

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт имени П. Н. Лебедева
Российской Академии Наук

На правах рукописи

Метельский Игорь Игоревич

**РЕЛЯТИВИСТСКИ-НЕЛИНЕЙНОЕ
РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ
И ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК
ИНТЕНСИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ**

Специальность 1.3.19 – Лазерная физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте им. П. Н. Лебедева Российской Академии Наук (ФИАН).

Научный

руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Быченков Валерий Юрьевич

Научный

консультант: доктор физико-математических наук
Ковалев Владимир Федорович

Официальные

оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
кафедры общей физики Санкт-Петербургского
государственного университета (СПбГУ)
Андреев Александр Алексеевич

кандидат физико-математических наук,
зав. лабораторией Экстремальной нелинейной оптики
Федерального исследовательского центра «Институт
прикладной физики Российской академии наук» (ИПФ РАН)
Ким Аркадий Валентинович

Ведущая

организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки «Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук» (ИЯФ СО РАН)

Защита состоится 20 июня 2022 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета 24.1.262.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН и на сайте института:
www.lebedev.ru.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2022 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

24.1.262.01

доктор физико-математических наук

А. С. Золотько

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Около семидесяти лет назад в теоретических работах Н. Г. Денисова и В. Л. Гинзбурга [1] было положено начало систематическому исследованию явления *плазменного резонанса*. С тех пор в теории взаимодействия электромагнитного (лазерного) излучения с неоднородной плазмой хорошо известен классический эффект *линейной трансформации* электромагнитной волны в плазменную, который наблюдается при наклонном падении p -поляризованного излучения с частотой ω_0 на слабо неоднородную плазму в области, где лазерная частота ω_0 сравнивается с частотой собственных колебаний плазмы ω_L . Резонанс колебаний электронов в поле лазерного излучения и электронных ленгмюровских колебаний приводит к усилению электростатических колебаний – плазменному резонансу, выражающемуся в резком возрастании потенциального электрического поля в окрестности критической плотности плазмы. Фундаментальный и прикладной интерес к изучению плазменного резонанса обусловлен тем, что он служит механизмом развития таких процессов, как *резонансное поглощение* [2], *генерация гармоник* [3-7], *генерация квазистатических полей* вблизи критической плотности [6, 8] и образование *быстрых частиц* в лазерной плазме [9, 10]. Эти процессы, в свою очередь, имеют особое значение в свете нерешенной до сих пор глобальной проблемы лазерного термоядерного синтеза (ЛТС) [11, 12].

Резонансное поглощение (РП) является одним из важнейших каналов передачи энергии лазерного излучения в неоднородную плазму и обеспечивает значительный, а иногда и определяющий вклад в коэффициент поглощения. С практической точки зрения исследования РП связаны с задачами взаимодействия лазерного излучения с плазмой, образующейся в результате лазерной абляции твердотельных мишеней, и главным образом – с экспериментами по ЛТС [11, 12], а также с задачей о генерации гармоник [3, 5, 6]. Линейная теория РП, разработанная в 60-х – 70-х годах прошлого века [2, 13] на основе модели, предложенной в [1], по-прежнему лежит в основе многих расчетов и оценок, выполняемых в рамках ЛТС-экспериментов. Однако естественная логика развития лазерных технологий привела к рутинному применению лазеров с интенсивностью, ставящей под вопрос применимость линейной теории РП.

Современные эксперименты по ЛТС с прямым облучением, включая концепцию ударного зажигания («*shock ignition*»), отвечают большим масштабам неоднородности плазмы (десятки и сотни длин волн лазера) и требуют лазерных интенсивностей вплоть до 10^{17} Вт/см². При таких условиях в окрестности критической плотности плазмы возможно проявление сильных нелинейных эффектов [6, 14-17], поэтому возникает необходимость значительного усовершенствования теории поглощения интенсивного лазерного излучения в области критической плотности неоднородной плазмы, где имеет место явление *релятивистски-нелинейного плазменного резонанса*. Дело в том, что в плазменном резонансе для условий ЛТС усиление

плазменного поля может приводить к напряженности электрического поля вплоть до релятивистских значений, хотя напряженность падающего лазерного поля остается существенно ниже релятивистской [16, 17]. Такой сильный нелинейный резонанс оказывает значительное влияние на процесс поглощения, а значит задача построения теории РП в условиях релятивистского плазменного резонанса является весьма актуальной. В этой связи настоящая диссертация посвящена развитию релятивистски-нелинейной теории резонансного поглощения.

Поскольку сильная нелинейность существенно усложняет задачу аналитического описания, нелинейное резонансное поглощение изучается, как правило, методами численного моделирования [15, 16] или с использованием полуаналитических моделей [14, 17], в которых упрощенные относительно исходных уравнения, полученные на первом этапе аналитическими методами, далее решаются численно. В полностью численных подходах широко применяется кинетическое описание на основе метода «частица в ячейке» (PIC) [15, 16]. В ряде исследований [15, 17] было показано, что в результате проявления релятивистских эффектов движения электронов вблизи критической плотности плазмы возникает зависимость коэффициента поглощения от интенсивности лазерного излучения, хотя линейная теория такой зависимости, конечно, не предполагает [2]. Кроме того, при сравнении с результатами линейной теории, в [14, 17] указывалось на возможность изменения вида угловой функции поглощения с ростом масштаба неоднородности плотности плазмы.

На фоне очевидных успехов в описании нелинейного резонансного поглощения можно заметить противоречивость известных на сегодня результатов, полученных разными научными группами. К примеру, одними [14] утверждается универсальность оптимального¹ угла падения лазерного излучения на плазму и монотонный рост коэффициента поглощения с увеличением интенсивности поля лазерной накачки. Другие, напротив, отмечают [15, 16] эффект подавления резонансного поглощения с ростом лазерной интенсивности вплоть до интенсивности $\approx 3 \times 10^{17}$ Вт/см², или указывают [17] на смещение максимума угловой функции коэффициента нелинейного поглощения относительно положения максимума в линейной теории. Более того, в работах [14, 17] не устанавливается четких границ применимости предложенных полуаналитических моделей, но рассматривается весьма широкий диапазон градиентов неоднородности плазмы, который, вообще говоря, предполагает переходы между различными моделями поглощения в зависимости от характерных масштабов неоднородности плотности. Эти обстоятельства позволяют поставить под сомнение справедливость основных выводов в [14, 17]. В целом, можно сказать, что до сих пор не построено последовательной теории нелинейного РП при релятивистском плазменном резонансе, которая выявляла бы характерные зависимости коэффициента поглощения от множества управляющих параметров лазерно-плазменной системы, в том числе – от интенсивности поля лазерной накачки. Восполнение этого пробела – одна из наших основных целей в рамках диссертационной работы.

¹Оптимальным называется угол падения, для которого резонансное поглощение максимально.

Возникающее в окрестности плазменного резонанса существенное разделение зарядов порождает мощное *квазистатическое электрическое поле*, локализованное вблизи критической плотности [6, 8]. Уже во второй половине семидесятых годов XX века был известен ряд экспериментальных фактов, указывающих на генерацию в плазме под действием мощного лазерного излучения сильных квазистатических электрических полей [18], изучение которых представляет интерес с точки зрения процессов переноса [19] и ускорения частиц в плазме [20]. В частности, образование *быстрых электронов* в области критической плотности заслуживает внимания как нежелательный эффект в контексте лазерного термоядерного синтеза, поскольку обеспечивает предварительный прогрев мишени, препятствующий ее оптимальному сжатию, а значит и дальнейшей инициации термоядерной реакции [9, 11]. Поэтому исследование возбуждаемого в окрестности критической плотности плазмы квазистатического электрического поля, его пространственной структуры, представляет интерес и может служить основой для теоретической интерпретации наблюдаемой генерации быстрых электронов.

Генерация гармоник (ГГ) лазерного излучения, – еще один важный процесс, развивающийся в условиях плазменного резонанса, – привлекает интерес исследователей как инструмент получения высокочастотных источников вторичного излучения [7], так и с точки зрения диагностики короны лазерной плазмы (в том числе в ЛТС-экспериментах), то есть с возможностью определения плотности плазмы, градиента температуры и скорости движения короны по спектральному составу вторичного излучения [21]. Начиная с 70-х годов во всем мире было выполнено большое число экспериментальных и теоретических работ, посвященных генерации гармоник, по характеристикам которых можно судить об указанных параметрах в локализованных областях плазмы: вблизи критической и четверти критической плотности [4, 21]. Расчеты амплитуд гармоник на основе модели резонансного усиления электрического поля в области критической плотности плазмы зачастую опираются на результаты теории возмущений [5], для которой характерно предположение о слабой нелинейности. Это предположение дает возможность пренебречь влиянием высших гармоник на низшие, в том числе и на основную гармонику, амплитуда которой считается заданной. Из теории возмущений следует, что плотность потока вторичного излучения на частоте $n\omega_0$ пропорциональна n -ой степени плотности потока лазерного излучения, падающего на плазму. Такая зависимость приводит к экспоненциально быстрому спаданию интенсивностей гармоник с ростом их номера n . Однако с увеличением амплитуды поля накачки предположение о слабой нелинейности нарушается и возникает необходимость учета эффектов, обусловленных сильной нелинейностью.

Наличие сильной нелинейности качественно меняет процесс генерации целых гармоник, причем высшие гармоники, которые, согласно стандартной (слабо нелинейной) теории возмущений [5], были экспоненциально малы, становятся существенно усиленными, что приводит к более плавному спаданию или даже выравниванию интенсивностей соседних гармоник [22, 23]. В цикле теоретических работ конца 80-х годов [6] (см. [24] и цитирован-

ную там литературу) был достаточно полно изучен процесс генерации высших гармоник в условиях сильной нерелятивистской электронной нелинейности в окрестности плазменного резонанса. Найденные вне рамок теории возмущений коэффициенты преобразования лазерного излучения в гармоники демонстрировали богатый спектральный состав вторичного излучения, характеризующегося медленным спаданием интенсивностей гармоник с ростом их номера. Однако вопрос о влиянии на ГГ релятивистских эффектов динамики электронной компоненты плазмы вблизи критической плотности, при условии эффективного резонансного поглощения, остался невыясненным. В настоящей диссертационной работе поставлена и решена задача построения нелинейной теории генерации гармоник при релятивистском плазменном резонансе на основе аналитического подхода, предложенного в [6].

Решение задач РП и ГГ при нелинейном плазменном резонансе естественным образом подразумевает отыскание динамики электронов вблизи критической плотности плазмы, где формируются нелинейные токи, генерирующие вторичное излучение и определяющие его спектральный состав. Для классических теорий [3, 5, 6] характерна краевая (граничная) постановка задачи, в которой рассматривается динамика *стационарных* колебаний электронной компоненты плазмы в совокупности с граничными условиями на бесконечности. В ряде исследований сильно нелинейных (релятивистских) плазменных колебаний делается выбор в пользу начальной задачи по времени [16]. В этом случае возникает нестационарный режим нелинейных плазменных колебаний, не подразумевающий развития теорий поглощения и генерации гармоник лазерного излучения в области релятивистского плазменного резонанса, которые должны быть естественным обобщением ранее полученных стационарных нелинейных нерелятивистских теорий [5, 6] и линейной теории [13]. Необходимость такого обобщения диктуется реальной медленной² динамикой изменения лазерной интенсивности, отвечающей импульсу падающего на плазму электромагнитного излучения, для которого вначале имеет место линейный плазменный резонанс [1, 13], затем, с нарастанием интенсивности в импульсе, он сменяется нелинейной нерелятивистской резонансной структурой [6], а при дальнейшем росте интенсивности проявляются релятивистские эффекты. По этой причине развитие аналитической *стационарной* теории *релятивистского плазменного резонанса* представляется особенно интересной задачей.

