P_n^{(0,b)}(t) P_m^{(0,b)}(t) = \frac{2^{b+1}}{2n+b+1} \delta_{m,n}. \quad (\text{Г.21})$$

В стандартной нормировке $P_n^{(0,b)}(1) = 1$, и старший коэффициент имеет вид

$$P_n^{(0,b)}(t) = \frac{(b+n+1)_n}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^n + \dots \quad (\text{Г.22})$$

Ортогональные многочлены Якоби $P_n^{(0,b)}(t)$ нормированы так, что $P_n^{(0,b)}(1) = 1$.

Далее мы перечислим свойства многочленов Якоби, позволяющие сделать структуру контрчленов второго порядка более прозрачной:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_n^{(0,b)}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+b+2) P_k^{(0,b+1)}(t), \\ \frac{d}{dt} \left[(1+t)^{b+1} P_n^{(0,b+1)}(t) \right] &= (1+t)^b \sum_{k=0}^n (2k+b+1) P_k^{(0,b)}(t), \end{aligned} \quad (\text{Г.23})$$

где второе уравнение может быть получено из первого с помощью интегрирования по частям. Еще одним полезным свойством многочленов Якоби является

$$\frac{d}{dt} P_n^{(0,b)}(t) = \frac{b+n+1}{2} P_{n-1}^{(1,b+1)}(t). \quad (\text{Г.24})$$

Г.3 Детали вычисления четырехточечного коррелятора в МЛГ

Третьи производные действия. Обсудим сначала третью производную $S_{\rho\sigma\eta}^{(0)}$. Используя определение и учитывая нашу основную рекурсию, получим

$$\frac{\partial^3 S^{(0)}}{\partial v_\rho \partial v_\alpha \partial v_\beta} = -\frac{1}{c_{1,2}} \frac{\partial^3 \theta_{1,2}}{\partial v_\rho \partial v_\alpha \partial v_\beta} = -\frac{1}{c_{1,2}} \left(v_1 \frac{\partial}{\partial v_\rho} C_{q-1}^{\alpha\beta} + C_{q-\rho}^{\alpha\beta} \right). \quad (\text{Г.25})$$

WDVV требование для структурных констант Фробениусовой алгебры (которое может быть легко проверено в нашем случае) дает

$$\frac{\partial}{\partial v_\alpha} C_{q-1}^{\gamma\beta} = \frac{\partial}{\partial v_1} C_{q-\gamma}^{\alpha\beta}. \quad (\text{Г.26})$$

С этим результатом легко найти

$$\frac{\partial^3 S^{(0)}}{\partial v_\rho \partial v_\alpha \partial v_\beta} = -\frac{1}{c_{1,2}} \frac{\partial}{\partial v_1} \left(v_1 C_{q-\rho}^{\alpha\beta} \right). \quad (\text{Г.27})$$

Поскольку мы остаемся только с производной по v_1 , мы можем положить $v_{k>1} = 0$ и использовать (4.109) для структурной константы. После опускания индексов, мы получаем выражение (4.158).

Вторые производные контрчленов первого порядка. Обсудим теперь вторую производную $S_{\alpha\beta}^{(i)}$. Мы можем схематически разделить вычисление на две части. Сначала мы находим

$$\frac{\partial^2 S^{(i)}}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = \sum_{\gamma=1}^{q-1} C_{\alpha\beta\gamma} \left(-\frac{v_1}{q} \right)^{1-\gamma} \frac{\partial^2 S^{(i)}}{\partial v_1 \partial v^\gamma}. \quad (\text{Г.28})$$

Затем мы используем тот же трюк, что и для $S_{\beta\rho\eta}^{(0)}$: мы полагаем $v_{k>1} = 0$ и используем явный вид $S_\gamma^{(i)}$ в терминах многочленов Якоби (4.120). Учитывая (Г.24), получим

$$\frac{d}{dt} P_k^{(0,b)}(1) = \frac{(b+k+1)k}{2}. \quad (\text{Г.29})$$

Докажем теперь (Г.28). Используя явный вид контрчленов первого порядка для четной разности $m - n$, запишем разложение в терминах многочленов Якоби,

$$\frac{\partial S^{(mn)}}{\partial v_\alpha} = \delta_{m,\alpha} \tilde{N}_{mn} \sum_{k=0}^{\frac{m-n}{2}} b_{\frac{m-n}{2}-k} \left(-\frac{v_1}{q}\right)^{\left(\frac{m-n}{2}-k\right)q}, \quad (\text{Г.30})$$

где b_k выражены в терминах коэффициентов многочленов Якоби. Здесь мы предпочитаем убрать нерелевантные факторы в (4.65) в нормировку \tilde{N}_{mn} . Отсюда следует, что

$$S^{(mn)} = \sum_{k=0}^{\frac{m-n}{2}} \tilde{A}_{m,m-n-2k} \theta_{m,m-n-2k}, \quad (\text{Г.31})$$

где

$$\tilde{A}_{m,m-n-2k} x_{m,m-n-2k} = \tilde{N}_{mn} b_{\frac{m-n}{2}-k}. \quad (\text{Г.32})$$

