

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт имени П. Н. Лебедева
Российской Академии Наук

На правах рукописи

Метельский Игорь Игоревич

**РЕЛЯТИВИСТСКИ-НЕЛИНЕЙНОЕ
РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ
И ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК
ИНТЕНСИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ**

Специальность 1.3.19 – Лазерная физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Быченков Валерий Юрьевич

Научный консультант:
доктор физико-математических наук
Ковалев Владимир Федорович

Москва – 2022

Оглавление

Введение	5
Предмет диссертации и ее актуальность	5
Обзор литературы	13
Цели и содержание работы	26
Научная новизна	26
Положения, выносимые на защиту	30
Апробация результатов	31
Достоверность результатов	32
Список публикаций по теме диссертации	32
Практическая ценность диссертации	34
Личный вклад автора	35
Используемые обозначения и сокращения	36
Глава 1 Новые аналитические подходы и нелинейные решения задачи о релятивистском плазменном резонансе	37
1.1 Введение	37
1.2 Исходные уравнения для электромагнитного поля и скорости электронов в окрестности критической плотности неоднородной плазмы	38
1.3 Ренормгрупповые симметрии и построение решения	41
1.4 Заключение	47
Глава 2 Нелинейная структура электрического поля и скорости электронов в области плазменного резонанса	51
2.1 Введение	51
2.2 Стационарные и нестационарные плазменные колебания	52

2.3	Опрокидывание стационарных плазменных колебаний и пределы применимости гидродинамической модели	59
2.4	Пространственные и спектральные характеристики электрического поля плазменного резонанса	62
2.5	Заключение	67
Глава 3 Нелинейное резонансное поглощение и генерация квазистатического электрического поля		71
3.1	Введение	71
3.2	Основные уравнения задачи о резонансном поглощении	72
3.3	Большие углы падения	75
3.3.1	Амплитуда магнитного поля в вакууме	75
3.3.2	Перенормировка амплитуды магнитного поля в резонансе и нелинейный коэффициент отражения	82
3.4	Малые углы падения	93
3.4.1	Амплитуда магнитного поля в вакууме	93
3.4.2	Перенормировка амплитуды магнитного поля в резонансе и нелинейный коэффициент отражения	95
3.5	Пространственные и энергетические характеристики квазистатического электрического поля	98
3.6	Заключение	101
Глава 4 Генерация высших гармоник		107
4.1	Введение	107
4.2	Основные уравнения для электромагнитного поля в вакууме	108
4.3	Амплитуды гармоник в вакууме	109
4.3.1	Решение краевой задачи	109
4.3.2	Спектральный состав излучения	113
4.3.3	Угловые зависимости спектров излучения и сравнение с теорией возмущений	118
4.4	Заключение	121
Заключение		125
	Основные научные результаты	128

Благодарности	129
Список литературы	130
Приложение А Вычисление допускаемой группы	145
А.1 Группы симметрии уравнений для продольных компонент электрического поля и скорости электронов	145
А.2 Группы симметрии уравнений для поперечных компонент электрического поля и скорости электронов	147

Введение

Предмет диссертации и ее актуальность

Около семидесяти лет назад в теоретических работах Н. Г. Денисова и В. Л. Гинзбурга [1–3] было положено начало систематическому исследованию явления *плазменного резонанса*. С тех пор в теории взаимодействия электромагнитного (лазерного) излучения с неоднородной плазмой хорошо известен классический эффект *линейной трансформации* электромагнитной волны в плазменную, который наблюдается при наклонном падении p -поляризованного излучения с частотой ω_0 на слабо¹ неоднородную плазму в области, где лазерная частота ω_0 сравнивается с частотой собственных колебаний плазмы ω_L . Резонанс колебаний электронов в поле лазерного излучения и электронных ленгмюровских колебаний приводит к усилению электростатических колебаний – плазменному резонансу, выражающемуся в резком возрастании потенциального электрического поля в окрестности критической плотности плазмы [2–5]. Фундаментальный и прикладной интерес к изучению плазменного резонанса обусловлен тем, что он служит механизмом развития таких процессов, как *резонансное поглощение* [6, 7], *генерация гармоник* [8–16], *генерация квазистатических полей* вблизи критической плотности [14, 17] и образование *быстрых частиц* в лазерной плазме [18–25]. Эти процессы, в свою очередь, имеют особое значение в свете нерешенной до сих пор глобальной проблемы лазерного термоядерного синтеза (ЛТС) [26–35].

Резонансное поглощение (РП) является одним из важнейших каналов передачи энергии лазерного излучения в неоднородную плазму и обеспечивает значительный, а иногда и определяющий вклад в коэффициент поглощения.

¹Ниже будет дано уточнение условия слабой неоднородности плазмы на языке лазерно-плазменных параметров.

С практической точки зрения исследования РП связаны с задачами взаимодействия лазерного излучения с плазмой, образующейся в результате лазерной абляции твердотельных мишеней, и главным образом – с экспериментами по ЛТС [30–33], а также с задачей о генерации гармоник [10, 11, 14]. Линейная теория РП, разработанная в 60-х – 70-х годах прошлого века [6, 36] на основе модели, предложенной в [1], по-прежнему лежит в основе многих расчетов и оценок, выполняемых в рамках ЛТС-экспериментов [30]. Однако естественная логика развития лазерных технологий привела к рутинному применению лазеров с интенсивностью, ставящей под вопрос применимость линейной теории РП.

Современные эксперименты по ЛТС с прямым облучением, включая концепцию ударного зажигания («*shock ignition*»), отвечают большим масштабам неоднородности плазмы (десятки и сотни длин волн лазера) и требуют лазерных интенсивностей вплоть до 10^{17} Вт/см². При таких условиях в окрестности критической плотности плазмы возможно проявление сильных нелинейных эффектов [14, 37–40], поэтому возникает необходимость значительного усовершенствования теории поглощения интенсивного лазерного излучения в области критической плотности неоднородной плазмы, где имеет место явление *релятивистски-нелинейного плазменного резонанса*. Дело в том, что в плазменном резонансе для условий ЛТС усиление плазменного поля может приводить к напряженности электрического поля вплоть до релятивистских значений, хотя напряженность падающего лазерного поля остается существенно ниже релятивистской [39, 40]. Такой сильный нелинейный резонанс оказывает значительное влияние на процесс поглощения, а значит задача построения теории РП в условиях релятивистского плазменного резонанса является весьма актуальной. В этой связи настоящая диссертация посвящена развитию релятивистски-нелинейной теории резонансного поглощения.

Поскольку сильная нелинейность существенно усложняет задачу аналитического описания, нелинейное резонансное поглощение изучается, как правило, методами численного моделирования [38, 39, 41–43] или с использованием полуаналитических моделей [37, 40], в которых упрощенные относительно исходных уравнения, полученные на первом этапе аналитическими методами, далее решаются численно. В полностью численных подходах широко применяется кинети-

ческое описание на основе метода «частица в ячейке» (PIC) [38,39,41,42]. В ряде исследований [38–40] было показано, что в результате проявления релятивистских эффектов движения электронов вблизи критической плотности плазмы возникает зависимость коэффициента поглощения от интенсивности лазерного излучения, хотя линейная теория такой зависимости, конечно, не предполагает [6]. Кроме того, при сравнении с результатами линейной теории, в [37, 40] указывалось на возможность изменения вида угловой функции поглощения с ростом масштаба неоднородности плотности плазмы.

На фоне очевидных успехов в описании нелинейного резонансного поглощения можно заметить противоречивость известных на сегодня результатов, полученных разными научными группами. К примеру, одними [37] утверждается универсальность оптимального² угла падения лазерного излучения на плазму и монотонный рост коэффициента поглощения с увеличением интенсивности поля лазерной накачки. Другие, напротив, отмечают [38, 39] эффект подавления резонансного поглощения с ростом лазерной интенсивности вплоть до интенсивности $\approx 3 \times 10^{17}$ Вт/см², или указывают [40] на смещение максимума угловой функции коэффициента нелинейного поглощения относительно положения максимума в линейной теории. Более того, в работах [37, 40] не устанавливается четких границ применимости предложенных полуаналитических моделей, но рассматривается весьма широкий диапазон градиентов неоднородности плазмы, который, вообще говоря, предполагает переходы между различными моделями поглощения в зависимости от характерных масштабов неоднородности плотности. Эти обстоятельства позволяют поставить под сомнение справедливость основных выводов в [37, 40]. В целом, можно сказать, что до сих пор не построено последовательной теории нелинейного РП при релятивистском плазменном резонансе, которая выявляла бы характерные зависимости коэффициента поглощения от множества управляющих параметров лазерно-плазменной системы, в том числе – от интенсивности поля лазерной накачки. Восполнение этого пробела – одна из наших основных целей в рамках диссертационной работы.

Возникающее в окрестности плазменного резонанса существенное разделение зарядов порождает мощное *квазистатическое электрическое поле*, локализованное вблизи критической плотности [14, 17]. Уже во второй половине се-

²Оптимальным называется угол падения, для которого резонансное поглощение максимально.

мидесятых годов XX века был известен ряд экспериментальных фактов, указывающих на генерацию в плазме под действием мощного лазерного излучения сильных квазистатических электрических полей [44, 45], изучение которых представляет интерес с точки зрения процессов переноса [46] и ускорения частиц в плазме [21]. В частности, образование *быстрых электронов* в области критической плотности заслуживает внимания как нежелательный эффект в контексте лазерного термоядерного синтеза, поскольку обеспечивает предварительный прогрев мишени, препятствующий ее оптимальному сжатию, а значит и дальнейшей инициации термоядерной реакции [20, 23, 24, 29, 32, 41, 47, 48]. Поэтому исследование возбуждаемого в окрестности критической плотности плазмы квазистатического электрического поля, его пространственной структуры, представляет интерес и может служить основой для теоретической интерпретации наблюдаемой генерации быстрых электронов.

Генерация гармоник (ГГ) лазерного излучения, – еще один важный процесс, развивающийся в условиях плазменного резонанса, – привлекает интерес исследователей как инструмент получения высокочастотных источников вторичного излучения [15], так и с точки зрения диагностики короны лазерной плазмы (в том числе в ЛТС-экспериментах), то есть с возможностью определения плотности плазмы, градиента температуры и скорости движения короны по спектральному составу вторичного излучения [49, 50]. Начиная с 70-х годов во всем мире было выполнено большое число экспериментальных и теоретических работ, посвященных генерации гармоник, по характеристикам которых можно судить об указанных параметрах в локализованных областях плазмы: вблизи критической и четверти критической плотности [12, 49, 50]. Например, и в недавних экспериментах на NIF (National Ignition Facility), проведенных в рамках схемы прямого сжатия [33], использовались спектры гармоник $\omega_0/2$ для определения температуры электронов плотной лазерной плазмы.

Расчеты амплитуд гармоник на основе модели резонансного усиления электрического поля в области критической плотности плазмы зачастую опираются на результаты теории возмущений [11], для которой характерно предположение о слабой нелинейности. Это предположение дает возможность пренебречь влиянием высших гармоник на низшие, в том числе и на основную гармонику, амплитуда которой считается заданной. Из теории возмущений следует, что

плотность потока вторичного излучения на частоте $n\omega_0$ пропорциональна n -ой степени плотности потока лазерного излучения, падающего на плазму. Такая зависимость приводит к экспоненциально быстрому спадаению интенсивностей гармоник с ростом их номера n . Однако с увеличением амплитуды поля накачки предположение о слабой нелинейности нарушается и возникает необходимость учета эффектов, обусловленных сильной нелинейностью.

Наличие сильной нелинейности качественно меняет процесс генерации целых гармоник, причем высшие гармоники, которые, согласно стандартной (слабо нелинейной) теории возмущений [8, 11], были экспоненциально малы, становятся существенно усиленными, что приводит к более плавному спадаению или даже выравниванию интенсивностей соседних гармоник [51]. В цикле теоретических работ конца 80-х годов [14, 52–58] был достаточно полно изучен процесс генерации высших гармоник в условиях сильной нерелятивистской электронной нелинейности в окрестности плазменного резонанса. Найденные вне рамок теории возмущений коэффициенты преобразования лазерного излучения в гармоники демонстрировали богатый спектральный состав вторичного излучения, характеризующегося медленным спадаением интенсивностей гармоник с ростом их номера. Однако вопрос о влиянии на ГГ релятивистских эффектов динамики электронной компоненты плазмы вблизи критической плотности, при условии эффективного резонансного поглощения, остался невыясненным. В настоящей диссертационной работе поставлена и решена задача построения нелинейной теории генерации гармоник при релятивистском плазменном резонансе на основе аналитического подхода, предложенного в [14].

Значительный прогресс в лазерных технологиях за последние тридцать лет, во многом благодаря методу усиления chirпированного лазерного импульса [59], привел к смещению исследовательского интереса в сторону процессов генерации высших гармоник в плазме релятивистски-интенсивными, короткими (фемтосекундными) лазерными импульсами. При взаимодействии таких импульсов с твердотельными мишенями образуется характеризующаяся крутыми градиентами плотности плазма, в которой формируются локальные неоднородности в распределении электронной плотности в виде электронных сгустков и тонких слоев [15]. В результате в плазме реализуются режимы генерации гармоник, отличные от режима эффективного плазменного резонанса. Например, широ-

кое распространение получила модель релятивистского осциллирующего зеркала [60, 61], в которой взаимодействие электромагнитного излучения с локальными неоднородностями плазмы рассматривается как отражение от гармонически осциллирующего электронного зеркала с релятивистским изменением частоты и амплитуды отраженной волны. На основе указанного и подобных ему механизмов изучается генерация вторичного электромагнитного излучения из плазмы в дальнем ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах [15], генерация аттосекундных импульсов [62–64], а также предлагаются способы повышения частоты и увеличения интенсивности излучения [65–71], однако последовательных аналитических теорий в этом направлении все еще не существует. В этом плане представленное здесь исследование может быть интересно с общей теоретико-методологической точки зрения, поскольку используемые нами достаточно универсальные подходы и полученные результаты могут послужить основой для развития теорий генерации излучения в экстремальных режимах взаимодействия лазерного излучения с релятивистской плазмой.

Решение задач РП и ГГ при нелинейном плазменном резонансе естественным образом подразумевает отыскание динамики электронов вблизи критической плотности плазмы, где формируются нелинейные токи, генерирующие вторичное излучение и определяющие его спектральный состав. Для классических теорий [8, 11, 14] характерна краевая (граничная) постановка задачи, в которой рассматривается динамика *стационарных* колебаний электронной компоненты плазмы в совокупности с граничными условиями на бесконечности. В ряде исследований сильно нелинейных (релятивистских) плазменных колебаний делается выбор в пользу начальной задачи по времени [72–74]. В рамках такого подхода возникает нестационарный режим нелинейных плазменных колебаний, не подразумевающий развития теорий поглощения и генерации гармоник лазерного излучения в области релятивистского плазменного резонанса, которые должны быть естественным обобщением ранее полученных результатов в рамках стационарных нелинейных нерелятивистских теорий [11, 14] и линейной теории [1, 36]. Необходимость такого обобщения диктуется реальной медленной³ динамикой изменения лазерной интенсивности, отвечающей импульсу падающего

³По сравнению с динамикой электронной компоненты плазмы. Такие рассуждения справедливы в случаях не слишком коротких лазерных импульсов длительностью в нано-, пико- и сотни фемтосекунд.

на плазму электромагнитного излучения, для которого вначале имеет место линейный плазменный резонанс [1, 36, 75], затем, с нарастанием интенсивности в импульсе, он сменяется нелинейной нерелятивистской резонансной структурой [14], а при дальнейшем росте интенсивности проявляются релятивистские эффекты. К тому же многозначность найденных на сегодняшний день нелинейных решений [14, 39, 72, 74, 76], описывающих взаимодействие мощного электромагнитного поля с неоднородной плазмой, указывает на возможность реализации всё еще неисследованных динамических режимов плазменных колебаний. По этим причинам развитие аналитической *стационарной* теории *релятивистского плазменного резонанса* представляется особенно интересной задачей.

Несмотря на бурное развитие методов численного моделирования, которые широко применяются в лазерной физике высоких энергий, аналитические подходы по-прежнему могут быть эффективным способом исследования процессов, протекающих в условиях сильной нелинейности. Заметим, что в численных расчетах поглощения и генерации гармоник лазерного излучения неоднородной плазмой существует проблема, связанная с разномасштабностью областей моделирования при вычислении самосогласованного электромагнитного поля в плазме. С одной стороны, для разрешения узкой области резонанса, ширина которой составляет десятые доли длины лазерной волны, требуется малая величина шага пространственно-временной сетки. С другой – при вычислении полей в толще плазменной мишени, определяемой масштабом неоднородности плотности в десятки и сотни длин волн лазера, необходимо большое количество таких шагов, что критически повышает ресурсозатратность вычислений. Кроме того, использование численных методов затрудняет получение практически необходимых скейлингов от лазерно-плазменных параметров вследствие многопараметричности зависимостей численных расчетов, поскольку нелинейное поглощение зависит от интенсивности лазерного импульса, угла его падения на плазму, геометрии плазменной мишени, её плотности, скорости разлета и температуры [39, 77]. В этом отношении большую роль играют теоретические подходы, позволяющие получать аналитические решения, ценность которых состоит не только в том, что они допускают наглядное описание процессов в зависимости от множества параметров задачи, но и в том, что могут использоваться при построении и обосновании численно-аналитических методов как модель-

ные решения, выделяющие ключевые свойства рассматриваемой системы. В настоящей диссертационной работе применен метод ренормгрупповых симметрий (РГС), представляющий собой аналитический подход, который позволяет находить решения уравнений, описывающих структуры электромагнитных полей и динамику частиц плазмы в условиях сильной нелинейности [78]. Преимущество этого подхода связано с возможностью получения важной информации о поведении физической системы непосредственно из свойств симметрий рассматриваемых моделей, что способствует более глубокому пониманию описываемых процессов.

Метод ренормгрупповых симметрий был введен в математическую физику в конце XX века [14, 79, 80] с той же целью нахождения улучшенного решения (по сравнению с начальным приближенным решением), с какой был предложен и классический метод ренормализационной группы Н. Н. Боголюбова [81–84]. Однако его реализация в математической физике основана на приемах современного группового анализа, который позволяет получать как приближенные, так и точные аналитические решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. С момента появления и первого успешного применения метода РГС в физике плазмы [14] эффективность подхода неоднократно демонстрировалась во многих нелинейных задачах математической физики [78]. Здесь с его помощью найдены нелинейные пространственно-временные структуры электрического поля и скорости электронов в окрестности критической плотности плазмы с учетом релятивистских эффектов.

Подводя итог вышесказанному, можно сделать вывод, что задача построения аналитической теории, в рамках которой последовательно описывается явление нелинейного плазменного резонанса, а также сопутствующие ему процессы резонансного поглощения и генерации гармоник с учетом релятивистских эффектов вблизи критической плотности неоднородной плазмы, остается весьма актуальной и в наши дни.

Обзор литературы

Плазменный резонанс и резонансное поглощение

Подробное исследование решений уравнений, описывающих наклонное падение электромагнитных волн на слабо неоднородную плоско-слоистую изотропную плазму, применительно к задаче распространения радиоволн в ионосфере, впервые было проведено Л. А. Жекулиным [85, 86]. В подобной среде, где плотность и диэлектрическая проницаемость зависят от одной пространственной координаты, волны с различной поляризацией электрического вектора, – перпендикулярно и параллельно плоскости падения, – распространяются независимо одна от другой. Причем задача об отражении s -поляризованной волны, когда электрический вектор перпендикулярен к плоскости падения, принципиально не отличается от простейшей задачи нормального падения [3, 87]. В этом случае перед точкой отражения (поворота) образуется осцилляторная структура стоячей электромагнитной волны – результата наложения падающей и отраженной волн, а за точкой отражения поле экспоненциально затухает вглубь плазмы. Отличие заключается лишь в сдвиге точки отражения падающей волны. Иная картина наблюдается в случае p -поляризации падающей электромагнитной волны, когда электрический вектор лежит в плоскости падения (Рис. 0.1). В этом случае вновь образуется стоячая волна, которая после прохождения точки отражения сначала затухает вглубь плазмы; но точка, где диэлектрическая проницаемость среды ε обращается в нуль, является особенной. Л. А. Жекулин показал, что требование обращения в нуль решения волнового уравнения на бесконечности (в области отрицательных значений ε) приводит к обращению поля в бесконечность в точке, где $\varepsilon = 0$. Однако, пытаясь затем устранить эту особенность решения, автор необоснованно заменил функцию ε , изменяющую в определенной точке знак, положительной, нигде не обращающейся в нуль функцией.

Позже К. Фёрстерлинг и Х. О. Вюстер более обстоятельно рассмотрели [88, 89] эту особенность поля при распространении электромагнитной волны в неоднородной плазме. Анализируя приближенные решения, пригодные в малой окрестности нуля функции ε , они установили, что продольная компонента

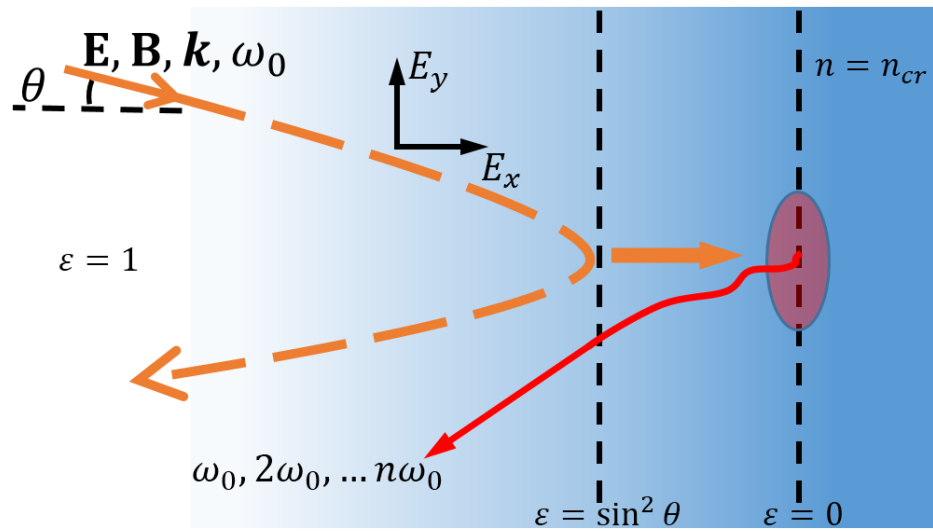


Рис. 0.1. Схематическое изображение наклонного падения под углом θ p -поляризованной плоской электромагнитной волны на неоднородную вдоль оси x плазму. В точке отражения диэлектрическая проницаемость принимает значение $\varepsilon(x) = \sin^2 \theta$, а в точке плазменного резонанса плотность плазмы равна критической и диэлектрическая проницаемость обращается в нуль: $\varepsilon(x) = 0$.

(вдоль градиента неоднородности плазмы) электрического поля имеет особенность порядка $1/\varepsilon$, а поперечная компонента характеризуется логарифмической особенностью, откуда следовал вывод, что резкое нарастание напряженности электрического поля в области, где $\varepsilon \rightarrow 0$, приводит к тому, что описание поля при помощи обычной диэлектрической проницаемости становится невозможным, поскольку движение электронов в поле с сильной пространственной неоднородностью уже не будет гармоническим. К. Фёрстерлинг и Х. О. Вюстер впервые продемонстрировали, что уравнения, описывающие поле в таких условиях, становятся нелинейными, и при распространении волны определенной частоты в неоднородной плазме возникают волны других (кратных) частот, то есть *высшие гармоники* [89].

В 1956 году вышла написанная Н. Г. Денисовым под началом В. Л. Гинзбурга статья [1], ставшая во многом основополагающей в теории распространения радиоволн в плазме и в проблеме лазерного термоядерного синтеза. Развивая идеи предшественников [85, 86, 88, 89], в [1] детально исследовалась структура электромагнитного поля с особенностью в рамках линейной (по амплитуде па-

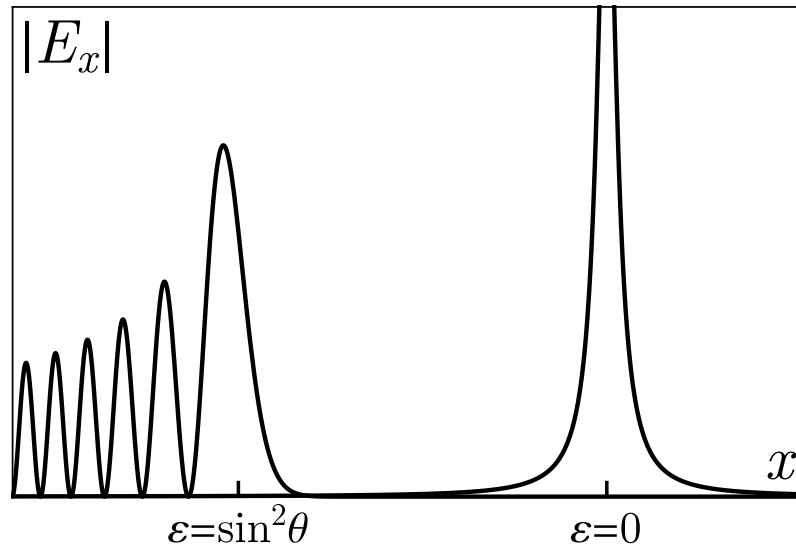


Рис. 0.2. Качественная картина пространственного распределения амплитуды продольного электрического поля в неоднородной плазме, плотность которой меняется вдоль координаты x , при наклонном падении p -поляризованной электромагнитной волны, без учета малых эффектов диссипации в окрестности критической плотности. В точке отражения $\varepsilon(x) = \sin^2 \theta$, а в точке плазменного резонанса $\varepsilon(x) = 0$.

дающей волны) теории на основе уравнений Максвелла и гидродинамического приближения. Была впервые прояснена физическая природа особенности электрического поля. Дело в том, что в неоднородной плазме может осуществляться раскачка продольных плазменных колебаний за счет резонанса колебаний электронов в поле электромагнитной волны с частотой ω_0 и собственных колебаний плазмы с ленгмюровской частотой ω_L . Плазменный резонанс, имеющий место в точке, где $\varepsilon = 0$, то есть там, где совпадают частоты ω_0 и ω_L , ведет к усилению электростатических колебаний и к резкому возрастанию потенциального электрического поля в окрестности критической плотности плазмы (Рис. 0.2). Таким образом, в [1] было дано качественное описание роли плазменного резонанса в специфическом процессе поглощения электромагнитного излучения неоднородной плазмой, которое впоследствии назвали *резонансным поглощением*. Кроме того, впервые был вычислен коэффициент усиления поля и было показано, что конечное значение амплитуды электрического поля плазменного резонанса обеспечивается либо столкновительной диссипацией плазменных колебаний в случае холодной плазмы, либо выносом плазменных волн при учете

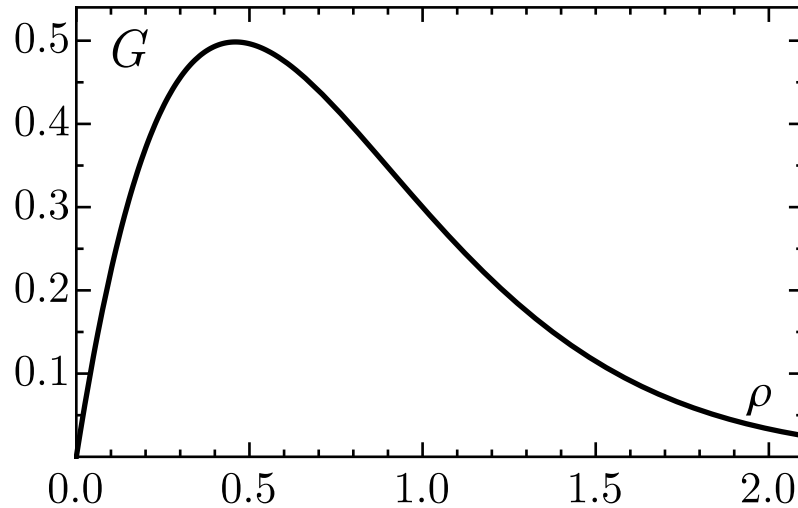


Рис. 0.3. Зависимость коэффициента линейного резонансного поглощения G от автомодельной переменной ρ на основе численного решения уравнений поля [6, 77].

тепловых эффектов в случае горячей плазмы [1–3]. Впоследствии результаты [1] послужили базой для развития теорий генерации гармоник, квазистатических полей, резонансного поглощения и генерации быстрых частиц из области критической плотности неоднородной плазмы, чему посвящено множество работ отечественных и зарубежных исследователей.

На основе модели [1] П. Хирш, Дж. Шмойс и А. Д. Пилия разработали [90–92] аналитическую теорию линейного резонансного поглощения для холодной [90, 91] и горячей плазмы [92], соответственно. Из результатов [90–92] следовало, что коэффициент резонансного поглощения G не зависит от температуры плазмы, частоты столкновений электронов и интенсивности поля накачки, а характеризуется автомодельной зависимостью от единственной переменной ρ , определяемой лазерно-плазменными параметрами $\rho \equiv (\omega_0 L/c)^{2/3} \sin^2 \theta$ с максимумом $G_m \approx 0.4$ при оптимальном значении $\rho = \rho_{opt} \approx 0.2$. Здесь c – скорость света в вакууме, θ – угол падения на неоднородную плазму с масштабом неоднородности L , который определяется как отношение электронной плотности n_e к ее градиенту, вычисленное в точке критической плотности: $L = |n_e/\nabla n_e|_{n_e=n_c}$. Вследствие приближенности аналитических решений уравнений поля для оптимальных значений ρ , количественные оценки эффективности поглощения в

[90–92] оказались не совсем точны, что было продемонстрировано аналитически для холодной плазмы А. Я. Омельченко и К. Н. Степановым в пределе малых [93] и Т. Тэнгом – в пределе больших [94] углов падения лазерного излучения на плазму, а позже – А. Я. Омельченко, Д. Л. Келли, Д. В. Форслундом и др. – методами численного решения волнового уравнения для произвольных углов [6, 95, 96]. Последовательное описание формы резонансной кривой $G(\rho)$ в [6, 95] позволило уточнить значения максимума коэффициента поглощения и соответствующей ему оптимальной ρ : $G_m \approx 0.5$ при $\rho_{opt} \approx 0.5$ (Рис. 0.3). Кроме того, в [6] была продемонстрирована пренебрежимо слабая зависимость коэффициента поглощения от температуры, что подтвердило общий вывод об определяющей роли переменной ρ при описании поглощения в линейном режиме. Отметим, что на существенное поглощение p -поляризованной электромагнитной волны в окрестности плазменного резонанса указывалось также в монографии К. Г. Баддена [97].

Развитие аналитического подхода для холодной плазмы в работе Т. Специале и П. Дж. Катто в [36] позволило значительно скорректировать решения [93, 94] в предельных случаях малых и больших углов падения, а в случае горячей плазмы Дж. Дж. Пертом [7] – получить решение в виде степенных рядов, обобщающих предыдущие результаты [92] на широкий диапазон углов. В последующих аналитических исследованиях линейной конверсии излучения в неоднородной плазме уточнялась зависимость кривой коэффициента поглощения $G(\rho)$ в случае линейного профиля плотности плазмы [98]; в пределе малых углов падения рассматривался профиль плотности с локальным ступенчатым скачком плотности вблизи плазменного резонанса [77], исследовалась форма кривой $G(\rho)$ для параболического профиля [99–101].

В связи с проблемой эффективности резонансного поглощения довольно рано [102] возник интерес к нелинейному влиянию пондеромоторной силы лазерного излучения на изменение плотности плазмы. В ряде работ [103–105] было показано, что под действием пондеромоторной силы падающей на плазму p -поляризованной электромагнитной волны в окрестности плазменного резонанса формируются ступенчатые распределения диэлектрической проницаемости, которые могут способствовать увеличению резонансного поглощения. Отличительная черта указанных работ заключается в том, что при записи урав-

нений поля в плазме учитывается стрикционная нелинейность, изменяющая плотность плазмы, но при этом игнорируется нелинейность движения электронов в сильно нелинейном самосогласованном поле плазменного резонанса. Более поздние работы по резонансному поглощению посвящены исследованию влияния нелинейных, в частности релятивистских, эффектов движения электронов и деформации профиля плотности плазмы на коэффициент поглощения [37–40]. Авторами [38], в рамках одномерного PIC-моделирования и оценок на основе модели «конденсатора» [18, 21, 22], было продемонстрировано влияние релятивистской и пондеромоторной нелинейностей вблизи критической плотности неоднородной плазмы на процесс поглощения лазерного излучения умеренной и субрелятивистской интенсивности. Согласно их расчетам, с ростом лазерной интенсивности вплоть до $\approx 3 \times 10^{17}$ Вт/см² уровень поглощения в окрестности плазменного резонанса может снижаться с 50% до 30%. Такое уменьшение коэффициента поглощения связывалось с влиянием релятивистского «утяжеления» электрона, колеблющегося в резонансно-усиленном плазменном поле. В ходе дальнейшего увеличения амплитуды лазерной накачки, за счет пондеромоторной нелинейности, уменьшение коэффициента поглощения сменяется его ростом, что дает поглощение на уровне 60 – 70% при интенсивности лазерного излучения $\approx 10^{18}$ Вт/см².

В другой статье того же года [37], использовалась упрощенная гидродинамическая модель совместно с уравнениями Максвелла в приближении, в котором электрическое поле в плазме разделяется на две части: электромагнитную компоненту, связанную с падающей лазерной волной, и электростатическую – отвечающую электронным плазменным колебаниям. В результате был сделан вывод о неизменности оптимального угла падения лазерного излучения на плазму и монотонном росте коэффициента поглощения с увеличением интенсивности поля лазерной накачки. При этом обнаруживалась зависимость оптимального угла от величины масштаба неоднородности плотности плазмы. Заметим однако, что в [37] был рассмотрен весьма широкий диапазон масштаба неоднородности $k_0 L = 10^{-2} \div 10$, $k_0 = \omega_0/c$, но не были обозначены пределы применимости модели, и не обосновывалась возможность ее использования в таких широких пределах. Позже, в усовершенствованной технике численного расчета двумерной PIC-модели [39], были подтверждены и уточнены тенден-

ции зависимостей величины поглощения от лазерной интенсивности, выявленные в предыдущем исследовании [38]. Затем в [40] предпринималась попытка рассмотрения релятивистски-нелинейных эффектов резонансного поглощения путем численно-аналитического решения волнового уравнения, которая частично подтверждала выводы работ [38,39], но в то же время указывала на смещение максимума кривой нелинейного поглощения относительно положения максимума в линейной теории за счет изменения потока лазерного излучения.

Нелинейные плазменные колебания

Сильно нелинейные нерелятивистские плазменные колебания впервые исследовались А. И. Ахиезером и Г. Я. Любарским [106] при анализе стационарных нелинейных ленгмюровских колебаний в виде бегущих волн как решений уравнений холодной бесстолкновительной гидродинамики пространственно однородной электронной плазмы. Вследствие учета конечной, но все же существенно нерелятивистской скорости электронов, получалось, что частота нелинейных колебаний не зависит от амплитуды скорости и определяется классической формулой Ленгмюра. Обобщая примененный в [106] метод на случай любых скоростей электронов, А. И. Ахиезер и Р. В. Половин [107] подробно рассмотрели различные режимы продольных и поперечных электронных колебаний в плазме. В частности, они выяснили, что учет релятивизма в движении электронов приводит к зависимости частоты продольных колебаний от амплитуды скорости, а именно к уменьшению частоты с ростом скорости из-за релятивистского изменения «массы»⁴ частицы. Так, при $v \rightarrow c$ частота стремится к нулю, поскольку «масса» электрона стремится к бесконечности.

Из результатов работ [106] и [107] неявно следовало ограничение на амплитуду колебаний электронной компоненты плазмы, обусловленное самой нелинейностью. На это указал Дж. М. Доусон в статье [108], в которой на языке производной лагранжева смещения электронов плазмы относительно их начального положения был найден критерий опрокидывания профиля нелинейной плазменной волны при превышении амплитудой колебаний некоторого критическо-

⁴Кавычками здесь и всюду ниже подчеркивается, что речь идет об изменении законов динамики при больших скоростях, но с оговоркой, что масса, вообще говоря, будучи четырехмерным скаляром, является релятивистским инвариантом.