Несмотря на бурное развитие методов численного моделирования, которые широко применяются в лазерной физике высоких энергий, аналитические подходы по-прежнему могут быть эффективным способом исследования процессов, протекающих в условиях сильной нелинейности. Заметим, что в численных расчетах поглощения и генерации гармоник лазерного излучения неоднородной плазмой существует проблема, связанная с разномасштабностью областей моделирования при вычислении самосогласованного электромагнитного поля в плазме. С одной стороны, для разрешения узкой области резонанса, ширина которой составляет десятые доли длины лазерной волны, требуется малая величина шага пространственно-

²По сравнению с динамикой электронной компоненты плазмы. Такие рассуждения справедливы в случаях не слишком коротких лазерных импульсов длительностью в нано-, пико- и сотни фемтосекунд.

временной сетки. С другой – при вычислении полей в толще плазменной мишени, определяемой масштабом неоднородности плотности в десятки и сотни длин волн лазера, необходимо большое количество таких шагов, что критически повышает ресурсозатратность вычислений. Кроме того, использование численных методов затрудняет получение практически необходимых скейлингов от лазерно-плазменных параметров вследствие многопараметричности зависимостей численных расчетов, поскольку нелинейное поглощение зависит от интенсивности лазерного импульса, угла его падения на плазму, геометрии плазменной мишени, её плотности, скорости разлета и температуры [16]. В этом отношении большую роль играют теоретические подходы, позволяющие получать аналитические решения, ценность которых состоит не только в том, что они допускают наглядное описание процессов в зависимости от множества параметров задачи, но и в том, что могут использоваться при построении и обосновании численно-аналитических методов как модельные решения, выделяющие ключевые свойства рассматриваемой системы. В настоящей диссертационной работе применен метод ренормгрупповых симметрий (РГС), представляющий собой аналитический подход, который позволяет находить решения уравнений, описывающих структуры электромагнитных полей и динамику частиц плазмы в условиях сильной нелинейности [24]. Преимущество этого подхода связано с возможностью получения важной информации о поведении физической системы непосредственно из свойств симметрий рассматриваемых моделей, что способствует более глубокому пониманию описываемых процессов.

Метод ренормгрупповых симметрий был введен в математическую физику в конце XX века [6, 25] с той же целью нахождения улучшенного решения (по сравнению с начальным приближенным решением), с какой был предложен и классический метод ренормализационной группы Н. Н. Боголюбова [26]. Однако его реализация в математической физике основана на приемах современного группового анализа, который позволяет получать как приближенные, так и точные аналитические решения дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. С момента появления и первого успешного применения метода РГС в физике плазмы [6] эффективность подхода неоднократно демонстрировалась во многих нелинейных задачах математической физики [24]. Здесь с его помощью найдены нелинейные пространственно-временные структуры электрического поля и скорости электронов в окрестности критической плотности плазмы с учетом релятивистских эффектов.

Подводя итог вышесказанному, можно сделать вывод, что задача построения аналитической теории, в рамках которой последовательно описывается явление нелинейного плазменного резонанса, а также сопутствующие ему процессы резонансного поглощения и генерации гармоник с учетом релятивистских эффектов вблизи критической плотности неоднородной плазмы, остается весьма актуальной и в наши дни.

Цель и задачи диссертационной работы

Целью данной работы являлось теоретическое исследование процессов резонансного поглощения и генерации высших гармоник лазерного излучения в условиях релятивистски-нелинейного плазменного резонанса. В соответствии с целью в диссертационной работе были поставлены и решены следующие задачи:

1. Разработать теорию релятивистского плазменного резонанса и исследовать нелинейную структуру полей и скоростей электронов в окрестности критической плотности неоднородной лазерной плазмы.
2. Построить аналитическую теорию резонансного поглощения с учетом нелинейных, в том числе релятивистских, эффектов движения электронов.
3. Построить аналитическую релятивистски-нелинейную теорию генерации гармоник в режиме релятивистского плазменного резонанса.
4. Развить модель генерации квазистатического электрического поля в окрестности критической плотности неоднородной плазмы.

Научная новизна

Диссертация содержит описание законченного исследования, научная новизна которого заключается в следующем:

1. Впервые разработана последовательная аналитическая теория релятивистского плазменного резонанса в неоднородной плазме с использованием метода ренормгрупповых симметрий.
2. Впервые построена самосогласованная теория релятивистски-нелинейного резонансного поглощения, учитывающая перенормировку нелинейной амплитуды резонансного поля.
3. Впервые построена аналитическая теория генерации высших гармоник с учетом релятивистской нелинейности в окрестности критической плотности неоднородной плазмы.

Положения, выносимые на защиту

1. Поле плазменного резонанса в условиях как нерелятивистской (конвективной), так и релятивистской нелинейности движения электронов в окрестности критической плотности неоднородной лазерной плазмы допускает аналитическое описание с использованием метода ренормгрупповых симметрий в рамках гидродинамической модели вплоть до границы её применимости, определяемой условием опрокидывания резонансно-усиленных плазменных колебаний.

2. Коэффициент нелинейного резонансного поглощения является функцией четырех управляющих параметров лазерно-плазменной системы – лазерной интенсивности I_0 , масштаба неоднородности плазмы L , её температуры T и угла θ падения лазерного излучения на плазму.
3. Учет релятивистски-нелинейных эффектов в плазменном резонансе приводит к подавлению резонансного поглощения – уменьшению коэффициента поглощения с ростом лазерной интенсивности, а также к уменьшению амплитуды квазистатического электрического поля, генерируемого в области критической плотности.
4. Разработанная аналитическая нелинейная теория позволяет находить спектрально-угловые характеристики гармоник, излучаемых из плазменного резонанса неоднородной плазмы, в широком диапазоне лазерных интенсивностей до $I_0\lambda^2 = 10^{18}$ Вт/см²×мкм² (λ – длина волны лазерного света, нормированная на мкм).
5. Гармоники высшего порядка генерируются наиболее эффективно вблизи порога опрокидывания резонансно-усиленных плазменных колебаний, когда формируются энергетические спектры, затухающие по степенному закону.

Апробация результатов

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на все-российских и международных конференциях: Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу (2013, 2014, 2015, 2016, 2020), XXII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 13 – 17 апреля 2015), Международная молодежная конференция «Физика.Спб/2015» (Санкт-Петербург, 26 – 29 октября 2015), 27th Symposium on Plasma Physics and Technology (Прага, Чехия, 19 – 26 июня 2016), 34-th European Conference on Laser Interaction with Matter (ECLIM 2016) (Москва, 18 – 23 сентября 2016), International Conference on Ultrafast Optical Science (UltrafastLight) (Москва, ФИАН, 2017, 2018, 2019, 2021), International Symposium “Modern Problems of Laser Physics” (Новосибирск, 21 – 29 августа 2018), V Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии» (ЛАПЛАЗ-2019) (Москва, НИЯУ МИФИ, 2019), 46th Plasma Physics Conference (EPS 2019) (Милан, Италия 8 – 12 июля 2019).

Также результаты докладывались на Межинститутском семинаре «Новые методы ускорения частиц и экстремальные состояния материи», 17 декабря 2020, а также на семинаре Отделения квантовой радиофизики им. Н. Г. Басова, Москва, ФИАН, 22 октября 2022.

Степень достоверности

Выводы построенной в диссертации теории генерации высших гармоник подтверждаются экспериментами [22, 23] по генерации гармоник CO₂–лазерного излучения интенсивностью

$I_0 \simeq 10^{14} \div 10^{15}$ Вт/см². Получено хорошее количественное согласие рассчитанных степенных спектров высших гармоник с экспериментально обнаруженными медленно убывающими спектрами вторичного излучения из лазерной плазмы. Также достоверность результатов подтверждается их качественным согласием с результатами, полученными другими авторами в рамках численного моделирования.

Публикации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 7 печатных работах в реферируемых журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus, и в 9 сборниках материалов научных конференций. Полный список опубликованных работ по теме диссертации приведен на страницах 27-28.

Практическая ценность диссертации

Построенная в диссертации аналитическая теория описывает процессы нелинейного резонансного поглощения и генерации высших гармоник интенсивного лазерного излучения в неоднородной плазме с учетом релятивистских эффектов движения электронов плазмы в окрестности критической плотности. Прогресс в лазерной технологии привел к рутинному применению лазеров с интенсивностью, ставящей под вопрос применимость линейной теории резонансного поглощения и слабо нелинейной теории генерации гармоник, основанных на модели линейного плазменного резонанса. Современные эксперименты по лазерному термоядерному синтезу с прямым облучением, включая концепцию ударного зажигания, требуют лазерных интенсивностей вплоть до $I_0\lambda^2 = 10^{17}$ Вт/см²×мкм² (λ – длина волны лазерного света в мкм), при которых в окрестности критической плотности плазмы возможно проявление сильных нелинейных, в том числе релятивистских эффектов. Представленная в диссертации теория на основе развитой модели релятивистского плазменного резонанса позволяет находить связь коэффициента релятивистски-нелинейного резонансного поглощения и спектральных характеристик вторичного излучения из плазмы с лазерно-плазменными параметрами: интенсивностью лазерного поля и углом его падения на плазму, характерным масштабом неоднородности плотности и температурой плазмы. Найденные формулы могут использоваться для количественных и качественных оценок величины резонансного поглощения и эффективности генерации гармоник лазерного излучения в вакууме, что, в частности, имеет значение для задач диагностики лазерной плазмы. Кроме того, теория может сыграть важную роль, сопровождая и направляя полномасштабное численное моделирование взаимодействия лазерных импульсов с твердотельными мишенями. Полученные результаты справедливы для лазерных интенсивностей вплоть до $I_0\lambda^2 = 10^{18}$ Вт/см²×мкм², и могут найти применение при планировании или интерпретации экспериментов по лазерному термоядерному синтезу.

Личный вклад автора

Результаты работы получены автором лично или при его определяющем участии. Постановка задач исследований, а также интерпретация результатов выполнены совместно с научным руководителем и научным консультантом.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Текст иллюстрируют 36 рисунков и 3 таблицы, библиография содержит 152 наименования. Общий объем работы составляет 148 машинописных страниц.

Основное содержание работы

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований, приведен обзор литературы по тематикам нелинейных плазменных колебаний, резонансного поглощения и генерации гармоник лазерного излучения в неоднородной плазме, обсуждается научная новизна, сформулированы цели диссертационной работы и положения, выносимые на защиту. Кроме того, описана структура текста, приведены список публикаций автора по теме диссертации, сведения о практической ценности результатов, а также их апробации. В конце **Введения** помещен список используемых обозначений.

В **Главе 1** излагается общая постановка задачи о распространении p -поляризованной плоской электромагнитной волны в слабо неоднородной плазме, сформулированы и решены нелинейные уравнения в частных производных первого порядка для электрического поля и скорости электронов вблизи критической плотности с учетом как нерелятивистской, так и релятивистской нелинейностей движения электронов. Дано физическое обоснование модели релятивистски-нелинейного плазменного резонанса. **Раздел 1.1** представляет собой введение первой Главы, в котором приводится ее краткое содержание.

