

О Т З Ы В

официального оппонента доктора физико-математических наук Исаева Алексея Петровича о диссертации Белавина Владимира Александровича "Интегрируемость и дуальности двумерной конформной теории поля", представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика.

Квантовая теория поля (КТП) является на сегодняшний день уникальной теорией, которая с поразительным успехом описывает физику элементарных частиц. Кроме того, КТП весьма эффективна и при описании моделей статистической физики. Тем не менее в этой теории имеются две фундаментальные нерешенные проблемы. Первая проблема — это построение квантовой теории гравитации (построение и исследование теорий (супер)струн относится к этой же проблеме). Вторая проблема — это недостаточность возможностей исследования моделей квантовой теории поля вне рамок теории возмущений. Решение этих проблем требует развития принципиально новых подходов и методов.

Естественным полигоном для решения указанных выше проблем, являются точно решаемые двумерные модели квантовой теории поля, в том числе модели двумерных гравитаций. Особый интерес здесь представляют модели конформной теории поля (КФТП), которые с одной стороны включают в себя квантовые модели релятивистских (супер)струн, а с другой стороны с успехом применяются для описания критического поведения двумерных систем статистической физики и физики конденсированного состояния в точках фазового перехода 2-ого рода.

В диссертационной работе исследуется ряд моделей двумерной конформной теории поля, в том числе модели некритической теории струн (или двумерной гравитации Лиувилля). Как известно, в двух измерениях конформная симметрия является бесконечномерной, что позволяет использовать методы теории представлений бесконечномерных алгебр Ли и их обобщений для выхода за рамки теории возмущений, в частности для точного вычисления корреляционных функций в этих теориях.

С другой стороны, конформные теории представляют собой лишь специальный класс интегрируемых теорий, в спектре которых отсутствуют массивные возбуждения, в то время как в физических контекстах представляет интерес изучение проявления интегрируемости в массивных теориях. В диссертации также исследуется данный вопрос, а именно рассматриваются массивные теории, представляющие собой интегрируемые возмущения конформных моделей. Данное исследование двумерных моделей представляется весьма интересным в свете известной идеи о том, что фундаментальная теория, объединяющая электро-слабые и сильные взаимодействия, должна описываться как "массивное" возмущение некоторой 4-х мерной точно решаемой конформной модели, типа калибровочной теории с расширенной $N = 4$ суперсимметрией.

Важная часть диссертации направлена на изучение непертурбативного подхода к КТП, основанного на дуальности между конформными моделями и четырехмерными $N = 2$ суперсимметричными калибровочными теориями, которая в литературе известна как АГТ соответствие. Таким образом в диссертации исследуется еще одна определенная связь между рассматриваемыми двумерными моделями и калибровочными теориями, потенциально направленными на описание физики высоких энергий.

Из всего вышесказанного следует, что тема диссертации В.А.Белавина является несомненно актуальной и важной.

Диссертация Белавина В.А. состоит из введения, пяти глав основного содержания, заключения и четырех приложений, в которые включены технические детали вычислений. Список литературы содержит 209 наименований. Общий объем основного текста диссертации с приложениями — 317 страниц с 5 рисунками и 4 таблицами.

Введение посвящено обсуждению последних исследований в области интегрируемости и конформных моделей, а также "минимальной" теории гравитации. Дано описание содержания и целей диссертации и сформулированы основные результаты.