го значения. Позже, в работе Т. П. Коффи [109], исследовалась стационарная структура продольных электронных колебаний и условия их опрокидывания в плазме на основе решения системы уравнений Власова-Пуассона с использованием простого модельного распределения электронов по скоростям типа «водяной мешок» на фоне неподвижных ионов. Было показано, что соответствующая опрокидыванию предельная амплитуда колебаний монотонно убывает при возрастании отношения тепловой скорости электронов к фазовой скорости волны.

Стационарные (квазистационарные) режимы нерелятивистских плазменных колебаний в окрестности плазменного резонанса рассматривались в работах по генерации гармоник падающего на неоднородную плазму p -поляризованного лазерного излучения [8, 10, 11, 13, 14] на основе модели плазменного резонанса Н. Г. Денисова – В. Л. Гинзбурга. В отличие от работ [8, 10, 11, 13], выполненных в рамках слабо нелинейной теории, В. Ф. Ковалеву и В. В. Пустовалову [14] удалось выйти за рамки теории возмущений путем точного учета в исходных уравнениях нелинейного (по амплитуде электрического поля) движения электронов, но в пренебрежении релятивистскими эффектами. С применением метода ренормгрупповых симметрий [78] была найдена стационарная нелинейная структура электромагнитного поля в области плазменного резонанса и с её помощью были вычислены амплитуды гармоник падающей на неоднородную плазму электромагнитной волны. Также было сформулировано обобщение условия опрокидывания [108] на сильно нелинейный нерелятивистский случай для ленгмюровских колебаний в окрестности критической плотности.

Применительно к задачам ускорения частиц и нагрева плазмы нерелятивистская динамика электронной компоненты плазмы в окрестности критической плотности обсуждалась Дж. Олбриттоном, С. В. Булановым, А. Ю. Ли и др. в иной постановке, отвечающей так называемой модели «конденсатора» [18, 21, 22]. В такой модели рассматриваются вынужденные колебания неоднородного слоя плазмы, помещенного во внешнее однородное высокочастотное электрическое поле. Вследствие неоднородности плазмы [21, 108], процесс колебаний электронов имеет нестационарный характер и завершается опрокидыванием профиля плазменной волны за конечное время. При этом в холодной бесстолкновительной электронной плазме опрокидывание ограничивает линейно растущую со временем напряженность электрического поля вынужденных ко-

лебаний в точке плазменного резонанса на уровне, определяемым квадратным корнем из отношения характерного масштаба неоднородности L к амплитуде осцилляций электрона в однородном высокочастотном внешнем поле. Вычисление отвечающей моменту опрокидывания максимальной амплитуды вынужденных ленгмюровских колебаний, выполненное в [18] для холодной плазмы, было продолжено в [110] для плазмы с конечной температурой электронов, характеризуемых функцией распределения вида «водяной мешок». Было показано, что увеличение температуры плазмы ведет к уменьшению максимальной амплитуды колебаний.

Учет релятивистской нелинейности динамики электронов плазмы существенно усложняет задачу аналитического исследования, поэтому релятивистские плазменные колебания в неоднородной плазме исследуются, в основном, методами численного моделирования, как, например, в работах А. А. Фролова и др. [39, 73, 74] или с использованием приближенных и полуаналитических моделей в работах Дж. Ф. Дрейка, Н. Л. Цинцадзе, С. В. Буланова и др. [40, 72, 111, 112]. В случае численного моделирования плазмы применяются как гидродинамическое описание с использованием лагранжева формализма [73, 74], так и кинетический подход на основе PIC-метода [39]. При изучении нелинейной эволюции релятивистских плазменных волн [72] в рамках решения начальной задачи с возрастанием времени наблюдается укрупнение фронта волны, приводящее к её опрокидыванию. Такая эволюция колебаний, как уже было упомянуто выше, связывается [72, 107] с релятивистским изменением «массы» электрона или, иными словами, с изменением частоты его колебаний: различие частот колебаний соседних частиц ведет к возрастанию во времени разности фаз колебаний и одни частицы начинают догонять другие, что приводит к росту локальной электронной плотности, которая в момент опрокидывания обращается в бесконечность. Опрокидывание плазменных колебаний за конечный интервал времени наблюдалось в численном моделировании динамики плоских релятивистских плазменных колебаний [73, 74]. Постановка задачи при этом отвечала модельному рассмотрению «плазменного слоя»: в качестве начальных условий внутри слоя задается распределение поля, а соответствующее краевое условие фиксирует границы слоя. Отличие такой модели от модели «конденсатора» заключается в отсутствии внешнего постоянно действующего высокочастотного

стотного поля, а воздействие лазерного импульса характеризуется возмущением электрического поля в начальный момент времени. Результатом временной эволюции начального состояния плазменного слоя является возникновение сингулярности электронной плотности, что соответствует опрокидыванию профиля релятивистских плазменных колебаний.

Генерация квазистатического электрического поля

Еще одно направление исследований полей, возбуждаемых вблизи критической плотности, связано с *квазистатическими полями*, механизм генерации которых основан на нелинейном взаимодействии высокочастотных колебаний, таком, что образующаяся при их комбинационном сложении частота результирующей моды равна нулю. При слабой нелинейности, когда величина, определяемая отношением амплитуды осцилляций электрона в резонансно-усиленном потенциальном электрическом поле к ширине плазменного резонанса, мала по сравнению с единицей, такой механизм отвечает биению двух основных гармоник плазменного поля и дает хорошо известное выражение для силы высокочастотного давления излучения (силы Миллера). В условиях сильной нелинейности, когда указанное отношение сравнимо с единицей, спектр нелинейного плазменного поля в окрестности резонанса обогащен высшими гармониками с ненулевой интенсивностью. В этом случае вклад в генерацию квазистатического поля дает все многообразие комбинационных взаимодействий гармоник основной частоты [14]. Слабо нелинейная теория генерации квазистатического электрического поля p -поляризованной электромагнитной волной в неоднородной плазме при учете диссипации излучения в точке плазменного резонанса была построена В. Ю. Бычковым, А. Ш. Абдуллаевым, Ю. М. Алиевым и А. А. Фроловым [17]. Авторы нашли стационарное пространственное распределение квазистатического электрического поля в окрестности плазменного резонанса и показали, что оно имеет биполярную форму. Позже В. Ф. Ковалев и В. В. Пустовалов нашли [14] структуру квазистатических полей в режиме сильной нерелятивистской нелинейности и пришли к аналогичному [17] выводу о биполярности пространственного распределения электрического поля, указав, что компонента квазистатического электрического поля меняет знак при переходе через точку плазменного резонанса.

Генерация гармоник

Процессы *генерации гармоник* в лазерной плазме, образующейся при взаимодействии лазерного излучения с твердотельными мишенями, в течении полувека являются предметом как экспериментального, так и теоретического исследований [15]. Впервые генерация гармоник наблюдалась в 1970 году в работе А. Карузо и др. [113], где была получена вторая гармоника лазерного излучения, затем продемонстрированная также в [114, 115]. Вскоре стало ясно, что детальное исследование характеристик вторичного излучения может служить источником богатых сведений о состоянии лазерной плазмы. Речь идет о методике диагностики плазмы, основанной на исследовании второй гармоники, которая позволяет получать информацию об эволюции параметров лазерной плазмы с высоким временным и пространственным разрешением. Первые предложения по использованию измерений интенсивности и спектра второй гармоники для определения различных параметров лазерной плазмы в области критической плотности были сформулированы в работах В. В. Пустовалова, А. В. Виноградова и В. П. Силина [116, 117]. Полученные позже различными группами [118–121] оценки локальной температуры и характерного масштаба неоднородности плотности лазерной плазмы продемонстрировали целесообразность развития методов диагностики параметров плазмы по ее излучению в диапазоне частот вблизи удвоенной частоты поля накачки. Кроме того, в [122] было указано, что в рамках диагностики по второй гармонике можно получать информацию не только о макроскопических параметрах плазмы, но также об уровне и спектре развивающейся в плазме параметрической турбулентности.

Вскоре после экспериментов [113–115] последовали эксперименты по обнаружению третьей [123] гармоники и гармоник с высокими номерами вплоть до одиннадцатой и $n = 2 - 5$ в случаях CO_2 - [124] и неодимового лазера [125] соответственно. Регистрация гармоник более высокого порядка была осуществлена в 1981 году в ходе экспериментов Р. Л. Кармана и др. [51, 126] по взаимодействию CO_2 -лазера интенсивностью $10^{14} \div 10^{16}$ Вт/см² с твердотельными мишенями. При этом наблюдались гармоники лазерной частоты вплоть до 29-ой [126] и даже 46-ой [51] гармоники. Более того, были впервые получены спектры вторичного излучения, характеризующиеся медленным (не экспонен-

циальным) убыванием интенсивностей гармоник с ростом их номера и «частотные» спектры с выравниванием интенсивностей соседних гармоник.

Во многих теоретических исследованиях генерации гармоник в неоднородной плазме используется математическая модель, основанная на эффекте плазменного резонанса [1, 3]. Ко времени экспериментального обнаружения второй гармоники [113] уже имелись теоретические представления [8], указывающие на возможную связь этого эффекта с возбуждением в лазерной плазме сильных продольных электронных ленгмюровских колебаний благодаря линейной трансформации лазерного излучения. В области, где частота плазменных колебаний близка к частоте падающего на плазму излучения, дальнейшее взаимодействие продольных плазменных колебаний друг с другом, либо с волной лазерной накачки, приводит к генерации вторичного излучения на удвоенной частоте лазерного света. На основе этих представлений Н. С. Ерохин, В. К. Захаров, С. С. Моисеев и В. В. Мухин построили слабо нелинейную теорию генерации второй гармоники [8, 10]. Обобщая подход, предложенный в [8], В. П. Силин, А. Б. Владимирский и Н. П. Троценко решили задачи о генерации гармоник произвольной кратности в холодной [11] и горячей плазме [13] соответственно. Они показали, что возникающие в результате резонанса сильные плазменные колебания порождают нелинейные электронные токи, являющиеся источником генерации вторичного излучения, обогащенного высшими гармониками. Этот же механизм рассматривался в работе [127] в связи с объяснением ряда экспериментов [51, 126]. Предположение о слабой нелинейности в окрестности резонанса позволило авторам работ [8, 11, 127] использовать теорию возмущений по амплитуде поля накачки, в рамках которой спадание амплитуд гармоник с ростом их номера происходит достаточно быстро – по экспоненциальному закону [11].

Указания на возможность существования более плавно спадающих спектров излучения из плазмы были даны ещё М. Б. Исиченко и В. В. Яньковым [128, 129] в ходе качественного обсуждения генерации гармоник лазерного излучения за счет опрокидывания нерелятивистских электронных потоков, но без строгого теоретического обоснования. В уже упомянутой выше работе [14] удалось построить аналитическую теорию генерации высших гармоник в условиях сильной нерелятивистской нелинейности в окрестности критической плот-

ности неоднородной плазмы. Было показано, что даже при небольших по нынешним меркам лазерных интенсивностях $\sim 10^{16}$ Вт/см² возможна генерация электромагнитного излучения со спектром, характеризующимся существенно более медленным, чем в стандартной теории возмущений [11], спаданием амплитуд гармоник с ростом их номера, что подтверждалось экспериментальными фактами [51, 126]. Далее были получены основные формулы для коэффициента трансформации лазерного излучения в гармоники для холодной и горячей плазмы, а также проанализированы их температурные зависимости [53, 55–57].

На сегодняшний день медленно спадающие спектры излучения из плазмы получены в случаях более коротких, мощных (релятивистских) лазерных импульсов фемтосекундной длительности и более резких градиентов неоднородности плазмы, когда реализуются другие (отличные от механизма плазменного резонанса) механизмы генерации гармоник [15, 61]. В предельном случае полуограниченной плазмы процесс генерации гармоник представляется как отражение лазерного излучения от осциллирующего электронного (плазменного) зеркала [60, 130, 131]. Модель осциллирующего зеркала приводит к степенным спектрам гармоник вида $\propto \omega^{-8/3}$ в сильно релятивистском пределе [132], когда скорости колебаний электрона в лазерном поле близки к скорости света. Эта модель генерации гармоник [60, 132] была подтверждена численным моделированием в рамках PIC-метода. Плавные спектры излучения, отраженного от плазмы в условиях резкой (ступенчатой) границы «плазма-вакуум», характеризующиеся степенным законом спада интенсивности гармоник, также были получены в работах с использованием численного моделирования [63, 133–135].

Цели и содержание работы

Целью данной работы являлось теоретическое исследование процессов резонансного поглощения и генерации высших гармоник лазерного излучения в условиях релятивистски-нелинейного плазменного резонанса. В соответствии с целью в диссертационной работе были поставлены и решены следующие задачи:

1. Разработать теорию релятивистского плазменного резонанса и исследовать нелинейную структуру полей и скоростей электронов в окрестности критической плотности неоднородной лазерной плазмы.
2. Построить аналитическую теорию резонансного поглощения с учетом нелинейных, в том числе релятивистских, эффектов движения электронов.
3. Построить аналитическую релятивистски-нелинейную теорию генерации гармоник в режиме релятивистского плазменного резонанса.
4. Развить модель генерации квазистатического электрического поля в окрестности критической плотности неоднородной плазмы.

Научная новизна

Диссертация содержит описание законченного исследования, научная новизна которого заключается в следующем:

1. Впервые разработана последовательная аналитическая теория релятивистского плазменного резонанса в неоднородной плазме с использованием метода ренормгрупповых симметрий.
2. Впервые построена самосогласованная теория релятивистски-нелинейного резонансного поглощения, учитывающая перенормировку нелинейной амплитуды резонансного поля.
3. Впервые построена аналитическая теория генерации высших гармоник с учетом релятивистской нелинейности движения электронов в окрестности критической плотности неоднородной плазмы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Текст иллюстрируют 36 рисунков и 3 таблицы, библиография содержит 152 наименования. Общий объем работы составляет 148 машинописных страниц.

В главе 1 изложена общая постановка задачи и физическое обоснование модели релятивистски-нелинейного плазменного резонанса в неоднородной плазме; на основе уравнений релятивистской гидродинамики электронной плазмы и уравнений Максвелла сформулированы исходные нелинейные уравнения в частных производных, которые описывают пространственно-временную структуру электрического поля и скорости электронов вблизи критической плотности плазмы. Кратко описана ключевая идея метода РГС и приведены основные шаги построения аналитического решения исходных уравнений с привлечением соответствующего математического аппарата. Найденное решение учитывает два вида нелинейности динамики электронной компоненты плазмы вблизи плазменного резонанса: нерелятивистскую (конвективную) и релятивистскую. Некоторые подробности вычисления допускаемой исходными уравнениями группы преобразований приведены в Приложении А. Обсуждаются общие условия применимости полученного решения и физические ограничения представленной теории.

В главе 2 проведен подробный анализ полученного в главе 1 решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамику электронов и электрическое поле в окрестности критической плотности неоднородной плазмы. Показано, что уравнения допускают ветвящиеся решения, которые отвечают стационарному и нестационарному режимам сильно нелинейных электронных колебаний. Исследовано опрокидывание плазменных колебаний в окрестности критической плотности неоднородной плазмы с учетом релятивистской нелинейности движения электронов плазмы. Нестационарный режим допускает опрокидывание профиля плазменных колебаний при сколь угодно малой амплитуде поля накачки, в стационарном режиме опрокидывание носит пороговый характер и происходит только при превышении амплитуды колебаний некоторого критического значения. Для стационарного режима, на языке безразмерных параметров задачи, найдены границы применимости гидродинамической модели, которые определяются условием опроки-

дывания релятивистских плазменных колебаний в точке плазменного резонанса. Обсуждаются свойства пространственно-временных распределений скорости электронов и электрического поля стационарного плазменного резонанса, а также их спектральные характеристики. Продемонстрирован эффект фазовой модуляции релятивистски-нелинейных плазменных колебаний, существенно обогащающий спектральный состав резонансно-усиленного электрического поля высшими гармониками, амплитуды которых с ростом номера спадают по степенному закону. Обнаружен эффект «разбухания» поля – незначительного увеличения ширины плазменного резонанса в сильно нелинейном случае.

В главе 3 на основе развитой в предыдущих главах модели релятивистски-нелинейного плазменного резонанса построена аналитическая теория нелинейного резонансного поглощения при больших и малых углах падения лазерного излучения на плазму. Для амплитуды переизлучаемого из плазмы магнитного поля на основной частоте получено волновое уравнение с правой частью, содержащей в качестве источника излучения нелинейный ток, локализованный вблизи критической плотности плазмы. Найдено аналитическое решение этого уравнения, в общем виде определяющее амплитуду первой гармоники магнитного поля в вакууме. При этом показано, что использование в построенном решении линейной связи амплитуды магнитного поля в резонансе с амплитудой поля накачки приводит к неограниченному росту коэффициента нелинейного отражения с увеличением потока лазерного излучения. С целью устранения этой расходимости вычислена нелинейная амплитуда магнитной составляющей электромагнитного поля в точке плазменного резонанса, после чего проведена перенормировка функции источника, а также получены самосогласованные выражения для амплитуды магнитного поля в вакууме и коэффициента резонансного поглощения.

Здесь же обсуждается область применимости релятивистской гидродинамической модели на языке физических параметров лазерно-плазменной системы, а точнее – на параметрической плоскости «температура плазмы–лазерная интенсивность». Найдено приближенное аналитическое выражение для резонансной амплитуды нелинейного магнитного поля в пределе больших углов падения и доказано, что отличие коэффициента резонансного поглощения в нелинейной теории от коэффициента в линейном приближении имеет место только при

учете релятивистской нелинейности движения электронов. Продемонстрировано подавление резонансного поглощения с ростом интенсивности лазерного излучения, которое является следствием пространственно-временной модуляции фазы релятивистских колебаний электронов плазмы вблизи резонанса. Помимо выявления уменьшения коэффициента резонансного поглощения в широком диапазоне углов падения лазерного излучения на плазму, предсказывается смещение максимума кривой поглощения в область меньших углов.

В главе 4 развита аналитическая теория генерации высших гармоник при релятивистски-нелинейном плазменном резонансе в неоднородной плазме в случае не малых углов падения лазерного излучения на плазму. Выведено уравнение для n -ой гармоники магнитного поля в вакууме с правой частью, содержащей нелинейный ток, который определяется полученной в главе 1 структурой электрического поля и скорости электронов в малой окрестности резонанса. В результате решения уравнения с источником найдены коэффициенты преобразования в гармоники на частотах произвольной кратности. Исследовано влияние релятивистской нелинейности движения электронной компоненты плазмы на спектральные и угловые характеристики вторичного излучения. Проведено сравнение с результатами нелинейной нерелятивистской теории. Продемонстрировано выполаживание спектров излучения с ростом плотности потока энергии лазерного излучения, которое приводит к формированию медленно спадающих степенных (в зависимости от номера гармоники) спектров вблизи границы опрокидывания резонансно-усиленных плазменных колебаний. Рассмотрен вопрос об изменении эффективности генерации высших гармоник в зависимости от угла падения лазерного излучения на плазму. Кроме того, подробно обсуждается связь построенной здесь релятивистской теории со слабо нелинейными теориями генерации второй и высших гармоник.

Положения, выносимые на защиту

1. Поле плазменного резонанса в условиях как нерелятивистской (конвективной), так и релятивистской нелинейностей движения электронов в окрестности критической плотности неоднородной лазерной плазмы допускает аналитическое описание с использованием метода ренормгрупповых симметрий в рамках гидродинамической модели вплоть до границы её применимости, определяемой условием возникновения опрокидывания резонансно-усиленных плазменных колебаний.
2. Коэффициент нелинейного резонансного поглощения является функцией четырех управляющих параметров лазерно-плазменной системы – лазерной интенсивности I_0 , масштаба неоднородности плазмы L , её температуры T и угла θ падения лазерного излучения на плазму.
3. Учет релятивистски-нелинейных эффектов в плазменном резонансе приводит к подавлению резонансного поглощения – уменьшению коэффициента поглощения с ростом лазерной интенсивности, а также к уменьшению амплитуды квазистатического электрического поля, генерируемого в области критической плотности.
4. Разработанная аналитическая нелинейная теория позволяет находить спектрально-угловые характеристики гармоник, излучаемых из плазменного резонанса неоднородной плазмы, в широком диапазоне лазерных интенсивностей до $I_0\lambda^2 = 10^{18}$ Вт/см²×мкм² (λ – длина волны лазерного света, нормированная на мкм).
5. Гармоники высшего порядка генерируются наиболее эффективно вблизи порога опрокидывания резонансно-усиленных плазменных колебаний, когда формируются энергетические спектры, затухающие по степенному закону.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались на конференциях:

- 1) Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу (2013, 2014, 2015, 2016, 2020).
- 2) XXII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 13 – 17 апреля 2015).
- 3) Международная молодежная конференция «ФизикА.Спб/2015» (Санкт-Петербург, 26 – 29 октября 2015).
- 4) 27th Symposium on Plasma Physics and Technology (Прага, Чехия, 19 – 26 июня 2016).
- 5) 34-th European Conference on Laser Interaction with Matter (ECLIM 2016) (Москва, 18 – 23 сентября 2016).
- 6) International Conference on Ultrafast Optical Science (UltrafastLight) (Москва, ФИАН, 2017, 2018, 2019, 2021).
- 7) International Symposium “Modern Problems of Laser Physics” (Новосибирск, 21 – 29 августа 2018).
- 8) V Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии» (ЛАПЛАЗ-2019) (Москва, НИЯУ МИФИ, 2019).
- 9) 46th Plasma Physics Conference (EPS 2019) (Милан, Италия 8 – 12 июля 2019).

Также результаты докладывались на семинарах:

- 1) Межинститутский семинар «Новые методы ускорения частиц и экстремальные состояния материи», 17 декабря 2020.
- 2) Семинар отделения квантовой радиофизики им. Н. Г. Басова, Москва, ФИАН, 22 октября 2022.

Достоверность результатов

Выводы построенной в диссертации теории генерации высших гармоник подтверждаются экспериментами [22, 23] по генерации гармоник CO_2 —лазерного излучения интенсивностью $I_0 \simeq 10^{14} \div 10^{15} \text{ Вт/см}^2$. Получено хорошее количественное согласие рассчитанных степенных спектров высших гармоник с экспериментально обнаруженными медленно убывающими спектрами вторичного излучения из лазерной плазмы. Также достоверность результатов подтверждается их качественным согласием с результатами, полученными другими авторами в рамках численного моделирования.

Список публикаций по теме диссертации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 7 печатных работах в реферируемых журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus, и в 9 сборниках материалов научных конференций.

Публикации в научных рецензируемых журналах, индексируемых в базах Web of Science и Scopus:

- [A1] И. И. Метельский, В. Ф. Ковалев, В. Ю. Быченков. Нелинейный плазменный резонанс в неоднородной релятивистской плазме // Краткие сообщения по физике. Т. 43, № 1. С. 16–19.
- [A2] I. I. Metelskii, V. F. Kovalev, and V. Yu. Bychenkov. Renormgroup algorithm for the theory of the relativistic plasma resonance // Journal of Physics Conference Series. 2016. Т. 769, № 1, статья № 012083.
- [A3] И. И. Метельский, В. Ф. Ковалев, В. Ю. Быченков. Нелинейный релятивистский плазменный резонанс: Ренормгрупповой подход // Физика плазмы. 2017. Т. 43, № 2. С. 175–190.
- [A4] I. I. Metelskii, V. F. Kovalev, and V. Yu. Bychenkov. Harmonic Generation by Relativistic Plasma Resonance // Journal of Russian Laser Research. 2019. Т. 40, №5. С. 429–434.

- [A5] I. I. Metelskii, V. F. Kovalev, and V. Yu. Bychenkov. Higher-order harmonic generation of laser radiation due to relativistic plasma resonance at nonrelativistic laser intensity // *Physics of Plasmas*. 2019. 26(11), статья № 113113.
- [A6] И. И. Метельский, В. Ф. Ковалев, В. Ю. Быченков. Нелинейное резонансное поглощение и генерация квазистатического электрического поля в неоднородной релятивистской плазме // *ЖЭТФ*. 2021. Т. 160, Т. 2, № 8. С. 283–301.
- [A7] И. И. Метельский. Релятивистски-нелинейное резонансное поглощение при малых углах падения лазерного излучения на неоднородную плазму // *Краткие сообщения по физике ФИАН*. 2021. Т. 12, № 49. С. 49–57.

Тезисы докладов в сборниках трудов конференций:

- [B1] И.И. Метельский, В.Ф. Ковалев, В.Ю. Быченков. Релятивистский плазменный резонанс // 41-я Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. 2014. с. 143.
- [B2] И.И. Метельский, В.Ф. Ковалев, В.Ю. Быченков. О спектре релятивистских плазменных колебаний в окрестности резонанса // 42-я Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. 2015. с. 157. <http://www.fpl.gpi.ru/Zvenigorod/XLII/It/ru/DY-Metelskiy.docx>
- [B3] И.И. Метельский, В.Ф. Ковалев, В.Ю. Быченков. Пространственные и спектральные характеристики релятивистского поля плазменного резонанса // 43-я Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. 2016. с. 158. <http://www.fpl.gpi.ru/Zvenigorod/XLIII/It/ru/EB-Metelskiy.docx>
- [B4] I.I.Metelskii, V.F.Kovalev, and V.Yu.Bychenkov. Harmonic generation by the relativistic plasma resonance // International Symposium “Modern Problems of Laser Physics” 2018. P. 167. http://mplp2018.laser.nsc.ru/download/Technical_Digest_MPLP-2018.pdf

- [B5] I.I. Metelskii, V.F. Kovalev, V.Yu Bychenkov. Harmonic generation in an inhomogeneous plasma // International Conference on Ultrafast Optical Science (UltrafastLight-2018). P.30 http://ultrafastlight.ru/assets/files/bookofabstracts_ultrafastlight2018.pdf
- [B6] И.И. Метельский, В.Ф. Ковалев, В.Ю. Быченков. Релятивистский плазменный резонанс и генерация гармоник в неоднородной лазерной плазме // V Международная конференция «ЛАПЛАЗ» 2019, Москва, Сборник научных трудов: Часть 2 с. 85-86. <http://conf.laplas.mephi.ru/wp-content/uploads/2019/02/сборник-тезисов-часть-2.pdf>
- [B7] I.I. Metelskii, V.F. Kovalev, V.Yu Bychenkov. High-order harmonic generation from the relativistic plasma resonance in an inhomogeneous plasma // 46th Plasma Physics Conference (EPS 2019). Milan. Vol.43C.P1.2018 <http://ocs.ciemat.es/EPS2019ABS/pdf/P1.2018.pdf>
- [B8] И.И. Метельский, В.Ф. Ковалев, В.Ю. Быченков. Резонансное поглощение и генерация гармоник в неоднородной лазерной плазме // 47-ая Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. Москва. 2020. с. 118. URL: <http://www.fpl.gpi.ru/Zvenigorod/XLVII/It/ru/CL-Metelskiy.docx>
- [B9] I.I. Metelskii, V.F. Kovalev, V.Yu Bychenkov. Nonlinear absorption of laser radiation due to relativistic plasma resonance in an inhomogeneous plasma // International Conference on Ultrafast Optical Science (UltrafastLight-2021). P.31 https://ultrafastlight.ru/assets/files/bookofabstracts_ultrafastlight2021.pdf

Практическая ценность диссертации

Построенная в диссертации аналитическая теория описывает процессы нелинейного резонансного поглощения и генерации высших гармоник интенсивного лазерного излучения в неоднородной плазме с учетом релятивистских эффектов движения электронов плазмы в окрестности критической плотности. Прогресс в лазерной технологии привел к рутинному применению лазеров с

интенсивностью, ставящей под вопрос применимость линейной теории резонансного поглощения и слабо нелинейной теории генерации гармоник, основанных на модели линейного плазменного резонанса. Современные эксперименты по лазерному термоядерному синтезу с прямым облучением, включая концепцию ударного зажигания, требуют лазерных интенсивностей вплоть до $I_0\lambda^2 = 10^{17} \text{ Вт/см}^2 \times \text{мкм}^2$ (λ – длина волны лазерного света в мкм), при которых в окрестности критической плотности плазмы возможно проявление сильных нелинейных, в том числе релятивистских эффектов. Представленная в диссертации теория на основе развитой модели релятивистского плазменного резонанса позволяет находить связь коэффициента релятивистски-нелинейного резонансного поглощения и спектральных характеристик вторичного излучения из плазмы с лазерно-плазменными параметрами: интенсивностью лазерного поля и углом его падения на плазму, характерным масштабом неоднородности плотности и температурой плазмы. Найденные формулы могут использоваться для количественных и качественных оценок величины резонансного поглощения и эффективности генерации гармоник лазерного излучения в вакууме, что, в частности, имеет значение для задач диагностики лазерной плазмы. Кроме того, теория может сыграть важную роль, сопровождая и направляя полномасштабное численное моделирование взаимодействия лазерных импульсов с твердотельными мишенями. Полученные результаты справедливы для лазерных интенсивностей вплоть до $I_0\lambda^2 = 10^{18} \text{ Вт/см}^2 \times \text{мкм}^2$, и могут найти применение при планировании или интерпретации экспериментов по лазерному термоядерному синтезу.

Личный вклад автора

Результаты работы получены автором лично или при его определяющем участии. Постановка задач исследований, а также интерпретация результатов выполнены совместно с научным руководителем и научным консультантом.

Используемые сокращения и обозначения

ЛТС – Лазерный Термоядерный Синтез

РП – Резонансное Поглощение

ГГ – Генерация Гармоник

РГС – ренормгрупповые симметрии

РIS – Particle In Cell, численный метод «частица в ячейке»

\ln – натуральный логарифм, \log_e .

$C = 0.5772156$ – постоянная Эйлера–Маскерони.

$F(\mu, \sigma)$ – неполный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода.

$E(\mu, \sigma)$ – неполный эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода.

$Ai(z)$, $Ai'(z)$ – функция Эйри 1-го рода и ее первая производная.

$Vi(z)$, $Vi'(z)$ – функция Эйри 2-го рода и ее первая производная.

$I_\nu(z)$ – модифицированная ф-ция Бесселя 1-го рода (функция Инфельда).

$K_\nu(z)$ – модифицированная ф-ция Бесселя 2-го рода (функция Макдональда).

$\partial_{x^i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ – частная производная по переменной x^i ($i = 1, \dots, n$).

Пусть есть несколько алгебраически независимых переменных:

$$x = \{x^i\}, \quad u = \{u^\alpha\}, \quad u_{(1)} = \{u_i^\alpha\}, \quad u_{(2)} = \{u_{ij}^\alpha\}, \dots,$$

где

$$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \quad u_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}, \dots,$$

индекс i пробегает все значения от 1 до n , а α – от 1 до m .

Для любого $i = 1, \dots, n$ вводится оператор *полного дифференцирования* по x^i :

$$D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots$$

Оператор D_i – это формальная сумма бесконечного числа слагаемых, которая, однако, обрезается, действуя на любую функцию конечного числа переменных.

Глава 1

Новые аналитические подходы и нелинейные решения задачи о релятивистском плазменном резонансе

1.1 Введение

Настоящая глава посвящена построению аналитического решения нелинейных уравнений, описывающих пространственно-временную структуру резонансно-усиленного плазменного поля и динамику электронов в окрестности плазменного резонанса с учетом нелинейного характера такой динамики, в том числе и за счет релятивистских эффектов. Формулируются исходные уравнения, получаемые из системы уравнений гидродинамики электронной плазмы и уравнений Максвелла. Искомое решение строится таким образом, что с уменьшением амплитуды поля оно переходит сначала в решение, полученное в нелинейной нерелятивистской теории [14], а в пределе бесконечно малой амплитуды – в линейное решение [1]. Следуя идеям, изложенным в работе [14], решение для поля плазменного резонанса найдено с привлечением аппарата ренормгрупповых симметрий [78]: для нелинейных уравнений в частных производных, описывающих структуру электрического поля и скорости электронов в плазменном резонансе, вычисляются конечные преобразования РГС, после чего с их помощью строится сильно нелинейное решение. Именно использование формализма ренормгрупповых преобразований позволяет учесть релятивистски-нелинейный характер продольного движения электронов в окрестности критической плотности плазмы. Формулы, связанные с выводом допускаемой группы,

вынесены в Приложение.

В развиваемой здесь теории плазма считается холодной и бесстолкновительной, т. е. в исходных уравнениях столкновения и конечная температура электронов не учитываются, хотя малые эффекты диссипации в окрестности критической плотности обеспечиваются введением мнимой добавки к частоте электронных колебаний, что в линейной теории приводит к появлению конечной ширины плазменного резонанса Δ , определяемой либо малой частотой соударений электронов, либо выносом ленгмюровских волн благодаря малым тепловым эффектам. Неоднородность плазмы в окрестности плазменного резонанса, как и в классической теории линейной трансформации [1,36], аппроксимируется линейным профилем плотности, а отличием ленгмюровской частоты колебаний плазмы ω_L вблизи критической плотности от частоты лазера ω_0 пренебрегается. Результаты, представленные в первой главе, опубликованы в работах [A1–A3].

1.2 Исходные уравнения для электромагнитного поля и скорости электронов в окрестности критической плотности неоднородной плазмы

Для описания динамики электронов и структуры электромагнитного поля вблизи критической плотности, а в последующих главах – процессов нелинейного поглощения и генерации гармоник p -поляризованной электромагнитной волны, которая падает на слабо неоднородную вдоль координаты x плазму под углом θ и характеризуется электрическим \mathbf{E} и магнитным \mathbf{B} полями с частотой ω_0 ,

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{1}{2}\{0, 0, B_0(x)\} \exp(ik_y y - i\omega_0 t) + \text{c.c.}, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}\{E_{0x}(x), E_{0y}(x), 0\} \exp(ik_y y - i\omega_0 t) + \text{c.c.}, \\ k_y &= k_0 \sin \theta, \quad k_0 = \omega_0/c,\end{aligned}\tag{1.1}$$

в качестве исходных уравнений, запишем следующие уравнения бесстолкновительной гидродинамики холодной релятивистской электронной плазмы и урав-

нения Максвелла:

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{p} + (\mathbf{v} \partial_r) \mathbf{p} &= e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) , \quad \partial_t n_e + \operatorname{div}(n_e \mathbf{v}) = 0 , \\
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} , \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} e n_e \mathbf{v} , \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 , \\
\operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi (e n_e + e_i n_i) , \quad \mathbf{p} \equiv m \mathbf{v} \gamma = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} .
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь m и e – масса и заряд электрона, n_e , \mathbf{v} , \mathbf{p} – плотность, скорость и импульс электронов плазмы; \mathbf{E} и \mathbf{B} – напряженности электрической и магнитной составляющих p -поляризованного электромагнитного излучения, характеризуемого наличием компоненты электрического поля (1.1) в направлении градиента неоднородности плазмы. Ионы с заданной плотностью n_i рассматриваются в качестве неподвижного нейтрализующего фона, что соответствует используемому в данной работе приближению электронной плазмы, а эффекты теплового движения и столкновений электронов, не включенные в уравнения (1.2), считаются малыми, хотя их роль в регуляризации особенности плазменного резонанса будет учтена в соответствии с ренормгрупповой процедурой построения нелинейного решения.