В **Разделе 1.2** для описания динамики электронов и структуры электромагнитного поля вблизи критической плотности слабо неоднородной вдоль координаты x плазмы, на которую под углом θ падает p -поляризованная электромагнитная волна, характеризуемая электрическим \mathbf{E} и магнитным \mathbf{B} полями с частотой ω_0 ,

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{1}{2}\{0, 0, B_0(x)\} \exp(ik_y y - i\omega_0 t) + \text{с.с.}, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}\{E_{0x}(x), E_{0y}(x), 0\} \exp(ik_y y - i\omega_0 t) + \text{с.с.}, \\ k_y &= k_0 \sin \theta, \quad k_0 = \omega_0/c = 2\pi/\lambda,\end{aligned}\tag{1}$$

в качестве исходных уравнений рассматриваются уравнения бесстолкновительной гидроди-

намики холодной релятивистской электронной плазмы и уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{p} + (\mathbf{v} \partial_{\mathbf{r}}) \mathbf{p} &= e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right), \quad \partial_t n_e + \operatorname{div}(n_e \mathbf{v}) = 0, \\
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} e n_e \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\
\operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi (e n_e + e_i n_i), \quad \mathbf{p} \equiv m \mathbf{v} \gamma = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь m и e – масса и заряд электрона, n_e , \mathbf{v} , \mathbf{p} – плотность, скорость и импульс электронов плазмы; n_i – плотность неподвижных ионов; \mathbf{E} и \mathbf{B} – напряженности электрической и магнитной составляющих p -поляризованного электромагнитного излучения, характеризуемого наличием компоненты электрического поля (1) в направлении градиента неоднородности плазмы. С учетом специальной иерархии электромагнитных полей и скоростей электронов, которая имеет место при реализации плазменного резонанса и задается неравенствами

$$v_x \gg v_y, \quad E_x \gg E_y \gg B_z, \tag{3}$$

из системы (2) выделены следующие две пары нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка на x - (продольные) и y - (поперечные) компоненты электрического поля и скорости электронов вблизи плазменного резонанса:

$$\begin{aligned}
\partial_t v + a v \partial_x v &= P \gamma_0^{-3}, \quad \partial_t P + a v \partial_x P = -\omega_0^2 v, \\
\partial_t (u \gamma_0) + a v \partial_x (u \gamma_0) &= Q, \quad \omega_0 \partial_x Q + k_y \partial_t P = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

В этой системе $a = -2e|B_1(0)| \sin \theta / m \omega_0^2 L$ – безразмерная постоянная, пропорциональная амплитуде магнитного поля $|B_1(0)|$ в точке плазменного резонанса $x = 0$; $B_1(0)$ – комплексная амплитуда фурье-компоненты магнитного поля в точке $x = 0$ на частоте лазера ω_0 :

$$B_1(0) = |B_1(0)| \exp[i \arg B_1(0)] = \frac{m \omega_0^2 L a}{2|e| \sin \theta} \exp[i \arg B_1(0)].$$

Функции $v = v_x/a$, $u = v_y/a$ описывают нормированные значения компонент скорости электронов; $\gamma_0 = (1 - \beta v^2)^{-1/2}$, $\beta = a^2/c^2$; $P = e E_x / m a$, $Q = e E_y / m a$ – нормированные значения компонент электрического поля, $\omega_L \equiv \omega_L(x) = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$ – электронная ленгмюровская частота плазмы с плотностью $n_0(x)$, которая в окрестности плазменного резонанса $x = 0$ аппроксимируется линейной зависимостью от координаты x , $n_0(x) = (1 + x/L)n_c$, где критическая плотность $n_c = m \omega_0^2 / 4\pi e^2$ и $L = |n_e / \nabla n_e|_{n_e=n_c}$ – характерный масштаб неоднородности плотности.

В Разделе 1.3 кратко описана ключевая идея метода ренормгрупповых симметрий, с помощью которого построено следующее аналитическое решение уравнений (4), определяющее в параметрическом виде нелинейную пространственно-временную структуру электрического

поля и скорости электронов в окрестности критической плотности плазмы:

$$\begin{aligned}
P_0 &= -\frac{A}{1+l^2} (l \cos \chi + \sin \chi), \quad v_0 = -\frac{A}{1+l^2} (l \sin \chi - \cos \chi), \quad x_0 = l - P_0, \\
u_0 &= -AB \sin \theta \left[\arccos \frac{l}{\sqrt{1+l^2}} \sin \chi - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_y^2 e^{2C}}{4} (1+l^2) \right) \cos \chi \right], \\
Q_0 &= -AB \sin \theta \left[\arccos \frac{l}{\sqrt{1+l^2}} \cos \chi + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_y^2 e^{2C}}{4} (1+l^2) \right) \sin \chi \right], \\
v_1 &= v_0 \frac{(1 + \frac{1}{4} B^2 v_0^2)^{1/2}}{1 + \frac{1}{2} B^2 v_0^2}, \quad \tau(\chi, l) = \chi - \left(\zeta E(\varphi, k) - \frac{2}{\zeta} F(\varphi, k) - \varphi \right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\zeta = \sqrt{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)}, \quad \varphi = \arcsin \frac{P_0}{\sqrt{v_0^2 + P_0^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{B^2(v_0^2 + P_0^2)}{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)}},$$

$C = 0.5772156$ – постоянная Эйлера–Маскерони, а функции $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ – неполные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{(1-kx^2)(1-x^2)}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{\sqrt{1-kx^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx. \tag{6}$$

При записи решения (5) совершен переход к безразмерным функциям и переменным $P_0 = \frac{a}{\Delta \omega_0^2} P$, $Q_0 = \frac{a}{\Delta \omega_0^2} Q$, $v_1 = \frac{a}{\Delta \omega_0} v$, $u_0 = \frac{a}{\Delta \omega_0} u$, $x_0 = x/\Delta$, $l = \eta/\Delta$, а также к безразмерным управляющим параметрам $A \equiv aL^2/\Delta^2$ и $B \equiv \omega_0 \Delta/c$, характеризующим вклады нерелятивистской и релятивистской нелинейностей соответственно. Здесь $\Delta = (3V_T^2 L/\omega_0^2)^{1/3}$, а V_T – малая тепловая скорость электронов. Найденное решение учитывает два вида нелинейности динамики электронной компоненты плазмы вблизи плазменного резонанса: нерелятивистскую (конвективную, связанную в (4) с членом $av\partial_x$) и релятивистскую (связанную с гамма-фактором γ_0).

В **Разделе 1.4** подводятся итоги первой Главы, формулируются основные выводы, а также обсуждаются некоторые общие условия применимости решения (5) и физические ограничения представленной теории. Результаты, представленные в первой Главе, опубликованы в работах [A1-A3].

В **Главе 2** проведен подробный анализ полученного в Главе 1 решения (5) системы уравнений (4), которое описывает релятивистские плазменные колебания в окрестности критической плотности неоднородной плазмы. **Раздел 2.1** представляет собой введение второй Главы, где приводится ее краткое содержание.

В **Разделе 2.2** обсуждается влияние нерелятивистской и релятивистской нелинейностей движения электронов на пространственно-временную структуру плазменного резонанса и показано, что уравнения (4) допускают ветвящиеся решения. А именно, ветвление обусловлено наличием двух режимов изменения фазы релятивистских электронных колебаний в резонансно-усиленном плазменном поле, что приводит к двум классам нелинейных решений,

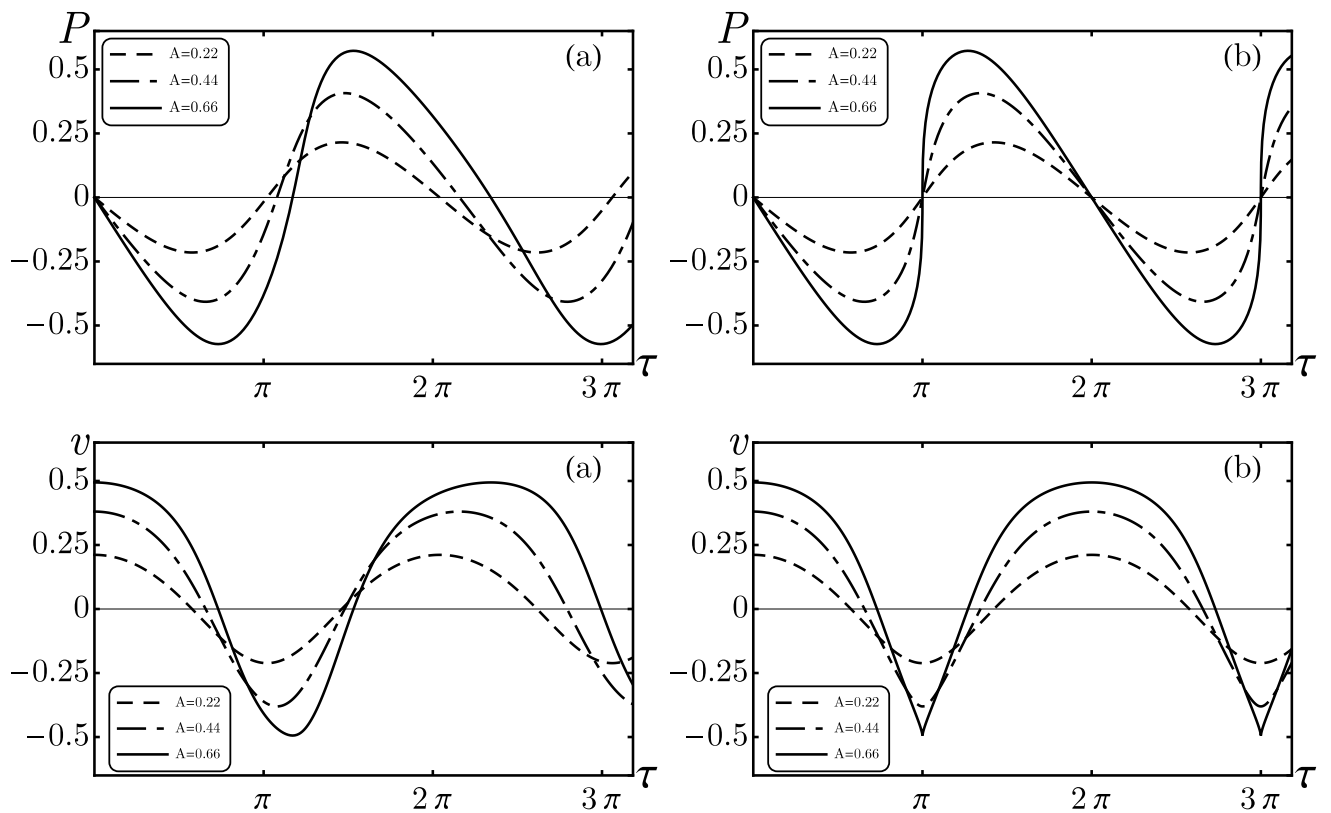


Рис. 1. Временные зависимости продольных компонент электрического плазменного поля P и скорости электронов v в нестационарном (а) и стационарном (б) случаях в точке плазменного резонанса $x = 0$ для различных значений параметра A . Графики построены при $B = 1.5$.

описываемых выражениями (5). Один вид решений, продолжающий стандартное линейное [1] и нелинейное нерелятивистское [6] решения, соответствует стационарному режиму плазменных колебаний с модулированной фазой и отвечает физической картине, при которой амплитуда поля в лазерном импульсе меняется достаточно медленно в сравнении с динамикой электронов плазмы. При этом естественно полагать, что для лазерного импульса конечной длительности, по мере возрастания во времени амплитуды поля накачки, решение, описывающее поле плазменного резонанса, проходит три стадии: от линейной стадии при малой амплитуде к нелинейной нерелятивистской и далее — к релятивистской стадии. Другая ветвь решений характеризуется не только фазовой модуляцией, но также сдвигом частоты колебаний в область меньших частот, и отвечает нестационарным плазменным колебаниям в окрестности критической плотности, являясь подобием решений, полученных в рамках других моделей [16,17]. В этом же разделе продемонстрировано явление опрокидывания релятивистских электронных плазменных колебаний как в стационарном, так и в нестационарном случаях. Нестационарный режим допускает опрокидывание профиля плазменных колебаний за конечное время при сколь угодно конечно малой амплитуде поля накачки, в стационарном режиме опрокидывание носит пороговый характер и происходит только при превышении амплитуды колебаний некоторого критического значения (см. Рис. 1).