В первой главе изучается структура суперсимметричной теории Лиувилля, возникающей в контексте теории суперструн в результате интегрирования по двумерной метрике. Основным объектом исследования является функция конформного блока, определяющая голоморфную зависимость корреляционных функций в заданном канале слияния. Данная функция является универсальной и определяется исключительно из соображений симметрии, независимо от спектра конкретной теории. Именно поэтому функция конформного блока играет одну из ключевых ролей в построении самосогласованной теории. В настоящей главе на основе анализа аналитических свойств суперконформных блоков для них выводятся рекуррентные соотношения, позволяющие эффективно вычислять их коэффициенты разложения по гармоническому отношению. Помимо возможности использования для вычислений корреляционных функций, эти рекуррентные соотношения позволяют произвести анализ совместности структуры операторной алгебры теории и требований, вытекающих из симметричных соображений (условия разбиения пространства локальных полей в набор представлений алгебры супер-Вирасоро). Основными результатами данной главы являются предложенный метод вычисления суперконформных блоков и установление того факта, что суперсимметричная конформная теория поля Лиувилля со специальным образом определенным спектром полей действительно является согласованной квантовой теорией поля.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию деформации структуры пространства локальных полей при выходе из фиксированной точки, соответствующей минимальной конформной модели $M(q, p)$. Возникающая в результате возмущения массивная теория обладает бесконечным числом законов сохранения и поэтому является интегрируемой. В главе развивается метод конформной теории возмущений, дающий возможность вычисления корреляционных функций в виде рядов по константе связи. Показывается, что данный класс массивных теорий обладает интересным свойством аналитической факторизации: вся неаналитичность корреляционных функций по константе связи сосредоточена в возникающих ненулевых значениях вакуумных средних локальных полей, которые, таким образом, содержат всю непертурбативную информацию о теории, тогда как поправки к структурным константам операторного разложения являются аналитическими функциями, коэффициенты которых фиксируются знанием корреляционных функций конформной теории. Развивается метод вычисления этих коэффициентов. Корреляционные функции рассматриваемых массивных моделей допускают дуальное описание, связанное со свойством факторизации S матрицы теории. Данное свойство используется при построении форм-факторного подхода для изучения поведения корреляций на больших расстояниях (по сравнению с обратным масштабом массы). Одним из основных результатов второй главы диссертации является демонстрация согласованности результатов вычислений в рамках двух независимых подходов, что подтверждает правильность всех сделанных нетривиальных предположений (в частности, свойства аналитической факторизации и аналитическое поведение деформации операторной алгебры),

а также показывает, важную роль вклада вторичных полей в операторные разложения в неконформных теориях и процесс нарушения конформных правил отбора при включении массивного возмущения.

Третья и четвертая главы диссертации посвящены построению и анализу моделей индуцированной двумерной гравитации Лиувилля (ЛГ), что эквивалентно исследованию непертурбативных решений некритической теории струн. Более конкретно, исследуются минимальные модели ЛГ, в которых струнные переменные, рассматриваемые как поля на двумерной мировой поверхности струны, описываются минимальными моделями КфТП. Кроме исходной мотивации А.М.Полякова, связанной с построением дуального описания сильных взаимодействий и объяснения невылета цвета, гравитация Лиувилля интересна сама по себе, так как, обладая многими свойствами критической струны, она имеет ограниченный спектр физических состояний, что позволяет получать ответы на некоторые вопросы, которые не поддаются анализу в больших размерностях таргет-пространства. При этом гравитация Лиувилля представляет собой нетривиальную нелинейную модель, принадлежащую интересному классу топологических теорий и связанную с интегрируемыми иерархиями, БРСТ когомологиями и т.д.

В третьей главе анализ производится в рамках подхода, основанного на исходной континуальной формулировке действия Полякова, в котором интегрирование по метрикам мировой поверхности струны (за счет наличия квантовой аномалии) приводит к теории Лиувилля. В этом подходе гравитационный сектор теории описывается полем Лиувилля, а материальный сектор – некоторой минимальной моделью КфТП. Возникающая модель согласованна с базовым требованием инвариантности Вейля, эквивалентной условию БРСТ симметрии. В главе используются методы, основанные на БРСТ подходе и направленные на вычисления корреляционных функций физических полей в модели ЛГ, или БРСТ когомологий. Из свойств топологической теории следует, что корреляционные функции не зависят от координат, а лишь от набора квантовых чисел полей (параметров, являющихся дискретными аналогами импульсов вершинных операторов, описывающих испускание струн), поэтому с точки зрения теории на мировой поверхности их можно называть корреляционными числами. Основным результатом главы является найденное нетривиальное соотношение, связывающее логарифмические производные БРСТ когомологий с духовым зарядом ноль с физическими полями с духовым зарядом один, входящими в конструкцию искомым корреляционных чисел. Эта связь позволяет произвести явное аналитическое интегрирование по пространству модулей поверхности для топологии сферы (с набором выколотых точек) в $N = 1$ суперсимметричной версии гравитации Лиувилля.

В четвертой главе диссертации исследуется дуальное описание (q, p) минимальной гравитации, основанное на идее замены интегрирования по метрикам суммированием по триангуляциям двумерных поверхностей. В непрерывном пределе такое описание приводит к формализму матричных моделей в окрестности p -критической точки. В формулировке Дугласа статистическая сумма матричной модели является тау-функцией $(p - 1)$ редукции иерархии Кадамцева–Петвиашвили, которая строится по некоторому специальному решению струнного уравнения Дугласа. В главе изучается связь данного подхода с теорией фробениусовых многообразий. Благодаря наличию этой связи статсумма (или тау-функция) имеет интегральное представление, для полного определения которого требуется установить явный вид следующих основных ингредиентов: связь КдВ параметров матричных моделей и констант связи в исходной формулировке гравитации Лиувилля, вычисление структурных констант

фробениусовой алгебры и определение специального решения струнного уравнения, ответственного за МЛГ. Все эти задачи решены в данной главе. Таким образом получено явное выражение для производящей функции корреляционных чисел минимальной гравитации Лиувилля (в сферической топологии).