Полагая отличными от нуля x - и y -компоненты скорости электронов и электрического поля, а также z -компоненту магнитного поля, после исключения плотности электронов, получим из (1.2) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\gamma (\partial_t v + av \partial_x v + au \partial_y v) + \frac{a^2 \gamma^3}{c^2} [vu (\partial_t u + av \partial_x u + au \partial_y u) + \\
+v^2 (\partial_t v + av \partial_x v + au \partial_y v)] &= P + (au/c)R , \\
\gamma (\partial_t u + av \partial_x u + au \partial_y u) + \frac{a^2 \gamma^3}{c^2} [vu (\partial_t v + av \partial_x v + au \partial_y v) + \\
+u^2 (\partial_t u + av \partial_x u + au \partial_y u)] &= Q - (av/c)R , \\
\partial_t P + av \partial_x P + av \partial_y Q - c \partial_y R + \omega_L^2 v &= 0 , \\
\partial_t Q + au \partial_x P + au \partial_y Q + c \partial_x R + \omega_L^2 u &= 0 , \\
\partial_t R + c \partial_x Q - c \partial_y P &= 0 .
\end{aligned} \tag{1.3}$$

В этой системе $a = -2e|B_1(0)| \sin \theta / m \omega_0^2 L$ – безразмерная постоянная, пропорциональная амплитуде магнитного поля $|B_1(0)|$ в точке плазменного резонанса $x = 0$; $B_1(0)$ – комплексная амплитуда фурье-компоненты магнитного поля в

точке $x = 0$ на частоте лазера ω_0 :

$$B_1(0) = |B_1(0)| \exp[i \arg B_1(0)] = \frac{m\omega_0^2 L a}{2|e| \sin \theta} \exp[i \arg B_1(0)]. \quad (1.4)$$

Функции $v = v_x/a$, $u = v_y/a$ описывают нормированные значения компонент скорости электронов; $\gamma = 1/\sqrt{1 - (a^2/c^2)(v^2 + u^2)}$; $P = eE_x/ma$, $Q = eE_y/ma$, $R = eB_z/ma$ – нормированные значения компонент электрического $\{E_x, E_y, 0\}$ и магнитного $\{0, 0, B_z\}$ полей, $\omega_L \equiv \omega_L(x) = (4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$ электронная ленгмюровская частота плазмы с плотностью $n_0(x)$, которая в окрестности плазменного резонанса $x = 0$ аппроксимируется линейной зависимостью от координаты x , $n_0(x) = (1 + x/L)n_c$, где критическая плотность $n_c = m\omega_0^2/4\pi e^2$ и L – характерный масштаб неоднородности плотности. В рассматриваемом нами случае плавной неоднородности плазмы, $L \gg \delta$, $1/k_0$ (δ – ширина плазменного резонанса) линейная зависимость от координаты x справедлива в окрестности резонанса для любого монотонного профиля плотности. Условие слабой неоднородности плазмы $k_0 L \gg 1$ является также критически важным для эффективного резонансного поглощения.

Рассматриваемая здесь p -поляризация падающей на плазму электромагнитной волны отвечает отличной от нуля проекции электрического поля на направление градиента пространственной неоднородности плазмы. В этом случае, в окрестности точки $x = 0$, где частота колебаний электронов в поле лазерного излучения равна частоте электронных ленгмюровских колебаний плазмы $\omega_0 = \omega_L$, происходит резонансное нарастание продольного электрического поля и передача части энергии падающей электромагнитной волны продольным плазменным колебаниям. Поэтому, повторяя рассуждения работ [8, 14], учтем, что наибольший вклад в нелинейные эффекты плазменного резонанса определяется x -компонентой электрического поля и скорости электронов:

$$v_x \gg v_y, \quad E_x \gg E_y \gg B_z. \quad (1.5)$$

Чтобы получить уравнения для продольного резонансно-усиленного плазменного поля, выделим из системы (1.3) два уравнения, содержащие x -компоненты электрического поля и скорости электронов, учитывая при этом иерархию полей и скоростей (1.5) в окрестности критической плотности. Тогда придем к следующей паре нелинейных дифференциальных уравнений в частных произ-

водных первого порядка, описывающих x -компоненты нормированных электрического поля P и скорости электронов v вблизи плазменного резонанса:

$$\begin{aligned}\partial_t v + av\partial_x v &= P\gamma_0^{-3}, \\ \partial_t P + av\partial_x P &= -\omega_0^2 v,\end{aligned}\tag{1.6}$$

где $\gamma_0 = (1 - \beta v^2)^{-1/2}$, $\beta = a^2/c^2$. Уравнения для поперечных компонент скорости u и электрического поля Q находятся аналогичным образом и имеют вид:

$$\begin{aligned}\partial_t(u\gamma_0) + av\partial_x(u\gamma_0) &= Q, \\ \omega_0\partial_x Q + k_y\partial_t P &= 0.\end{aligned}\tag{1.7}$$

В следующем разделе будут получены, а в главе 2 – подробно исследованы, аналитические решения уравнений (1.6) и (1.7) в произвольном порядке нелинейности, то есть вне рамок теории возмущений.

1.3 Ренормгрупповые симметрии и построение решения

Рассмотрим сначала уравнения (1.6) и для отыскания решения воспользуемся их групповыми свойствами. Заметим, что в эти уравнения входят два параметра a и β , отвечающие вкладам электронной нерелятивистской (или конвективной – связанной с членом $av\partial_x$) и релятивистской (связанной со слагаемым $P\gamma_0^{-3} = P(1 - \beta v^2)^{3/2}$) нелинейностей. Вообще говоря, мерой релятивистской нелинейности является параметр $\beta \sim 1/c^2$, который стремится к нулю в нерелятивистском пределе при $c \rightarrow \infty$. Однако выбор параметра релятивизма в виде $\beta = a^2/c^2$ (который, впрочем, возникает естественным образом после перехода к безразмерным переменным) продиктован существенным упрощением последующих вычислений в этом случае. При равенстве нулю параметров $a = 0$ и $\beta = 0$, уравнения (1.6) переходят в уравнения, описывающие линейный плазменный резонанс и имеющие хорошо известные решения [1, 3, 36], поправки к которым могут быть найдены путем построения ряда теории возмущений по a и β . Используя свойства симметрии уравнений, можно связать решения, найденные по теории возмущений, с решениями при конечных a и β . Такой подход базируется на известном в теоретической физике методе ренормгрупповых симметрий [78], отыскание которых осуществляется с помощью алгоритмов современного группового анализа [136].

Суть метода заключается в следующем. На первом этапе вычисляется допускаемая исходными уравнениями (в нашем случае – уравнениями (1.6)) максимально широкая группа точечных преобразований в пространстве всех зависимых и независимых переменных, а также параметров, входящих в уравнения. Далее, с помощью процедуры сужения группы на частном решении, из допускаемой группы выделяется конечномерная подгруппа, оставляющая инвариантным решение исходной системы, которое получено в рамках теории возмущений по заданным параметрам. Наконец, использование конечных преобразований, задаваемых этой подгруппой, позволяет связать решения при малых значениях параметров, то есть решения по теории возмущений, с сильно нелинейными решениями, отвечающими конечным значениям этих параметров.

Допускаемая уравнениями (1.6) бесконечная группа точечных непрерывных преобразований в пространстве шести переменных a, β, t, x, v, P задается инфинитезимальным оператором (генератором группы)

$$X = \xi^1 \partial_t + \xi^2 \partial_x + \xi^3 \partial_a + \xi^4 \partial_\beta + \eta^1 \partial_v + \eta^2 \partial_P \quad (1.8)$$

с координатами ξ^i , $i = 1, \dots, 4$ и η^j , $j = 1, 2$, являющимися функциями переменных t, x, v, P , параметров a, β и определяемыми в соответствии со стандартной процедурой группового анализа [136] (см. Приложение А). Решение по теории возмущений для системы (1.6) строится по двум параметрам a и β , а процедура сужения бесконечной группы приводит к ренормгрупповым преобразованиям, продолжаящим это решение в область конечных значений a и β . Опуская громоздкие вычисления, приведем найденные РГ-преобразования, которые задаются двумя инфинитезимальными операторами:

$$\begin{aligned} R_1 &= \xi_{RG}^2 \partial_x + \partial_a, \\ R_2 &= \xi_{RG}^1 \partial_t + \partial_\beta + \eta_{RG}^1 \partial_v, \end{aligned} \quad (1.9)$$

с координатами $\xi_{RG}^1, \xi_{RG}^2, \eta_{RG}^1$, имеющими вид

$$\begin{aligned} \xi_{RG}^1 &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{(6 + \beta I_1) E(\mu, \sigma)}{2\sqrt{4 + \beta I_1}} - \frac{F(\mu, \sigma)}{\sqrt{4 + \beta I_1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\beta} P / \omega_0}{4 + \beta I_1} \sqrt{\frac{1/\sqrt{z} - 1}{1 + 1/\sqrt{z}}} \right], \\ \xi_{RG}^2 &= -P / \omega_0^2, \quad \eta_{RG}^1 = -\frac{z^{3/2}}{2v\beta^2} \left(2 + 1/z^{3/2} - 3/\sqrt{z} \right), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\mu = \arcsin \frac{P/\omega_0}{\sqrt{I_1}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\beta I_1}{4 + \beta I_1}}, \quad I_1 = \frac{2}{\beta} (1/\sqrt{z} - 1) + P^2/\omega_0^2. \quad (1.11)$$

Здесь $z \equiv 1 - \beta v^2$, а $F(\mu, \sigma)$, $E(\mu, \sigma)$ – неполные эллиптические интегралы первого и второго рода [137, 138] соответственно:

$$F(\mu, \sigma) = \int_0^\mu \frac{dx}{\sqrt{(1 - \sigma x^2)(1 - x^2)}}, \quad E(\mu, \sigma) = \int_0^\mu \frac{\sqrt{1 - \sigma x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx. \quad (1.12)$$

Вычисляя коммутатор операторов R_1 и R_2 , можно легко убедиться, что $[R_1, R_2] = 0$, то есть группа, задаваемая этими генераторами, – абелева. Поэтому конечные преобразования группы под действием R_1 и R_2 на плоскости $\{a, \beta\}$, которые находятся путем интегрирования уравнений Ли, можно рассматривать в виде последовательности двух независимых шагов с параметрами группового преобразования a и β соответственно, как показано на Рис. 1.1. Стрелкой из

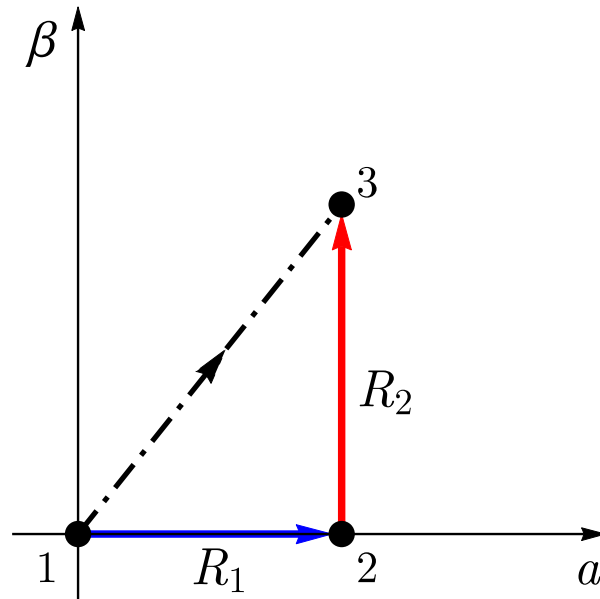


Рис. 1.1. Схема РГ-преобразования с помощью двухпараметрической ренорм-группы на плоскости параметров преобразования $\{a, \beta\}$, которым осуществляется переход между теориями плазменного резонанса. Точка «1» соответствует линейной теории, точка «2» – сильно нелинейной нерелятивистской теории, а точка «3» – нелинейной релятивистской теории.

точки 1 в точку 2 обозначается преобразование, связывающее решение линейной задачи с нелинейным нерелятивистским решением, а стрелка из точки 2

в точку 3 соответствует переходу от нелинейного нерелятивистского к релятивистскому решению.

Поскольку R_1 не содержит операторов дифференцирования по времени t , скорости v и полю P , а R_2 – по координате x и электрическому полю P , то эти величины являются инвариантами соответствующих преобразований с операторами R_1 и R_2 . Тогда на первом шаге, который определяется действием генератора R_1 , т. е. решением соответствующего ему уравнения Ли,

$$\frac{dx}{da} = \xi_{RG}^2, \quad x|_{a=0} = \eta, \quad (1.13)$$

найдем конечные преобразования для времени t , координаты x , поля P и скорости v :

$$t_{\text{I}} = t_{\text{linear}}, \quad x_{\text{I}} = \eta - a\omega_0^{-2}P, \quad P_{\text{I}} = P_{\text{linear}}(\chi, \eta), \quad v_{\text{I}} = v_{\text{linear}}(\chi, \eta), \quad (1.14)$$

где $\chi = \omega_0 t_{\text{linear}}$, а $\eta = x(0, \eta)$ обозначает координату $x = x(a, \eta)$ при нулевом значении параметра a . Формулы (1.14) определяют переход от решения, полученного в рамках линейной теории, к решению, учитывающему электронную нелинейность, но без влияния релятивистских эффектов. Инвариантность времени t , скорости v и поля P проявляется в том, что они определяются формулами линейной теории (на что указывает индекс *linear*). Таким образом, нелинейная структура поля и скорости электронов зависит от того или иного вида электрического поля P_{linear} , являющегося решением линеаризованной системы уравнений по отношению к (1.6). При выборе линейного решения, продолжаемого ренормгрупповым преобразованием в область конечных значений параметров нелинейности, воспользуемся результатом, полученным для холодной электронной плазмы с линейным профилем плотности [1, 36]. В этом случае поле имеет в точке $x = 0$ особенность порядка $1/\varepsilon$, ($\varepsilon = 1 - \omega_L^2/\omega_0^2$ – диэлектрическая проницаемость плазмы, обращающаяся в нуль при условии резонанса $\omega_0 = \omega_L$), которая, однако, снимается при учете столкновений или раскачки продольных плазменных колебаний, определяя тем самым конечную ширину линейного плазменного резонанса Δ . С учетом выбора конкретного вида линейной структуры поля, выражения для поля и скорости, отвечающие первому

шагу преобразования, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} P_{\text{I}} &= -\frac{\omega_0^2 L^2}{\Delta^2 + \eta^2} (\eta \cos \chi + \Delta \sin \chi), \\ v_{\text{I}} &= -\frac{\omega_0 L^2}{\Delta^2 + \eta^2} (\eta \sin \chi - \Delta \cos \chi), \\ x_{\text{I}} &= \eta + \frac{aL^2}{\Delta^2 + \eta^2} (\eta \cos \chi + \Delta \sin \chi), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где Δ определяется либо тепловым движением электронов с тепловой скоростью V_T , либо малой частотой соударений ν частиц в плазме:

$$\Delta = \max \left\{ \nu L / \omega_0 ; (3V_T^2 L / \omega_0^2)^{1/3} \right\}. \quad (1.16)$$

Выполним теперь второй шаг, связанный с конечными преобразованиями по параметру релятивизма β , которые вытекают из уравнений Ли, соответствующих генератору R_2 :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\beta} &= \xi_{RG}^1, \quad t|_{\beta=0} = t_{\text{I}}, \\ \frac{dv}{d\beta} &= \eta_{RG}^1, \quad v|_{\beta=0} = v_{\text{I}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Интегрирование уравнений (1.17) дает переход от нелинейного нерелятивистского решения (1.15) к релятивистскому решению. Инвариантность электрического поля P ($P_{\text{II}}=P_{\text{I}}$) и координаты x ($x_{\text{II}}=x_{\text{I}}$) относительно преобразования с оператором R_2 позволяет использовать соответствующие выражения из (1.15), а вычисление из (1.17) конечных преобразований скорости $v \equiv v_{\text{II}}$ и «времени» $\tau \equiv \omega_0 t_{\text{II}}$ приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} v &= v_{\text{I}} \frac{(1 + \frac{1}{4}\beta v_{\text{I}}^2)^{1/2}}{1 + \frac{1}{2}\beta v_{\text{I}}^2}, \\ \tau &= \chi - \left(\sqrt{4 + \beta I_1} \text{E}(\varphi, k) - \frac{2 \text{F}(\varphi, k)}{\sqrt{4 + \beta I_1}} - \varphi \right), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$\varphi = \arcsin \frac{P_{\text{I}}/\omega_0}{\sqrt{I_1}}, \quad k = \sqrt{\frac{\beta I_1}{4 + \beta I_1}}, \quad I_1 = \frac{2}{\beta} (1/\sqrt{z} - 1) + P_{\text{I}}^2/\omega_0^2. \quad (1.19)$$

Итак, формулы (1.15), рассматриваемые совместно с (1.18), через параметрические переменные η и χ описывают в неявной форме нелинейную структуру поля

и скорости электронов с учетом двух типов нелинейности – нерелятивистской и релятивистской. Явная зависимость электрического поля и скорости электронов от истинных координаты x и времени t определяется посредством исключения η и χ из (1.15) и (1.18). Выражения (1.15), (1.18) являются результатом продолжения соответствующих решений линеаризованных относительно (1.6) уравнений на область конечных значений параметров $a \neq 0$ и $\beta \neq 0$ с помощью ренормгруппового преобразования. Отметим, что закон преобразования координаты в (1.14) полностью совпадает с результатом, полученным при построении нелинейного нерелятивистского решения в [14]. Существенное отличие от нерелятивистского случая [14] заключается в том, что теперь, кроме координаты x , в преобразования ренормгруппы вовлекаются также скорость v и время t . Электрическое поле P при этом остается инвариантом РГ-преобразований.

Теперь рассмотрим уравнения (1.7) для поперечных компонент скорости электронов u и электрического поля Q в окрестности плазменного резонанса. При стремлении a и β к нулю эти уравнения переходят в уравнения линейной теории с хорошо известными решениями [1,3]. Учет конечной нерелятивистской (конвективной) нелинейности, который на языке двухпараметрической ренормгруппы соответствует преобразованию по первому параметру нелинейности a , приводит к пропорциональным k_y решениям, впервые полученным в [14]. Следующий шаг, отвечающий «включению» релятивистской нелинейности, требует построения конечных преобразований по параметру β , которые определяются допускаемой уравнениями (1.7) группой, вычисляемой с учетом ренормгрупповой симметрии (1.10) для системы (1.6) (см. Приложение А.2). Так, определяющее уравнение на координату η^4 , которая задает преобразование поперечной компоненты электрического поля, имеет вид:

$$D_x \eta^4 = (\partial_t Q D_x - \partial_x Q D_t) \xi_{RG}^1, \quad (1.20)$$

где под Q следует понимать пропорциональную k_y нелинейную структуру поперечной компоненты электрического поля в нерелятивистском пределе [14]. Из (1.20) следует, что релятивистские поправки для Q , определяемые решением соответствующего уравнения Ли для координаты η^4 , будут иметь порядок точности $O(k_y^2)$. Однако в следующих главах диссертации мы получим релятивистские поправки с точностью не выше k_y к нелинейным токам в области

плазменного резонанса, которые являются источниками генерации вторичного излучения на основной частоте и генерации гармоник. Поэтому с точностью, не превышающей точности вычисления нелинейных токов, можно положить координаты генератора группы $\eta_{RG}^3 = 0$ и $\eta_{RG}^4 = 0$, что позволяет использовать для амплитуд поперечных компонент электрического поля Q и скорости u функции из [14]:

$$\begin{aligned} u &= k_y \omega_0 L^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_y^2 e^{2C}}{4} (\Delta^2 + \eta^2) \right) \cos \chi - \arccos \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \Delta^2}} \sin \chi \right], \\ Q &= k_y \omega_0^2 L^2 \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_y^2 e^{2C}}{4} (\Delta^2 + \eta^2) \right) \sin \chi - \arccos \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \Delta^2}} \cos \chi \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь $C = 0.5772156$ – постоянная Эйлера–Маскерони. Отличие от нерелятивистского случая [14] заключается в том, что выражения (1.21) следует рассматривать совместно с конечным преобразованием «времени» из (1.18).

Итак, формулы (1.15), (1.18) и (1.21) в неявном виде, через параметрические переменные χ и η , определяют пространственно-временную структуру электрического поля и скорости электронов, а именно их продольные P , v и поперечные Q , u компоненты с учетом как нерелятивистской, так и релятивистской нелинейностей движения электронов вблизи плазменного резонанса. При этом формулы (1.15) и (1.18) задают точное решение системы уравнений (1.6), что проверяется подстановкой, а выражения (1.21) наряду с формулой для τ из (1.18) описывают пространственно-временные зависимости амплитуд поперечных компонент электрического поля и скорости электронов с точностью до k_y . Найденные выражения в пределе $c \rightarrow \infty$ переходят в формулы нелинейной нерелятивистской теории из работы [14].

1.4 Заключение

В настоящей главе, с привлечением аппарата ренормгрупповых симметрий, найдено аналитическое решение нелинейных уравнений, описывающих релятивистские плазменные колебания в окрестности критической плотности неоднородной плазмы. Исходные уравнения получены из системы уравнений бесстолкновительной релятивистской гидродинамики холодной электронной плаз-

мы и уравнений Максвелла. Отличительной особенностью метода, примененного в процессе построения решения, является использование двухпараметрической алгебры ренормгрупповых генераторов, которая позволила получить решения, справедливые в широком диапазоне параметров, характеризующих различные типы нелинейности. Двухпараметрическая ренормгруппа позволила разделить вклады релятивистской и нерелятивистской (конвективной) нелинейностей. Именно такая возможность является одной из причин использования многомерных ренормгрупп для систем с несколькими параметрами [139]. Разделение нелинейностей, в свою очередь, привело к последовательному двухэтапному переходу между решениями. Первый этап соответствует переходу от линейного к сильно нелинейному нерелятивистскому решению посредством РГ-преобразования по нерелятивистскому параметру нелинейности. На втором этапе РГ-преобразованием по релятивистскому параметру нелинейности осуществляется переход к нелинейному релятивистскому решению. Обратим внимание, что хотя мы и рассматривали уравнения гидродинамического типа для холодной бесстолкновительной плазмы, алгоритм ренормгрупповых симметрий выглядит привлекательным для проведения дальнейших исследований в этой области с использованием других моделей плазмы. Детальный анализ нелинейной пространственно-временной структуры резонансно-усиленного плазменного поля, задаваемой найденными в данной главе формулами, выполнен в главе 2.

Подчеркнем, что мы рассматриваем взаимодействие лазерного излучения с плазмой при умеренной лазерной интенсивности, когда колебательное движение электронов является нерелятивистским $eE_{laser}/m\omega_0 \ll c$, где E_{laser} – амплитуда лазерного поля. Таким образом, уравнения (1.6) и (1.7) получены в предположении, что релятивистские эффекты существенны только для продольной компоненты скорости электронов вблизи плазменного резонанса, где проявляется эффект резонансного усиления электрического поля. Наиболее значительным нелинейным эффектом в нашей теории является нелинейность продольного движения электронов в окрестности плазменного резонанса, которая рассчитывается с применением теоретико-группового подхода. Что касается релятивистских лазерных полей, то в этом случае требуется разработка более сложной теории, выходящей за рамки гидродинамической модели. При столь высоких интенсивностях лазерного излучения динамика электронной компо-

ненты плазмы должна описываться в многопоточковом режиме, для которого необходимо использование кинетического подхода. Однако исследование границы опрокидывания плазменных колебаний, проведенное в главе 2 настоящей диссертации, возможно и в рамках гидродинамики.

Заметим, что выражения (1.15), (1.18) и (1.21) содержат ширину линейного плазменного резонанса Δ , определяемую диссипативными или тепловыми эффектами, хотя в исходных нелинейных уравнениях (1.6) и (1.7) она не фигурирует. Поясним, каким образом величина Δ появляется в решении. В классической линейной теории [1, 3] в качестве исходных тоже используются уравнения, не содержащие диссипативных слагаемых ввиду их малости, а Δ появляется при учете малых эффектов диссипации введением конечно малой мнимой части в частоту ω . В исходные уравнения можно было бы добавить слагаемые, связанные с диссипацией, однако для процесса резонансного поглощения соответствующие эффекты оказываются достаточно малыми, поскольку в этом случае в решении возникают поправки порядка ν_{eff}/ω . Наличие же Δ в (1.15), (1.18) и (1.21) обусловлено методом ренормгрупповых симметрий, который основан на процедуре продолжения линейного (по амплитуде электрического поля) решения в область параметров лазера и плазмы, где значительны нелинейные эффекты. Для умеренных интенсивностей лазерного излучения и относительно длинных лазерных импульсов длительностью пико-, наносекунды и сотни фемтосекунд реализуется стационарное решение (см. главу 2) для электрического поля вблизи плазменного резонанса, что соответствует адиабатически медленному (в масштабе времени импульса) росту лазерного поля по сравнению с динамикой электронов в плазменном резонансе. В этом режиме происходит переход от стационарного линейного резонанса к стационарной нелинейной структуре. Иными словами, пространственная структура решения вида $1/\varepsilon(x) \sim L/(x - i\Delta)$ унаследована от решения, полученного в рамках теории линейного плазменного резонанса [1, 3]. Электростатическое поле в линейном приближении играет роль «начального» условия и далее изменяется при адиабатическом нарастании амплитуды лазерного импульса. При этом величина Δ , отвечающая ширине линейного плазменного резонанса, теряет этот смысл в нелинейном режиме и становится просто заданной константой, определяемой эффективной частотой столкновений ν_{eff} , как в линейной теории.

Также обратим внимание, что лазерное поле, вообще говоря, может повлиять на частоту парных столкновений в (1.16) и это может быть учтено путем перенормировки ν_{eff} в соответствии, например, с работой [140]. Как будет показано в следующей главе, электростатическое плазменное поле в окрестности критической плотности несколько «разбухает» и, благодаря нелинейным эффектам, характеризуется шириной нелинейного резонанса $\delta > \Delta$.

Глава 2

Нелинейная структура электрического поля и скорости электронов в области плазменного резонанса

2.1 Введение

Во второй главе проводится анализ пространственно-временных и спектральных характеристик поля стационарного плазменного резонанса на основе полученного в первой главе аналитического решения исходных нелинейных уравнений, описывающих потенциальное электрическое поле и динамику электронов неоднородной плазмы в окрестности критической плотности. Здесь же показывается существование решения второго вида – нестационарного плазменного резонанса, являющегося в каком-то смысле аналогом моделей [73, 74], формально допускающих опрокидывание при сколь угодно малом поле лазерной накачки.

Исследовано опрокидывание плазменных колебаний в окрестности критической плотности для двух режимов. В стационарном режиме, для которого в последующих главах решаются задачи поглощения и генерации гармоник, опрокидывание имеет пороговый характер и происходит только при определенных значениях амплитуды поля накачки. Поэтому опрокидывание ограничивает сверху допустимую интенсивность лазерного излучения и фактически задает пределы применимости гидродинамической модели стационарного релятивистски-нелинейного плазменного резонанса. В настоящей главе условие опрокидывания в стационарном режиме анализируется на языке безразмерных параметров задачи, а также обсуждается связь с опрокидыванием в нерелятивистской

теории [14]. Кроме того, показано опрокидывание резонансно-усиленных электронных колебаний плазмы в нестационарном режиме, которое происходит за конечное время и при сколь угодно малых амплитудах лазерного поля.

Для стационарного плазменного резонанса исследованы пространственно-временные распределения продольной скорости электронов и потенциального электрического поля. Продемонстрировано влияние эффекта фазовой модуляции колебаний, проявляющегося в результате учета релятивистской нелинейности продольного движения электронов в резонансном поле, на спектральный состав поля плазменного резонанса.

Результаты, представленные во второй главе, опубликованы в работе [А3].

2.2 Стационарные и нестационарные плазменные колебания

Проанализируем полученные в первой главе формулы, описывающие продольные и поперечные компоненты электрического поля и скорости электронов вблизи плазменного резонанса. Собирая воедино (1.15), (1.18), (1.21) и переходя к нормированным функциям и переменным $P_0 = \frac{a}{\Delta\omega_0^2}P$, $Q_0 = \frac{a}{\Delta\omega_0^2}Q$, $v_1 = \frac{a}{\Delta\omega_0}v$, $u_0 = \frac{a}{\Delta\omega_0}u$, $x_0 = x/\Delta$, $l = \eta/\Delta$, выпишем результирующие выражения, определяющие в параметрическом виде нелинейную структуру электрического поля и скорости электронов в окрестности критической плотности плазмы:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= -\frac{A}{1+l^2} (l \cos \chi + \sin \chi), \quad v_0 = -\frac{A}{1+l^2} (l \sin \chi - \cos \chi), \quad x_0 = l - P_0, \\
 u_0 &= -AB \sin \theta \left[\arccos \frac{l}{\sqrt{1+l^2}} \sin \chi - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_y^2 e^{2C}}{4} (1+l^2) \right) \cos \chi \right], \\
 Q_0 &= -AB \sin \theta \left[\arccos \frac{l}{\sqrt{1+l^2}} \cos \chi + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_y^2 e^{2C}}{4} (1+l^2) \right) \sin \chi \right], \\
 v_1 &= v_0 \frac{(1 + \frac{1}{4} B^2 v_0^2)^{1/2}}{1 + \frac{1}{2} B^2 v_0^2}, \quad \tau(\chi, l) = \chi - \left(\zeta E(\varphi, k) - \frac{2}{\zeta} F(\varphi, k) - \varphi \right),
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\zeta = \sqrt{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)}, \quad \varphi = \arcsin \frac{P_0}{\sqrt{v_0^2 + P_0^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{B^2(v_0^2 + P_0^2)}{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)}}.$$

Рассматриваемые в настоящей работе отличные от нуля значения «релятивистского» параметра β при фиксированной заданной амплитуде поля накачки a , (или при фиксированном параметре (безразмерной амплитуде) $A \equiv aL^2/\Delta^2$), соответствуют конечным значениям параметра $B \equiv \omega_0\Delta/c$. Поэтому будем ассоциировать B с безразмерным параметром релятивизма. Случай нерелятивистского приближения ($B \ll 1$) был рассмотрен в работе [14]. Следует отметить, что условие $k_y\Delta = B \sin\theta \ll 1$, отвечающее реализации эффекта резонансного усиления потенциальной компоненты плазменного поля [3, 14], в нашем случае по-прежнему может быть выполнено при достаточно небольших углах падения лазерного излучения на слой плазмы.

Обсудим сначала выражения из (2.1) для электрического поля P , скорости v_{I} и координаты x_{I} (см. также формулы (1.15)), которые являются результатом первого шага РГ-преобразования и полностью совпадают с найденным ранее нелинейным нерелятивистским решением [14]. Преобразование $x = \eta - Pa\omega_0^{-2}$ (или в безразмерном виде: $x_0 = l - P_0$) имеет вид лагранжевой замены эйлеровой координаты x , если под величиной $Pa\omega_0^{-2}$ понимать лагранжево смещение электронов относительно координаты η . Зависимости безразмерной координаты $x = x_{\text{I}}/\Delta$ от переменной $l = \eta/\Delta$ в разные моменты времени, а также при различных значениях параметра A представлены на Рис. 2.1. В линейном по амплитуде поля накачки случае, когда $x = \eta$, поле плазменного резонанса являлось монохроматическим. Именно благодаря нелинейной связи P и x электрическое поле P в нелинейном нерелятивистском случае характеризуется спектром, содержащим высшие гармоники с частотами, кратными основной частоте поля лазерной накачки ω_0 . Подчеркнем, что нелинейное решение искомой системы уравнений (1.6) в связи с самим способом его построения, наследует структуру пространственной особенности $1/x$ линейного потенциального поля [1], которая по-прежнему снимается введением параметра Δ . При этом, как будет показано ниже, нелинейная теория дает дополнительное ограничение на величину Δ , связанное в данной задаче с опрокидыванием нелинейных плазменных колебаний.

Далее, включая в рассмотрение релятивистскую нелинейность и, как результат, выражения для преобразованных скорости v и времени τ (1.18), обратим внимание на ветвление решения, обусловленное существованием двух спосо-

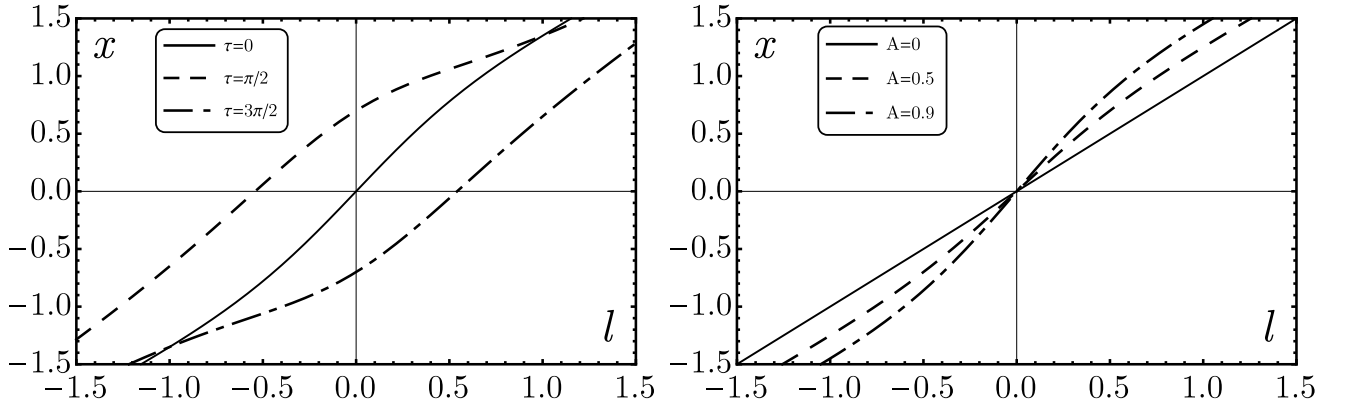


Рис. 2.1. Зависимости $x(l)$ в разные моменты времени τ (левая панель) и при различных значениях безразмерной амплитуды A в момент времени $\tau = 0$ (правая панель). Биссектриса $x = l$ отвечает линейному случаю.

бов продолжения от точки ветвления χ_0 функций, входящих в выражение для $\tau = \tau(\chi, l)$, которое характеризует изменение фазы колебаний релятивистских электронов в резонансно-усиленном плазменном поле. Свойство ветвления решений нелинейных уравнений движения хорошо известно, например, в некоторых задачах механики [141]. С учетом этого свойства, выбор способа продолжения функций от точки χ_0 определяет один из двух типов возбуждаемых плазменных колебаний. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим сначала графическое представление выражения для $\tau(\chi, l)$. Зафиксируем, для примера, $B = 1.5$, фиксируя тем самым параметры плазмы. Учитывая, что разным значениям параметрической переменной l соответствуют разные точки ветвления χ_0 , рассмотрим для определенности случай $l = 0$, когда $\chi_0 = \pi/2$. На Рис. 2.2 приведены две ветви решения при одинаковых значениях параметров A и B . В пренебрежении релятивистскими эффектами, т. е. при $B = 0$, зависимость $\tau(\chi, l)$ от χ является линейной: $\tau = \chi$. Этому случаю на рисунке соответствует биссектриса. При переходе к релятивистскому режиму эта зависимость сменяется на зависимость вида $\tau = \Psi\chi$, где $\Psi = \Psi(\chi, l) \neq 1$. На одной из ветвей решения (штриховая линия) различимы две тенденции в проявлении релятивистских эффектов. Первая из них заключается в медленной периодической зависимости $\Psi(\chi, l)$, отвечающей пространственно-временной модуляции фазы, вторая — в изменении угла наклона $\tau(\chi, l)$, характеризуемого производной $\partial_\chi \tau$, что соответствует сдвигу частоты колебаний электронов в область меньших ча-

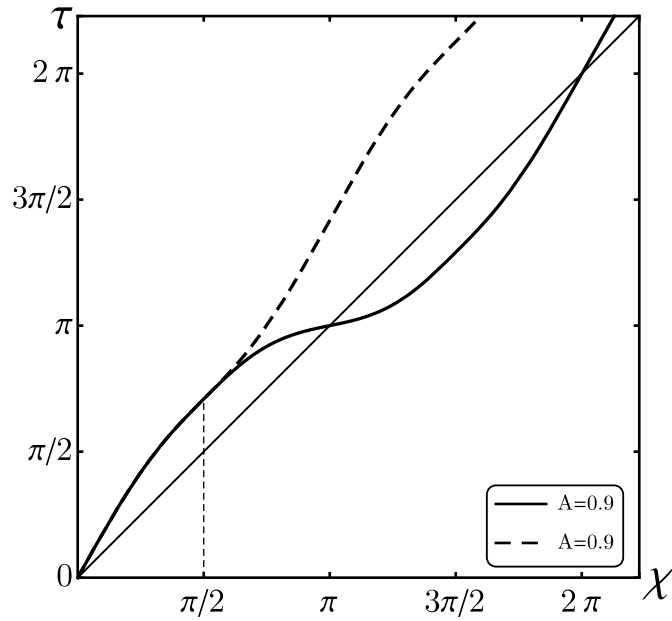


Рис. 2.2. Две ветви решения, отвечающие двум способам продолжения от точки ветвления $\chi = \pi/2$ при $l = 0$. Обе кривые построены при $A = 0.9, B = 1.8$. Биссектриса соответствует нерелятивистскому пределу.