Раздел 2.3 посвящен подробному исследованию опрокидывания стационарных плазменных колебаний и пределов применимости гидродинамической модели релятивистского плазменного резонанса. На языке безразмерных параметров задачи A и B найдено уравнение,

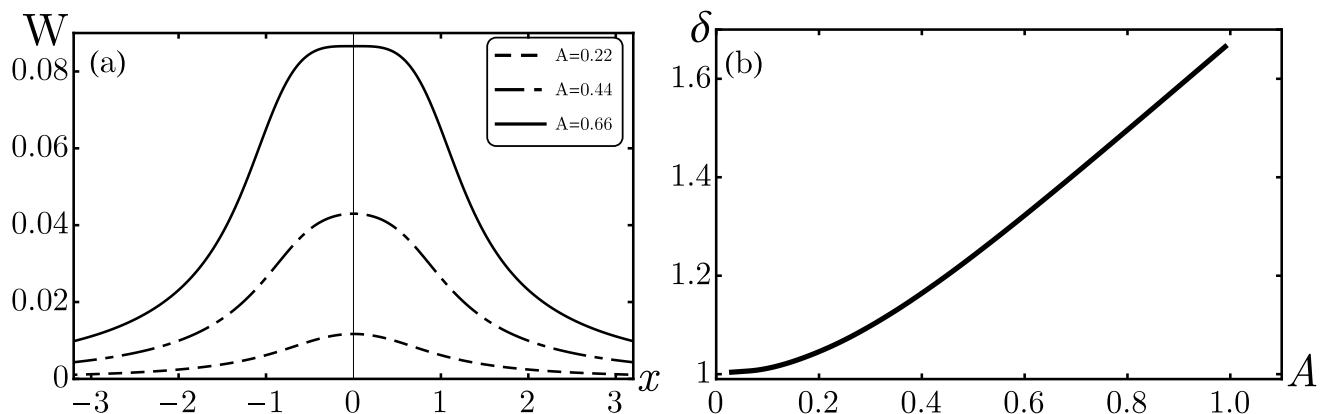


Рис. 2. Пространственные распределения энергии W плазменного поля, отвечающие различным значениям параметра A (a) и зависимость ширины плазменного резонанса (в единицах ширины Δ в линейной теории) от параметра A (b).

которое задает границы применимости гидродинамической модели, определяемые условием опрокидывания релятивистских плазменных колебаний в точке плазменного резонанса. Из сравнения кривых, изображающих границы опрокидывания в релятивистской и нерелятивистской [6] теориях на плоскости $\{A, B\}$, следует вывод о значительном изменении пределов применимости гидродинамической модели с переходом к релятивистской теории.

В **Разделе 2.4** обсуждаются свойства пространственного распределения продольного электрического поля стационарного плазменного резонанса, а также его спектральные характеристики. Показано, что фазовая модуляция релятивистски-нелинейных плазменных колебаний существенно обогащает спектральный состав резонансно-усиленного электрического поля высшими гармониками. В процессе исследования области локализации энергии стационарного плазменного поля обнаружено, что учет релятивистской нелинейности при фиксированной амплитуде поля не приводит к изменению ширины резонанса. Однако с ростом амплитуды поля наблюдается незначительное «разбухание» продольного электрического поля: вблизи границы опрокидывания для различных значений параметров плазмы ширина нелинейного плазменного резонанса δ в среднем приблизительно в полтора раза превышает ширину резонанса Δ в линейной теории (см. Рис. 2).

Раздел 2.5 представляет собой заключение ко второй Главе, в котором подытоживаются основные выводы. Результаты, представленные во второй Главе, опубликованы в работах [A3] и [A4].

В **Главе 3** на основе развитой в предыдущих Главах модели релятивистски-нелинейного плазменного резонанса впервые построена аналитическая теория нелинейного резонансного поглощения лазерного излучения в неоднородной плазме с учетом релятивистской нелинейности движения электронов в окрестности критической плотности плазмы. Представленная

нелинейная теория имеет асимптотический характер, поскольку ее построение выполнено с использованием результатов линейной теории резонансного поглощения [13], полученных в двух предельных случаях, которые, на языке автомодельной переменной $\rho \equiv (\omega_0 L/c)^{2/3} \sin^2 \theta$, задаются неравенствами $\rho > 1$ и $\rho \ll 1$. При фиксированных масштабе неоднородности плотности L и температуре плазмы T эти случаи соответствуют пределам больших ($\rho > 1$) и малых ($\rho \ll 1$) углов падения лазерного излучения на плазму. **Раздел 3.1** представляет собой введение третьей Главы, в котором приводится ее краткое содержание.

В **Разделе 3.2** из системы уравнений (2) получено уравнение для амплитуды переизлучаемого из плазмы в вакуум магнитного поля на основной частоте ω_0 :

$$\begin{aligned} \partial_{xx} R_1 - \frac{\partial_x \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \partial_x R_1 + \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 (\varepsilon_1 - \sin^2 \theta) R_1 = -\frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{a}{4\pi} \text{rot} \vec{J}_1 \right\}_z + \\ + \frac{a/c}{x - i\Delta} \left[u \partial_x P - i\omega_0 v \partial_x (\gamma_0 u) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u \right]_1, \end{aligned} \quad (7)$$

где компоненты вектора \vec{J}_1 определяются выражением

$$\vec{J}_1 = \left\{ v \partial_x P - i\omega_0 v \partial_x (\gamma_0 v) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) v, \quad u \partial_x P - i\omega_0 v \partial_x (\gamma_0 u) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u, \quad 0 \right\}_1. \quad (8)$$

Здесь $R = eB_z/ma$, а индекс «1» в (7) и (8) указывает на взятие первой фурье-компоненты соответствующих функций. Уравнение (7) представляет собой уравнение волнового типа с правой частью, содержащей в качестве источника излучения нелинейный ток, локализованный вблизи критической плотности плазмы и определяемый найденными в Главе 1 выражениями для электрического поля и скорости электронов (5).

Здесь же сформулирована совокупность неравенств на лазерно-плазменные параметры, с помощью которой из (2) выведено уравнение (7), и, таким образом, задана область применимости математической модели резонансного поглощения. Во-первых, мы принимаем во внимание, что зависимость электромагнитных полей и скоростей электронов от координаты x вдоль градиента плотности вблизи плазменного резонанса обратно пропорциональна величине ширины плазменного резонанса $\delta \ll L$ и оказывается существенно сильнее зависимости от поперечной координаты y , которая пропорциональна k_y : $\partial_x(\dots) \gg \partial_y(\dots)$. Во-вторых, мы учитываем, что в рассматриваемом случае слабо неоднородной плазмы с характерным масштабом неоднородности $L \gg 1/k_0$ можно пренебречь вкладами, пропорциональными градиенту неоднородности. Собирая перечисленные условия, приходим к совокупности неравенств, задающих область применимости модели:

$$k_0 L \gg 1, \quad k_y \delta \ll 1, \quad \delta \ll L. \quad (9)$$

В **Разделе 3.3** получено аналитическое решение уравнения (7) и вычислен коэффициент нелинейного резонансного поглощения при больших углах падения лазерного излучения на плазму ($\rho > 1$).

Методом функции Грина в **Подразделе 3.3.1** найдено решение в квадратурах краевой задачи для уравнения (7), с граничными условиями на магнитное поле $B_1(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} B_1 &= C_1^+ e^{i\frac{\omega_0}{c}x \cos\theta} + C_1^- e^{-i\frac{\omega_0}{c}x \cos\theta}, \quad x \rightarrow -\infty, \\ B_1 &= 0, \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (10)$$

где комплексная амплитуда C_1^+ отвечает падающей волне, а C_1^- представляет собой иско-мое решение и соответствует 1-ой гармонике магнитного поля, отраженного от плазменного слоя. При этом показано, что использование в построенном решении линейной связи [13] амплитуды магнитного поля в резонансе с амплитудой поля лазерной накачки приводит к расходимости – неограниченному росту коэффициента нелинейного отражения с увеличением плотности потока лазерного излучения.

С целью устранения этой расходимости в **Подразделе 3.3.2** вычислена нелинейная связь амплитуды магнитной составляющей поля в точке плазменного резонанса с амплитудой поля лазерной накачки, после чего проведена перенормировка функции источника, и в результате получены самосогласованные выражения для амплитуды отраженного магнитного поля в вакууме и коэффициента резонансного поглощения. В результате решения комплексно-

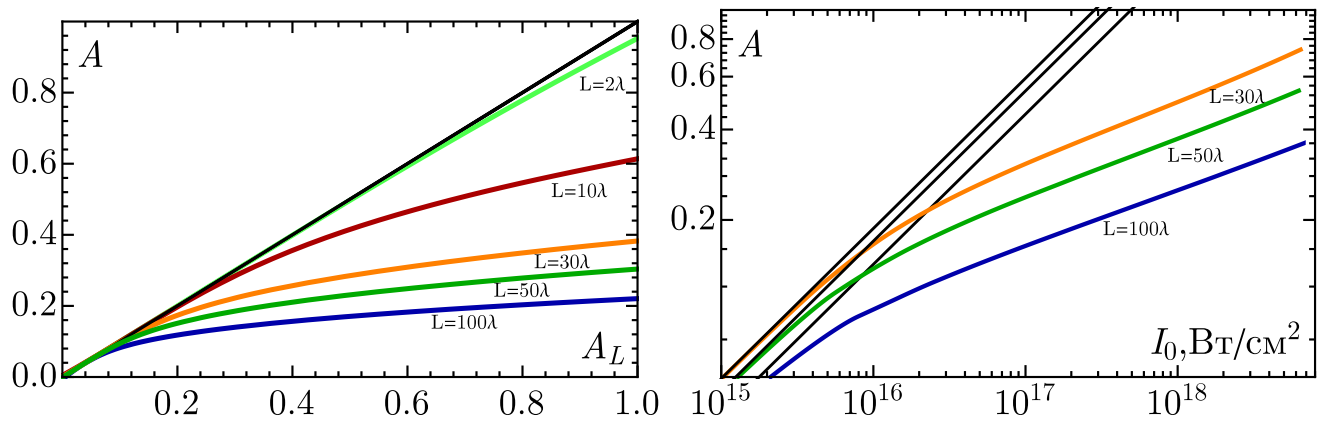


Рис. 3. Зависимости амплитуды A в нелинейной теории от амплитуды A_L , задаваемой линейным приближением (слева), и от плотности потока энергии Nd-лазерного излучения I_0 (справа), вычисленные для электронной температуры плазмы $T = 2 \text{ кэВ}$, масштабов неоднородности $L = 2\lambda$, $L = 10\lambda$, $L = 30\lambda$, $L = 50\lambda$, $L = 100\lambda$, при соответствующих им углах падения лазерного излучения на плазму $\theta = \theta_{min}$. Черная биссектриса (слева) и черные прямые (справа) отвечают пределу линейной теории.