Дифференцируя (Г.31) дважды, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S^{(mn)}}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} &= C_{q-m}^{\alpha\beta} \sum_{k=0}^{\frac{m-n}{2}} \tilde{A}_{m,m-n-2k} \frac{\partial \theta_{m,m-n-2k-1}}{\partial v_{q-m}} \\ &= C_{q-m}^{\alpha\beta} \left(-\frac{v_1}{q}\right)^m \tilde{N}_{mn} \sum_{k=0}^{\frac{m-n}{2}} b_{\frac{m-n}{2}-k} \frac{y_{m,m-n-2k-1}}{x_{m,m-n-2k}} \left(-\frac{v_1}{q}\right)^{\frac{m-n-2k-2}{2}q}. \end{aligned} \quad (\text{Г.33})$$

Из (4.73) мы выводим

$$\frac{y_{m,m-n-2k-1}}{x_{m,m-n-2k}} = \frac{m-n-2k}{2}. \quad (\text{Г.34})$$

Таким образом, на оси $v_{k>1} = 0$ мы имеем

$$\frac{\partial^2 S^{(mn)}}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = C_{q-m}^{\alpha\beta} \left(-\frac{v_1}{q}\right)^{m-q} \tilde{N}_{mn} \sum_{k=0}^{\frac{m-n}{2}} b_{\frac{m-n}{2}-k} \left(\frac{m-n}{2}-k\right) \left(-\frac{v_1}{q}\right)^{\left(\frac{m-n}{2}-k\right)q}. \quad (\text{Г.35})$$

Сравнивая это выражение с (Г.30), мы находим

$$\frac{\partial^2 S^{(mn)}}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = C_{q-m}^{\alpha\beta} \left(-\frac{v_1}{q}\right)^{1-(q-m)} \frac{\partial^2 S^{(mn)}}{\partial v_1 \partial v_m}. \quad (\text{Г.36})$$

Аналогичное рассмотрение может быть проведено для случая нечетной разности $m - n$ лишь с тем отличием, что вместо (Г.34) мы используем

$$\frac{x_{m,m-n-2k-1}}{y_{m,m-n-2k}} = \frac{m}{q} + \frac{m-n-2k-1}{2}. \quad (\text{Г.37})$$

Результаты обоих вычислений, как для четной так и нечетной разности $m - n$, дают (Г.28).

Произведения двух структурных констант. Мы можем переписать (А.62), (5.68) и (4.163) в виде

$$F_1(\chi, \xi, \mu, \nu) = \sum_{\gamma \in R(\chi, \xi) \cap R(\mu, \nu)} 1, \quad (\text{Г.38})$$

$$F_2(\chi, \xi, \mu, \nu) = \sum_{\gamma \in R(\chi, \xi) \cap \tilde{R}(\mu, \nu)} 1, \quad (\text{Г.39})$$

$$F_3(\chi, \xi, \mu, \nu) = \sum_{\gamma \in R(\chi, \xi) \cap R(\mu, \nu)} \gamma, \quad (\text{Г.40})$$

где

$$R(\chi, \xi) = [\chi + \xi - q + 1 : 2 : q - |\chi - \xi| - 1], \quad (\text{Г.41})$$

$$\tilde{R}(\mu, \nu) = [|\mu - \nu| + 1 : 2 : 2q - \mu - \nu - 1]. \quad (\text{Г.42})$$

Следовательно,

$$R(\chi, \xi) \cap R(\mu, \nu) = [A_1, B_1], \quad (\text{Г.43})$$

$$R(\chi, \xi) \cap \tilde{R}(\mu, \nu) = [A_2, B_2], \quad (\text{Г.44})$$

где

$$A_1 = \max(\chi + \xi - q + 1, \mu + \nu - q + 1), \quad (\text{Г.45})$$

$$B_1 = \min(q - |\chi - \xi| - 1, q - |\mu - \nu| - 1), \quad (\text{Г.46})$$

$$A_2 = \max(\chi + \xi - q + 1, |\mu - \nu| + 1), \quad (\text{Г.47})$$

$$B_2 = \min(q - 1 - |\chi - \xi|, 2q - \mu - \nu - 1), \quad (\text{Г.48})$$

или

$$A_1 = \frac{\chi + \xi + \mu + \nu + 2 - 2q}{2} + \frac{|\chi + \xi - \mu - \nu|}{2}, \quad (\Gamma.49)$$

$$B_1 = \frac{2q - 2 - |\chi - \xi| - |\mu - \nu|}{2} - \frac{||\chi - \xi| - |\mu - \nu||}{2}, \quad (\Gamma.50)$$

$$A_2 = \frac{\chi + \xi - q + 2 + |\mu - \nu|}{2} + \frac{|\chi + \xi - q - |\mu - \nu||}{2}, \quad (\Gamma.51)$$

$$B_2 = \frac{3q - 2 - |\chi - \xi| - \mu - \nu}{2} - \frac{|\mu + \nu - q - |\chi - \xi||}{2}. \quad (\Gamma.52)$$

После замены $\gamma = A_{1,2} + 2s$ мы имеем

$$F_1(\chi, \xi, \mu, \nu) = \sum_{s=0}^{\frac{A_1 - B_1}{2}} 1 = \frac{B_1 - A_1}{2} + 1, \quad (\Gamma.53)$$

$$F_2(\chi, \xi, \mu, \nu) = \sum_{s=0}^{\frac{A_2 - B_2}{2}} 1 = \frac{B_2 - A_2}{2} + 1, \quad (\Gamma.54)$$

$$F_3(\chi, \xi, \mu, \nu) = \sum_{s=0}^{\frac{A_1 - B_1}{2}} (A_1 + 2s) = \frac{B_1 + A_1}{2} \left(\frac{B_1 - A_1}{2} + 1 \right). \quad (\Gamma.55)$$

Эти результаты приводят к (4.164) (4.165) и (4.166).