стот. На другой ветви решения (сплошная кривая) наблюдается только фазовая модуляция. Характер изменения фазы колебаний с ростом величины параметра A для двух ветвей решения представлен на Рис. 2.3. Рисунок демонстрирует, что фазовая модуляция становится тем значительнее, чем больше значение амплитуды поля накачки, а значит и параметра A . В первом случае (Рис. 2.3а) зависимость τ от χ при любых A остается однозначной. В случае второй ветви решения (Рис. 2.3б) усиление модуляции, при превышении некоторого критического значения A_{cr} , приводит к образованию перегибов функции $\tau(\chi, l)$ в точках $\chi = \pi + 2\pi n, n = 0, 1, \dots$, в результате чего «время» τ перестает быть однозначной функцией переменной χ и, следовательно, теряют также однозначность функции скорости электронов v и электрического поля P . Находясь в рамках гидродинамической модели, мы будем рассматривать только однозначные зависимости функций физических величин, что соответствует значениям параметров A и B , удовлетворяющим неравенству $A^2 B^2 < 2\sqrt{3}$, которое находится из условия $\partial_\chi \tau(\pi, 0) = 0$ и фиксирует верхнюю границу применимости формулы для $\tau(\chi, l)$. Формулы, определяющие неявную зависимость функций P и v_T от координаты x в (1.15), также имеют границу применимости, определяемую пре-

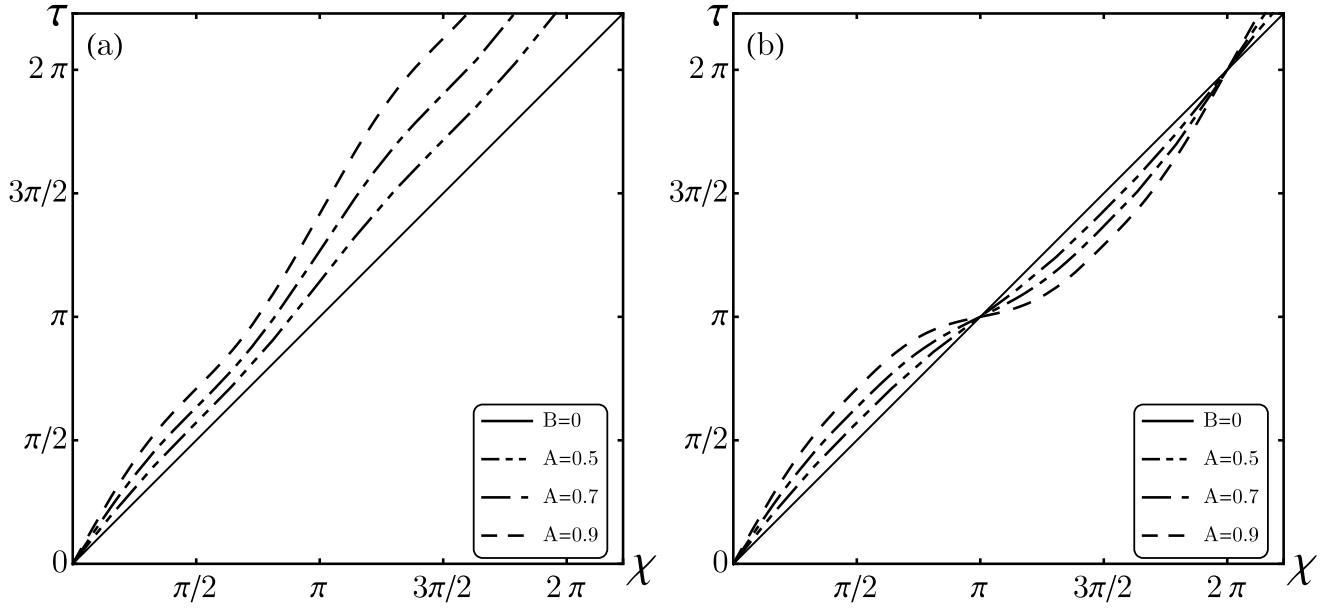


Рис. 2.3. Графическое представление выражения $\tau(\chi, l)$ для двух ветвей решения в точке $l = 0$ при разных значениях параметра A .

дельной величиной безразмерного параметра $A = A_0 = 1$, характеризующего вклад нерелятивистской электронной нелинейности. В работе [14] было установлено, что для значений $A \geq 1$ зависимость $x(l)$ не является однозначной, а значит теряют однозначность функции P и v_T как функции координаты x . Однако, как будет показано ниже, ограничения $A^2 B^2 < 2\sqrt{3}$ и $A < A_0$ являются необходимыми, но не достаточными для выполнения условий однозначности функций $P(\tau, x)$ и $v(\tau, x)$.

Обсудим физические следствия, вытекающие из выражения для $\tau(\chi, l)$. На Рис. 2.4 представлены временные зависимости продольных компонент электрического плазменного поля и скорости электронов в точке $x = 0$ при различных значениях параметра A . Из рисунка видно, что сдвиг частоты колебаний в область низких частот, характерный для первой ветви решения, ведет к потере свойства стационарности колебаний: в различных точках пространства колебания происходят с различающимися частотами, что со временем приводит к увеличению разности фаз между ними (Рис. 2.4а). Такая секулярно возрастающая разность фаз, существование которой связано с пространственной неоднородностью амплитуды плазменных колебаний [72, 111], в итоге приводит к пересечению траекторий соседних частиц, т. е. к опрокидыванию профиля ко-

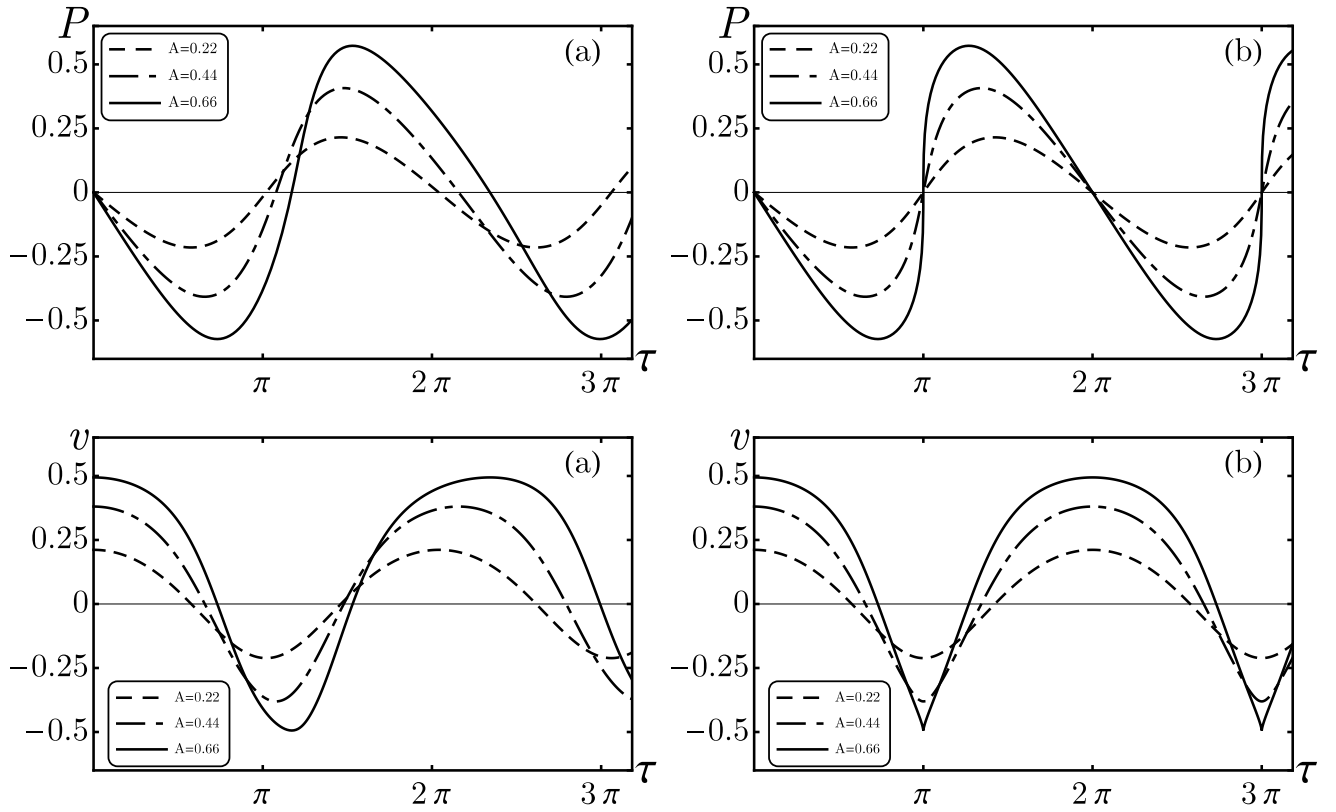


Рис. 2.4. Временные зависимости продольных компонент электрического плазменного поля P и скорости электронов v в нестационарном (а) и стационарном (б) случаях в точке плазменного резонанса $x = 0$ для различных значений параметра A . Графики построены при $B = 1.5$.

лебаний. Подчеркнем, что в режиме нестационарных колебаний опрокидывание профиля происходит при сколь угодно малых амплитудах за конечный интервал времени, что соответствует хорошо известным результатам, полученным ранее (см., например, [74], а также обзор [61]). Возникновение опрокидывания на конечном интервале времени в нестационарном режиме колебаний продемонстрировано на Рис. 2.5: с ростом времени наблюдается постепенное укрупнение профиля плазменных колебаний, в итоге приводящее к возникновению неоднозначности функции $P(\tau)$. Вторая ветвь решения (2.1) определяет стационарный режим плазменных колебаний с модулированной фазой (Рис. 2.4b). В этом случае опрокидывание возникает только при превышении амплитудой поля накачки некоторого порогового значения: с ростом параметра A наблюдается укрупнение профиля стационарных плазменных колебаний вплоть до момента, когда производная $\partial_x P$ обращается в бесконечность и гидродинамическая мо-

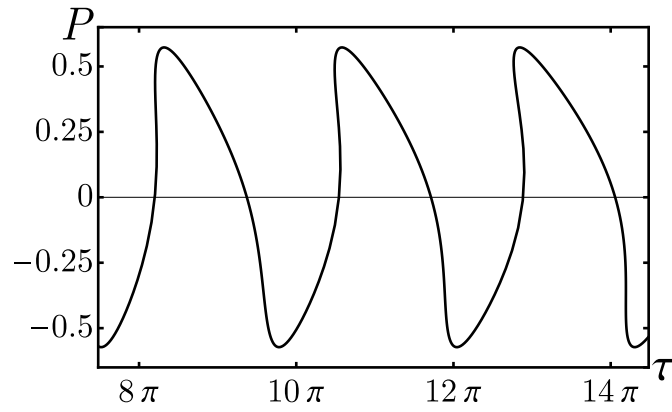


Рис. 2.5. Опрокидывание профиля нестационарных плазменных колебаний в точке $x = 0$ при $B = 1.5$, $A = 0.66$.

дель становится неприменимой.

Наглядно иллюстрируют нестационарный и стационарный характер плазменных колебаний пространственно-временные распределения резонансно-усиленного поля $P(\tau, x)$, показанные на Рис. 2.6. Пространственно-

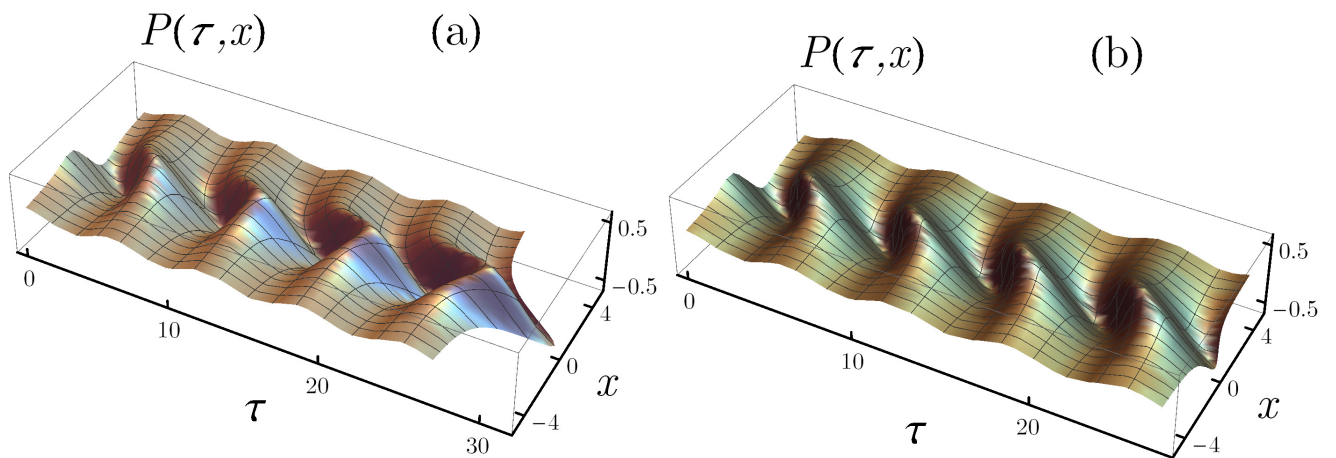


Рис. 2.6. Пространственно-временное распределение резонансно-усиленного продольного плазменного поля в нестационарном (a) и стационарном (b) режимах колебаний. Графики построены при $A = 0.66$, $B = 1.5$.

временная структура поля вдали от области резонанса соответствует слабо возмущенным стационарным плазменным колебаниям. В окрестности же резонанса, где существенны нелинейные эффекты, наблюдается значительное искажение структуры поля, проявляющееся как в нестационарном (Рис. 2.6a), так и в стационарном (Рис. 2.6b) режимах в зависимости от выбора ветви решения

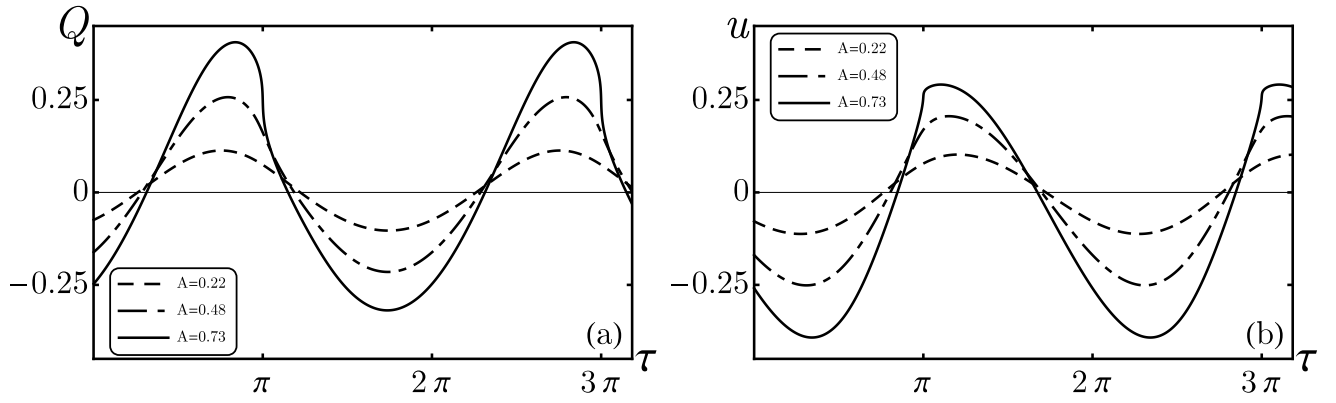


Рис. 2.7. Временные зависимости поперечных компонент электрического поля Q (a) и скорости электронов u (b) в точке плазменного резонанса $x = 0$ для различных значений параметра A в стационарном случае. Графики построены при $B = 1$.

(2.1). В завершение приведем графики временных зависимостей поперечных компонент скорости u и электрического поля Q из (2.1) в точке плазменного резонанса в стационарном случае (Рис. 2.7).

2.3 Опрокидывание стационарных плазменных колебаний и пределы применимости гидродинамической модели

В дальнейшем, исходя из возможных физических приложений, мы сосредоточимся на изучении стационарного режима релятивистских плазменных колебаний, реализующегося при условии адиабатически медленного нарастания интенсивности поля в лазерном импульсе. Вопросы устойчивости и реализации нестационарной ветви решения в данной работе рассматриваться (как это было сделано, например, в [21]) не будут. Подчеркнем, что опрокидывание плазменных колебаний в обсуждаемом нами случае есть результат наложения электронных нелинейностей двух типов – нерелятивистской и релятивистской, а ограничения $A^2 B^2 < 2\sqrt{3}$ и $A < 1$ (первое из которых вытекает из условия однозначности $\tau(\chi, l)$ как функции χ , а второе следует из условия однозначности P и v как функций координаты x), вообще говоря, не определяют критерия однозначности функций $P(\tau, x)$ и $v(\tau, x)$. Проявление нелинейных эффектов наиболее существенно в точке плазменного резонанса $x = 0$ (или в точке

$l = 0$). При этом потеря однозначности с ростом A , как видно, например, из Рис. 2.4b, впервые происходит при $\tau = \pi$. Поэтому для получения полного условия опрокидывания профиля стационарных плазменных колебаний необходимо вычислить производную электрического поля по координате $\partial_x P(\tau, l)$ в точке $\{\tau = \pi, l = 0\}$ или, что то же самое, в точке $\{\chi = \pi, l = 0\}$:

$$\partial_x P \Big|_{\chi=\pi, l=0} = \frac{1}{D} (\partial_\chi \tau \partial_l P - \partial_l \tau \partial_\chi P) \Big|_{\chi=\pi, l=0}, \quad (2.2)$$

где $D \equiv \partial_l x \partial_\chi \tau - \partial_\chi x \partial_l \tau$ — якобиан перехода от переменных τ, x к переменным χ, l . Записывая условие обращения в нуль якобиана $D \Big|_{\chi=\pi, l=0}$, которое соответствует обращению производной $\partial_x P$ в бесконечность и отвечает опрокидыванию нелинейной плазменной волны, получим следующее соотношение между параметрами A и B :

$$A + \frac{2 + A^2 B^2}{\sqrt{4 + A^2 B^2}} = 2. \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) дополняет неравенства $A < 1$, $A^2 B^2 < 2\sqrt{3}$, тем самым определяя область допустимых, в смысле выполнения условия однозначности функций $P(\tau, x)$ и $v(\tau, x)$, значений параметров A и B (Рис. 2.8). Наложение двух типов нелинейности приводит к иному по сравнению с нерелятивистской теорией [14] виду границы опрокидывания: для фиксированного конечного $B_0 > 0$ значение параметра A не может превышать максимального значения $A_{\max} < A_0 = 1$, которое определяется решением уравнения четвертого порядка, следующего из условия (2.3):

$$(B^2 - B^4) A^4 - 4B^2 A^3 + 4A^2 - 16A + 12 = 0. \quad (2.4)$$

При $A > A_{\max}$ возникает многопоточковый режим и решение (2.1) становится неприменимым.

Для более подробного обсуждения областей применимости релятивистской и нерелятивистской теорий рассмотрим на плоскости параметров $\{B, A\}$ линии уровня амплитуды скорости осцилляций электрона в единицах скорости света (Рис. 2.3). Амплитуды скоростей, вычисленные в рамках нерелятивистской теории, обозначим через v_{Im} , а амплитуды скоростей, полученные в релятивистской теории — через v_m . Во-первых, отметим, что учет релятивизма

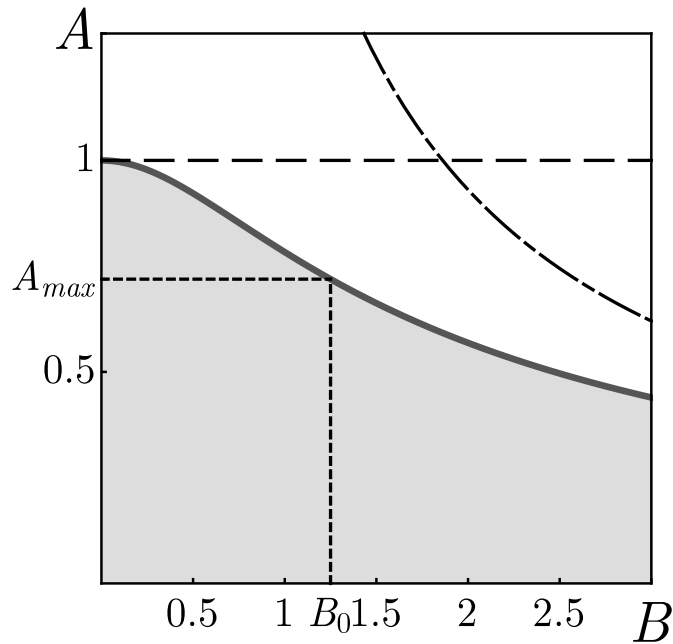


Рис. 2.8. Область допустимых значений параметров A и B . Сплошная кривая соответствует границе опрокидывания в релятивистской гидродинамике, пунктирная прямая ($A = 1$) отвечает опрокидыванию в нерелятивистской теории. Штрих-пунктир соответствует условию $A^2 B^2 = 2\sqrt{3}$.

плазменных волн приводит к более жесткому относительно нерелятивистского случая ограничению на применимость гидродинамической модели, смещая границу опрокидывания в область меньших значений A . С другой стороны, в нерелятивистской теории, кроме условия однопотоковости движения $A < 1$, существует также ограничение на параметр B , вытекающее из условия пренебрежения релятивистской нелинейностью в исходных уравнениях. Соответствующее неравенство может быть записано в виде $AB \ll 1$ и имеет смысл малости отношения скорости электронов к скорости света по сравнению с единицей. Из Рис. 2.9 видно, что при использовании нерелятивистских формул без учета условия $AB \ll 1$, даже в области однопотокового движения, при достаточных значениях параметра B , скорость электронов v_{Γ} формально может становиться релятивистской и даже превышать скорость света c , что заведомо неверно и означает неприменимость нерелятивистских формул. При достаточно узком резонансе неравенство $AB \ll 1$ выполняется в нерелятивистской теории для любых амплитуд вплоть до момента опрокидывания $A = 1$. Сравнение ли-

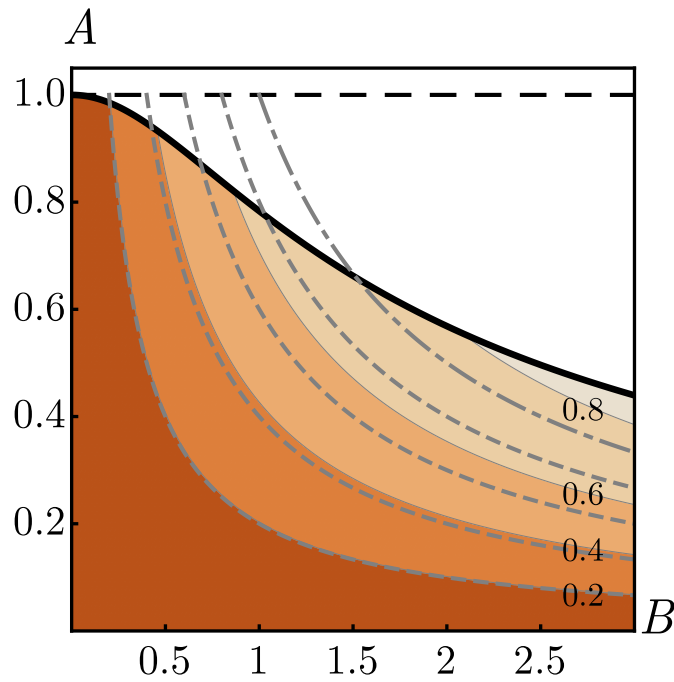


Рис. 2.9. Линии уровня амплитуды скорости электронов (в единицах скорости света c) на плоскости параметров (B, A) , вычисленные в рамках релятивистской (сплошные линии) и нерелятивистской (штриховые линии, соответствующие значениям $v_{Im} = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$) теорий. Штрих-пунктирная кривая соответствует значению $v_{Im} = c$. Жирная сплошная кривая отвечает порогу опрокидывания в релятивистской гидродинамике, пунктирная прямая определяет границу опрокидывания в нерелятивистской теории.

ний уровня амплитуд скоростей v_{Im} и v_m позволяет выделить область значений параметров A, B , в которой нерелятивистская теория заметно завышает амплитуды v_{Im} (относительно амплитуд v_m) и, тем самым, грубо оценить область применимости нерелятивистской теории, проводя ее приблизительную границу по линии $v_m \approx 0.3$.

2.4 Пространственные и спектральные характеристики электрического поля плазменного резонанса

Остановимся теперь на изучении пространственных и спектральных характеристик стационарного решения уравнений (1.6), разлагая электрическое поле

вблизи точки $x = 0$ в ряд по гармоникам падающей волны

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau, x) e^{-in\tau} d\tau, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

Зависимость пространственного распределения составляющей плазменного поля P_1 на основной частоте ω_0 от безразмерной амплитуды A показана на Рис. 2.10. Наряду с ростом амплитуды наблюдается уширение области локализации пер-

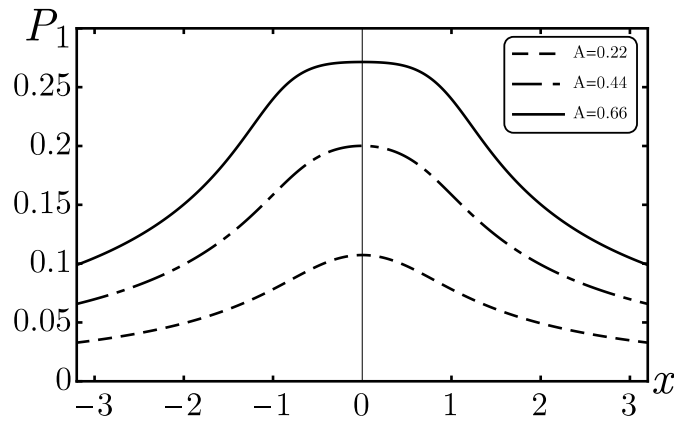


Рис. 2.10. Пространственное распределение поля плазменного резонанса на основной частоте в зависимости от параметра A ($B = 1.5$).

вой гармоники электрического поля и образование плато в его пространственном распределении. На Рис. 2.11 приведены пространственные распределения амплитуды первой гармоники поля $P_1(x)$ в нелинейном нерелятивистском случае ($B = 0$) и с учетом релятивистской нелинейности ($B = 1.5$) при фиксированном значении параметра A . Согласно полученному результату, учет релятивизма плазменных колебаний не приводит к смещению максимума электрического поля относительно точки $x = 0$, однако влечет за собой уменьшение амплитуды составляющей электрического поля $P_1(x, \tau)$ на основной частоте, что связано с перераспределением энергии поля между гармониками при переходе к релятивистскому режиму колебаний. А именно, за счет эффекта фазовой модуляции происходит усиление амплитуд гармоник с номерами $n \geq 2$, что существенно меняет спектральный состав поля, обогащая его высшими гармониками. В качестве иллюстрации роста амплитуд высших гармоник на Рис. 2.12 проводится сравнение пространственных распределений амплитуд пятой и вось-

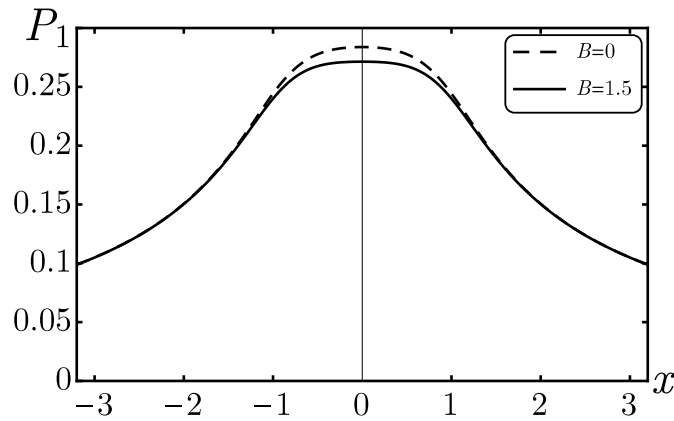


Рис. 2.11. Пространственное распределение первой гармоники плазменного поля без учета ($B = 0$, пунктирная линия) и с учетом релятивизма плазменных колебаний ($B = 1.5$, сплошная линия) при фиксированной амплитуде поля накачки ($A = 0.66$).

мой гармоник продольного электрического поля в отсутствие ($B = 0$) и при наличии ($B = 1.5$) релятивистской нелинейности.

Рассмотрим область локализации энергии плазменного поля в пространстве, в качестве количественной меры которой введем δ – ширину плазменного резонанса, определяя последнюю как ширину на уровне половинной амплитуды (HWHM – half width at half maximum). В нашем случае этой области отвечает область локализации суммарной энергии (интенсивности) W всех спектральных составляющих поля $W = \sum_{n=0}^{\infty} |P_n|^2$. Как видно из Рис. 2.13, ширина плазменного резонанса зависит от величины параметра A , т. е. от безразмерной амплитуды. Графики пространственного распределения энергии поля W при разных значениях A показаны на Рис. 2.13а, а незначительное увеличение ширины резонанса δ с ростом параметра A иллюстрирует Рис. 2.13б.

Для обсуждения влияния релятивистской нелинейности на локализацию энергии плазменного поля рассмотрим Рис. 2.14, на котором приведены графики величины W для нелинейного нерелятивистского [14] и релятивистского случаев при фиксированной амплитуде поля накачки. Удержание в исходной системе (1.6) вклада, отвечающего релятивистской нелинейности, не приводит к изменению суммарной энергии продольной компоненты электрического поля P , и, как следствие, к изменению ширины плазменного резонанса δ , что согласо-

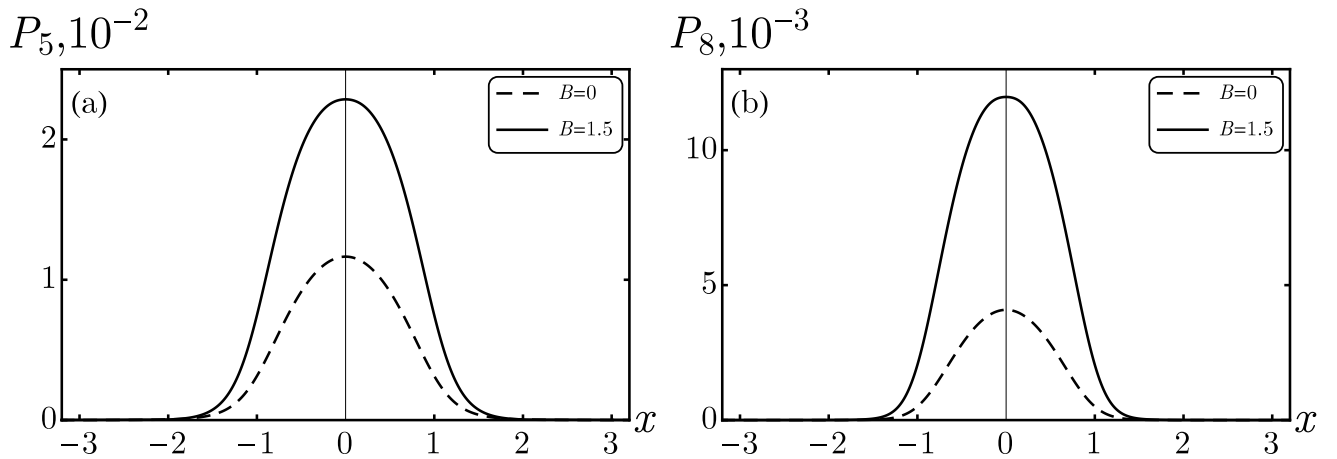


Рис. 2.12. Пространственные распределения пятой ($n = 5$) и восьмой ($n = 8$) гармоник продольного электрического поля. Пунктирные линии соответствуют нерелятивистскому приближению ($B = 0$) [14], сплошные линии отвечают результатам релятивистской теории ($B = 1.5$). Графики построены при фиксированном параметре $A = 0.66$.

ется с выдвинутым выше предположением: в результате учета релятивистских эффектов происходит перекачка части энергии в энергию высших гармоник, при этом суммарная энергия электрического поля изменений не претерпевает. Вывод о неизменности полной энергии плазменного поля в данном случае согласуется с тем фактом, что при фазовой модуляции колебаний суммарная энергия всех гармонических составляющих не меняется, а наблюдается только перераспределение энергии между гармониками основной частоты [142]. Поскольку основной вклад в диссипацию электромагнитной волны в окрестности плазменного резонанса обусловлен продольным электрическим полем, то, на первый взгляд, поглощенная плазмой энергия лазерного поля также не меняется. Действительно, как было показано выше, в нелинейном случае пространственная часть продольного электрического поля плазменного резонанса имеет вид, аналогичный виду координатной зависимости резонансно-усиленного потенциального поля в линейном случае $E \sim \text{const}/(x - i\Delta)$. Тогда, если величину поглощения оценивать как $\text{Im } \varepsilon |E|^2$, при вычислении полных энергетических

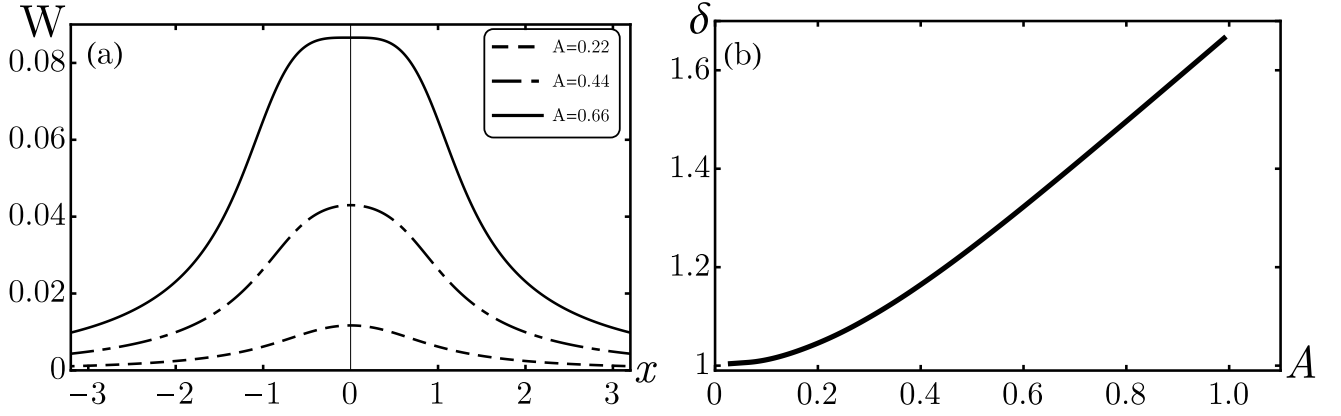


Рис. 2.13. Пространственные распределения энергии плазменного поля, отвечающие различным значениям параметра A (a) и зависимость ширины плазменного резонанса (в единицах ширины Δ в линейной теории) от параметра A (b).

потерь получим выражение

$$\int \text{Im}\varepsilon|E|^2 \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta}{\eta^2 + \Delta^2} d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta}{x^2 + \Delta^2} dx, \quad (2.6)$$

которое в пределе малых Δ не зависит от Δ [5]. Следовательно, можно было бы ожидать, что нелинейное поглощение электромагнитных волн в окрестности критической плотности неоднородной плазмы, как и в случае линейной теории, не зависит от параметра Δ . На самом деле, это не так, поскольку в приведенных выше рассуждениях не учитывается наличие нелинейной зависимости амплитуды резонансно-усиленного поля от амплитуды поля лазерной накачки, которая приводит к появлению зависимости резонансного поглощения от плотности потока лазерной энергии, а значит и от Δ . В главе 3 найдена такая зависимость и продемонстрирована роль релятивистской нелинейности движения электронов в ее установлении.