го трансцендентного уравнения, связывающего амплитуду магнитной составляющей поля в точке плазменного резонанса с амплитудой поля лазерного излучения, продемонстрирован эффект насыщения резонанса, т. е. замедления роста амплитуды резонансного поля с увеличением интенсивности поля лазерной накачки. Показано, что насыщение проявляется наиболее существенно в случае большой плазменной короны, при масштабах неоднородности плазмы $L \gtrsim 10\lambda$, тогда как при относительно крутых градиентах неоднородности плотности, $L < 10\lambda$, эффект не столь выражен (Рис. 3).

В этом же подразделе проанализирован эффект опрокидывания релятивистских резонансно-усиленных плазменных колебаний на языке физических параметров лазерно-плазменной системы. Границы опрокидывания, задающие область применимости релятивистской гидродинамики и впервые исследованные в Главе 2 на языке безразмерных параметров задачи A и B , теперь рассмотрены на плоскости параметров «температура плазмы–лазерная интенсивность» $\{T, I_0\}$. Посредством сравнения с результатами нелинейной нереля-

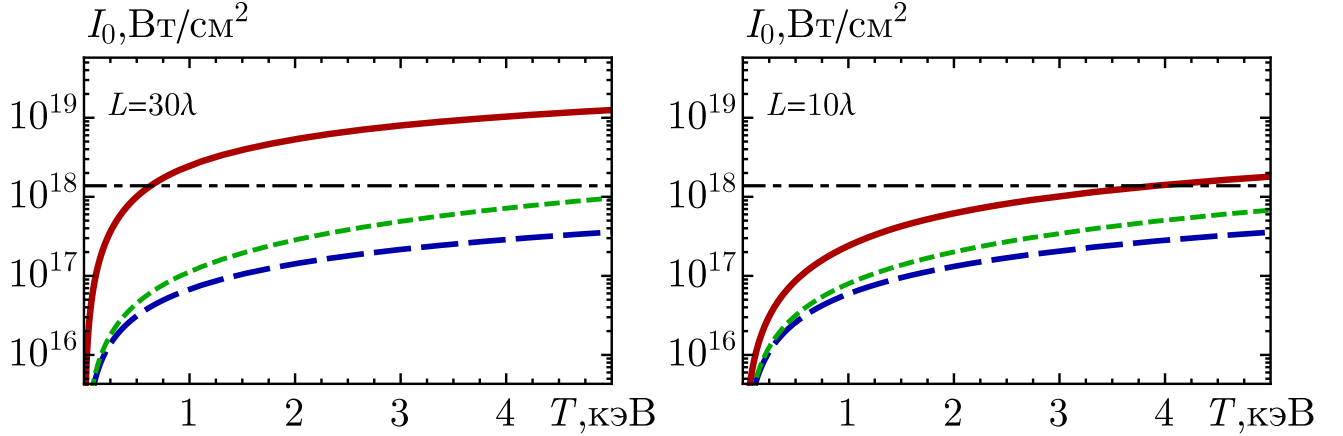


Рис. 4. Области применимости теории (гидродинамической модели) на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ для Nd-лазера и двух масштабов неоднородности плотности плазмы: $L = 30\lambda$ и $L = 10\lambda$. Сплошная красная кривая обозначает границу опрокидывания в релятивистской гидродинамике с учетом нелинейной перенормировки на амплитуду A в резонансе. Синяя штриховая линия отвечает релятивистской границе опрокидывания, но без учета нелинейной перенормировки амплитуды. Зеленая пунктирная кривая соответствует порогу опрокидывания в нерелятивистской теории [6]. Углы падения всюду равны минимальным $\theta = \theta_{min}$ при соответствующих L . Горизонтальная штрих-пунктирная линия отсекает релятивистские интенсивности лазерного поля.

тивистской теории [6] показано (Рис. 4), что перенормировка резонансной амплитуды приводит к переопределению границы применимости по интенсивности лазерной накачки благодаря тому, что за счет насыщения резонанса опрокидывание плазменных колебаний возникает при больших лазерных интенсивностях относительно значений, вычисленных в рамках теории [6].

В случае $\rho > 1$ найдено выражение для нелинейного коэффициента резонансного поглощения лазерного излучения G , который зависит от четырех лазерно-плазменных управляющих параметров – лазерной интенсивности I_0 , масштаба неоднородности плазмы L , её температуры T и угла падения лазерного излучения на плазму θ :

$$G = \left(\frac{A}{A_L} \right)^2 G_L. \quad (11)$$

Здесь G_L и A_L – определяемые в рамках линейной теории коэффициент поглощения и безразмерная амплитуда резонансно-усиленного плазменного поля соответственно, а новая ам-

плитуда A с учетом нелинейных эффектов находится из уравнения

$$\left| A - \frac{(L/\Delta)}{2\pi^2} \left(1 + R_L^{1/2} \right) \mathcal{I} \right| = A_L, \quad (12)$$

где

$$A_L = \frac{a_L L^2}{\Delta^2}, \quad a_L = \left| \frac{4ce^2 |\cos \theta|}{\pi m^2 \omega_0^5 L^3} C_1^{+2} G_L \right|^{1/2}, \quad (13)$$

а интеграл \mathcal{I} определяется выражением

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_1 e^{i\tau(\chi, l)}}{x_0 - i} [\partial_\chi \tau \partial_l (P_0 - i\gamma_0 v_1) - \partial_l \tau \partial_\chi (P_0 - i\gamma_0 v_1) - (\partial_\chi \tau \partial_l x_0 - \partial_l \tau \partial_\chi x_0) (\gamma_0 - 1)]. \quad (14)$$

Из формулы (11) следует «отключение» нелинейного резонансного поглощения, т. е. уменьшение коэффициента поглощения с ростом лазерной плотности потока энергии (Рис. 5а). Кроме того, подавление поглощения усиливается при переходе к слабо неоднородной плазме, когда $L > 10\lambda$ (Рис. 5б). Уменьшение коэффициента поглощения является следствием учета релятивистской нелинейности динамики электронов плазмы в окрестности критической плотности, которая проявляется в виде пространственно-временной модуляции фазы электронных колебаний, исследованной в Главе 2. Для демонстрации определяющего влияния

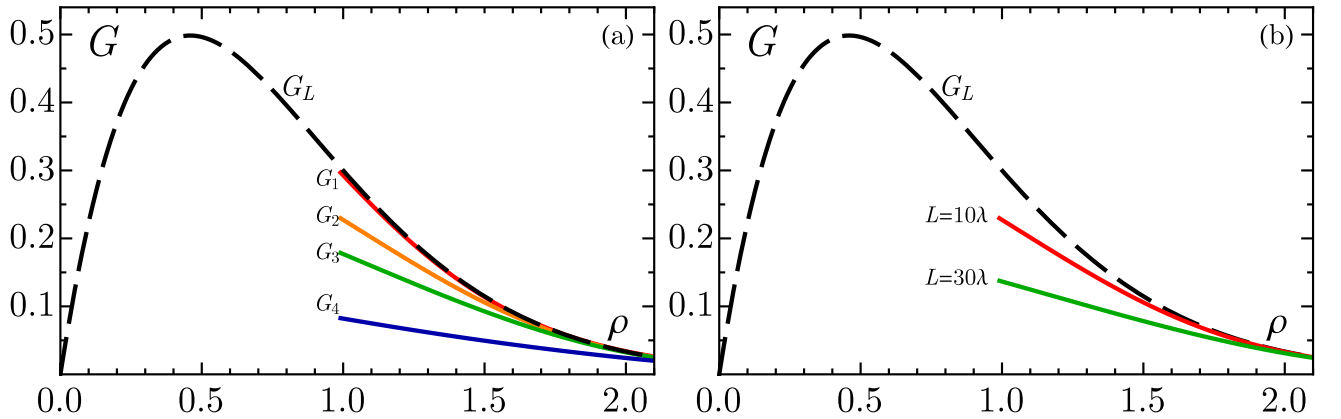


Рис. 5. Зависимости коэффициента резонансного поглощения G от автомодельной переменной ρ . Панель (а): графики построены при заданных значениях температуры плазмы $T = 2$ кэВ и масштаба неоднородности плазмы $L = 10\lambda$, для различных интенсивностей Nd-лазера: $I_0 = 10^{16}$ Вт/см² (G_1), $I_0 = 5 \times 10^{16}$ Вт/см² (G_2), $I_0 = 10^{17}$ Вт/см² (G_3), $I_0 = 5 \times 10^{17}$ Вт/см² (G_4). Панель (б): лазерная интенсивность фиксирована $I_0 = 5 \times 10^{16}$ Вт/см², а сплошные цветные кривые отвечают разным масштабам неоднородности плазмы: $L = 10\lambda$, $L = 30\lambda$. Штриховая черная кривая G_L соответствует коэффициенту поглощения в линейной теории.

релятивистских эффектов на изменение коэффициента поглощения проведено дополнительное аналитическое исследование, которое доказало, что нелинейный характер коэффициента

поглощения и амплитуды поля в резонансе обусловлен именно релятивистской нелинейностью движения электронов плазмы в окрестности критической плотности и не проявляется при учете лишь нерелятивистской нелинейности. В случае $\rho > 1$ найдена формула для быстрой оценки амплитуды резонансного поля, которая дает хорошее совпадение с результатом численного расчета при умеренных плотностях потока энергии лазерного излучения $I_0 \simeq 10^{16} \div 10^{17}$ Вт/см².

Следуя схеме, подробно изложенной в предыдущем Разделе, в **Разделе 3.4** найдено аналитическое решение уравнения (7) и вычислен коэффициент нелинейного резонансного поглощения при малых углах падения лазерного излучения на плазму ($\rho \ll 1$).

Методом функции Грина в **Подразделе 3.4.1** найдено решение уравнения (7) в квадратурах, которое в общем виде определяет амплитуду первой гармоники магнитного поля в вакууме при $\rho \ll 1$.

Аналогично тому, как это сделано в предыдущем Разделе, в **Подразделе 3.4.2** устраняется расходимость в нелинейном коэффициенте отражения путем отыскания нелинейной связи амплитуды поля в точке плазменного резонанса с амплитудой поля лазерного излучения и последующей перенормировки функции источника. С учетом перенормировки найдено выражение для коэффициента нелинейного резонансного поглощения G :

$$G = 1 - \left| R_L^{1/2} + \left(e^{i\pi/3} - R_L^{1/2} \right) \left[1 - \frac{A}{A_L} e^{-i\phi} \right] \right|^2, \quad (15)$$

где

$$\phi = \arg \left\{ A + \frac{(L/\Delta)}{\pi^2} \left(1 - R_L^{1/2} \right) e^{i\pi/3} \mathcal{I} \right\}. \quad (16)$$

Здесь \mathcal{I} – интеграл (14), R_L и A_L – определяемые в рамках линейной теории коэффициент отражения и безразмерная амплитуда резонансно-усиленного плазменного поля соответственно, а новая амплитуда A с учетом нелинейных эффектов находится из уравнения

$$\left| A + \frac{(L/\Delta)}{\pi^2} \left(1 - R_L^{1/2} \right) e^{i\pi/3} \mathcal{I} \right| = A_L, \quad (17)$$

где

$$A_L = \frac{a_L L^2}{\Delta^2}, \quad a_L = \left| \frac{2e \sin \theta}{m\omega_0^2 L} \left(\frac{c}{\omega_0 L} \right)^{1/6} (\pi |\cos \theta|)^{1/2} \text{Ai}'(0) \left(1 - R_L^{1/2} \right) C_1^+ \right|. \quad (18)$$

По формуле (15) построены зависимости коэффициента резонансного поглощения от авто-модельной переменной ρ . Как и в случае $\rho > 1$, коэффициент резонансного поглощения уменьшается с ростом интенсивности поля накачки (Рис. 6а), и подавление усиливается при переходе к слабо неоднородной плазме, когда $L > 10\lambda$ (Рис. 6б).