В пятой главе получено обобщение АГТ соответствия на широкий класс теорий, которые определены на орбифолдах в \mathbb{R}^4 . В исходной формулировке АГТ соответствие связывает четырехмерные $SU(N)$ калибровочные $N_{susy} = 2$ супесимметричные теории на \mathbb{R}^4 со специальной серией двумерных конформных теорий, обладающих W_N симметрией, т. е. связывает ранг калибровочной группы с расширением конформной симметрии присутствием токов высших спинов ($s = 2, \dots, N$). Новое обобщение включает более широкий класс конформных теорий, в частности, $N_{susy} = 1$ и $N_{susy} = 2$ суперконформные теории, а также парафермионные модели. Кроме того, устанавливается редукция АГТ соответствия на важный подкласс конформных теорий, состоящий из минимальных моделей. Используемая в диссертации техника основана на свойствах локализации рассматриваемого класса калибровочных теорий. Со стороны четырехмерных теорий получены явные выражения для инстантонных статсумм в данном классе, со стороны двумерных теорий найдены явные выражения для n -точечных конформных блоков. Поскольку в ряде случаев (в частности, в $N_{susy} = 1$ и $N_{susy} = 2$ супер-минимальных моделях) структурные константы известны, результат этой главы дает явный ответ для n -точечных корреляционных функций, для любого числа n .

В заключении перечисляются основные результаты, полученные в диссертации.

Считаю важным отдельно подчеркнуть, что диссертация В.А. Белавина представляет собой законченное исследование с большим числом оригинальных результатов. Автору диссертации удалось решить ряд сложных и важных проблем в некоторых классических разделах двумерной конформной теории поля, которые не поддавались решению ранее. Наряду с этим, в диссертации построено обобщение АГТ соответствия для широкого класса конформных теорий, в частности, $N_{susy} = 1$ и $N_{susy} = 2$ суперконформных теорий, а также парафермионных моделей, что может иметь вполне конкретные физические приложения. Диссертация выполнена на высоком теоретическом и математическом уровне, что свидетельствует о высокой квалификации автора.

При рассмотрении интегрируемых возмущений конформных теорий поля во второй главе диссертации, в случае моделей $MM(q, p)$, возмущенных полем $\Phi_{1,3}$, первые поправки к структурным константам в разложении операторного произведения выражаются в виде аналитически регуляризованного интеграла, который вычисляется точно в Приложении Б.1. Отметим, что данный интеграл возникает в многопетлевых вычислениях диаграмм Фейнмана и называется мастер-интегралом пропагаторного типа. Было бы интересно прояснить, выражаются ли и следующие поправки в виде соответствующих интегралов для диаграмм Фейнмана.

В качестве замечания хотелось бы отметить то, что автор не всегда объясняет используемые обозначения, или делает это не там, где эти обозначения возникают. Например, функция $\gamma(x)$, которая появляется в формулах во Введении, в Первой главе диссертации и активно используется по всему тексту, определяется только во Второй главе, на стр. 58. Указанное замечание, однако, ни в коей мере не снижает ценности полученных в диссертации результатов.

Результаты диссертации своевременно опубликованы в ведущих научных журналах, неоднократно докладывались на представительных международных конферен-

циях и рабочих совещаниях, хорошо известны специалистам и активно цитируются. Автореферат правильно и полностью отражает содержание диссертации.

Диссертация Владимира Александровича Белавина удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор бесспорно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико - математических наук по специальности 01.04.02 - теоретическая физика.

Отзыв составил,

зам. директора ЛТФ им. Н.Н. Боголюбова,
доктор физико-математических наук, профессор

141980, г.Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6,
Объединенный институт ядерных исследований,
Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова
тел. +7 49621 63024
e-mail: isaevap@theor.jinr.ru

А.П. Исаев

Подпись Исаева Алексея Петровича заверяю.
Ученый секретарь ЛТФ им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенного института ядерных исследований,
кандидат физико-математических наук
19 января 2018 г.



А.В. Андреев