На Рис. 2.15 представлены спектральные распределения продольного плазменного поля P для различных значений параметра A (Рис. 2.15a) и проводится сравнение спектров, вычисленных с учетом релятивистской нелинейности, со спектрами, полученными в нерелятивистской теории [14] (Рис. 2.15b). Нижняя сплошная кривая «ТВ» на Рис. 2.15a соответствует результатам слабо нелинейной теории [11], в рамках которой вычисление гармоник проводится по теории

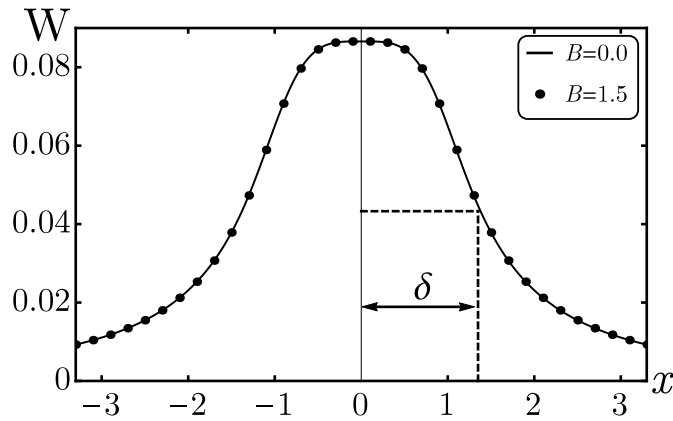


Рис. 2.14. Пространственное распределение энергии плазменного поля без учета ($B = 0$, точки) и с учетом релятивизма плазменных колебаний ($B = 1.5$, сплошная линия), для заданной величины параметра $A = 0.66$.

возмущений, и определяет экспоненциальный закон спада амплитуд гармоник с ростом их номера. По мере увеличения интенсивности поля накачки наблюдается переход к более плавной зависимости от номера n [14]. При дальнейшем росте амплитуды поля становятся существенны эффекты релятивизма ($A \sim A_{\max}$) и убывание амплитуд гармоник происходит по степенному закону, однако более быстрому, чем $1/n$ (Рис. 2.15а). Учет только нерелятивистской нелинейности в исходных уравнениях приводит к более плавной, по сравнению с результатами теории возмущений [11], зависимости спада амплитуд гармоник вида $P_n \sim f(n)e^{-n}$. Иллюстрацией этого случая служат штриховые линии на Рис. 2.15b, полученные из результатов настоящей работы при $B = 0$, и совпадающие с распределениями, вычисленными в нерелятивистском приближении [14]. При отличных от нуля значениях параметра B амплитуды гармоник с ростом номера n спадают медленнее (сплошные линии на Рис. 2.15b).

2.5 Заключение

В настоящей главе подробно исследовано полученное в главе 1 аналитическое решение нелинейных уравнений, описывающих релятивистские плазменные колебания в окрестности критической плотности неоднородной плазмы. Показано, что учет в исходных уравнениях релятивистской нелинейности дви-

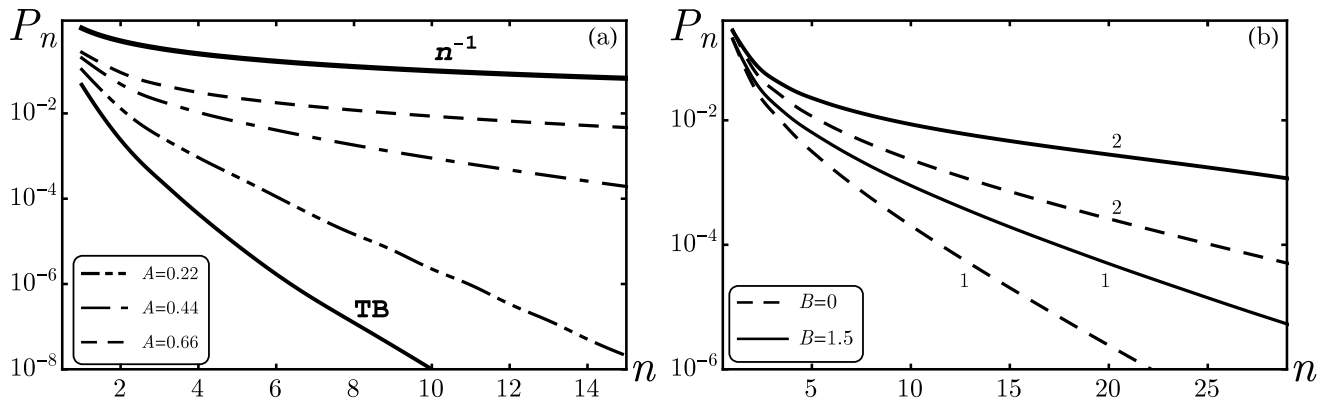


Рис. 2.15. (а) – спектры плазменного поля при различных значениях параметра A ; (б) – спектры плазменного поля с учетом (сплошные линии) и без учета (пунктирные линии) релятивистских эффектов для двух значений параметра A : кривые 1 соответствует $A = 0.44$, кривые 2 – $A = 0.66$.

жения электронов приводит к двум классам нелинейных решений. Один вид решений, продолжающий стандартное линейное [1] и нелинейное нерелятивистское [14] решения, соответствует стационарному режиму плазменных колебаний с модулированной фазой и отвечает физической картине, при которой амплитуда поля в лазерном импульсе меняется достаточно медленно в сравнении с динамикой электронов плазмы. При этом естественно полагать, что для лазерного импульса конечной длительности, по мере возрастания во времени амплитуды поля накачки, решение, описывающее поле плазменного резонанса, проходит три стадии: от линейной стадии при малой амплитуде к нелинейной нерелятивистской и далее — к релятивистской стадии. Другой тип решений отвечает нестационарным плазменным колебаниям в окрестности критической плотности и является подобием решений, получаемых в рамках других моделей [39, 73, 74, 111]. В этом случае опрокидывание происходит за конечное время и при сколь угодно малых амплитудах поля накачки. Возможность реализации подобного решения пока не очевидна, но, вероятно, оно может быть связано с нарушением условия квазистационарности перехода от линейного к нелинейному режиму и требует отдельного исследования.

Для стационарного режима найдены пространственно-временные распределения электрического поля и скорости электронов вдоль и поперек направления градиента плотности плазмы, а также изучены спектральные характеристики

продольного электрического поля плазменного резонанса. Обнаруженный эффект фазовой модуляции колебаний приводит к новому, относительно нерелятивистского режима [14], виду спектра плазменного поля, который характеризуется медленным степенным спаданием амплитуд гармоник с увеличением их номера. При этом обогащение спектра высшими гармониками происходит за счет перераспределения части энергии поля между его спектральными составляющими, а полная энергия $W = \sum_{n=0}^{\infty} |P_n|^2$ остается неизменной. Исследование ширины области локализации энергии стационарного плазменного поля показало, что учет релятивистской нелинейности для заданной амплитуды поля не приводит к изменению ширины резонанса. Однако с ростом безразмерной амплитуды поля наблюдается незначительное «разбухание» продольного электрического поля: вблизи границы опрокидывания для различных значений параметров плазмы ширина нелинейного плазменного резонанса δ в среднем приблизительно в полтора раза превышает ширину резонанса в линейной теории Δ .

Проведен анализ условия опрокидывания профиля стационарных плазменных колебаний и найдены вытекающие из него ограничения на управляющие безразмерные параметры $A = aL^2/\Delta^2$ и $B = \omega_0\Delta/c$. Эти ограничения задают границу области применимости теории в смысле применимости гидродинамической модели. Показано, что из сравнения кривых, изображающих границы опрокидывания в релятивистской и нерелятивистской теориях, следует вывод о более сильном ограничении в релятивистской теории на максимально возможную безразмерную амплитуду поля, при которой формулы гидродинамической модели, описывающие физические величины, остаются однозначными (см. Рис. 2.8, 2.9). Отсюда можно было заключить, что переход к релятивистской теории не позволил продвинуться в область больших лазерных интенсивностей I_0 по сравнению с интенсивностями, рассматриваемыми в нерелятивистской теории [14]. Однако это не так. Во-первых, граница применимости нерелятивистской теории по безразмерной амплитуде A в действительности находится существенно ниже порога опрокидывания плазменных колебаний. Об этом можно заключить уже из сравнения амплитуд скоростей электронов, вычисленных в рамках релятивистской и нерелятивистской теорий (Рис. 2.9). Начиная с линий уровня амплитуд скорости $v_m \approx 0.3c$ нерелятивистская теория начинает

заметно завышать характерные амплитуды скорости электронов в плазменном резонансе, поэтому можно говорить о переходной области между нерелятивистской и релятивистской теориями приблизительно в интервале линий уровня $v_m \approx (0.3-0.35)c$. Во-вторых, в главе 3 мы покажем, что за счет эффекта насыщения амплитуды поля плазменного резонанса порог опрокидывания в релятивистской теории на самом деле смещается в область бóльших (релятивистских) интенсивностей лазерного излучения. Будет получена нелинейная связь амплитуды магнитного поля в точке резонанса с амплитудой поля лазерной накачки, что позволит перейти от безразмерных параметров A и B к естественным физическим параметрам лазерно-плазменной системы и исследовать пределы гидродинамического приближения на языке интенсивности лазерного излучения I_0 и температуры плазмы T .

В заключение отметим, что найденная нелинейная стационарная структура резонансно-усиленного электрического поля и продольной скорости электронов с учетом релятивизма плазменных колебаний демонстрирует принципиально новое, важное продвижение в теории плазменного резонанса неоднородной плазмы. Результаты первой и второй глав диссертации являются основой для решения задач о поглощении, генерации гармоник, а также для расчета статического электрического поля в области критической плотности плазмы. Эти вопросы станут предметом нашего исследования в следующих главах.

Глава 3

Нелинейное резонансное поглощение и генерация квазистатического электрического поля

3.1 Введение

Данная глава посвящена построению аналитической теории резонансного поглощения лазерного излучения неоднородной плазмой в условиях сильной нелинейности, которая связана как с релятивистскими, там и с нерелятивистскими эффектами динамики электронов в окрестности критической плотности плазмы. Наш теоретический подход строится на основе линейных решений [36, 93] для углов падения θ , при которых $\rho > 1$ и $\rho \ll 1$. В качестве исходных по-прежнему используются уравнения бесстолкновительной гидродинамики холодной электронной плазмы и уравнения Максвелла. Для амплитуды отраженного от плазмы магнитного поля в вакууме на основной частоте получено уравнение с правой частью, содержащей в качестве источника излучения нелинейный ток, локализованный вблизи критической плотности плазмы. С использованием результатов главы 1 построено решение этого уравнения с источником, определяющее амплитуду основной (первой) гармоники магнитного поля в вакууме. Вычислена амплитуда магнитной составляющей электромагнитного поля в точке плазменного резонанса с учетом электронной релятивистской нелинейности и проведена перенормировка функции источника на эту амплитуду. Получены самосогласованные выражения для амплитуды отраженного магнитного поля и коэффициента поглощения на основной частоте.

Кроме того, найдено приближенное аналитическое выражение для искомой амплитуды магнитного поля в точке резонанса и обоснована необходимость учета релятивистских эффектов движения электронов плазмы в области критической плотности при построении нелинейной теории резонансного поглощения, даже в том случае, когда интенсивность лазерного излучения не достигает релятивистских значений. Показано, что пространственно-временная модуляция фазы релятивистских колебаний электронов, обсуждавшаяся в главе 2, приводит к насыщению нелинейной амплитуды поля плазменного резонанса и подавлению резонансного поглощения, то есть к уменьшению коэффициента поглощения с ростом плотности потока лазерной энергии. С учетом этого эффекта проведено уточнение области применимости релятивистской гидродинамической модели плазменного резонанса на языке параметров лазерно-плазменной системы. В заключении кратко сформулированы результаты нелинейной теории резонансного поглощения и, в качестве еще одного примера, для которого важен эффект нелинейности плазменного резонанса, обсуждается генерация квазистатического электрического поля при учете релятивизма плазменных колебаний в окрестности критической плотности неоднородной плазмы.

Результаты, представленные в первой главе, опубликованы в работах [А6] и [А7].

3.2 Основные уравнения задачи о резонансном поглощении

Для описания процесса нелинейного поглощения (отражения) p -поляризованной электромагнитной волны (1.1), падающей на слабо неоднородную вдоль координаты x плазму под углом θ , в качестве исходных, как и в главе 1, рассмотрим уравнения (1.2), которые в покомпонентной записи принимают вид (1.3). Представляя входящие в (1.3) величины скоростей и полей v, u, P, Q, R в виде разложения в ряд по гармоникам падающей волны (1.1), поставим в соответствие каждой из этих величин её фурье-компоненту v_n, u_n, P_n, Q_n, R_n :

$$\{v, u, P, Q, R\} = \sum_{-\infty}^{\infty} \{v, u, P, Q, R\}_n \exp[-in(\omega_0 t - k_y y)] . \quad (3.1)$$

Используя разложение (3.1), из системы уравнений (1.3) получим следующее уравнение для n -ой гармоники магнитного поля:

$$\begin{aligned}
& \partial_{xx} R_n - \frac{\partial_x \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \partial_x R_n + \left(\frac{n\omega_0}{c} \right)^2 (\varepsilon_n - \sin^2 \theta) R_n = \frac{ian\omega_0}{c^2} \left\{ v(\partial_x P + \right. \\
& \left. + \partial_y Q) \right\}_n \sin \theta + \frac{\omega_L^2}{c^2} \left\{ av\partial_x(\gamma v) + au\partial_y(\gamma v) + \partial_t(v(\gamma - 1)) - \frac{au}{c} R \right\}_n - \\
& - \frac{a}{c} \left\{ \partial_x(u(\partial_x P + \partial_y Q)) \right\}_n + \frac{a\partial_x \varepsilon_n}{c\varepsilon_n} \left\{ u(\partial_x P + \partial_y Q) \right\}_n + \\
& + \frac{i\omega_L^2}{cn\omega_0} \partial_x \left\{ av\partial_x(\gamma u) + au\partial_y(\gamma u) + \partial_t(u(\gamma - 1)) + \frac{au}{c} R \right\}_n - \\
& - \frac{in\omega_0\varepsilon_n}{c} \partial_x \left(\frac{\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n} \right) \left\{ av\partial_x(\gamma u) + au\partial_y(\gamma u) + \partial_t(u(\gamma - 1)) + \frac{av}{c} R \right\}_n .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Индекс « n » в (3.2) указывает на взятие n -ой фурье-компоненты соответствующих функций. Здесь $\varepsilon_n = 1 - (\omega_L^2)/(n^2\omega_0^2)$ – комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы на частоте $n\omega_0$. Правая часть уравнения (3.2) отвечает нелинейному источнику генерации гармоник в плазме. В отсутствие нелинейных эффектов (при $a \rightarrow 0$) этот источник исчезает, и уравнение (3.2) переходит в уравнение, описывающее свободное распространение в неоднородной плазме p -поляризованной электромагнитной волны с частотой $n\omega_0$.

Примем во внимание, что зависимость электромагнитных полей и скоростей электронов от координаты x вдоль градиента плотности вблизи плазменного резонанса обратно пропорциональна величине ширины плазменного резонанса $\delta \ll L$ и оказывается существенно сильнее зависимости от поперечной координаты y , которая пропорциональна k_y : $\partial_x(\dots) \gg \partial_y(\dots)$. Кроме того, в рассматриваемом случае слабо неоднородной плазмы с характерным масштабом неоднородности $L \gg 1/k_0$ можно пренебречь вкладами, пропорциональными градиенту неоднородности в правой части (3.2). Собирая перечисленные условия, приходим к совокупности неравенств, задающих область применимости модели:

$$k_0 L \gg 1, \quad k_y \delta \ll 1, \quad \delta \ll L. \tag{3.3}$$

Учитывая основные допущения и модельные ограничения теории плазменного резонанса, которые задаются неравенствами (3.3) и тем самым определяют иерархию полей и скоростей вблизи критической плотности (1.5), получим из (3.2) уравнение для амплитуды отраженного от плазмы магнитного поля в ва-

кууме на основной частоте с правой частью, содержащей в качестве источника излучения нелинейный ток, локализованный вблизи критической плотности плазмы. В интересующем нас случае для магнитной составляющей поля на частоте лазера ω_0 учтем, что при $n = 1$ в (3.2) наибольший вклад в источник дают резонансные слагаемые $\sim 1/\varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = (i\Delta - x)/L$.

С учетом сделанных предположений, уравнение (3.2) при $n = 1$ преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \partial_{xx}R_1 - \frac{\partial_x\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\partial_xR_1 + \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 (\varepsilon_1 - \sin^2\theta) R_1 = -\frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{a}{4\pi} \text{rot}\vec{J}_1 \right\}_z + \\ + \frac{a/c}{x - i\Delta} \left[u\partial_xP - i\omega_0v\partial_x(\gamma_0u) - \frac{\omega_0^2}{a}(\gamma_0 - 1)u \right]_1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где компоненты вектора \vec{J}_1 определяются выражением

$$\begin{aligned} \vec{J}_1 = \left\{ v\partial_xP - i\omega_0v\partial_x(\gamma_0v) - \frac{\omega_0^2}{a}(\gamma_0 - 1)v, \right. \\ \left. u\partial_xP - i\omega_0v\partial_x(\gamma_0u) - \frac{\omega_0^2}{a}(\gamma_0 - 1)u, \quad 0 \right\}_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Индекс «1» в (3.4) и (3.5) указывает на взятие первой фурье-компоненты соответствующих функций. В (3.4) положено $\omega_L = \omega_0$, то есть пренебрегается зависимостью частоты ω_L от координаты x . Такое приближение оправдано для слабо неоднородной плазмы, когда область локализации поля плазменного резонанса мала по сравнению с характерным масштабом неоднородности плазмы L . Из уравнения (3.4) и соотношения (3.5) следует, что первая гармоника магнитного поля в вакууме определяется электрическим полем и скоростью электронов в области плазменного резонанса, которые были найдены в главе 1.

3.3 Большие углы падения

3.3.1 Амплитуда магнитного поля в вакууме

Решение неоднородного уравнения (3.4) записывается через фундаментальную систему решений однородного уравнения Ψ^+ и Ψ^- в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 R_1(x) &= \alpha_1^+ \Psi_1^+(x) + \alpha_1^- \Psi_1^-(x) + \int_{-\infty}^x d\xi \mathcal{G}(x, \xi) f_1(\xi), \\
 \mathcal{G}(x, \xi) &= -\frac{\Psi_1^+(x) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(x)}{\Psi_1^+(\xi) \Psi_1^{-\prime}(\xi) - \Psi_1^{+\prime}(\xi) \Psi_1^-(\xi)}, \\
 f_1(x) &= \frac{a}{c} \left\{ ik_y \left(v P_x - i\omega_0 v (\gamma_0 v)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) v \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{x - i\Delta} \left[u P_x - i\omega_0 v (\gamma_0 u)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \left[u P_x - i\omega_0 v (\gamma_0 u)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u \right]_x \right\}_1, \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

где $\mathcal{G}(x, \xi)$ – функция Грина, а функции Ψ_1^+ и Ψ_1^- удовлетворяют однородному уравнению

$$\partial_{xx} \Psi_1^\pm - \frac{\partial_x \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \partial_x \Psi_1^\pm + \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 (\varepsilon_1 - \sin^2 \theta) \Psi_1^\pm = 0 \tag{3.7}$$

В формулах (3.6) α_1^\pm – константы, определяемые граничными условиями для уравнения (3.4) применительно к решению (3.6). Граничные условия, в свою очередь, следуют из вида магнитного поля $R_1(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \tilde{C}_1^+ e^{i\frac{\omega_0}{c} x \cos \theta} + \tilde{C}_1^- e^{-i\frac{\omega_0}{c} x \cos \theta}, \quad x \rightarrow -\infty, \\
 R_1 &= 0, \quad x \rightarrow \infty, \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

где комплексные амплитуды \tilde{C}_1^+ и \tilde{C}_1^- отвечают падающей и отраженной волнам соответственно.

В условиях слабой неоднородности плазмы $k_0 L \gg 1$, приближенное решение

уравнения (3.7) можно записать через функции Эйри:

$$\begin{aligned}
\Psi_1^+(x) &= \mathcal{E}_1 \left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_-(x) \right)^{1/6} \text{Ai} \left[- \left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_-(x) \right)^{2/3} \right], \quad x < x_0, \\
\Psi_1^+(x) &= \mathcal{E}_1 \left(-\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_+(x) \right)^{1/6} \text{Ai} \left[\left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_+(x) \right)^{2/3} \right], \quad x > x_0, \\
\Psi_1^-(x) &= \mathcal{E}_1 \left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_-(x) \right)^{1/6} \text{Bi} \left[- \left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_-(x) \right)^{2/3} \right], \quad x < x_0, \\
\Psi_1^-(x) &= \mathcal{E}_1 \left(-\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_+(x) \right)^{1/6} \text{Bi} \left[- \left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_+(x) \right)^{2/3} \right], \quad x > x_0,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \sin^2 \theta}}, \quad \mathcal{L}_-(x) = \int_x^{x_0} d\tau \sqrt{\varepsilon_1 - \sin^2 \theta}, \quad \mathcal{L}_+(x) = \int_x^{x_0} d\tau \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_1}.$$

Здесь x_0 – точка поворота, которая отвечает условию $\varepsilon_1(x_0) = c^2 k_y^2 / \omega_0^2$. Формулы (3.9), определяющие решение однородного уравнения (3.7) справа и слева от точки поворота, тем не менее, оказываются непригодными в окрестности плазменного резонанса $x = 0$, где $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Рассмотрим сначала случай не малых углов падения лазерного излучения на плазму, при которых $\rho \equiv (k_0 L)^{2/3} \sin^2 \theta > 1$ для масштабов неоднородности $L \gg 1/k_0$ (точнее, мы будем рассматривать $L > 10/k_0$). Решение однородного линейного уравнения вблизи точки плазменного резонанса $x = 0$ при не слишком малых углах θ , таких что $\rho > 1$, выражается через модифицированные функции Бесселя первого порядка I_1 , K_1 , что приводит к следующим формулам для функций Ψ_1^\pm справа и слева от точки $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\Psi_1^+(x) &= \frac{i\Delta - x}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\omega_0 L}{c} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] I_1 \left((i\Delta - x)k_y \right), \quad x \lesssim 0; \\
\Psi_1^+(x) &= \frac{x - i\Delta}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\omega_0 L}{c} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] I_1 \left((x - i\Delta)k_y \right), \quad x \gtrsim 0; \\
\Psi_1^-(x) &= \frac{\sqrt{2}(i\Delta - x)}{\pi L} \left(\frac{\omega_0 L}{c} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] K_1 \left((i\Delta - x)k_y \right), \quad x \lesssim 0; \\
\Psi_1^-(x) &= \frac{\sqrt{2}(x - i\Delta)}{\pi L} \left(\frac{\omega_0 L}{c} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \times \\
&\quad \times [K_1 \left((x - i\Delta)k_y \right) + i\pi I_1 \left((x - i\Delta)k_y \right)], \quad x \gtrsim 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

В рассматриваемом нами случае $\rho > 1$ решение (3.9) в области $\sin^2 \theta \gg (i\Delta - x)/L \gg (\omega_0 L/c)^{-2/3}$ совпадает с решением (3.10), откуда следует, что эти формулы дают равномерно пригодное представление для функций $\Psi_1^\pm(x)$ во всей интересующей нас области изменения координаты x .

Поскольку источник $f_1(\xi)$ локализован в окрестности плазменного резонанса, то при вычислении функции Грина $\mathcal{G}(x, \xi)$ следует использовать формулы для Ψ^+, Ψ^- при $x \approx 0$. Несложные вычисления дают:

$$\Psi_1^+(x)\Psi_1^{-\prime}(x) - \Psi_1^{\prime}(x)\Psi_1^-(x)|_{x \approx 0} = -\frac{\omega_0 i\Delta - x}{\pi c L}. \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в (3.6), получаем:

$$\begin{aligned} R_1(x) = & \alpha_1^+ \Psi_1^+(x) + \alpha_1^- \Psi_1^-(x) + \\ & + \frac{\pi c L}{\omega_0} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} [\Psi_1^+(x)\Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi)\Psi_1^-(x)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Используя условие обращения магнитного поля $R_1(x)$ в нуль при $x \rightarrow \infty$ и экспоненциальное затухание функции $K_1(x)$, получим из (3.12) следующее соотношение, определяющее одну из констант α_1^- :

$$\begin{aligned} \alpha_1^- = & \frac{i}{2} \alpha_1^+ \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] - \\ & - \frac{i}{2} \left(\frac{2cL}{\omega_0} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f_1(\xi) K_1 [(\xi - i\Delta)k_y]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В области, где плотность плазмы обращается в нуль, т. е. при $x \rightarrow -\infty$, магнитное поле представляется в виде линейной комбинации падающей и отраженной плоских волн с коэффициентами \tilde{C}_1^+ и \tilde{C}_1^- (3.8). Эти коэффициенты могут быть выражены через α_1^+ и α_1^- , если использовать в (3.12) формулы (3.10) и перейти к пределу $x \rightarrow -\infty$ с учетом асимптотических выражений для функций Эйри. В результате имеем

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^+ = & (i\alpha_1^+ + \alpha_1^-) \frac{\exp[-i\mathcal{Z}]}{2\sqrt{\pi}|\cos\theta|}, \quad \tilde{C}_1^- = (\alpha_1^- - i\alpha_1^+) \frac{\exp[i\mathcal{Z}]}{2\sqrt{\pi}|\cos\theta|}, \\ \mathcal{Z} = & \frac{\pi}{4} + \frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(-\infty). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Исключая из (3.14) коэффициенты α_1^+ и α_1^- с учетом (3.13), и принимая во внимание, что $K_1(x)|_{x \approx 0} \approx 1/x$ в интересующей нас области локализации источника

$(\xi - i\Delta)k_y \ll 1$, получим связь коэффициентов \tilde{C}_1^- и \tilde{C}_1^+ :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^- = & -i \exp\left[2i\frac{\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(-\infty)\right] \frac{1 - \frac{1}{2} \exp\left[\frac{2\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(0)\right]}{1 + \frac{1}{2} \exp\left[\frac{2\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(0)\right]} \tilde{C}_1^+ - \\ & - \frac{i \exp\left[\mathcal{L}_+(0) + i\mathcal{Z}\right]}{1 + \frac{1}{2} \exp\left[\frac{2\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(0)\right]} \left(\frac{cL}{2\pi\omega_0|\cos\theta|k_y^2}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{f_1(\xi)}{\xi - i\Delta}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Кроме того, в случае линейного профиля плотности плазмы, когда координатная зависимость диэлектрической проницаемости на основной частоте имеет вид $\varepsilon_1 = (i\Delta - x)/L$, справедлива формула $\mathcal{L}_+(0) = -(2L/3) \sin^3 \theta$.

Принимая во внимание, что функции полей $P(x, t), Q(x, t)$ и скоростей $v(x, t), u(x, t)$ обращаются в нуль при $x \rightarrow \infty$, упростим интеграл от источника $f_1(x)$ в (3.15) интегрированием по частям, и, как следствие, исключением из подынтегрального выражения функций поперечных компонент электрического поля u и скорости электронов Q :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f_1(x)}{x - i\Delta} &= \frac{a}{c} ik_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - i\Delta} \left[vP_x - i\omega_0 v(\gamma_0 v)_x - \frac{\omega_0^2}{a}(\gamma_0 - 1)v \right]_1 = \\ &= \frac{aik_y}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - i\Delta} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d(\omega_0 t - yk_y) \left[vP_x - i\omega_0 v(\gamma_0 v)_x - \frac{\omega_0^2}{a}(\gamma_0 - 1)v \right] e^{i\omega_0 t - iyk_y} = \\ &= \frac{aik_y}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - i\Delta} \int_0^{2\pi} d\tau \left[vP_x - i\omega_0 v(\gamma_0 v)_x - \frac{\omega_0^2}{a}(\gamma_0 - 1)v \right] e^{i\tau} = \\ &= \frac{i\Delta\omega_0^3 k_y}{2\pi ca} \exp[-i\pi + i\arg B_1(0)] \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_1 e^{i\tau(\chi, l)}}{x_0 - i} [\partial_\chi \tau \partial_l (P_0 - i\gamma_0 v_1) - \partial_l \tau \partial_\chi (P_0 - i\gamma_0 v_1) - \\
&\quad - (\partial_\chi \tau \partial_l x_0 - \partial_l \tau \partial_\chi x_0) (\gamma_0 - 1)] , \\
P_0 &= -\frac{A}{1+l^2} (l \cos \chi + \sin \chi) , \quad v_0 = -\frac{A}{1+l^2} (l \sin \chi - \cos \chi) , \\
\gamma_0 &= 1 + \frac{B^2 v_0^2}{2} , \quad x_0 = l - P_0 , \quad v_1 = v_0 \frac{(1 + \frac{1}{4} B^2 v_0^2)^{1/2}}{1 + \frac{1}{2} B^2 v_0^2} , \\
\tau(\chi, l) &= \chi - \left(\zeta E(\varphi, k) - \frac{2}{\zeta} F(\varphi, k) - \varphi \right) , \quad \zeta = \sqrt{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)} , \\
\varphi &= \arcsin \frac{P_0}{\sqrt{v_0^2 + P_0^2}} , \quad k = \sqrt{\frac{B^2(v_0^2 + P_0^2)}{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)}} .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь, из соображений удобства, как и в (2.1), используются нормированные функции и переменные P_0, v_1, x_0 , которые связаны с P, v, x следующим образом: $P_0 = \frac{a}{\Delta\omega_0^2} P$, $v_1 = \frac{a}{\Delta\omega_0} v$ и $x_0 = x/\Delta$. Кроме того, в (3.16) совершен переход от переменных интегрирования (τ, x) к переменным (χ, l) с якобианом перехода $D \equiv \partial_\chi \tau \partial_l x_0 - \partial_l \tau \partial_\chi x_0$. Совокупность формул $P_0(\chi, l), v_0(\chi, l), x_0(\chi, l), \tau(\chi, l)$ через параметрические переменные χ, l неявным образом определяет нелинейную зависимость электрического поля плазменного резонанса от времени t и координаты x .

До сих пор мы рассматривали нормированную на безразмерную амплитуду a величину поля R (и соответствующую ей амплитуду \tilde{C}_1^-), однако конечная цель заключается в получении формул для магнитного поля B_z (и амплитуды C_1^-). Уравнение для фурье-компоненты B_1 получается из уравнения для R_1 после умножения на (am_e/e) . При этом, связь между амплитудами \tilde{C}_1^- и C_1^- такая же, как между R_1 и B_1 . Поэтому, при переходе к формуле для фурье-компоненты магнитного поля B_z на основной частоте, \tilde{C}_1^- следует домножить на (am_e/e) . Окончательно получаем выражение для амплитуды первой гармоники магнитного поля в вакууме:

$$C_1^- = \Omega_1 C_1^+ + \frac{m_e}{e} \frac{\omega_0^3 \Delta}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{L}{c\omega_0 |\cos \theta|} \right)^{1/2} \Omega_2 \mathcal{I} . \tag{3.18}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= R_L^{1/2} \exp \left[2i \frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(-\infty) - i \frac{\pi}{2} \right], \\ \Omega_2 &= (G_L/2)^{1/2} \exp [i\mathcal{Z} + i \arg B_1(0) - i\pi],\end{aligned}\quad (3.19)$$

где $R_L = \left| \frac{C_{1L}^-}{C_1^+} \right|^2$, $G_L = 1 - R_L$ – коэффициенты отражения и поглощения соответственно в линейной теории, а C_{1L}^- – амплитуда магнитного поля отраженной волны в линейной теории:

$$R_L = \left(\frac{1 - \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{4}{3} \rho^{3/2} \right]}{1 + \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{4}{3} \rho^{3/2} \right]} \right)^2, \quad G_L = \frac{2 \exp \left[-\frac{4}{3} \rho^{3/2} \right]}{\left(1 + \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{4}{3} \rho^{3/2} \right] \right)^2}. \quad (3.20)$$

Из вида (3.18) следует, что амплитуда отраженного магнитного поля представляется суммой линейного, C_{1L}^- , т. е. не зависящего от a , и нелинейного, C_{1N}^- , слагаемых: $C^- = C_{1L}^- + C_{1N}^-$, где зависимость C_{1N}^- от лазерной интенсивности задается интегралом \mathcal{I} . В линейной теории безразмерная амплитуда $a = a_L$ определяется соотношением, связывающим амплитуду магнитного поля в точке плазменного резонанса с амплитудой падающей волны через коэффициент отражения R_L [92]:

$$a_L = \left| \frac{c B_0^2 e^2 |\cos \theta|}{\pi m^2 \omega_0^5 L^3} (1 - R_L) \right|^{1/2}, \quad B_0 = 2C_1^+. \quad (3.21)$$

Ниже, в случаях подстановки конкретных параметров лазера и плазмы, для определенности будем вести обсуждение на языке лазерной интенсивности I_0 [Вт/см²] Nd-лазера с длиной волны $\lambda = 1.064$ мкм, масштаба неоднородности L [λ], выраженного в длинах волны лазерного излучения, температуры плазмы T [кэВ], угла падения лазерного излучения θ и автомодельной переменной ρ . Исходя из условия построения нелинейного решения уравнения (3.4) с помощью линейных решений однородного уравнения, которые существуют при не слишком малых углах, когда $\rho > 1$, значение параметра $\rho_{min} \equiv (\omega_0 L/c)^{2/3} \sin^2 \theta_{min} = 1$ может считаться предельным для теории в этом случае, а θ_{min} – минимально допустимым углом падения лазерного излучения на плазму при заданных ω_0 и L .

Легко проверить, что использование в \mathcal{I} величины $a_L \propto B_0$ (3.21) вместо нелинейной a приводит к завышенным значениям C_{1N}^- при больших интенсивностях лазера (как это показано на Рис. 3.1), естественно, при таких значениях

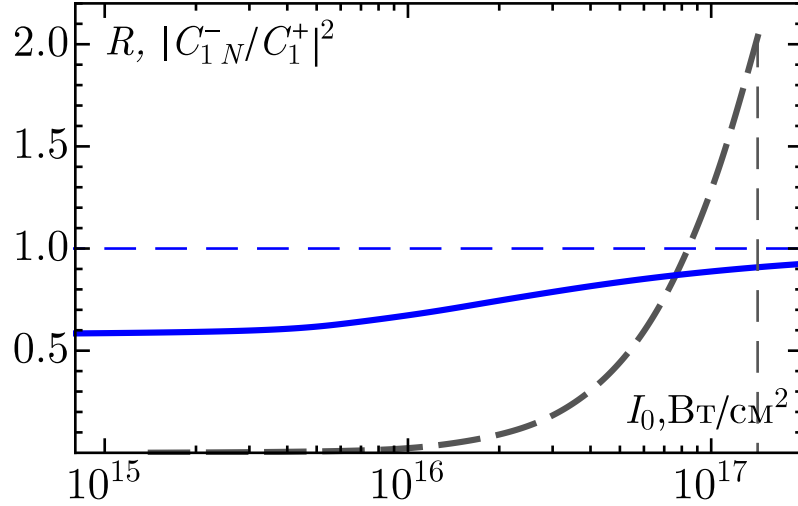


Рис. 3.1. Нелинейный коэффициент отражения на основной частоте после процедуры перенормировки (синяя сплошная кривая) и величина $|C_{1N}^-/C_1^+|^2$ без учета перенормировки (штриховая кривая) в зависимости от интенсивности Nd-лазерного поля I_0 для температуры $T = 2$ кэВ и масштаба неоднородности плазмы $L = 30\lambda$ при угле падения лазерного излучения $\theta_{min} = 10^\circ$. Штриховая вертикальная прямая соответствует границе опрокидывания электронных плазменных колебаний в точке резонанса в случае использования амплитуды a_L из линейной теории.