Раздел 3.5 посвящен исследованию свойств квазистатического электрического поля, генерируемого в окрестности релятивистского плазменного резонанса. Сравнение с результатами слабо нелинейной теории [8] и нелинейной нерелятивистской теории [6] показало, что учет

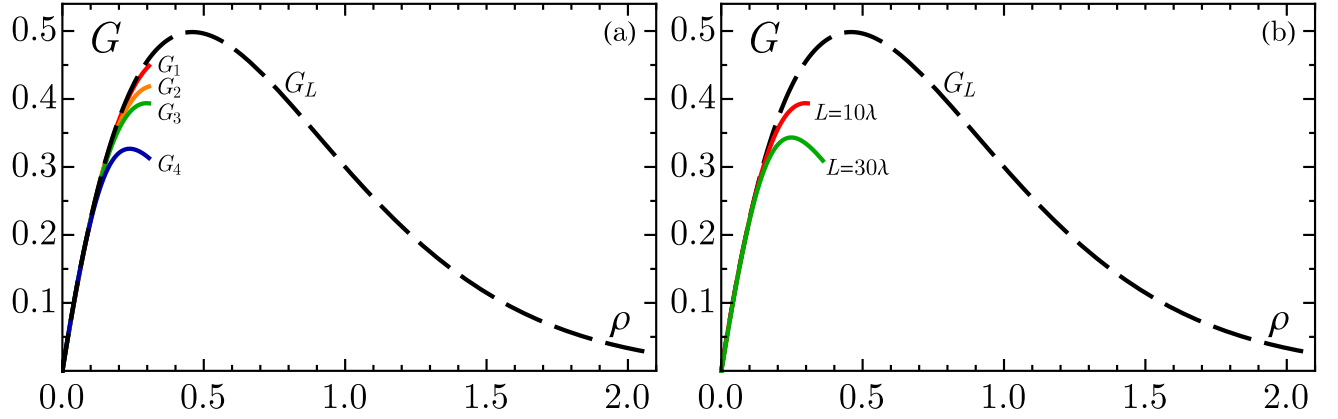


Рис. 6. Зависимости коэффициента резонансного поглощения G от автономной переменной ρ . Панель (а): графики построены при заданных значениях температуры $T = 2$ кэВ и масштаба неоднородности плазмы $L = 10\lambda$, для различных интенсивностей излучения Nd-лазера: $I_0 = 10^{16}$ Вт/см² (G_1), $I_0 = 5 \times 10^{16}$ Вт/см² (G_2), $I_0 = 10^{17}$ Вт/см² (G_3), $I_0 = 5 \times 10^{17}$ Вт/см² (G_4). Панель (б): лазерная интенсивность зафиксирована $I_0 = 10^{17}$ Вт/см², а сплошные кривые отвечают двум масштабам неоднородности плазмы $L = 10\lambda$ и $L = 30\lambda$. Штриховая черная кривая G_L соответствует коэффициенту поглощения в линейной теории.

релятивистской нелинейности не приводит к изменению пространственного распределения поля: его форма остается биполярной и поле по-прежнему меняет знак в точке плазменного резонанса, как предсказано в [6]. Однако, вследствие эффекта насыщения резонансной амплитуды, понижается максимально возможная величина квазистатического электрического поля по сравнению с величиной, полученной в рамках нелинейной нерелятивистской теории [6]. Несмотря на это, из нашей теории следует, что в условиях релятивистского плазменного резонанса при лазерных интенсивностях $I_0 \simeq 10^{17} \div 10^{18}$ Вт/см² возможна генерация достаточно сильных электростатических полей напряженностью в несколько МВ/см. Также проведена оценка характерной энергии, приобретаемой электроном, ускоряемым электростатическим полем в узкой области резонанса. На границе опрокидывания плазменных колебаний эта энергия достигает нескольких десятков кэВ. При этом, исходя из биполярности поля, можно заключить, что быстрые электроны не покидают узкой пространственной области плазменного резонанса.

Раздел 3.6 представляет собой заключение к третьей Главе, в котором подводятся итоги, а также показывается, что анализ зависимостей коэффициента резонансного поглощения $G(\rho)$ при $\rho > 1$ и $\rho \ll 1$ не только приводит к общему выводу о подавлении поглощения, но и позволяет выдвинуть предположение об изменении оптимального угла падения лазерного излучения на плазму, т. е. о смещении максимума кривой $G(\rho)$ относительно максимума, предсказываемого в линейной теории. Действительно, из сравнения кривых $G(\rho)$ для $\rho > 1$ (Рис. 5) и $\rho \ll 1$ (Рис. 6) при фиксированной интенсивности I_0 следует асимметричность

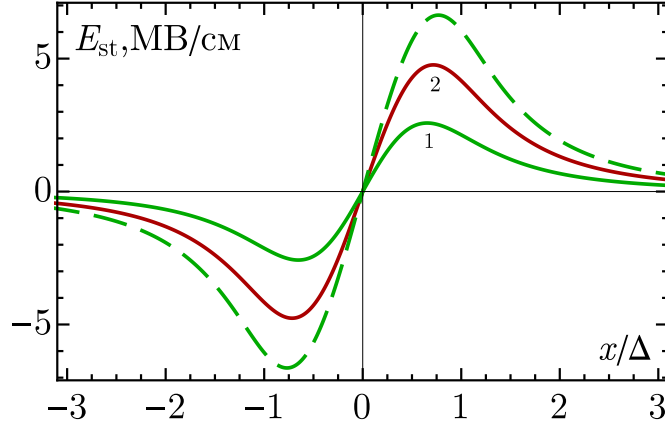


Рис. 7. Пространственные распределения квазистатического электрического поля плазменного резонанса, вычисленные при разных значениях плотности потока I_0 излучения Nd-лазера, для температуры плазмы $T = 2$ кэВ, масштаба неоднородности $L = 30\lambda$ и угла падения $\theta_{min} = 10^\circ$. Кривые 1 и 2 отвечают интенсивностям $I_0 = 10^{17}$ Вт/см² и $I_0 = 10^{18}$ Вт/см² соответственно. Штриховая кривая описывает пространственный профиль поля в нелинейной нерелятивистской теории [6] при интенсивности $I_0 = 10^{17}$ Вт/см².

подавления слева и справа от максимума функции $G(\rho)$. А именно, в области больших углов падения ($\rho > 1$) поглощение подавляется существенно, чем при малых углах. Такая асимметричность может означать, что рост интенсивности поля накачки приводит не только к уменьшению коэффициента поглощения в широком диапазоне изменения ρ , но и к сдвигу максимума поглощения в область меньших ρ или, что то же самое, в область меньших углов падения θ лазерного излучения на плазму. Так, например, для интенсивностей лазерного излучения $I_0 = 10^{16}$, 5×10^{16} , 10^{17} Вт/см², как следует из Рис. 6, максимум поглощения падает до значений $G_m \approx 0.47$, $G_m \approx 0.43$, $G_m \approx 0.4$ соответственно, что находится в качественном согласии с результатами работ [15,16], а оптимальное значение переменной ρ , соответствующее этим максимумам, смещается из точки $\rho_{opt} \approx 0.5$ в сторону меньших ρ и при $I_0 = 10^{17}$ Вт/см² достигает $\rho_{opt} \approx 0.3$. Результаты, представленные в третьей Главе, опубликованы в работах [A6] и [A7].

В **Главе 4** развита аналитическая теория генерации гармоник в неоднородной плазме, использующая представление об электромагнитном поле в области плазменного резонанса как об эффективном источнике их возбуждения. Выражения, определяющие эффективность генерации гармоник при больших углах падения лазерного излучения ($\rho > 1$), получены с учетом релятивистской нелинейности электромагнитных полей и скоростей электронов в окрестности критической плотности плазмы. **Раздел 4.1** представляет собой введение четвертой Главы, в котором приводится ее краткое содержание.

В **Разделе 4.2** из системы уравнений (2), с учетом неравенств (3) и (9), получено уравнение для амплитуды переизлучаемого из плазмы в вакуум магнитного поля на частоте $n\omega_0$

при $n \geq 2$:

$$\partial_{xx}R_n - \frac{\partial_x \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \partial_x R_n + \left(\frac{n\omega_0}{c}\right)^2 (\varepsilon_n - \sin^2 \theta) R_n = -\frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{a}{4\pi} \text{rot} \vec{J}_n \right\}_z, \quad n \geq 2, \quad (19)$$

где компоненты нелинейного тока определяются выражением

$$\vec{J}_n = \left\{ v \partial_x P - \frac{i\omega_0}{n} v \partial_x (\gamma_0 v) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) v, \quad u \partial_x P - \frac{i\omega_0}{n} v \partial_x (\gamma_0 u) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u, \quad 0 \right\}_n. \quad (20)$$

Индекс « n » здесь указывает на взятие n -ой фурье-компоненты соответствующих функций. Аналогично случаю $n = 1$, из уравнения (19) и соотношения (20) следует, что для вычисления n -ой гармоники магнитного поля в вакууме необходимо знать нелинейный ток, который определяется найденной в Главе 1 структурой электрического поля и скорости электронов (5) в области плазменного резонанса.

В **Разделе 4.3** получено аналитическое решение уравнения (19) и вычислен коэффициент преобразования в гармоники на частотах произвольной кратности $n \geq 2$ при $\rho > 1$.

Методом функции Грина в **Подразделе 4.3.1** найдено решение в квадратурах краевой задачи для уравнения (19), с граничными условиями на магнитное поле $B_n(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} B_n &= C_n^- e^{-i\frac{\omega_0}{c}x \cos \theta}, \quad x \rightarrow -\infty, \\ B_n &= 0, \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (21)$$

где комплексная амплитуда C_n^- представляет собой искомое решение и соответствует n -ой гармонике магнитного поля, отраженного от плазменного слоя.