интенсивности, которые ограничены условием отсутствия опрокидывания плазменных колебаний в резонансе. Неограниченный рост $C_{1N}^-(a_L)$ приводит к тому, что, начиная с некоторого значения лазерной интенсивности, величина $C_{1N}^-(a_L)$ превышает амплитуду поля накачки, что физически невозможно. Такое поведение нелинейного вклада связано с неправомерным использованием в источнике $f_1(x)$ амплитуды a_L , задаваемой в линейном приближении (3.21), которая не учитывает нелинейной связи между амплитудой плазменного поля в точке $x = 0$ и амплитудой поля накачки. Этот факт свидетельствует о необходимости построения самосогласованной нелинейной теории отражения лазерного излучения неоднородной плазмой с отличной от (3.21) амплитудой магнитного поля в точке резонанса $a \neq a_L$, учитывающей нелинейную зависимость $|B_1(0)|$ от C_1^+ , и с последующей перенормировкой функции источника $f_1(x)$. Как будет показано ниже, неограниченный рост нелинейной части коэффициента отра-

жения $C_{1N}^-(a)$ в результате такой перенормировки сменяется насыщением. Зависимость полного нелинейного коэффициента отражения на основной частоте $R = |C_1^-/C_1^+|^2$ от лазерной интенсивности после перенормировки на амплитуду a с учетом нелинейности показана на Рис. 3.1 синей сплошной кривой, а выявлению аналитической связи между $B_1(0)$ и C_1^+ и получению формулы, которая и отвечает насыщению нелинейного роста $C_{1N}^-(a)$ на Рис. 3.1, посвящен следующий раздел.

3.3.2 Перенормировка амплитуды магнитного поля в резонансе и нелинейный коэффициент отражения

Исходя из (3.12), запишем формулу для первой гармоники магнитного поля в точке резонанса $x = 0$:

$$R_1(0) = \alpha_1^+ \Psi_1^+(0) + \alpha_1^- \Psi_1^-(0) + \frac{\pi c L}{\omega_0} \int_{-\infty}^0 d\xi \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} [\Psi_1^+(0) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(0)]. \quad (3.22)$$

Подставляя в (3.22) выражение (3.13), связывающее α_1^- с α_1^+ , получим

$$R_1(0) = \alpha_1^+ \left(\Psi_1^+(0) + \frac{i}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \Psi_1^-(0) \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{2cL}{\omega_0} \right)^{1/2} \Psi_1^-(0) \exp \left[\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f_1(\xi) K_1 [(\xi - i\Delta)k_y] + \frac{\pi c L}{\omega_0} \int_{-\infty}^0 d\xi \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} [\Psi_1^+(0) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(0)] = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3. \quad (3.23)$$

Сравним два интегральных вклада Λ_2 и Λ_3 в (3.23). Чтобы оценить интегралы, воспользуемся (3.10) и приближенными формулами для модифицированных функций Бесселя первого порядка при малых значениях аргумента $K_1(x)|_{x \approx 0} \approx 1/x$, $I_1(x)|_{x \approx 0} \approx x/2$:

$$\Psi_1^+(0) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(0) \approx \frac{\omega_0 \xi (2i\Delta - \xi)}{2\pi L c}, \quad (3.24)$$

$$\Lambda_2 \approx \frac{i}{2\pi(\xi - i\Delta)k_y^2}, \quad \Lambda_3 \approx \frac{\xi(2i\Delta - \xi)}{2(i\Delta - \xi)}.$$

Из второго неравенства условий применимости нашей модели (3.3) следует, что $\Lambda_2 \gg \Lambda_3$, а значит вкладом Λ_3 можно пренебречь по параметру малости $k_y^2 \Delta^2 \ll 1$. Таким образом, получаем упрощенное выражение для амплитуды магнитного поля в точке плазменного резонанса:

$$R_1(0) = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \alpha_1^+ \Psi_1^+(0) + \alpha_1^- \Psi_1^-(0) . \quad (3.25)$$

Отсюда, используя связь α_1^+ с α_1^- из (3.13), а также формулы (3.14), найдем:

$$\begin{aligned} R_1(0) = & \left(\frac{2c |\cos \theta|}{\pi \omega_0 L \sin^2 \theta} \right)^{1/2} \frac{\exp [\mathcal{L}_+(0) + i\mathcal{Z}]}{1 + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right]} \tilde{C}_1^+ - \\ & - \frac{(i/\pi k_y^2)}{1 + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right]} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{f_1(\xi)}{\xi - i\Delta} . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Формулу (3.26) можно интерпретировать как нелинейное уравнение на амплитуду магнитного поля в точке плазменного резонанса, поскольку правая часть этого выражения содержит интеграл, определяемый источником $f_1(\xi)$, в котором все функции нормированы на искомую амплитуду. Решением (3.26) относительно этой амплитуды определяется нелинейная связь последней с амплитудой поля накачки.

Переходя от \tilde{C}_1^+ к C_1^+ путем домножения \tilde{C}_1^+ на (am_e/e) и прибегая к нормировке (1.4), но уже вне рамок линейного приближения (3.21), перепишем уравнение (3.26) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_0^2}{2} \left(aL - \frac{\Delta \mathcal{I}}{\pi^2 \left(1 + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \right)} \right) \exp [i \arg B_1(0)] = \\ & = \frac{|e|}{m} |C_1^+| \left(\frac{2c |\cos \theta|}{\pi \omega_0 L} \right)^{1/2} \frac{\exp [\mathcal{L}_+(0) + i\mathcal{Z} + i \arg C_1^+]}{1 + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right]} . \end{aligned} \quad (3.27)$$

или, что то же самое, на языке безразмерных переменных (амплитуд) $A = \frac{aL^2}{\Delta^2}$ и $A_L = \frac{a_L L^2}{\Delta^2}$:

$$\left(A - \frac{(L/\Delta)}{2\pi^2} \left(1 + R_L^{1/2} \right) \mathcal{I} \right) \exp [i \arg B_1(0)] = A_L \exp [i\mathcal{Z} + i \arg C_1^+] . \quad (3.28)$$

Поскольку интеграл \mathcal{I} (3.17) является комплексной функцией амплитуды a , т. е. безразмерной амплитуды A , то выражение (3.28) представляет собой нелинейное трансцендентное комплексное уравнение на безразмерную амплитуду

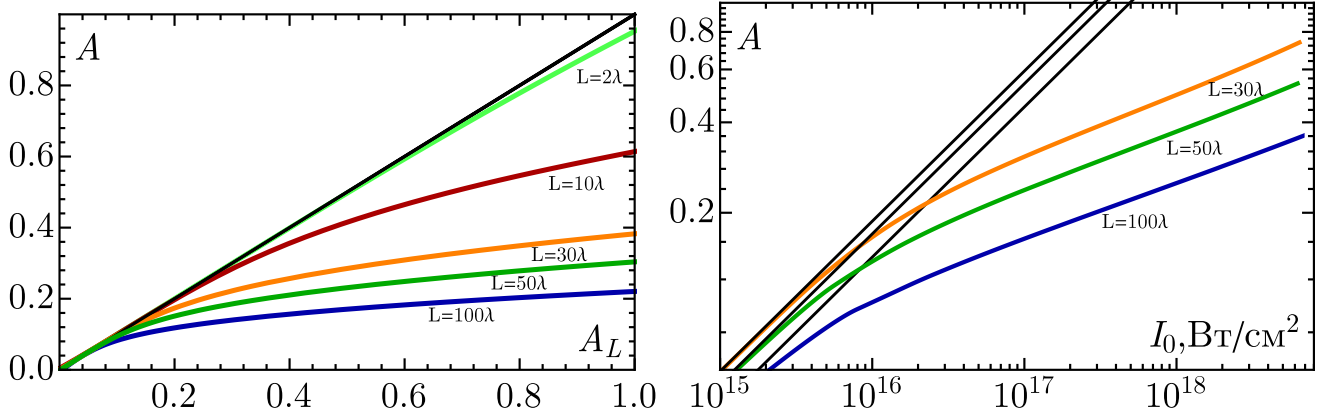


Рис. 3.2. Зависимости амплитуды A в нелинейной теории от амплитуды A_L , задаваемой линейным приближением (слева), и от плотности потока энергии Nd -лазерного излучения I_0 (справа), вычисленные для электронной температуры плазмы $T = 2$ кэВ, масштабов неоднородности $L = 2\lambda$, $L = 10\lambda$, $L = 30\lambda$, $L = 50\lambda$, $L = 100\lambda$, при соответствующих им углах падения лазерного излучения на плазму $\theta = \theta_{min}$. Черная биссектриса (слева) и черные прямые (справа) отвечают пределу линейной теории.

магнитного поля в точке плазменного резонанса как функцию амплитуды $A = A(A_L)$ в линейной теории, а значит и как функцию амплитуды падающей волны $A = A(C_1^+)$.

Вычисление A из (3.28) решает поставленную задачу отыскания нелинейной связи амплитуды магнитного поля в точке $x = 0$ с амплитудой поля накачки и задачу перенормировки функций в (3.18) с учетом найденной связи. Комплексное уравнение (3.28) эквивалентно следующим двум уравнениям на модули и аргументы комплексных функций в правой и левой частях (3.28):

$$|F(A)| = A_L, \quad \phi + \phi_1 = \mathcal{Z} + \phi_0, \quad (3.29)$$

где

$$F(A) = A - \frac{(L/\Delta)}{2\pi^2} \left(1 + R_L^{1/2}\right) \mathcal{I}, \quad (3.30)$$

$$\phi = \arg F(A), \quad \phi_0 = \arg C_1^+, \quad \phi_1 = \arg B_1(0).$$

Для вычисления интеграла (3.17) и решения уравнения (3.28) использовался пакет компьютерной алгебры «Wolfram Mathematica» [143]. На Рис. 3.2 пред-

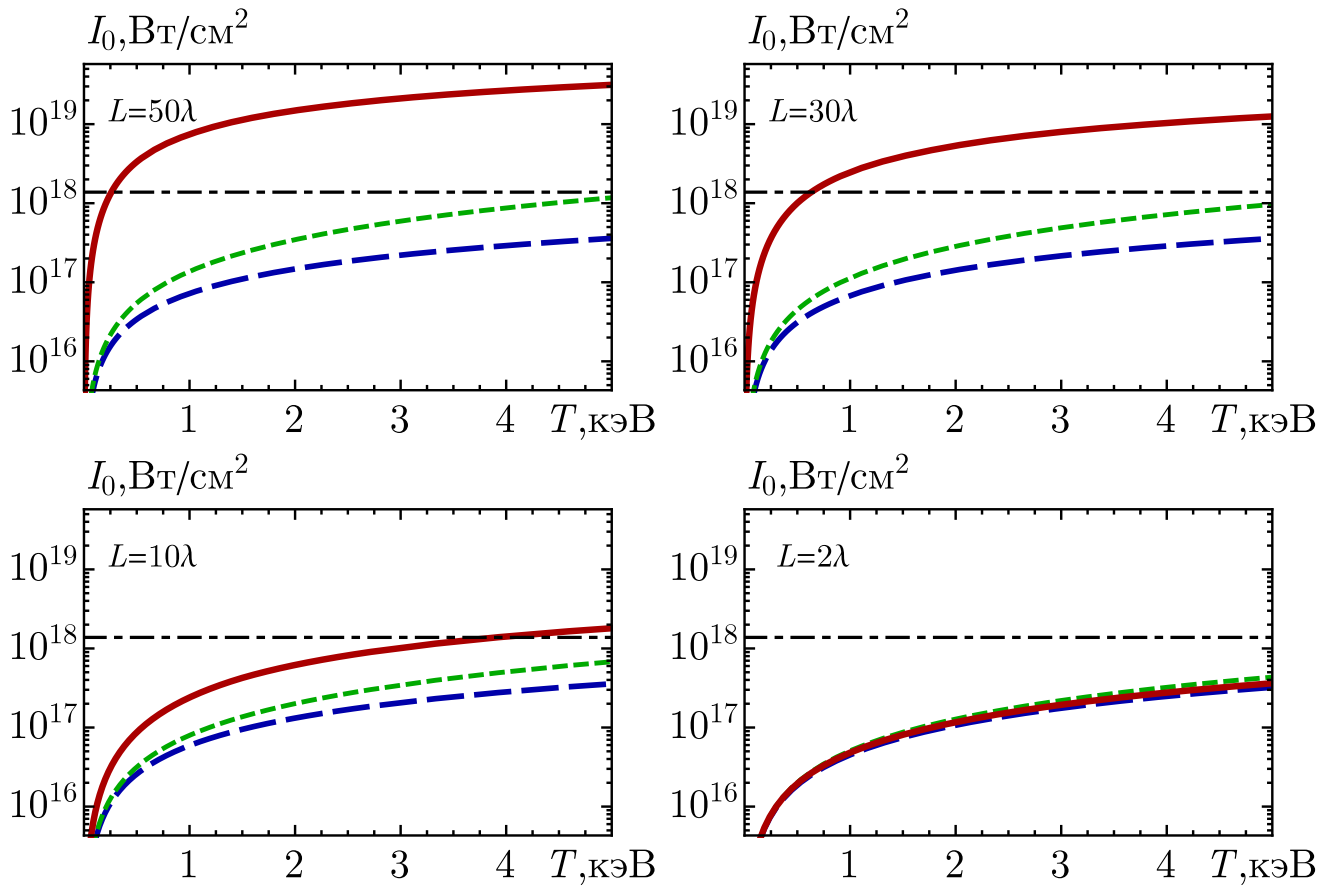


Рис. 3.3. Области применимости теории (гидродинамической модели) на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ для Nd-лазера и различных масштабов неоднородности плотности плазмы $L = 50\lambda$, $L = 30\lambda$, $L = 10\lambda$, $L = 2\lambda$. Сплошная красная кривая обозначает границу опрокидывания в релятивистской гидродинамике с учетом нелинейной перенормировки на амплитуду A в резонансе. Синяя штриховая линия отвечает релятивистской границе опрокидывания, но без учета нелинейной перенормировки. Зеленая пунктирная кривая соответствует порогу опрокидывания в нерелятивистской теории [14]. Углы падения всюду равны минимальным $\theta = \theta_{min}$ при соответствующих L . Горизонтальная штрих-пунктирная линия отсекает релятивистские интенсивности лазерного поля.

ставлены зависимости амплитуды A от амплитуды A_L , вычисленной по линейной теории, для пяти значений масштаба неоднородности L (слева) и подобные зависимости A от плотности потока энергии лазерного излучения I_0 для трех значений масштаба неоднородности L (справа). Температура плазмы T здесь фиксирована, а углы падения равны минимальным $\theta = \theta_{min}$ при соответству-

ющих L . Нелинейность в области резонанса приводит к падению амплитуды поля в точке $x = 0$ в сравнении с результатом линейной теории и наблюдается эффект насыщения – замедление роста амплитуды резонансного поля с ростом амплитуды поля накачки. В случае слабо неоднородной плазмы, когда $L \simeq (10 - 100)\lambda$, отличие A от A_L с увеличением лазерной интенсивности растет весьма существенно, тогда как при сравнительно более резких градиентах неоднородности $L \simeq \lambda$ отличие A от амплитуды A_L в линейной теории слабо заметно.

Перенормировка на амплитуду плазменного поля в точке резонанса с учетом нелинейности позволяет исследовать на языке физических параметров лазера и плазмы область применимости теории, которая была рассмотрена в главе 2 на языке безразмерных параметров A и B . В гидродинамическом смысле эта область определяется опрокидыванием профиля плазменных колебаний в точке резонанса [14], которое происходит при достижении лазерной плотностью потока энергии определенного предельного значения. Падение резонансной амплитуды в результате перенормировки сдвигает это пороговое значение в область более высоких лазерных интенсивностей в сравнении со значениями, полученными в нерелятивистской теории [14].

Рисунок 3.3, на котором приведены границы опрокидывания на плоскости $\{T, I_0\}$ для разных значений масштаба неоднородности плазмы, подтверждает вывод о расширении границ применимости построенной здесь теории в сторону максимально возможной интенсивности лазерного поля, при которой формулы используемой модели бесстолкновительной гидродинамики холодной плазмы, описывающие физические величины, остаются однозначными. Поскольку, как было показано выше, существенное отличие амплитуды в нелинейной теории от амплитуды в линейном приближении наблюдается при плавных градиентах плотности плазмы $L \simeq (10 - 100)\lambda$, то и расширение области применимости гидродинамической модели оказывается в этом случае наиболее заметным и сдвигает границу опрокидывания в область релятивистских лазерных интенсивностей, далеко за пределы границы, предсказываемой нелинейной нерелятивистской теорией [14] (зеленая пунктирная кривая). В случае же более резкого градиента неоднородности (случай $L = 2\lambda$ на Рис. 3.3) положения границ опрокидывания отличаются несущественно. На Рис. 3.3 также приведены границы

опрокидывания, которые были вычислены с частичным учетом релятивистских эффектов движения электронов плазмы¹, но с использованием линейной связи (3.21) амплитуды магнитной компоненты электромагнитного поля в точке $x = 0$ с амплитудой поля накачки. В этом случае сравнение с нерелятивистской теорией, напротив, показывает сдвиг порога опрокидывания с область меньших лазерных интенсивностей. Укажем еще раз, что в наших построениях релятивистские эффекты учитываются только в узкой области плазменного резонанса при движении электрона в резонансно-усиленном плазменном поле и при этом подразумеваются нерелятивистские интенсивности лазерного поля. Поэтому в последующих расчетах поглощения и эффективности генерации гармоник мы не будем рассматривать интенсивности лазерного излучения, превышающие релятивистский порог², а ограничимся сверху интенсивностью, при которой безразмерная амплитуда лазерного поля $a_0 = 0.85 \times (I_0[10^{18}\text{Вт/см}^2]\lambda[\text{мкм}]^2)^{1/2}$ равняется единице $a_0 = 1$. В связи с этим, изображенные на Рис. 3.3 границы опрокидывания, лежащие в релятивистской области, где $a_0 > 1$, следует рассматривать с формальной точки зрения. Мы подчеркиваем это обстоятельство штрих-пунктирными горизонтальными прямыми на Рис. 3.3, которые отсекают области релятивистских интенсивностей лазерного поля.

Заметим, что условие опрокидывания, полученное в [14] (зеленая пунктирная кривая на Рис. 3.3), совпадает с хорошо известным условием $k_p e E_p / m \omega_p^2 = 1$, где $k_p = (\lambda_D^2 L)^{-1/3}$, $\omega_p \equiv \omega_L$ и E_p электрическое поле плазмы (см., например, [108]). Обсуждаемое в настоящей работе опрокидывание стационарных плазменных колебаний имеет пороговый характер и происходит только при превышении амплитуды колебаний порогового значения. Такой режим не соответствует режиму плазменных колебаний [18, 22], в котором нерелятивистская динамика электронов плазмы в окрестности критической плотности обсуждалась в рамках модели конденсатора и рассматривались вынужденные колебания неоднородного плазменного слоя во внешнем однородном высокочастотном электрическом поле. Вследствие неоднородности плазмы такие колебания оказываются нестационарными и опрокидывание происходит за конечный

¹На языке ренормгруппового преобразования это означает, что учитывается только преобразование амплитуды скорости, а преобразованием времени, которое отвечает за фазовую модуляцию, пренебрегается.

²Лазерное поле называется релятивистским, если электрон, двигающийся в этом поле, на одной длине волны набирает кинетическую энергию, равную энергии покоя.

промежутков времени.

Подставляя интеграл \mathcal{I} , найденный из первого уравнения (3.29), в C_1^- (3.18), с учетом равенства фаз из второго уравнения (3.29), получим формулу для амплитуды излучаемого из плазмы магнитного поля на основной частоте:

$$C_1^- = -iC_1^+ \exp\left(2i\frac{\omega_0}{c}\mathcal{L}(-\infty)\right) \left\{ R_L^{1/2} + \left(1 - R_L^{1/2}\right) \left[1 - \frac{A}{A_L}e^{-i\phi}\right] \right\}. \quad (3.31)$$

Выражение (3.31) учитывает нелинейную перенормировку амплитуды поля в плазменном резонансе, которая заключается в переходе от амплитуды A_L в линейной теории отражения к амплитуде A , вычисляемой из (3.29). Тогда коэффициент отражения запишется в виде

$$R = \left| \frac{C_1^-}{C_1^+} \right|^2 = \left| R_L^{1/2} + \left(1 - R_L^{1/2}\right) \left[1 - \frac{A}{A_L}e^{-i\phi}\right] \right|^2. \quad (3.32)$$

Вычисление интеграла \mathcal{I} (3.17) как численным, так и аналитическим (см. ниже) методами показывает, что он представляет собой чисто мнимую величину. Поэтому из (3.29) и (3.30) вытекают равенства

$$\phi = \arg F(A) = \arccos \frac{A}{|F(A)|} = \arccos \frac{A}{A_L}, \quad \cos \phi = A/A_L, \quad (3.33)$$

которые позволяют записать коэффициент отражения в более компактной форме. Цепочка тождественных преобразований дает:

$$\left| R_L^{1/2} + \left(1 - R_L^{1/2}\right) \left[1 - \frac{A}{A_L}(\cos \phi - i \sin \phi)\right] \right|^2 = 1 - \left(\frac{A}{A_L}\right)^2 (1 - R_L). \quad (3.34)$$

Окончательно получаем нелинейные коэффициенты отражения R и поглощения G при $\rho > 1$:

$$R = 1 - \left(\frac{A}{A_L}\right)^2 (1 - R_L), \quad G = \left(\frac{A}{A_L}\right)^2 G_L. \quad (3.35)$$

Формулы (3.35) очевидным образом демонстрируют предельный переход в линейную теорию при $A \rightarrow A_L$, т. е. верхнее ограничение коэффициентов отражения R и поглощения G их предельными значениями R_L и G_L .

Уменьшение коэффициента резонансного поглощения с ростом лазерной плотности потока энергии показано на Рис. 3.4а, где представлены зависимости G от автомодельной переменной ρ при фиксированных температуре плазмы

и масштабе неоднородности. Рисунок 3.4b демонстрирует, как G уменьшается при переходе к слабо неоднородной плазме, если зафиксировать лазерную интенсивность.

Исследуем интеграл (3.17) аналитически и покажем, что он отличен от нуля только в случае учета релятивистской нелинейности. В первой главе было показано, что параметры A и B соответствуют вкладам нерелятивистской и релятивистской электронной нелинейности соответственно. Найдем приближенно (3.17) для значений амплитуды A , при которых можно считать, что $A^2 \ll 1$. Поскольку в релятивистском режиме параметр B , отвечающий за релятивистскую нелинейность, при температурах $T \simeq 1$ кэВ принимает значения $B \simeq 1$, а безразмерная амплитуда $A \simeq 0.5$, то разложим подынтегральные функции в (3.17) в ряд по параметру $(AB)^2$. Отличием τ от χ при этом можно пренебречь. Итак,

$$\mathcal{I} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_1 e^{i\chi}}{x_0 - i} [\partial_l (P_0 - i\gamma_0 v_0) - \partial_l x_0 (\gamma_0 - 1)] . \quad (3.36)$$

Выражая скорость v_1 через v_0 , x_0 через P_0 и разлагая функцию v_1 в ряд по параметру $(AB)^2$ с точностью до первого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_0 e^{i\chi}}{x_0 - i} \left[\partial_l (P_0 - i v_0) - \frac{B^2 v_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \partial_l P_0 \right) \right] = \\ &= \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\mathcal{I}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_0 e^{i\chi}}{x_0 - i} \partial_l (P_0 - i v_0) , \quad (3.38)$$

которое не зависит от B и соответствует учету нерелятивистской нелинейности, то есть $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_{|c=\infty}$. Замечая, что подынтегральная функция имеет особенность $(x_0 - i)^{-1}$, вычислим \mathcal{I}_0 по теории вычетов, заменив интегрирование по χ интегрированием по окружности единичного радиуса. Переход к переменной $z = e^{i\chi}$ дает:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{A(1 - \alpha z^2)}{2z(1 + il)} , \quad P_0 = -\frac{A(1 + \alpha z^2)}{2z(l - i)} , \\ x_0 - i &= \frac{A(z - z_1)(z - z_2)}{2z(l + i)} , \end{aligned} \quad (3.39)$$

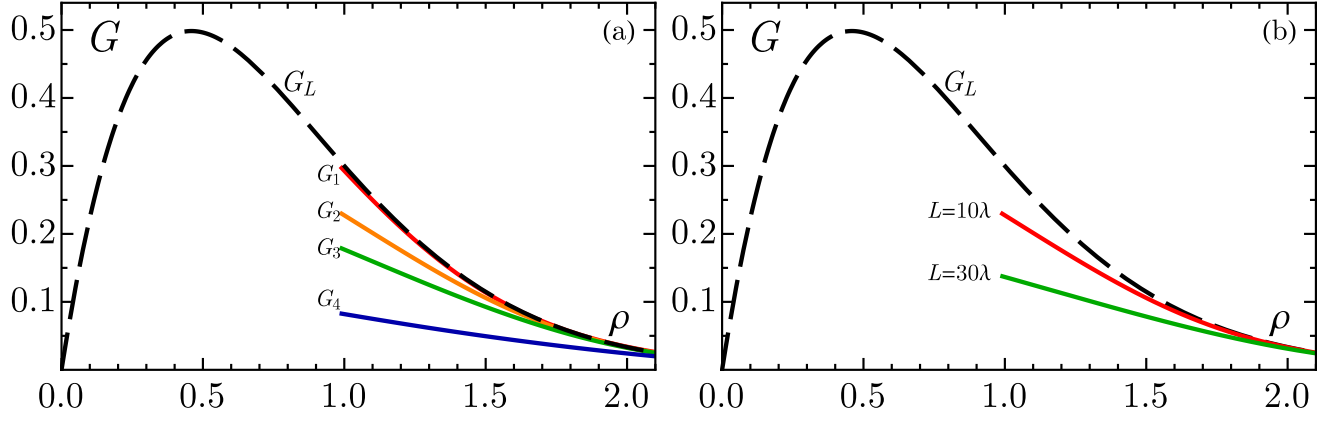


Рис. 3.4. Зависимости коэффициента резонансного поглощения G от авто-модельной переменной ρ . Панель (а): графики построены при заданных значениях температуры плазмы $T = 2 \text{ кэВ}$ и масштаба неоднородности плазмы $L = 10\lambda$, для различных интенсивностей Nd-лазера: $I_0 = 10^{16} \text{ Вт/см}^2$ (G_1), $I_0 = 5 \times 10^{16} \text{ Вт/см}^2$ (G_2), $I_0 = 10^{17} \text{ Вт/см}^2$ (G_3), $I_0 = 5 \times 10^{17} \text{ Вт/см}^2$ (G_4). Панель (б): лазерная интенсивность фиксирована $I_0 = 5 \times 10^{16} \text{ Вт/см}^2$, а сплошные цветные кривые отвечают разным масштабам неоднородности плазмы: $L = 10\lambda$, $L = 30\lambda$. Штриховая черная кривая G_L соответствует коэффициенту поглощения в линейной теории.

где

$$z_{1,2} = -\frac{1+l^2}{A} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha(1+l^2)^2}} \right), \quad \alpha = \frac{1}{z_1 z_2} = \frac{l-i}{l+i}, \quad (3.40)$$

$$|z_1| > 1, \quad |z_2| < 1.$$

Тогда интеграл по времени χ сводится к интегралу по кругу $|z| = 1$, который определяется вычетами в точках $z = z_2$, $z = 0$ и оказывается равен нулю:

$$\int_{|z|=1} dz \frac{1 - \alpha z^2}{z(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi i \sum_{z=z_2, 0} \text{res} \frac{1 - \alpha z^2}{z(z - z_1)(z - z_2)} = 0. \quad (3.41)$$

Таким образом, нерелятивистское слагаемое \mathcal{I}_0 не дает вклада в \mathcal{I} . Слагаемое

\mathcal{I}_1 после замены $z = e^{i\chi}$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= -\frac{B^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_0^3 e^{i\chi}}{x_0 - i} = \\ &= -\frac{B^2 A^2}{8i} \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{l+i}{(1+il)^3} \int_{|z|=1} dz \frac{1 - 3\alpha z^2 + 3\alpha^2 z^4 - \alpha^3 z^6}{z^2(z-z_1)(z-z_2)}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Интеграл по кругу определяется суммой вычетов подынтегральной функции $f(z)$ в точках $z = z_2, z = 0$:

$$\int_{|z|=1} dz f(z) = 2\pi i \sum_{z=z_2,0} \text{res} \frac{1 - 3\alpha z^2 + 3\alpha^2 z^4 - \alpha^3 z^6}{z^2(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i \frac{3z_1 - z_2}{z_1^3 z_2} \approx \frac{6i\pi}{z_1^2 z_2}. \quad (3.43)$$

Последнее приближенное равенство справедливо, поскольку $|z_1| \gg |z_2|$. Переходя в (3.40) для $z_{1,2}$ к пределу при $A^2 \ll 1$ и вычисляя интеграл по пространству вновь по теории вычетов, получим

$$z_2 \approx -\frac{A}{2\alpha(1+l^2)}, \quad \mathcal{I}_1 \approx \frac{3i\pi A^3 B^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{l^2 + 2il - 1}{(1+l^2)^3} = -\frac{3i\pi^2}{32} A^3 B^2. \quad (3.44)$$

Вклад \mathcal{I}_2 находится аналогичным образом и равен

$$\mathcal{I}_2 = \frac{B^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{e^{i\chi} v_0^3 \partial_l P_0}{x_0 - i} \approx -\frac{15i\pi^2 B^2 A^5}{4096}. \quad (3.45)$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{I}_2 \ll \mathcal{I}_1$, запишем окончательное приближенное значение интеграла \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} \approx -\frac{3i\pi^2}{32} A^3 B^2. \quad (3.46)$$

Итак, в условиях только нерелятивистской нелинейности, при конечных значениях параметра A наряду с $c = \infty$ и $B = 0$ интеграл (3.17) строго обращается в нуль:

$$\mathcal{I}_{|c=\infty} = \mathcal{I}_0 = 0. \quad (3.47)$$

При этом из (3.29) и (3.35) получаем $A = A_L$ и $R = R_L$. Следовательно, в нерелятивистском пределе нелинейный вклад в коэффициент отражения отсутствует и справедлива линейная нормировка (3.21). А раз в нерелятивистском пределе равенство (3.47) выполняется строго, то и отличие R от R_L возникает только при учете релятивистской нелинейности плазменных колебаний.

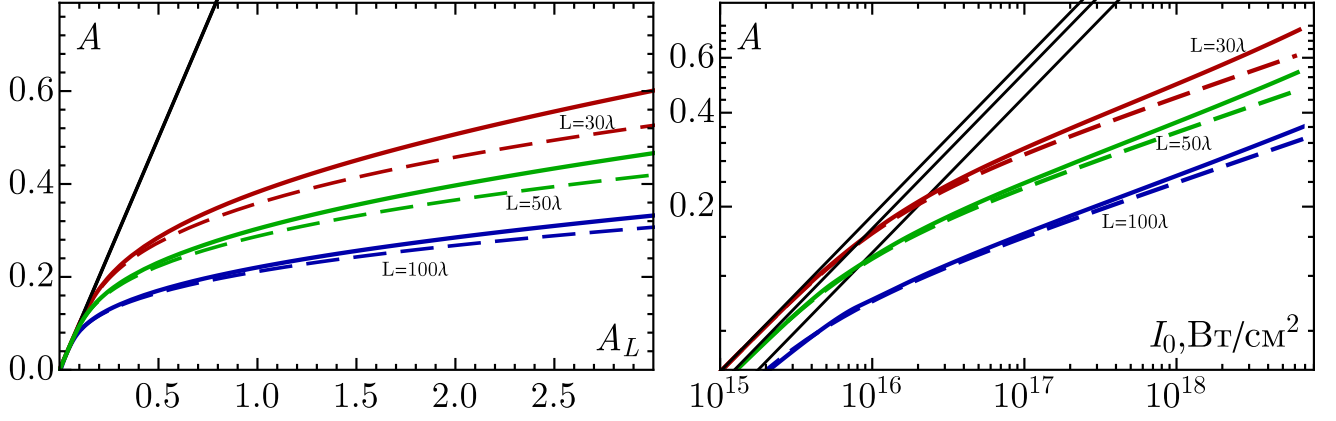


Рис. 3.5. Сравнение зависимостей амплитуды в нелинейной теории от амплитуды в линейном приближении (слева) и от плотности потока энергии Nd-лазерного излучения (справа), полученных с использованием компьютерной алгебры (сплошные линии) и с помощью формулы (3.50) (пунктирные кривые). Графики построены для электронной температуры плазмы $T = 2$ кэВ, масштабов неоднородности плазмы $L = 30\lambda$ (красные кривые), $L = 50\lambda$ (зеленые кривые), $L = 100\lambda$ (синие кривые), при соответствующих им углах падения лазерного излучения на плазму $\theta = \theta_{min}$. Черные прямые соответствуют линейному пределу.

Подставляя (3.46) в (3.29), приходим к уравнению на амплитуду A :

$$A^2 + \left(\frac{3B^2(L/\Delta)}{64} \right)^2 (1 + R_L^{1/2})^2 A^6 = A_L^2, \quad (3.48)$$

сводимому к кубическому уравнению в канонической форме

$$y^3 + py + q = 0, \quad p = \left(\frac{64(\Delta/L)}{3B^2(1 + R_L^{1/2})} \right)^2, \quad q = -pA_L^2, \quad (3.49)$$

вещественное решение которого определяет квадрат искомой амплитуды:

$$A^2 = \frac{2^{1/3}p^{2/3} \left(\sqrt{12p + 81A_L^4} + 9A_L^2 \right)^{2/3} - 24^{1/3}p}{6^{2/3}p^{1/3} \left(\sqrt{12p + 81A_L^4} + 9A_L^2 \right)^{1/3}}. \quad (3.50)$$

На Рис. 3.5 приведены зависимости $A(A_L)$ и $A(I_0)$, определяемые формулой (3.50) и численным решением уравнения (3.29). Из сравнения графиков следует,

что аналитическое выражение (3.50) дает хорошее приближение для амплитуды A при небольших значениях $A_L \lesssim 1$. Однако с ростом лазерной интенсивности и при приближении к границе опрокидывания отличие от численных результатов становится все более заметным. Таким образом, формула (3.50) может быть полезна для быстрой оценки перенормированной амплитуды и коэффициента поглощения при $\rho > 1$.