На основе полученного в предыдущем Подразделе выражения для C_n^- в **Подразделе 4.3.2** исследованы спектральные характеристики вторичного излучения, определяемые коэффициентом преобразования \mathcal{R}_n в гармонику на частоте $n\omega_0$ с интенсивностью $I_n = \mathcal{R}_n I_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n &= \left| \frac{C_n^-}{C_1^+} \right|^2 = \frac{k_0 L G_L |\Omega_n|^2}{4\pi^3 A_L^2 (1 - 1/n^2) (\cos^2 \theta - 1/n^2)^{1/2}}, \\ \Omega_n &= \exp \left\{ \frac{4in^3 L \omega_0}{3c} (\cos^2 \theta - 1/n^2)^{3/2} \right\} I_n^- + i I_n^+, \end{aligned} \quad (22)$$

где I_n^\pm определяются выражениями

$$\begin{aligned} I_n^\pm &= \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \exp \left(in\tau \pm inBx_0 \sqrt{\cos^2 \theta - 1/n^2} \right) \times \\ &\times \left\{ \left[\partial_\chi \left(P_0 - \frac{i}{n} \gamma_0 v_1 \right) \partial_l \tau - \partial_l \left(P_0 - \frac{i}{n} \gamma_0 v_1 \right) \partial_\chi \tau - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\partial_l \tau \partial_\chi x_0 - \partial_l x_0 \partial_\chi \tau) (\gamma_0 - 1) \right] v_1 \sin \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1/n^2} \times \right. \\ &\times \left[\left(u_0 \partial_\chi P_0 - \frac{i}{n} v_1 \partial_\chi (\gamma_0 u_0) \right) \partial_l \tau - \left(u_0 \partial_l P_0 - \frac{i}{n} v_1 \partial_l (\gamma_0 u_0) \right) \partial_\chi \tau - \right. \\ &\quad \left. \left. - (\partial_l \tau \partial_\chi x_0 - \partial_l x_0 \partial_\chi \tau) (\gamma_0 - 1) u_0 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Продемонстрирован эффект выполаживания спектральной кривой с ростом плотности потока лазерного излучения, причем гармоники высшего порядка генерируются наиболее эффективно вблизи порога опрокидывания плазменных колебаний при характерных масштабах неоднородности плотности плазмы $L \sim 10\lambda$ (Рис. 8). В сильно нелинейном режиме вбли-

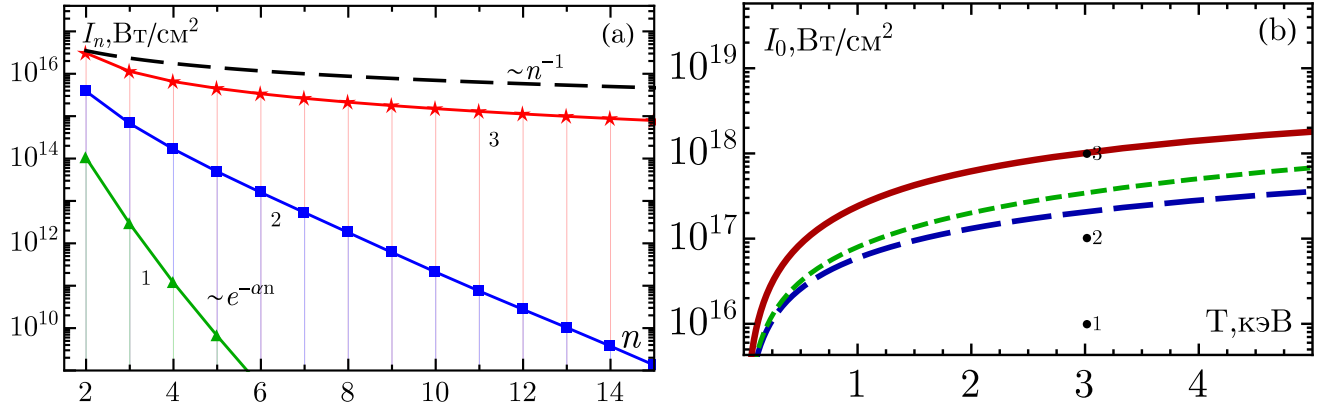


Рис. 8. (a)–Спектры излучения из плазмы, вычисленные для значений плотности потока Nd-лазера $I_0 = 10^{16}$ Вт/см² (кривая 1), 10^{17} Вт/см² (кривая 2), 10^{18} Вт/см² (кривая 3) при фиксированной температуре плазмы $T = 3$ кэВ, масштабе неоднородности $L = 10\lambda$ и угле падения лазера $\theta_{min} = 14.5^\circ$. (b)–Границы применимости теории на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ для масштаба неоднородности $L = 10\lambda$. Точки 1, 2, 3 на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ соответствуют кривым 1, 2, 3 на панели (a).

зи опрокидывания формируются степенным образом затухающие энергетические спектры $I_n \propto n^{-\alpha}$, $\alpha > 1$, что происходит уже при интенсивностях поля лазерной накачки, которые по современным стандартам можно назвать небольшими или умеренными (от $I_0 = 10^{17}$ Вт/см² до 10^{18} Вт/см² для Nd-лазера). Подобные пологие спектры высших гармоник при умеренных интенсивностях лазерного излучения наблюдались экспериментально, например, в [22].

Сравнение результатов релятивистской и нерелятивистской [6] теорий при фиксированной плотности потока лазерного излучения I_0 показало, что в области сильной нелинейности нерелятивистская теория существенно – на порядки – завышает значения I_n . Такое понижение эффективности генерации гармоник при переходе к релятивистской теории связано с эффектом подавления релятивистски-нелинейного резонансного поглощения, который, в свою очередь, является следствием фазовой модуляции релятивистских плазменных колебаний (см. Таблицу 1).

Подраздел 4.3.3 посвящен сравнению с теорией возмущений и обсуждению угловых зависимостей спектров излучения. Построены спектры при различных значениях ρ , т. е. при разных углах падения лазерного излучения на плазму, и продемонстрирован переход от спектров со степенной зависимостью $I_n \sim n^{-\alpha n}$ вблизи опрокидывания при $\rho = 1$ к спектрам, характеризующимся экспоненциальным законом спада $I_n \sim \exp(-\alpha n)$, $\alpha > 1$, который достигается уже при $\rho \approx 2$. Показано, что интенсивность второй гармоники при небольших

плотностях потока лазерного излучения до $I_0 \simeq 10^{16}$ Вт/см² в теории возмущений [3] не отличается от интенсивности, рассчитанной в рамках релятивистской теории (см. Таблицу 2). Однако с ростом плотности потока I_0 разница между оценками в теориях увеличивается: теория возмущений дает на порядки завышенную интенсивность второй гармоники (см. Таблицу 2).

Таблица 1. Отношения интенсивностей гармоник с номерами $n = 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15$, полученные в релятивистской теории (I_n) и нелинейной нерелятивистской теории [6] (I_n^{NR}) при $I_0 = 10^{17}$ Вт/см², $T = 2$ кэВ и $\theta = \theta_{\min}$.

L	I_2/I_2^{NR}	I_5/I_5^{NR}	I_7/I_7^{NR}	I_9/I_9^{NR}	I_{11}/I_{11}^{NR}	I_{13}/I_{13}^{NR}	I_{15}/I_{15}^{NR}
30λ	10^{-1}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

Таблица 2. Значения интенсивностей второй гармоники, вычисленные по теории возмущений I_2^{PT} и в релятивистской теории I_2 для различных плотностей потоков Nd-лазера I_0 при $L = 10\lambda$, $T = 3$ кэВ и $\theta = \theta_{\min}$.

I_0 , Вт/см ²	I_2^{PT} , Вт/см ²	I_2 , Вт/см ²
10^{16}	10^{14}	10^{14}
10^{17}	4×10^{16}	4×10^{15}
10^{18}	10^{18}	3×10^{16}

Аналогичный вывод следует из сопоставления спектров высших гармоник, полученных в диссертационной работе, со спектрами в слабо нелинейной теории [5]. Вследствие расходимости ряда теории возмущений [5] можно говорить о ее неприменимости для оценки интенсивностей высших гармоник в области лазерно-плазменных параметров, где сильна нелинейность. В случае Nd-лазера эта область соответствует интенсивностям $I_0 \simeq 5 \times 10^{16} \div 10^{17}$ Вт/см² при характерных масштабах неоднородности $L \simeq 10\lambda$ (Рис. 9). Вместе с тем подтверждена гипотеза [3] о слабой зависимости эффективности генерации второй гармоники от ширины резонанса (эффективной частоты столкновений) как в области слабой, так и в области сильной нелинейности.

Раздел 4.4 представляет собой заключение к четвертой Главе, в котором подытоживаются основные выводы. Результаты разработанной в диссертации теории генерации гармоник хорошо согласуются с медленно убывающими спектрами гармоник СО₂-лазера, которые наблюдались в экспериментах [22, 23]. Так, для интенсивностей падающего излучения $I_0 \simeq 10^{15}$ Вт/см² при $L = 10\lambda$ и $T \simeq 1$ кэВ по формулам (22) получаем $I_2/I_3 \approx 2$, $I_3/I_4 \approx 1.7$ и $I_5/I_6 \approx 1.4$, что соответствует экспериментальным результатам [22]. В случае, когда $I_0 \simeq 10^{14} \div 10^{15}$ Вт/см², наша теория дает $I_2/I_3 \approx 9$, $I_3/I_4 \approx 6.5$ и $I_5/I_6 \approx 5$, что хорошо согласуется с [23], где уменьшение энергии гармоник с ростом n оценивалось как $I_n/I_{n+1} \approx 6$. Материалы, представленные в Главе 4, опубликованы в работах [A4] и [A5].

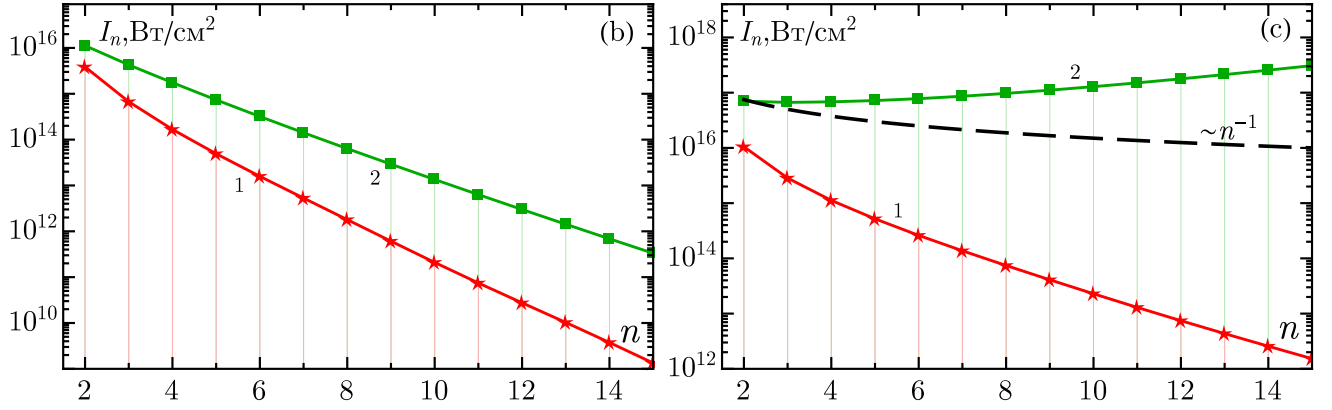


Рис. 9. Спектры магнитного поля в вакууме, полученные в релятивистской теории (1) и в теории возмущений [5] (2) для различных интенсивностей Nd-лазерного излучения: $I_0 = 10^{17} \text{ Вт/см}^2$ (b), $I_0 = 2.5 \times 10^{17} \text{ Вт/см}^2$ (c). Графики построены при фиксированных $T = 3 \text{ кэВ}$, $L = 10\lambda$, $\rho = 1$.

Основные выводы и результаты, полученные в диссертационной работе, изложены в Заключении, далее следуют Благодарности. Завершает текст диссертации Список литературы.

В Приложении вынесены некоторые подробности вычисления допускаемой уравнениями (4) группы преобразований.

Основные результаты

Перечислим основные результаты, которые отвечают положениям диссертации, выносимым на защиту:

1. Построена аналитическая теория резонансного поглощения и генерации гармоник лазерного излучения в неоднородной плазме с учетом релятивистски-нелинейных эффектов в окрестности критической плотности плазмы, позволяющая вычислять коэффициент нелинейного резонансного поглощения и спектрально-угловые характеристики излучения из плазменного резонанса в диапазоне лазерных интенсивностей до $I_0\lambda^2 = 10^{18} \text{ Вт/см}^2 \times \text{мкм}^2$ (λ – длина волны лазерного света, нормированная на мкм).
2. Получен коэффициент нелинейного резонансного поглощения как функция четырех управляющих лазерно-плазменных параметров: лазерной интенсивности I_0 , масштаба неоднородности плазмы L , её температуры T и угла θ падения лазерного излучения на плазму.
3. Сравнение с результатами линейной теории резонансного поглощения показало, что учет релятивистски-нелинейных эффектов в плазменном резонансе приводит к уменьшению коэффициента поглощения с ростом лазерной интенсивности и сдвигу его максимума в область малых углов падения лазерного излучения на плазму.

4. Продemonстрировано формирование спадающих по степенному закону энергетических спектров излучения из плазмы вблизи порога опрокидывания резонансно-усиленных плазменных колебаний. Расчет коэффициентов конверсии лазерного излучения в гармоники показал, что генерация высших гармоник наиболее эффективна при градиентных масштабах плазмы порядка 10λ и в диапазоне интенсивностей лазерного излучения $I_0\lambda^2 = 5 \times 10^{17} \div 10^{18} \text{ Вт/см}^2 \times \text{мкм}^2$.
5. Показано, что при лазерных потоках, не превышающих $I_0\lambda^2 = 10^{18} \text{ Вт/см}^2 \times \text{мкм}^2$, генерируемое в окрестности критической плотности неоднородной плазмы квазистатическое электрическое поле не превышает величины в несколько МВ/см, что ограничивает максимальную энергию ускоренных электронов на уровне нескольких десятков кэВ.

Список публикаций по теме диссертации

Публикации в научных рецензируемых журналах, индексируемых в базах Web of Science и Scopus:

- [A1] И. И. Метельский, В. Ф. Ковалев, В. Ю. Быченков. Нелинейный плазменный резонанс в неоднородной релятивистской плазме // Краткие сообщения по физике. Т. 43, № 1. С. 16–19.
- [A2] I. I. Metelskii, V. F. Kovalev, and V. Yu. Bychenkov. Renormgroup algorithm for the theory of the relativistic plasma resonance // Journal of Physics Conference Series. 2016. Т. 769, № 1, статья № 012083.
- [A3] И. И. Метельский, В. Ф. Ковалев, В. Ю. Быченков. Нелинейный релятивистский плазменный резонанс: Ренормгрупповой подход // Физика плазмы. 2017. Т. 43, № 2. С. 175–190.
- [A4] I. I. Metelskii, V. F. Kovalev, and V. Yu. Bychenkov. Harmonic Generation by Relativistic Plasma Resonance // Journal of Russian Laser Research. 2019. Т. 40, №5. С. 429–434.
- [A5] I. I. Metelskii, V. F. Kovalev, and V. Yu. Bychenkov. Higher-order harmonic generation of laser radiation due to relativistic plasma resonance at nonrelativistic laser intensity // Physics of Plasmas. 2019. 26(11), статья № 113113.
- [A6] И. И. Метельский, В. Ф. Ковалев, В. Ю. Быченков. Нелинейное резонансное поглощение и генерация квазистатического электрического поля в неоднородной релятивистской плазме // ЖЭТФ. 2021. Т. 160, Т. 2, № 8. С. 283–301.
- [A7] И. И. Метельский. Релятивистски-нелинейное резонансное поглощение при малых углах падения лазерного излучения на неоднородную плазму // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2021. Т. 12, № 49. С. 49–57.

Тезисы докладов в сборниках трудов конференций:

- [B1] И.И. Метельский, В.Ф. Ковалев, В.Ю. Быченков. Релятивистский плазменный резонанс // 41-я Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. 2014. с. 143.
- [B2] И.И. Метельский, В.Ф. Ковалев, В.Ю. Быченков. О спектре релятивистских плазменных колебаний в окрестности резонанса // 42-я Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. 2015. с. 157. <http://www.fpl.gpi.ru/Zvenigorod/XLII/It/ru/DY-Metelskiy.docx>
- [B3] И.И. Метельский, В.Ф. Ковалев, В.Ю. Быченков. Пространственные и спектральные характеристики релятивистского поля плазменного резонанса // 43-я Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. 2016. с. 158. <http://www.fpl.gpi.ru/Zvenigorod/XLIII/It/ru/EB-Metelskiy.docx>
- [B4] I.I.Metelskii, V.F.Kovalev, and V.Yu.Bychenkov. Harmonic generation by the relativistic plasma resonance // International Symposium “Modern Problems of Laser Physics” 2018. P. 167. http://mplp2018.laser.nsc.ru/download/Technical_Digest_MPLP-2018.pdf
- [B5] I.I. Metelskii, V.F. Kovalev, V.Yu Bychenkov. Harmonic generation in an inhomogeneous plasma // International Conference on Ultrafast Optical Science (UltrafastLight-2018). P.30 http://ultrafastlight.ru/assets/files/bookofabstracts_ultrafastlight2018.pdf
- [B6] И.И. Метельский, В.Ф. Ковалев, В.Ю. Быченков. Релятивистский плазменный резонанс и генерация гармоник в неоднородной лазерной плазме // V Международная конференция «ЛАПЛАЗ» 2019, Москва, Сборник научных трудов: Часть 2 с. 85-86. <http://conf.laplas.mephi.ru/wp-content/uploads/2019/02/сборник-тезисов-часть-2.pdf>
- [B7] I.I. Metelskii, V.F. Kovalev, V.Yu Bychenkov. High-order harmonic generation from the relativistic plasma resonance in an inhomogeneous plasma // 46th Plasma Physics Conference (EPS 2019). Milan. Vol.43C.P1.2018 <http://ocs.ciemat.es/EPS2019ABS/pdf/P1.2018.pdf>
- [B8] И.И. Метельский, В.Ф. Ковалев, В.Ю. Быченков. Резонансное поглощение и генерация гармоник в неоднородной лазерной плазме // 47-ая Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. Москва. 2020. с. 118. <http://www.fpl.gpi.ru/Zvenigorod/XLVII/It/ru/CL-Metelskiy.docx>
- [B9] I.I. Metelskii, V.F. Kovalev, V.Yu Bychenkov. Nonlinear absorption of laser radiation due to relativistic plasma resonance in an inhomogeneous plasma // International Conference on Ultrafast Optical Science (UltrafastLight-2021). P.31 https://ultrafastlight.ru/assets/files/bookofabstracts_ultrafastlight2021.pdf

Список цитированной литературы

- [1] Гершман Б. Н., Гинзбург В. Л., Денисов Н. Г. Распространение электромагнитных волн в плазме (ионосфере) // УФН. 1957. Т. 61. С. 561–612.
- [2] Theory and simulation of resonant absorption in a hot plasma / D. W. Forslund, J. M. Kindel, Kenneth Lee [и др.] // Physical Review A. 1975. Feb.. Т. 11, № 2. С. 679–683.
- [3] Erokhin N. S., Moiseev S. S., Mukhin V. V. Theory of second-harmonic generation in an inhomogeneous hot plasma // Nuclear Fusion. 1974. Jun.. Т. 14, № 3. С. 333–339.
- [4] Генерация второй гармоники в лазерной плазме (обзор) / Н. Г. Басов, В. Ю. Быченков, О. Н. Крохин [и др.] // Квантовая электроника. 1979. Т. 6, № 9. С. 1829–1865.
- [5] Владимирский А. Б., Силин В. П. Теория генерации высших гармоник в неоднородной плазме // Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 2. С. 354–362.
- [6] Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. Функциональная автомодельность в одной из задач теории плазмы с электронной нелинейностью // ТМФ. 1989. Т. 81, № 1(10). С. 69–85.
- [7] Teubner U., Gibbon P. High-order harmonics from laser-irradiated plasma surfaces // Reviews of Modern Physics. 2009. Apr.. Т. 81, № 2. С. 445–479.
- [8] Генерация статических электрических полей при воздействии на плазму мощного электромагнитного излучения / А. Ш. Абдуллаев, Ю. М. Алиев, В. Ю. Быченков [и др.] // Препринт ФИАН. 1986. № 8. С. 1–12.
- [9] Forslund D. W., Kindel J. M., Lee K. Theory of Hot-Electron Spectra at High Laser Intensity // Physical Review Letters. 1977. Aug.. Т. 39, № 5. С. 284–288.
- [10] Гуськов С. Ю. Демченко Н. Н. Макаров К. Н. [и др.]. Эффективность генерации высокоионизованных атомов в условиях резонансного поглощения излучения CO₂-лазера // УФН. 2011. Т. 41, № 10. С. 886–894.
- [11] Influence of laser induced hot electrons on the threshold for shock ignition of fusion reactions / A. Colaitis, X. Ribeyre, E. Le Bel [и др.] // Physics of Plasmas. 2016. Jul.. Т. 23, № 7, статья № 072703.
- [12] Origins and Scaling of Hot-Electron Preheat in Ignition-Scale Direct-Drive Inertial Confinement Fusion Experiments / M. J. Rosenberg, A. A. Solodov, J. F. Myatt [и др.] // Physical Review Letters. 2018. Jan.. Т. 120, № 5.
- [13] Speziale Thomas, Catto P. J. Linear wave conversion in an unmagnetized, collisionless plasma // Physics of Fluids. 1977. Т. 20, № 6. С. 990.

- [14] Short-pulse laser absorption in very steep plasma density gradients / Hong bo Cai, Wei Yu, Shao ping Zhu [и др.] // *Physics of Plasmas*. 2006. Sep. Т. 13, № 9, статья № 094504.
- [15] Intensity-dependent resonance absorption in relativistic laser-plasma interaction / Hui Xu, Zheng-Ming Sheng, Jie Zhang [и др.] // *Physics of Plasmas*. 2006. Dec.. Т. 13, № 12, статья № 123301.
- [16] Bulk resonance absorption induced by relativistic effects in laser-plasma interaction / Wen-Jun Ding, Z.-M. Sheng, J. Zhang [и др.] // *Physics of Plasmas*. 2009. Apr.. Т. 16, № 4, статья № 042315.
- [17] Rajouria Satish Kumar, K Magesh Kumar K, Tripathi V. K. Nonlinear resonance absorption of laser in an inhomogeneous plasma // *Physics of Plasmas*. 2013. Aug.. Т. 20, № 8, статья № 083112.
- [18] Donaldson T.P, Ladrach P, Wagli P. Child's law for fast ion emission from a laser-generated plasma // *Physics Letters A*. 1979. Apr.. Т. 70, № 5-6. С. 419–421.
- [19] Yabe T., Mima K., Yoshikawa K. // *Jpn. J. Appl. Phys.* 1981. Т. 20, № 269.
- [20] Буланов С. В., Коврижных Л. М., Сахаров А. С. Ленгмюровские колебания конечной амплитуды в области плазменного резонанса // *ЖЭТФ*. 1977. Т. 72, № 5. С. 1869–1873.
- [21] Three-halves harmonic emission from femtosecond laser produced plasmas with steep density gradients / L. Veisz, W. Theobald, T. Feurer [и др.] // *Physics of Plasmas*. 2004. Jun.. Т. 11, № 6. С. 3311–3323.
- [22] Carman R. L., Rhodes C. K., Benjamin R. F. Observation of harmonics in the visible and ultraviolet created in CO₂-laser-produced plasmas // *Physical Review A*. 1981. Nov.. Т. 24, № 5. С. 2649–2663.
- [23] Harmonic generation in CO₂ laser target interaction / N. H. Burnett, H. A. Baldis, M. C. Richardson [и др.] // *Applied Physics Letters*. 1977. Aug.. Т. 31, № 3. С. 172–174.
- [24] Ковалев В. Ф., Ширков Д. В. Ренормгрупповые симметрии для решений нелинейных краевых задач // *УФН*. 2008. Т. 178. С. 849–865.
- [25] Shirkov D. V. Several topics on renorm-group theory // “Renormalization group-91”, edited by D. V. Shirkov and V. B. Priezev, WS, Singapore. 1992. С. 1–10.
- [26] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. О ренормализационной группе в квантовой электродинамике // *Доклады Академии Наук СССР*. 1955. Т. 103. С. 391–394.