3.4 Малые углы падения

3.4.1 Амплитуда магнитного поля в вакууме

Следуя общей схеме, подробно изложенной в предыдущем параграфе для случая $\rho > 1$, найдем амплитуду отраженной волны в пределе малых углов падения лазерного излучения на плазму, то есть при $\rho \ll 1$. Вычисляя функцию Грина \mathcal{G} в (3.6), вновь учтем, что источник $f_1(\xi)$ локализован в окрестности плазменного резонанса $\xi \approx 0$ и поэтому воспользуемся следующими формулами для $\Psi_1^\pm(\xi)$ при $\rho \ll 1$ и $\xi \lesssim 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(\xi) &= q^{-1/6} \left\{ \frac{1}{2} \text{Bi}(0) q^{4/3} \eta^2 + \right. \\ &\quad \left. + \text{Bi}'(0) \left[1 + \frac{\rho}{2} q^{4/3} \eta^2 \left(\ln(q^{2/3} \eta) - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} q^2 \eta^3 \right] \right\}, \\ \Psi_1^-(\xi) &= -q^{-1/6} \left\{ \frac{1}{2} \text{Ai}(0) q^{4/3} \eta^2 + \right. \\ &\quad \left. + \text{Bi}'(0) \left[1 + \frac{\rho}{2} q^{4/3} \eta^2 \left(\ln(q^{2/3} \eta) - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} q^2 \eta^3 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

где штрих означает взятие первой производной и приняты обозначения: $q \equiv \omega_0 L / c$, $\eta \equiv (i\Delta - \xi) / L$. В этом случае несложные вычисления дают:

$$\Psi_1^+(\xi) \Psi_1^{-'}(\xi) - \Psi_1^{+'}(\xi) \Psi_1^-(\xi) |_{\xi \approx 0} = \frac{\omega_0 i\Delta - \xi}{\pi c L}. \quad (3.52)$$

Подставляя (3.52) в (3.6), получим:

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \alpha_1^+ \Psi_1^+(x) + \alpha_1^- \Psi_1^-(x) - \\ &\quad - \frac{\pi c L}{\omega_0} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} [\Psi_1^+(x) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(x)]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

При отыскании связи констант α_1^+ и α_1^- следует рассмотреть выражение для магнитного поля правее точки плазменного резонанса, то есть в области $\xi \gtrsim 0$, где функции $\Psi_1^\pm(\xi)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\Psi_1^+(\xi) &= q^{1/6}\eta^{1/2} \left\{ \pi^2\rho(\text{Bi}'(0))^2 \text{Ai} \left[q^{2/3} (\sin^2\theta - \eta) \right] + \right. \\ &\quad \left. + i \left[1 - i\pi^2\rho\text{Ai}'(0)\text{Bi}'(0) \right] \text{Bi} \left[q^{2/3} (\sin^2\theta - \eta) \right] \right\}, \\ \Psi_1^-(\xi) &= q^{1/6}\eta^{1/2} \left\{ -\pi^2\rho(\text{Ai}'(0))^2 \text{Bi} \left[q^{2/3} (\sin^2\theta - \eta) \right] + \right. \\ &\quad \left. + i \left[1 + i\pi^2\rho\text{Ai}'(0)\text{Bi}'(0) \right] \text{Ai} \left[q^{2/3} (\sin^2\theta - \eta) \right] \right\},\end{aligned}\quad (3.54)$$

Подставляя (3.54) в R (3.53), устремим $x \rightarrow \infty$ и используем условие, что в этом пределе магнитное поле $R(x)$ обращается в нуль, $\text{Bi}(x)$ экспоненциально растет, а $\text{Ai}(x)$ экспоненциально убывает. Тогда найдем связь констант α_1^+ и α_1^- :

$$\begin{aligned}\alpha_1^+ &= \frac{\mathcal{D} - i\pi^2\rho(\text{Ai}'(0))^2\alpha_1^-}{1 - i\pi^2\rho\text{Ai}'(0)\text{Bi}'(0)}, \quad \mathcal{D} = \frac{\pi cL}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} \mathcal{M}(\xi) d\xi, \\ \mathcal{M}(\xi) &= [1 - i\pi^2\rho\text{Ai}'(0)\text{Bi}'(0)] \Psi_-(\xi) - i\pi^2\rho(\text{Ai}'(0))^2\Psi_+(\xi).\end{aligned}\quad (3.55)$$

Рассматривая (3.55) совместно с формулами (3.14), которые связывают амплитуды \tilde{C}_1^\pm с константами α_1^\pm , выразим \tilde{C}_1^- через \tilde{C}_1^+ :

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1^- &= \frac{1 - \pi^2\rho\text{Ai}'(0) [\text{Ai}'(0) + i\text{Bi}'(0)]}{1 + \pi^2\rho\text{Ai}'(0) [\text{Ai}'(0) - i\text{Bi}'(0)]} e^{2iz} \tilde{C}_1^+ - \\ &\quad - \frac{ie^{iz}\mathcal{D}}{(\pi|\cos\theta|)^{1/2} (1 + \pi^2\rho\text{Ai}'(0) [\text{Ai}'(0) - i\text{Bi}'(0)])}.\end{aligned}\quad (3.56)$$

Домножая (3.56) на at_e/e , ограничиваясь минимальными степенями ρ , а также принимая во внимание, что $\text{Bi}'(0)/\text{Ai}'(0) = -\sqrt{3}$ и что коэффициент линейного отражения R_L при малых ρ имеет вид

$$R_L = [1 - 2\pi^2(\text{Ai}'(0))^2\rho]^2, \quad (3.57)$$

получим общее выражение для амплитуды излучаемого из плазмы магнитного поля на основной частоте при $\rho \ll 1$:

$$\begin{aligned}C_1^- &= R_L^{1/2} e^{2iz} C_1^+ - \frac{2|C_1^+|\rho L}{A_L\Delta} (\text{Ai}'(0))^2 \times \\ &\quad \times \left[1 - \frac{1}{2} (1 - R_L^{1/2}) (1 + i\sqrt{3}) \right] \exp(i\mathcal{Z} + i\arg B_1(0)) \mathcal{I},\end{aligned}\quad (3.58)$$

где интеграл \mathcal{I} определяется формулой (3.17). Теперь установим нелинейную связь между амплитудой поля лазерной накачки и амплитудой поля в точке плазменного резонанса, а затем отнормируем (3.58) с учетом найденной связи, чтобы найти коэффициент отражения.

3.4.2 Перенормировка амплитуды магнитного поля в резонансе и нелинейный коэффициент отражения

Первая гармоника магнитного поля в точке резонанса $x = 0$ определяется из общего выражения (3.53):

$$R_1(0) = \alpha_1^+ \Psi_1^+(0) + \alpha_1^- \Psi_1^-(0) - \frac{\pi c L}{\omega_0} \int_{-\infty}^0 d\xi \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} [\Psi_1^+(0) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(0)]. \quad (3.59)$$

Действуя аналогично случаю больших углов, подставим сюда (3.55) и (3.51), после чего получим:

$$R_1(0) = -2 (\pi |\cos\theta|)^{1/2} \left(\frac{c}{\omega_0 L} \right)^{1/6} \text{Ai}'(0) e^{iZ} [1 - \pi^2 \rho (\text{Ai}'(0))^2] \tilde{C}_1^+ - \left(\frac{c}{\omega_0 L} \right)^{1/3} \frac{\pi c L}{\omega_0} \text{Ai}'(0) [i \text{Ai}'(0) + \text{Bi}'(0)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\xi) d\xi}{i\Delta - \xi} - \frac{\pi}{2} [\text{Ai}'(0) \text{Bi}(0) - \text{Bi}'(0) \text{Ai}(0)] \int_{-\infty}^0 (i\Delta - \xi) f_1(\xi) d\xi = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3. \quad (3.60)$$

Сравнивая интегральные вклады в (3.60), с учетом условий (3.3) находим, что $\Lambda_2 \gg \Lambda_3$. Это позволяет пренебречь последним слагаемым Λ_3 . Тогда, переходя от амплитуды \tilde{C}_1^+ к амплитуде C_1^+ путем домножения \tilde{C}_1^+ на (am_e/e) , перепишем (3.60) на языке безразмерных переменных (амплитуд) $A = \frac{aL^2}{\Delta^2}$ и $A_L = \frac{a_L L^2}{\Delta^2}$:

$$\left(A + \frac{L}{\Delta} \rho \text{Ai}'(0) [\text{Ai}'(0) - i \text{Bi}'(0)] \mathcal{I} \right) \exp [i \arg B_1(0)] = A_L \exp [iZ + i \arg C_1^+]. \quad (3.61)$$

где

$$a_L = \left| \frac{2e \sin \theta}{m \omega_0^2 L} \left(\frac{c}{\omega_0 L} \right)^{1/6} (\pi |\cos \theta|)^{1/2} \text{Ai}'(0) \left(1 - R_L^{1/2} \right) C_1^+ \right| \quad (3.62)$$

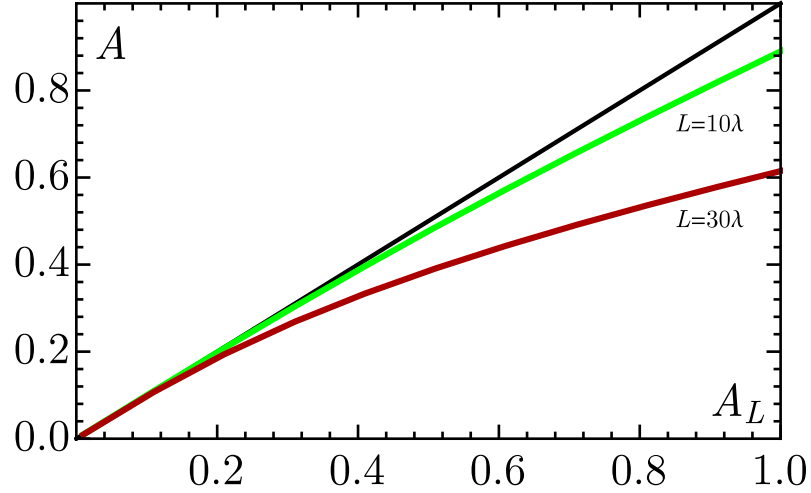


Рис. 3.6. Зависимости амплитуды A в нелинейной теории от амплитуды A_L , задаваемой линейным приближением, вычисленные для электронной температуры плазмы $T = 2$ кэВ и масштабов неоднородности $L = 10\lambda$, $L = 30\lambda$, при соответствующих им углах падения лазерного излучения на плазму $\theta = \theta_{min}$. Черная биссектриса отвечает пределу линейной теории.

Используя (3.57), приведем (3.61) к окончательному виду:

$$\begin{aligned} \left(A + \frac{(L/\Delta)}{\pi^2} (1 - R_L^{1/2}) e^{i\pi/3} \mathcal{I} \right) \exp [i \arg B_1(0)] = \\ = A_L \exp [i\mathcal{Z} + i \arg C_1^+] . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Итак, для случая $\rho \ll 1$ получено нелинейное трансцендентное комплексное уравнение (3.63) на безразмерную амплитуду магнитного поля в точке плазменного резонанса A , решение которого определяет связь искомой амплитуды с амплитудой поля накачки. Комплексное уравнение (3.63) эквивалентно двум уравнениям на модули и аргументы комплексных функций в правой и левой частях (3.63):

$$|F(A)| = A_L , \quad \phi + \phi_1 = \mathcal{Z} + \phi_0 , \quad (3.64)$$

где

$$\begin{aligned} F(A) = A + \frac{(L/\Delta)}{\pi^2} (1 - R_L^{1/2}) e^{i\pi/3} \mathcal{I} , \\ \phi = \arg F(A) , \quad \phi_0 = \arg C_1^+ , \quad \phi_1 = \arg B_1(0) . \end{aligned} \quad (3.65)$$

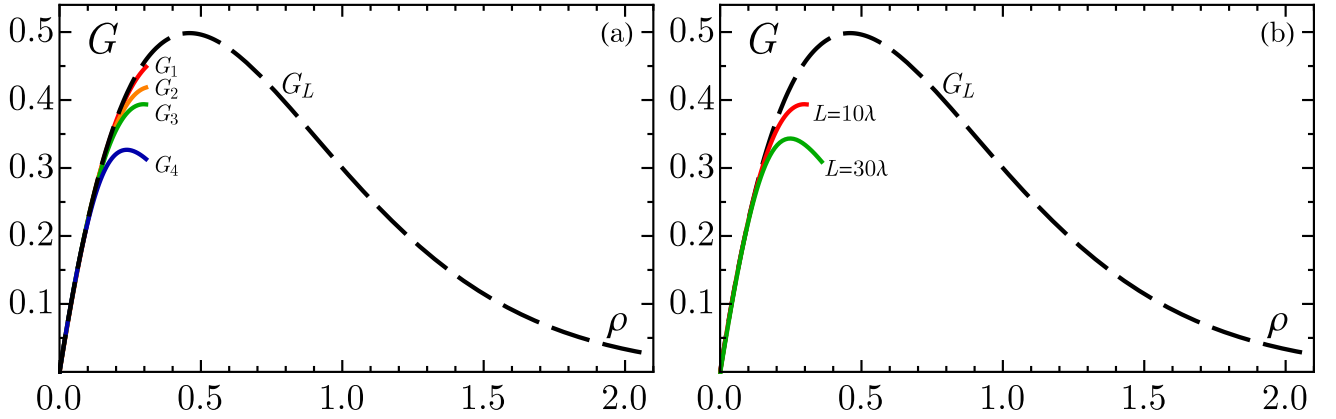


Рис. 3.7. Зависимости коэффициента резонансного поглощения G от авто-модельной переменной ρ . Панель (а): графики построены при заданных значениях температуры $T = 2$ кэВ и масштаба неоднородности плазмы $L = 10\lambda$, для различных интенсивностей излучения Nd-лазера: $I_0 = 10^{16}$ Вт/см² (G_1), $I_0 = 5 \times 10^{16}$ Вт/см² (G_2), $I_0 = 10^{17}$ Вт/см² (G_3), $I_0 = 5 \times 10^{17}$ Вт/см² (G_4). Панель (б): лазерная интенсивность зафиксирована $I_0 = 10^{17}$ Вт/см², а сплошные кривые отвечают двум масштабам неоднородности плазмы $L = 10\lambda$ и $L = 30\lambda$. Штриховая черная кривая G_L соответствует коэффициенту поглощения в линейной теории.

Рисунок. 3.6 демонстрирует решение уравнения на модули из (3.64) в виде зависимости амплитуды A с учетом нелинейности от амплитуды A_L в линейной теории для двух значений масштаба неоднородности L . Температура плазмы T фиксирована, а углы падения равны минимальным $\theta = \theta_{min}$ для соответствующих L . Аналогично случаю $\rho > 1$ (см. Рис. 3.2), нелинейность в области резонанса в пределе $\rho \ll 1$ приводит к падению амплитуды поля в точке $x = 0$ в сравнении с результатом линейной теории, и мы вновь наблюдаем эффект насыщения, то есть замедление роста амплитуды резонансного поля с увеличением амплитуды поля накачки. Сравнение кривых при $L = 30\lambda$ и $L = 10\lambda$ показывает, что эффект нелинейного насыщения становится менее заметным с переходом к плазме с более резким градиентом неоднородности плотности.

Подставляя в (3.58) интеграл \mathcal{I} , найденный из первого уравнения (3.64), с учетом равенства фаз из второго уравнения (3.64), преобразуем формулу для

амплитуды излучаемого из плазмы магнитного поля на основной частоте:

$$C_1^- = C_1^+ e^{2iz} \left\{ R_L^{1/2} + \left(e^{i\pi/3} - R_L^{1/2} \right) \left[1 - \frac{A}{A_L} e^{-i\phi} \right] \right\}. \quad (3.66)$$

Выражение (3.66) учитывает нелинейную перенормировку амплитуды поля в плазменном резонансе, которая заключается в переходе от амплитуды A_L в линейной теории отражения к амплитуде A , вычисляемой из (3.64). В итоге коэффициенты отражения $R = |C_1^- / C_1^+|^2$ и поглощения G запишутся в виде

$$R = \left| R_L^{1/2} + \left(e^{i\pi/3} - R_L^{1/2} \right) \left[1 - \frac{A}{A_L} e^{-i\phi} \right] \right|^2, \quad G = 1 - R. \quad (3.67)$$

На Рис. 3.7а приведены кривые коэффициента нелинейного резонансного поглощения G , вычисленные в пределе $\rho \ll 1$ по формуле (3.67), для различных значений плотности потока излучения Nd-лазера, при фиксированных температуре плазмы и масштабе неоднородности. Как и в случае $\rho > 1$, коэффициент резонансного поглощения уменьшается с ростом интенсивности поля накачки. Рисунок 3.7б отвечает фиксированной лазерной интенсивности и демонстрирует усиление эффекта подавления поглощения при переходе к слабо неоднородной плазме, что согласуется с аналогичной тенденцией для эффекта насыщения амплитуды поля в точке резонанса (Рис. 3.6).

3.5 Пространственные и энергетические характеристики квазистатического электрического поля

Развитая выше теория, количественно определяющая амплитуду поля плазменного резонанса, позволяет оценить не только коэффициент нелинейного поглощения/отражения на основной частоте, но и эффективность генерации высших гармоник лазерного излучения, а также квазистатического электрического поля в окрестности плазменного резонанса. Хотя эффект формирования медленно спадающих (степенных) спектров плазменного поля благодаря пространственно-временной модуляции релятивистских плазменных колебаний уже отмечался в главе 2, отыскание спектров излучения из плазмы и их строгую количественную характеристику мы проведем в главе 4. Здесь же достигнутый прогресс проиллюстрируем таким примером, как генерация квазистатического электрического поля в области критической плотности, представляющего

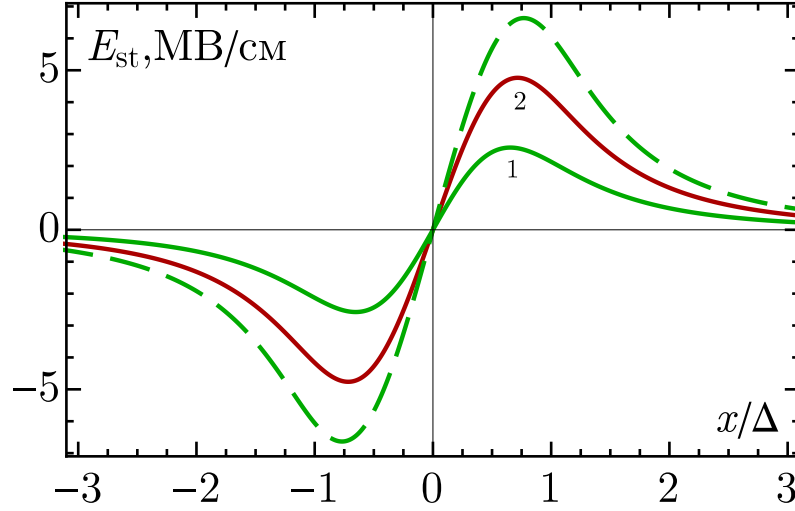


Рис. 3.8. Пространственные распределения квазистатического электрического поля плазменного резонанса, вычисленные при разных значениях плотности потока I_0 излучения Nd-лазера, для температуры плазмы $T = 2$ кэВ, масштаба неоднородности $L = 30\lambda$ и угла падения $\theta_{min} = 10^\circ$. Кривые 1 и 2 отвечают интенсивностям $I_0 = 10^{17}$ Вт/см² и $I_0 = 10^{18}$ Вт/см² соответственно. Штриховая кривая описывает пространственный профиль поля в нелинейной нерелятивистской теории [14] при интенсивности $I_0 = 10^{17}$ Вт/см².

собой среднее по времени значение, E_{st} , полного продольного электрического поля плазменного резонанса:

$$E_{st} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{px}(\tau, x) d\tau, \quad (3.68)$$

где E_{px} определяется неявным образом посредством функций $P_0(\chi, l)$, $v_0(\chi, l)$, $x_0(\chi, l)$, $\tau(\chi, l)$ из (2.1) через параметрические переменные χ, l .

На Рис. 3.8 представлено пространственное распределение квазистатического электрического поля в окрестности точки плазменного резонанса $x = 0$ при заданных значениях температуры плазмы и масштаба неоднородности для различных значений лазерной плотности потока энергии. Видно, что электрическое поле (3.68), так же как и в слабо нелинейной теории [17], и в сильно нелинейной нерелятивистской теории [14], имеет универсальную биполярную форму и меняет знак в точке плазменного резонанса $x = 0$. При этом нелинейная

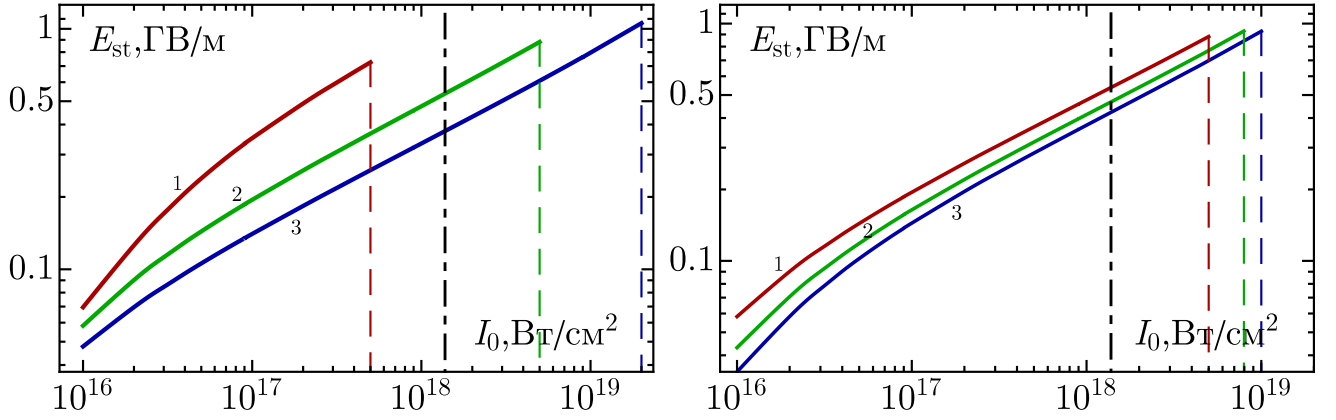


Рис. 3.9. Зависимости амплитуды квазистатического электрического поля в области плазменного резонанса от плотности потока энергии Nd-лазерного излучения. Слева: кривые построены для $T = 2$ кэВ и масштабов неоднородности $L = 10\lambda$ (кривая 1), $L = 30\lambda$ (кривая 2), $L = 50\lambda$ (кривая 3). Справа: графики построены для $L = 30\lambda$ и электронных температур плазмы $T = 2$ кэВ (кривая 1), $T = 3$ кэВ (кривая 2), $T = 4$ кэВ (кривая 3). Вертикальные штриховые линии отмечают границы опрокидывания. Углы падения всюду выбраны $\theta = \theta_{min}$ при соответствующих параметрах плазмы. Вертикальная штрихпунктирная линия отсекает релятивистские интенсивности лазерного поля.

нерелятивистская теория [14] дает завышенные значения амплитуды поля (см. штриховую линию на Рис.3.8). Так, для заданных значений T, L максимум амплитуды статического поля $E_{st} \approx 7$ МВ/м в нерелятивистской теории достигается уже при $I_0 = 10^{17}$ Вт/см², а в релятивистской теории, при той же лазерной интенсивности, имеем $E_{st} \approx 2.5$ МВ/м.

Графики зависимости максимального значения квазистатического электрического поля от плотности потока энергии лазерного излучения вплоть до порога опрокидывания для разных значений масштаба неоднородности (слева) и температуры плазмы (справа) представлены на Рис. 3.9. Рисунок показывает, что теория предсказывает генерацию квазистатического электрического поля мульти-МВ/м уровня начиная с лазерной интенсивности $I_0 \simeq 10^{16}$ Вт/см² вплоть до ~ 1 ГВ/м в допустимых пределах применимости теории. Увеличение масштаба неоднородности сопровождается увеличением максимально возможной амплитуды статического поля. Однако более быстрая зависимость ампли-

туды E_{st} от интенсивности лазера наблюдается в случае плазмы с более резкими градиентами неоднородности плотности плазмы. Увеличение электронной температуры (при заданном масштабе неоднородности) ведет к понижению амплитуды E_{st} , но (в рамках применимости нашей теории) допускает достижение того же максимально возможного поля благодаря сдвигу границы опрокидывания плазменных колебаний в сторону более высокой интенсивности I_0 .

Оценим характерную энергию $W \sim eE_{st}\Delta$, приобретаемую электроном, за счет ускорения квазистатическим электрическим полем на расстоянии порядка ширины плазменного резонанса. Так, для параметров $L = 30\lambda$, $T = 2$ кэВ, $I_0 \approx 10^{18}$ Вт/см², $\theta_{min} = 10^\circ$ энергия ускоренных электронов составляет $W \simeq 30$ кэВ. При этом отметим, что еще предстоит понять возможные следствия такого механизма генерации быстрых электронов, хотя уже можно сделать вывод о том, что благодаря биполярности электрического поля, быстрые электроны, испытывающие на себе действие разнонаправленной статической электрической силы в плазменном резонансе, не покидают его узкой пространственной области. Последнее позволяет заключить, что такие электроны не окажут дополнительного паразитного эффекта на предподогрев ЛТС-мишени, ограничение которого составляет одну из важнейших задач выявления оптимальных условий реализации ЛТС в схеме прямого нагрева.

3.6 Заключение

Сформулируем основные результаты, полученные в главе 3. Впервые развита аналитическая теория резонансного поглощения лазерного излучения в неоднородной плазме с учетом релятивистской нелинейности движения электронов в окрестности критической плотности плазмы. Представленная нелинейная теория имеет асимптотический характер, поскольку ее построение выполнено с использованием результатов линейной теории резонансного поглощения [1, 36, 93], полученных в двух предельных случаях, которые, на языке автомодельной переменной ρ , задаются неравенствами $\rho > 1$ и $\rho \ll 1$. При фиксированном масштабе неоднородности плотности L и температуре плазмы T эти случаи соответствуют пределам больших ($\rho > 1$) и малых ($\rho \ll 1$) углов падения лазерного излучения на плазму.

Получены уравнения на амплитуду магнитной составляющей электромагнитного поля в точке плазменного резонанса в зависимости от амплитуды поля лазерного излучения, из решения которых следует значительное понижение резонансной амплитуды в области сильной нелинейности в сравнении с результатами линейной теории резонансного поглощения. Продемонстрирован эффект насыщения резонанса, т. е. замедления роста амплитуды резонансного поля с увеличением интенсивности поля лазерной накачки и показано, что он проявляется наиболее существенно в случае большой плазменной короны, при масштабах неоднородности плазмы $L \gtrsim 10\lambda$, тогда как при относительно крутых градиентах неоднородности плотности, $L < 10\lambda$, эффект не столь выражен. Это проиллюстрировано на языке перенормировки амплитуды поля в точке критической плотности плазмы, возникающей в самосогласованной теории резонансного поглощения при релятивистском плазменном резонансе.

Отыскание нелинейной связи амплитуды магнитного поля в точке плазменного резонанса с амплитудой поля лазерной накачки позволило проанализировать эффект опрокидывания релятивистских плазменных колебаний вблизи критической плотности на языке физических параметров лазерно-плазменной системы. Границы опрокидывания, задающие область применимости релятивистской гидродинамической модели и впервые исследованные в главе 2 на языке безразмерных параметров задачи, теперь рассмотрены на плоскости параметров «температура плазмы–лазерная интенсивность» $\{T, I_0\}$. Показано, что перенормировка резонансной амплитуды приводит к переопределению границы применимости по интенсивности лазерной накачки благодаря тому, что за счет насыщения резонанса опрокидывание плазменных колебаний возникает при больших лазерных интенсивностях относительно результатов нелинейной нерелятивистской теории [14].

В пределах $\rho > 1$ и $\rho \ll 1$ найдены выражения для нелинейного коэффициента резонансного поглощения лазерного излучения, который зависит от четырех лазерно-плазменных управляющих параметров – лазерной интенсивности I_0 , масштаба неоднородности плазмы L , её температуры T и угла падения лазерного излучения на плазму θ . Выявлено «отключение» нелинейного резонансного поглощения, т.е. уменьшение коэффициента поглощения с увеличением лазерной плотности потока энергии, которое является следствием реляти-

вистской динамики электронов плазмы в окрестности критической плотности. Релятивистская нелинейность как эффект изменения «массы» электронов при релятивистских скоростях проявляется в виде пространственно-временной модуляции фазы электронных колебаний, что является качественным аналогом обсуждавшейся в работах [38–40] картины подавления поглощения в области плазменного резонанса с ростом интенсивности поля лазерной накачки. При этом подчеркнем, что в [38, 39] релятивистские эффекты приводят к монотонным «утяжелению» и изменению частоты колебаний электронов, что характерно для нестационарных режимов плазменных колебаний. В нашей стационарной постановке нелинейное изменение фазы (частоты) носит немонотонный характер, определяя модуляцию колебаний в виде укрупнения профиля амплитуды колебаний при сохранении их периода (см., например, Рис. 2.4b). Именно такая модуляция приводит к обогащению спектрального состава резонансно-усиленного плазменного поля (Рис. 2.15), к уменьшению поглощения лазерного излучения на основной частоте (Рис. 3.4, Рис. 3.7) и, как будет показано в главе 4, к обогащению спектров излучения из плазмы высшими гармониками. Проведенное аналитическое исследование доказало, что нелинейный характер коэффициента поглощения и амплитуды поля в резонансе обусловлен именно релятивистской нелинейностью движения электронов плазмы в окрестности критической плотности и не проявляется при учете лишь нерелятивистской нелинейности [14]. Для случая $\rho > 1$ найдена формула для оценки амплитуды резонансного поля, которая дает хорошее совпадение с результатом численного расчета при умеренных плотностях потока энергии лазерного излучения $I_0 \simeq 10^{16} \div 10^{17}$ Вт/см².

С учетом перенормировки амплитуды поля в точке критической плотности плазмы исследованы свойства квазистатического электрического поля, генерируемого в окрестности релятивистского плазменного резонанса. Сравнение с результатами слабо нелинейной теории [122] и нелинейной нерелятивистской теории [14] показало, что учет релятивистской нелинейности не приводит к изменению пространственного распределения поля: его форма остается биполярной и поле по-прежнему меняет знак в точке плазменного резонанса. Однако, вследствие эффекта насыщения амплитуды, понижается максимально возможная величина электростатического поля по сравнению с величиной, получен-

ной в рамках нерелятивистской теории [14]. Несмотря на это, из нашей теории следует, что в условиях релятивистского плазменного резонанса при интенсивностях $I_0 \simeq 10^{17} \div 10^{18}$ Вт/см² излучения Nd-лазера возможна генерация достаточно сильных квазистатических электрических полей напряженностью в несколько МВ/см. Также проведена оценка характерной энергии, приобретаемой электроном, ускоряемым квазистатическим электрическим полем в узкой области резонанса. На границе опрокидывания плазменных колебаний эта энергия достигает нескольких десятков кэВ. При этом, исходя из биполярности поля, мы заключаем, что быстрые электроны не покидают узкой пространственной области плазменного резонанса.

Покажем, что анализ зависимостей коэффициента резонансного поглощения $G(\rho)$ при $\rho > 1$ и $\rho \ll 1$ не только приводит к общему выводу о подавлении поглощения, но и позволяет выдвинуть предположение об изменении оптимального угла падения лазерного излучения на плазму, т. е. о смещении максимума кривой $G(\rho)$ относительно максимума, предсказываемого в линейной теории. Действительно, из сравнения кривых $G(\rho)$ для $\rho > 1$ (Рис. 3.4) и $\rho \ll 1$ (Рис. 3.7) при фиксированной интенсивности I_0 следует асимметричность подавления слева и справа от максимума функции $G(\rho)$. А именно, в области больших углов падения ($\rho > 1$) поглощение подавляется существенно, чем при малых углах. Такая асимметричность может означать, что рост интенсивности поля накачки приводит не только к уменьшению коэффициента поглощения в широком диапазоне изменения ρ , но и к сдвигу максимума поглощения в область меньших ρ или, что то же самое, в область меньших углов падения θ лазерного излучения на плазму. Хотя, как уже было сказано, выражения (3.67) и (3.35) имеют асимптотический характер, отражая поведение коэффициента поглощения в двух предельных случаях и, строго говоря, не позволяют вычислять его во всем диапазоне значений ρ , тем не менее, из общих соображений подобия, построим функцию $G(\rho)$ в промежуточной области $\rho \approx 0.5$, соединив асимптотики для $\rho > 1$ и $\rho \ll 1$ при фиксированной интенсивности лазерного излучения. Возьмем в качестве примера $I_0 = 10^{16}$, 5×10^{16} , 10^{17} Вт/см² и соединим соответствующие асимптотики при тех же интенсивностях (пунктирные цветные кривые на рисунке). В этих случаях максимум поглощения падает до значений $G_m \approx 0.47$, $G_m \approx 0.43$, $G_m \approx 0.4$ соответственно, что находится в

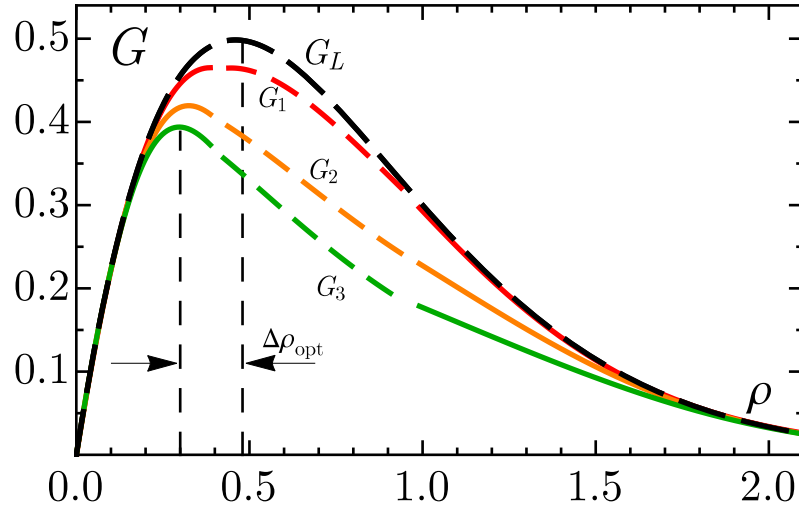


Рис. 3.10. Построенные в промежуточной области $\rho \approx 0.5$ асимптотики коэффициента нелинейного поглощения $G(\rho)$ для различных интенсивностей Nd-лазера $I_0 = 10^{16}$, 5×10^{16} , 10^{17} Вт/см² (G_1, G_2, G_3 соответственно). Графики построены при фиксированной температуре $T = 2$ кэВ и масштабе неоднородности $L = 10\lambda$ плазмы. Кривая G_L отвечает поглощению в линейной теории [6, 77].

качественном согласии с результатами работ [38, 39], а оптимальное значение переменной ρ , соответствующее этим максимумам, смещается из точки $\rho_{opt} \approx 0.5$ в сторону меньших ρ и при $I_0 = 10^{17}$ Вт/см² достигает $\rho_{opt} \approx 0.3$.

Подчеркнем следующее обстоятельство. Мы сравниваем коэффициенты поглощения при разных лазерных интенсивностях I_0 и фиксированном масштабе неоднородности плотности плазмы L , хотя известно, что L может изменяться в результате неучитываемых нами разлета плазмы и действия пондеромоторной силы лазерного поля [6, 41, 102–105, 144–150]. Однако мы исходим из того, что такое изменение профиля плотности можно учитывать в первом приближении через параметр L , предполагая при этом выполнение условия слабой неоднородности плазмы. Хотя в общем случае L и зависит от I_0 , в нашей теории L и I_0 – входящие извне, формально независимые управляющие параметры, соотношение между которыми может быть определено, например, методами численного моделирования гидродинамики плазмы. Изложенная здесь теория демонстрирует, каким образом на величину поглощения влияет именно релятивистская

нелинейность движения электронов в резонансно-усиленном плазменном поле при заданных I_0 , T , L и может рассматриваться в качестве составной части более масштабных схем вычислений, в том числе с применением численных методов, при исследовании лазерно-плазменного взаимодействия. Последовательный аналитический учет самосогласованной деформации профиля плотности неоднородной плазмы в условиях пространственно-временной модуляции фазы релятивистских колебаний электронов представляет собой нетривиальную задачу, которая требует отдельного подробного рассмотрения при дальнейшем развитии построенной здесь теории. Согласно работам [38, 39], при достижении интенсивности лазерного излучения выше $I_0 \approx 3 \times 10^{17}$ Вт/см², уменьшение коэффициента поглощения сменяется его ростом благодаря нелинейному эффекту укрупнения профиля плотности плазмы за счет пондеромоторного воздействия падающего электромагнитного излучения. Обозначенное выше усовершенствование теории или ее рассмотрение наряду с кодами, описывающими гидродинамику плазмы в условиях воздействия лазерной накачки, позволит корректировать приведенные здесь выводы о поведении коэффициента поглощения с ростом потока энергии лазерного излучения.

Полученные в данной главе результаты открывают возможности дальнейшего продвижения теории для описания генерации высших гармоник, строгой количественной характеристики их интенсивности с учетом фазовой модуляции релятивистских колебаний электронов и связанной с ней перенормировкой амплитуды поля в точке плазменного резонанса. Решению этой задачи посвящена следующая глава настоящей диссертации.

Глава 4

Генерация высших гармоник

4.1 Введение

В четвертой главе изложены результаты аналитического построения теории генерации высших гармоник в неоднородной лазерной плазме на основе механизма резонансного поглощения с учетом релятивистской нелинейности в области плазменного резонанса в случае больших углов падения лазерного излучения на плазму $\rho > 1$. Сформулировано уравнение для n -ой гармоники магнитного поля в вакууме с правой частью, содержащей нелинейный ток, являющийся локализованным в области резонанса источником излучения гармоник в вакуум. Распространяя метод [14] на случай релятивистски-сильного продольного электрического поля плазменного резонанса, мы построили решение уравнения для гармоник, излучаемых в вакуум, и вычислили соответствующие коэффициенты преобразования по амплитуде.

В главе обсуждаются спектральные характеристики и угловые зависимости излучения гармоник из плазмы, исследуется влияние релятивистской нелинейности на формирование спектров и проводится сравнение с результатами нелинейной нерелятивистской теории [14] и теории возмущений [8, 10, 11]. Показано, что учет нелинейных эффектов движения электронов в области резонанса может проявляться в существенном уменьшении крутизны огибающей спектра вторичного излучения, приводя к степенным зависимостям интенсивностей гармоник от их номера. Подробно рассмотрены вопросы об эффективности генерации второй гармоники и пределах применимости теории возмущений.

Результаты, представленные в первой главе, опубликованы в работах [A4] и [A5].

4.2 Основные уравнения для электромагнитного поля в вакууме

Для описания процесса генерации гармоник исходим из полученного в главе 3 уравнения (3.2). С учетом неравенств (3.3), для случая $n \geq 2$, уравнение (3.2) приобретает вид:

$$\begin{aligned} & \partial_{xx} R_n - \frac{\partial_x \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \partial_x R_n + \left(\frac{n\omega_0}{c} \right)^2 (\varepsilon_n - \sin^2 \theta) R_n = \\ & = \frac{a}{c} \left\{ ink_y v \partial_x P + k_y \omega_0 v \partial_x (\gamma_0 v) + \frac{k_y \omega_0}{a} \partial_t (v(\gamma_0 - 1)) - \right. \\ & \quad \left. - \partial_x (u \partial_x P) + \frac{i\omega_0}{n} \partial_x \left[v \partial_x (\gamma_0 u) + \frac{1}{a} \partial_t (u(\gamma_0 - 1)) \right] \right\}_n. \end{aligned} \quad (4.1)$$

При выводе (4.1), как и в предыдущих главах, мы пренебрегли отличием частоты от координаты x $\omega_L = \omega_0$, что законно для слабо неоднородной плазмы, в которой ширина плазменного резонанса мала по сравнению с характерным масштабом неоднородности плотности L . Иерархия компонент электромагнитного поля вблизи критической плотности (1.5) позволяет удержать в правой части (4.1) только члены, пропорциональные k_y . В результате получаем волновое уравнение с источником в стандартной форме:

$$\partial_{xx} R_n - \frac{\partial_x \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \partial_x R_n + \left(\frac{n\omega_0}{c} \right)^2 (\varepsilon_n - \sin^2 \theta) R_n = -\frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{a}{4\pi} \text{rot} \vec{J}_n \right\}_z, \quad n \geq 2, \quad (4.2)$$

где компоненты нелинейного тока определяются выражением

$$\begin{aligned} \vec{J}_n = & \left\{ v \partial_x P - \frac{i\omega_0}{n} v \partial_x (\gamma_0 v) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) v, \right. \\ & \left. u \partial_x P - \frac{i\omega_0}{n} v \partial_x (\gamma_0 u) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u, \quad 0 \right\}_n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При скоростях движения электрона, много меньших скорости света ($\gamma_0 \rightarrow 1$), выражение (4.3) переходит в формулу для тока, полученную при построении нелинейной нерелятивистской теории [14]. Аналогично случаю $n = 1$, из уравнения (4.2) и соотношения (4.3) следует, что для вычисления n -ой гармоники магнитного поля в вакууме необходимо знать нелинейный ток, который определяется найденной в главе 1 структурой электрического поля и скорости электронов в области плазменного резонанса.

4.3 Амплитуды гармоник в вакууме

4.3.1 Решение краевой задачи

Решение неоднородного уравнения (4.2) записывается через фундаментальную систему решений однородного уравнения Ψ^+ и Ψ^- в следующем виде:

$$R_n(x) = \alpha_n^+ \Psi_n^+(x) + \alpha_n^- \Psi_n^-(x) + \int_{-\infty}^x d\xi \mathcal{G}(x, \xi) f_n(\xi),$$

$$\mathcal{G}(x, \xi) = -\frac{\Psi_n^+(x)\Psi_n^-(\xi) - \Psi_n^+(\xi)\Psi_n^-(x)}{\Psi_n^+(\xi)\Psi_n'^-(\xi) - \Psi_n^{+'}(\xi)\Psi_n^-(\xi)}, \quad (4.4)$$

$$f_n(x) = \frac{a}{c} \left\{ ink_y \left(vP_x - \frac{i\omega_0}{n} v(\gamma_0 v)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1)v \right) + \left[uP_x - \frac{i\omega_0}{n} v(\gamma_0 u)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1)u \right]_x \right\}_n.$$

Здесь α_n^\pm – константы, определяемые граничными условиями для уравнения (4.2) применительно к решению (4.4). Граничные условия, в свою очередь, следуют из вида магнитного поля $R_n(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$R_n = \tilde{C}_n^- e^{-i\frac{\omega_0}{c}x \cos \theta}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (4.5)$$

$$R_n = 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

где комплексная амплитуда \tilde{C}_n^- соответствует волне, отраженной от плазменного слоя.

Решение однородного линейного уравнения при не слишком малых углах θ , таких что $\rho = (\omega_0 L/c)^{2/3} \sin^2 \theta > 1$, в различных областях относительно точки поворота x_{n0} для гармоники с частотой $n\omega_0$ имеет вид (σ_1, σ_2 – некоторые константы):

$$R_n = -i\mathcal{E}_n \left(\frac{3}{2} \mathcal{L}_n^-(x) \right)^{1/6} \times$$

$$\times \left\{ \sigma_1 \text{Ai} \left[- \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x) \right)^{2/3} \right] + \sigma_2 \text{Bi} \left[- \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x) \right)^{2/3} \right] \right\}, \quad x < x_{n0},$$

$$R_n = -i\mathcal{E}_n \left(\frac{3}{2} \mathcal{L}_n^+(x) \right)^{1/6} \times$$

$$\times \left\{ \sigma_1 \text{Ai} \left[\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x) \right)^{2/3} \right] + \sigma_2 \text{Bi} \left[\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x) \right)^{2/3} \right] \right\}, \quad x > x_{n0}.$$

где

$$\mathcal{E}_n = \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\sqrt[4]{\varepsilon_n - \sin^2 \theta}}, \quad \mathcal{L}_n^-(x) = \int_x^{x_{n0}} d\tau \sqrt{\varepsilon_n - \sin^2 \theta}, \quad \mathcal{L}_n^+(x) = \int_{x_{n0}}^x d\tau \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_n}.$$

Отсюда следует, что равномерно пригодное представление для функций Ψ^+ и Ψ^- во всей области изменения координаты x за исключением малой окрестности резонанса высшего порядка (то есть в области, где $\varepsilon(n\omega_0, x) \approx 0$) дается функциями:

$$\begin{aligned} \Psi_n^+(x) &= \mathcal{E}_n \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x) \right)^{1/6} \text{Ai} \left[- \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x) \right)^{2/3} \right], \quad x < x_{n0}, \\ \Psi_n^+(x) &= \mathcal{E}_n \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x) \right)^{1/6} \text{Ai} \left[\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x) \right)^{2/3} \right], \quad x > x_{n0}, \\ \Psi_n^-(x) &= \mathcal{E}_n \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x) \right)^{1/6} \text{Bi} \left[- \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x) \right)^{2/3} \right], \quad x < x_{n0}, \\ \Psi_n^-(x) &= \mathcal{E}_n \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x) \right)^{1/6} \text{Bi} \left[\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x) \right)^{2/3} \right], \quad x > x_{n0}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь точка поворота x_{n0} гармоники с частотой $n\omega_0$, определяемая условием $\varepsilon(n\omega_0, x_{n0}) = \sin^2 \theta$, в рассматриваемом нами случае не слишком больших углов θ , таких, что $\sin^2 \theta < 3/4$, для всех высших гармоник лежит правее точки плазменного резонанса, т. е. $x_{n0} > 0$. Поскольку источник $f_n(\xi)$ локализован в окрестности плазменного резонанса, то при вычислении функции Грина $\mathcal{G}(x, \xi)$ следует использовать формулы для Ψ_+ , Ψ_- при $x \approx 0$. Несложные вычисления дают

$$\Psi_n^+(x) \Psi_n^{-'}(x) - \Psi_n^{+'}(x) \Psi_n^-(x) |_{x \approx 0} = \frac{n\omega_0}{\pi c} \varepsilon_n(x). \quad (4.7)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \alpha_n^+ \Psi_n^+(x) + \alpha_n^- \Psi_n^-(x) - \\ &\quad - \frac{\pi c}{n\omega_0} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{f_n(\xi)}{\varepsilon_n(\xi)} [\Psi_n^+(x) \Psi_n^-(\xi) - \Psi_n^-(\xi) \Psi_n^+(x)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Используя условие обращения магнитного поля $R_n(x)$ в нуль при $x \rightarrow \infty$ и экспоненциальное затухание функции $\Psi^+(x)$ для $x > x_{n0}$, получим из (4.8)

следующее соотношение, определяющее одну из констант α_n^- :

$$\alpha_n^- = -\frac{\pi c}{n\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{f_n(\xi)}{\varepsilon_n(\xi)} \Psi_n^+(\xi). \quad (4.9)$$

Другая константа α_n^+ находится с использованием выражения (4.8) при учете асимптотических разложений функций Эйри и условия отсутствия падающей из вакуума на плазму волны с частотой гармоники $n\omega_0$ ($n \geq 2$) при $x \rightarrow -\infty$:

$$\alpha_n^+ = i\alpha_n^-. \quad (4.10)$$

Отсюда следует, что амплитуда отраженной волны \tilde{C}_n^- описывается формулой

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n^- = & - \left(\frac{\pi}{\varepsilon_n^2 \cos \theta} \right)^{1/2} \mathcal{E}_n \exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\omega_0}{c} \mathcal{L}_n^-(x) \right) \right] \times \\ & \times \text{Ai} \left[- \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x) \right)^{2/3} \right] \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f_n(\xi) \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(\xi) \right)^{1/6}. \end{aligned}$$

Преобразуем подынтегральное выражение в этой формуле, принимая во внимание, что функция источника $f_n(\xi)$ локализована в области $\xi \approx 0$:

$$\begin{aligned} \text{Ai} \left[- \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(\xi) \right)^{2/3} \right] & \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(\xi) \right)^{-1/6} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\omega_0}{c} \mathcal{L}_n^-(\xi) \right), \\ \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\omega_0}{c} \mathcal{L}_n^-(x) \right) & \approx \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\omega_0}{c} \mathcal{L}_n^-(0) + \frac{n\omega_0}{c} \int_x^0 d\tau \sqrt{\varepsilon_n - \sin^2 \theta} \right). \end{aligned}$$

Обозначая $k_n(x) \equiv \frac{n\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon_n(x) - \sin^2 \theta}$, перепишем амплитуду \tilde{C}_n^- с учетом сделанного преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n^- \approx & - \frac{(c/n\omega_0)^{1/2} \exp \left(i \int_{-\infty}^0 dx k_n(x) \right)}{\sqrt{\varepsilon_n(0) k_n(0) |\cos \theta|}} \left[\exp \left(2i \int_0^{x_{n0}} dx k_n(x) \right) \times \right. \\ & \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) e^{-ik_n(0)x} + i \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) e^{ik_n(0)x} \right]. \quad (4.11) \end{aligned}$$

До сих пор мы рассматривали нормированную величину R (и соответствующую ей амплитуду \tilde{C}_n^-), однако конечная цель заключается в получении формул

для магнитного поля B_z (и амплитуды C_n^-). Уравнение для Фурье-компонент B_n получается из уравнения для R_n после умножения на (am_e/e) . При этом связь между амплитудами \tilde{C}_n^- и C_n^- такая же, как между R_n и B_n . Поэтому, при переходе к формулам для фурье-компонент магнитного поля B_z , \tilde{C}_n^- следует домножить на (am_e/e) . Используя выражения для диэлектрической проницаемости $\varepsilon_n = 1 + \frac{1}{n^2}((i\Delta - x)/L - 1)$ в k_n , находим, что

$$\exp\left(2i \int_0^{x_{n0}} k_n(x) dx\right) = \exp\left[\frac{4in^3L\omega_0}{3c} (\cos^2\theta - 1/n^2)^{3/2}\right].$$

Подставляя конкретные выражения (2.1) для полей P , Q и скоростей v , u , содержащихся в функции источника f_n , перейдем от переменных интегрирования (t, x) к переменным (χ, l) с якобианом перехода $D \equiv \partial_\eta\tau\partial_\chi x - \partial_\eta x\partial_\chi\tau$. Тогда получим следующее выражение для амплитуды гармоник магнитного поля B_z в вакууме с номером $n \geq 2$:

$$C_n^- = \frac{im_e\omega_0^3\Delta^2 \exp\left(in\arg R_1(0) - in\pi + i \int_{-\infty}^0 k_n(x) dx\right)}{4\pi ec(\cos^2\theta - 1/n^2)^{1/2}(1 - 1/n^2)^{1/4}|\cos\theta|^{1/2}} \times \left[\exp\left\{\frac{i4n^3L\omega_0}{3c}(\cos^2\theta - 1/n^2)^{3/2}\right\} I_n^- + iI_n^+\right], \quad (4.12)$$

$$I_n^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \exp\left(in\tau \pm inBx_0\sqrt{\cos^2\theta - 1/n^2}\right) \times \left\{ \left[\partial_\chi \left(P_0 - \frac{i}{n}\gamma_0 v_1 \right) \partial_l \tau - \partial_l \left(P_0 - \frac{i}{n}\gamma_0 v_1 \right) \partial_\chi \tau - \right. \right. \\ \left. \left. - (\partial_l \tau \partial_\chi x_0 - \partial_l x_0 \partial_\chi \tau)(\gamma_0 - 1) \right] v_1 \sin\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1/n^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(u_0 \partial_\chi P_0 - \frac{i}{n} v_1 \partial_\chi (\gamma_0 u_0) \right) \partial_l \tau - \left(u_0 \partial_l P_0 - \frac{i}{n} v_1 \partial_l (\gamma_0 u_0) \right) \partial_\chi \tau - \right. \right. \\ \left. \left. - (\partial_l \tau \partial_\chi x_0 - \partial_l x_0 \partial_\chi \tau)(\gamma_0 - 1) u_0 \right] \right\}. \quad (4.13)$$

Наличие двух слагаемых в квадратных скобках в формуле для C_n^- соответствует двум различным физическим механизмам генерации гармоник. Слагаемое,

пропорциональное I_n^+ , описывает волну гармоника, непосредственно излучаемую в вакуум из области плазменного резонанса, а слагаемое, пропорциональное I_n^- – волне гармоника, излучаемой из области плазменного резонанса вглубь плазмы и выходящей в вакуум после отражения от области более плотной плазмы. Интегралы (4.13) в (4.12) далее вычисляются с использованием системы компьютерной алгебры "Wolfram Mathematica" [143].

4.3.2 Спектральный состав излучения

Для исследования спектрального состава излучения примем магнитное поле первой гармоники при $x \rightarrow -\infty$ в виде

$$B_1 = B_0 \cos(k_x x + k_y y - \omega_0 t + \varphi_0) + B_s \cos(-(k_x x - k_y y) - \omega_0 t + \varphi_s), \quad (4.14)$$

где индексы 0 и s обозначают падающую и отраженную волны соответственно. Тогда, исходя из (4.12), интенсивность I_n гармоники, испускаемой из плазмы и коэффициент отражения \mathcal{R}_n на частоте $n\omega_0$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n &= \left| \frac{C_n^-}{C_1^+} \right|^2 = \frac{k_0 L G_L |\Omega_n|^2}{4\pi^3 A_L^2 (1 - 1/n^2)(\cos^2 \theta - 1/n^2)^{1/2}}, \\ \Omega_n &= \exp \left\{ \frac{4in^3 L \omega_0}{3c} (\cos^2 \theta - 1/n^2)^{3/2} \right\} I_n^- + i I_n^+, \\ I_n &= \mathcal{R}_n I_0, \quad C_1^+ = B_0/2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

где I_0 – плотность потока падающего на плазму излучения, а I_n^\pm определяются выражениями (4.13).

Для подробного обсуждения спектров, определяемых формулами (4.15), перейдем на язык параметров лазера и плазмы: угла падения лазерного излучения θ , лазерной интенсивности I_0 [Вт/см²], масштаба неоднородности L [λ], выраженного в длине волны лазерного излучения, и температуры плазмы T [кэВ]. Исходя из условия построения нелинейного решения уравнения (4.2) с помощью линейных решений однородного уравнения, которые существуют при не слишком малых углах, значение автомодельной переменной $\rho_{min} \equiv (\omega_0 L/c)^{2/3} \sin^2 \theta_{min} = 1$ может считаться граничным для теории, а θ_{min} – минимально допустимым углом падения лазерного излучения на плазму при

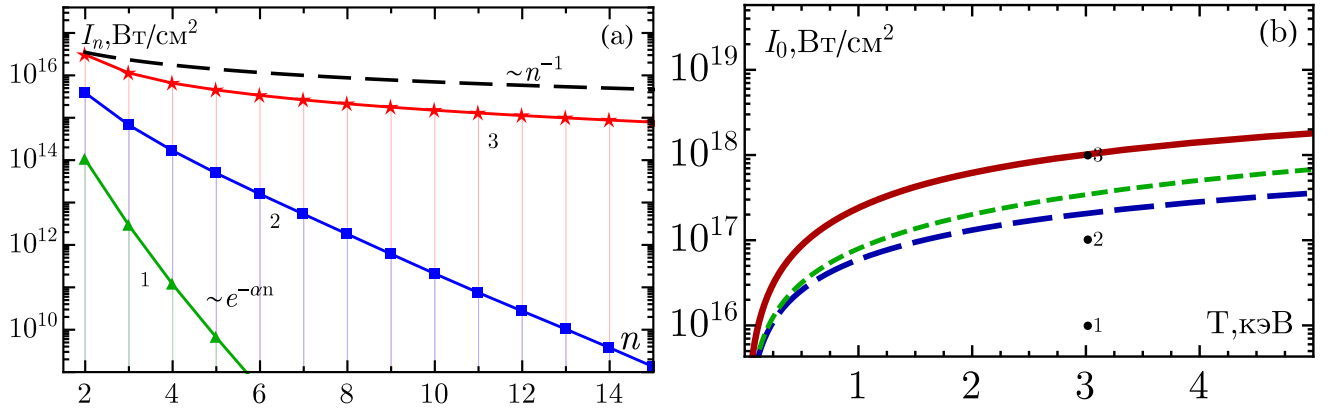


Рис. 4.1. (a)–Спектры излучения из плазмы, вычисленные для значений плотности потока Nd-лазера $I_0 = 10^{16}$ Вт/см² (кривая 1), 10^{17} Вт/см² (кривая 2), 10^{18} Вт/см² (кривая 3) при фиксированных температуре плазмы $T = 3$ кэВ, масштабе неоднородности $L = 10\lambda$ и угле падения лазера $\theta_{min} = 14.5^\circ$. (b)–границы применимости теории на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ для масштаба неоднородности $L = 10\lambda$. Сплошная красная кривая обозначает границу опрокидывания в релятивистской гидродинамике с учетом нелинейной перенормировки амплитуды в резонансе. Синяя штриховая линия отвечает релятивистской границе опрокидывания, но без учета нелинейной перенормировки. Зеленая пунктирная кривая соответствует порогу опрокидывания в нерелятивистской теории [14]. Точки 1, 2, 3 на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ соответствуют кривым 1, 2, 3 на панели (a).

фиксированных ω_0, L . Ниже, в качестве оценки результатов теории на границе её применимости, мы рассмотрим характеристики излучения из плазмы при углах θ_{min} для случая Nd-лазера с длиной волны $\lambda = 1.064$ мкм. На рисунке 4.1а представлены зависимости интенсивностей I_n гармоник отраженного магнитного поля от номера n при фиксированных значениях масштаба неоднородности L и температуры T плазмы для различных значений плотности потока I_0 лазерного излучения, которые соответствуют точкам 1, 2, 3 на параметрической плоскости $\{T, I_0\}$ Рис. 4.1b. Из сравнения спектров $I_n(n)$ следует, что с ростом амплитуды поля накачки происходит изменение наклона спектральной кривой, а именно ее выполаживание, которое достигает максимального проявления вблизи границы опрокидывания плазменных колебаний

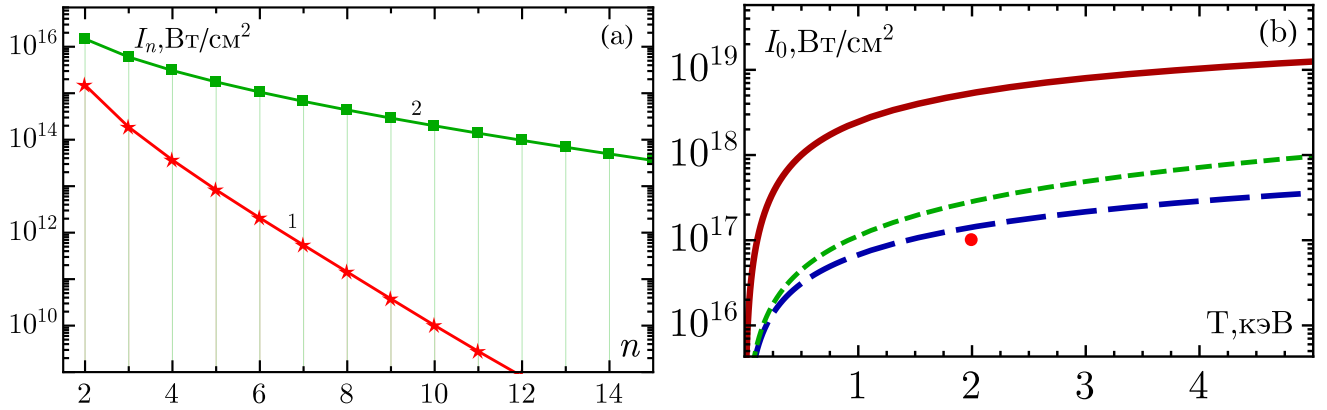


Рис. 4.2. Панель (а) – спектры магнитного поля в релятивистской (кривая 1) и нерелятивистской (кривая 2) теориях при $I_0 = 10^{17}$ Вт/см² (Nd-лазер), $T = 2$ кэВ, $\theta = \theta_{min}$, для $L = 30\lambda$ (см. панель (b)). Панель (b) – границы применимости теории на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ для масштаба неоднородности $L = 30\lambda$. Сплошная красная кривая обозначает границу опрокидывания в релятивистской гидродинамике с учетом нелинейной перенормировки амплитуды в резонансе. Синяя штриховая линия отвечает релятивистской границе опрокидывания, но без учета нелинейной перенормировки. Зеленая пунктирная кривая соответствует порогу опрокидывания в нерелятивистской теории [14]

в окрестности резонанса, где формируются спектры излучения, характеризующиеся степенным законом убывания I_n с ростом номера n , но более быстрым, чем $1/n$. Рисунок 4.2а, где представлены спектральные кривые, полученные с учетом и без учета [14] релятивистских эффектов при фиксированных параметрах I_0, θ, T, L , показывает, что за счет насыщения амплитуды поля плазменного резонанса и сдвига границы опрокидывания в область больших лазерных интенсивностей, спектр излучения в релятивистской теории характеризуется более быстрым спаданием гармоник с возрастанием номера n . Из Рис. 4.2b, где отмечена точка, соответствующая набору параметров для Рис. 4.2а, видно, что эта точка близка к границе опрокидывания в нерелятивистской теории [14] и далека от таковой в построенной здесь релятивистской теории. Подчеркнем, что существенные различия между спектральными кривыми в релятивистской

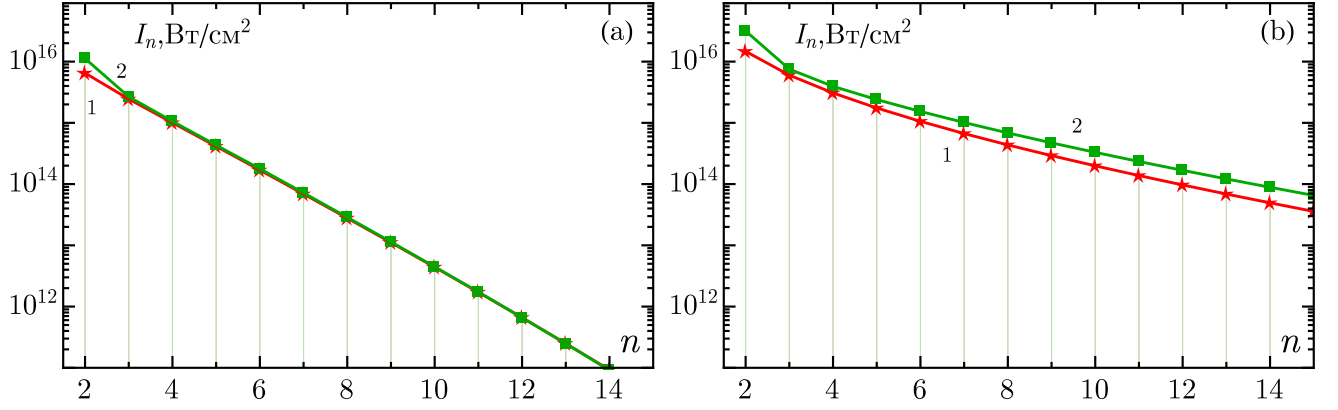


Рис. 4.3. Спектры магнитного поля, полученные в нерелятивистской теории [14] (кривая 1) и в релятивистской теории, но без учета фазовой модуляции (кривая 2) при $I_0 = 1.3 \times 10^{17} \text{ Вт/см}^2$ (Nd-лазер), $T = 2 \text{ кэВ}$, $\theta = \theta_{min}$, для $L = 100\lambda$ (a) и $L = 30\lambda$ (b).

и нерелятивистской [14] теориях являются прямым следствием фазовой модуляции релятивистских плазменных колебаний в окрестности критической плотности плазмы, которая была подробно исследована в предыдущих главах. Учет релятивизма плазменных колебаний приводит к наличию в формулах (4.12) и (4.13) как лоренц-фактора γ_0 , так и параметрической зависимости τ от x и P , отвечающей за фазовую модуляцию колебаний. Чтобы проиллюстрировать значительное влияние именно фазовой модуляции на перестройку спектров при переходе к релятивистской теории, сравним спектры излучения из плазмы в нерелятивистской теории [14] со спектрами, вычисленными с использованием формул (4.12) и (4.13), но без учета фазовой модуляции, т. е. когда $\tau(\chi, l) = \chi$ и выражения для I_n^\pm принимают вид:

$$I_n^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \exp\left(in\chi \pm inBx_0\sqrt{\cos^2\theta - 1/n^2}\right) \times \\ \times \left\{ \left[(\gamma_0 - 1)\partial_l x_0 - \partial_l \left(P_0 - \frac{i}{n}\gamma_0 v_1 \right) \right] v_1 \sin\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1/n^2} \times \right. \\ \left. \times \left[(\gamma_0 - 1)u_0\partial_l x_0 - \left(u_0\partial_l P_0 - \frac{i}{n}v_1\partial_l(\gamma_0 u_0) \right) \right] \right\}.$$

Сравнение показывает (Рис. (4.3)) отсутствие существенных различий в вели-

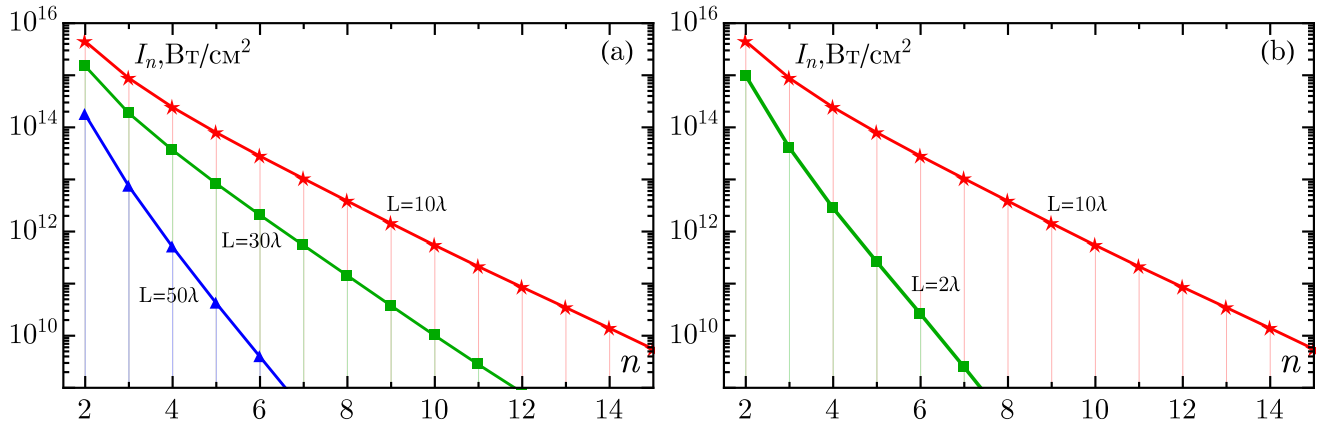


Рис. 4.4. Спектральные распределения магнитного поля в вакууме при фиксированных интенсивности поля накачки Nd-лазера $I_0 = 10^{17} \text{ Вт}/\text{см}^2$, угле падения $\theta = \theta_{\min}$ и температуре плазмы $T = 2 \text{ кэВ}$ для различных значений масштаба неоднородности $L = 50\lambda, L = 30\lambda, L = 10\lambda$ – панель (a) и $L = 2\lambda, L = 10\lambda$ – панель (b).

чинах интенсивностей гармоник как в случае менее ($L = 30\lambda$), так и в случае более ($L = 100\lambda$) протяженных градиентов неоднородности плазмы (см. также таблицу 4.1). Таким образом, изменение структуры спектра при переходе к релятивистской теории определяется в основном фазовой модуляцией резонансно-усиленных плазменных колебаний.

Изменение зависимости $I_n(n)$ с ростом характерного масштаба неоднородности плотности плазмы L представлено на Рис. 4.4. Для сравнительно больших L (Рис. 4.4a) с увеличением градиента неоднородности наблюдается переход к более плавной зависимости интенсивности I_n гармоник от номера n , однако дальнейший рост градиента неоднородности (Рис. 4.4b) приводит к снижению эффективности генерации гармоник и к спектрам с экспоненциальным законом спада, поскольку условие $k_0 L \gg 1$, необходимое для реализации механизма плазменного резонанса [3], выполняется всё менее и менее точно. Такая картина отлична от результатов работ [16, 151, 152], где рассматривались относительные масштабы неоднородности L/λ в диапазоне $0.1 \div 1$ при исследовании эффективности поглощения лазерного излучения и генерации второй гармоники. В частности, величина $L/\lambda \sim 0.23$ была указана в [16] как наиболее оптимальная для генерации второй гармоники механизмом плазменного резонанса. Наша теория

Таблица 4.1. Отношения интенсивностей гармоник с номерами $n = 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15$, вычисленных без учета фазовой модуляции (\tilde{I}_n) и в нелинейной нерелятивистской (I_n^{NR}) теориях при $I_0 = 10^{17}$ Вт/см² (Nd-лазер), $T = 2$ кэВ.

L	\tilde{I}_2/I_2^{NR}	\tilde{I}_5/I_5^{NR}	\tilde{I}_7/I_7^{NR}	\tilde{I}_9/I_9^{NR}	$\tilde{I}_{11}/I_{11}^{NR}$	$\tilde{I}_{13}/I_{13}^{NR}$	$\tilde{I}_{15}/I_{15}^{NR}$
30λ	2.2	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.8
100λ	1.7	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	0.9

показывает, что такие масштабы неоднородности не характерны для проявления механизма плазменного резонанса, хотя используемая модель применима в случае протяженных градиентов $L/\lambda \gg 1/2\pi$. Формально мы не можем провести сравнение с [16, 151, 152] для $L/\lambda \sim 0.23$ вследствие условий применимости нашей теории. Однако можно утверждать, что эффект плазменного резонанса как механизм генерации гармоник для столь резких градиентов плотности плазмы $L \sim \lambda$ перестает эффективно работать.

4.3.3 Угловые зависимости спектров излучения и сравнение с теорией возмущений

До сих пор мы обсуждали предельный для построенной здесь теории генерации гармоник случай $\rho_{min} = 1$, когда угол падения лазерного излучения на плазму равен минимально допустимому $\theta = \theta_{min}$. Выясним теперь, как меняется спектр с ростом переменной ρ , или, что то же самое, с ростом угла θ при фиксированном масштабе неоднородности плотности L . Рисунок 4.5а, на котором представлены спектры, вычисленные при различных значениях ρ , показывает переход от спектров со степенной зависимостью $I_n \sim n^{-\alpha n}$ вблизи опрокидывания при $\rho = 1$ к спектрам, характеризующимся экспоненциальным законом спада $I_n \sim \exp(-\alpha n)$, $\alpha > 1$, который достигается уже при $\rho \approx 2$. Такая картина при увеличении ρ (или, что то же самое, угла θ) возникает вследствие уменьшения коэффициента резонансного поглощения $G(\rho)$ падающего электромагнитного излучения на основной частоте. При значениях $\rho \approx 2$ теория возмущений [11] дает заметно заниженные значения интенсивностей гармоник только

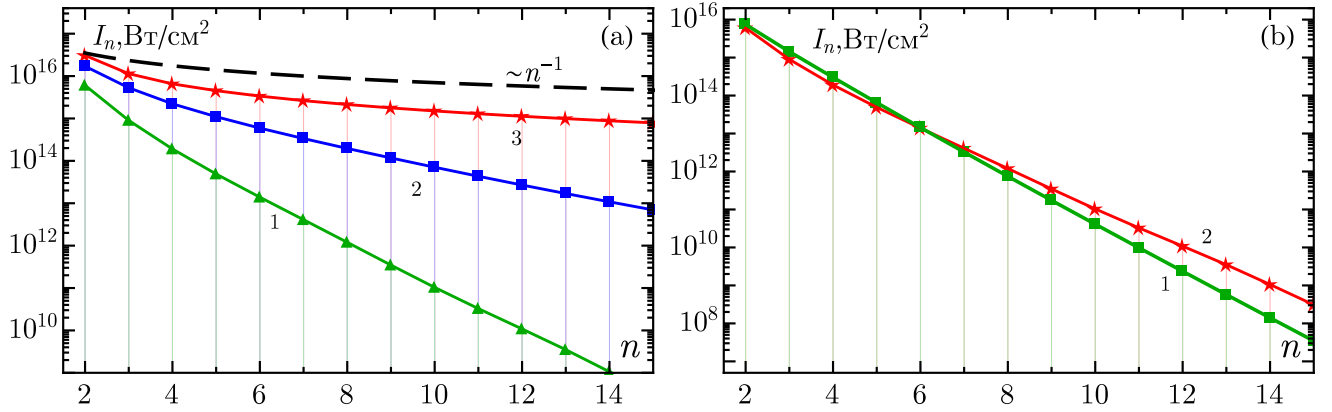


Рис. 4.5. Панель (а) – спектры магнитного поля в вакууме при различных значениях автомодельной переменной ρ : кривая 1 – $\rho = 2$ ($\theta = 21^\circ$), кривая 2 – $\rho = 1.5$ ($\theta = 18^\circ$), кривая 3 – $\rho = 1$ ($\theta = 14.6^\circ$). Панель (b) – спектры, полученные в теории возмущений [11] (кривая 1) и в релятивистской теории (кривая 2) для $\rho=2$. Рисунок отвечает фиксированным $I_0 = 10^{18}$ Вт/см² (Nd-лазер), $T = 3$ кэВ, $L = 10\lambda$.

начиная с номеров гармоник $n \simeq 10$ (см. Рис. 4.5b). Поэтому при $\rho \gtrsim 2$ уместно использовать релятивистскую теорию при оценке высших гармоник излучения с номерами $n \gtrsim 10$.

Теперь проанализируем связь построенной здесь теории со слабо нелинейной теорией генерации гармоник. Авторы статьи [10] отмечали слабую зависимость эффективности генерации второй гармоники от ширины плазменного резонанса (эффективной частоты столкновений), когда нелинейные эффекты малы. Покажем, что это действительно так. В таблице 4.2 представлено сравнение интенсивностей второй гармоники, полученных в рамках теории возмущений [8, 11] и рассчитанных с использованием нашей теории. Видно, что при умеренных плотностях потока лазерного излучения I_0 нелинейность слабо влияет на генерацию второй гармоники, однако с ростом I_0 , т. е. с приближением к границе опрокидывания, отличие нарастает: теория возмущений дает существенно завышенные значения интенсивностей второй гармоники. С другой стороны, в [10] было показано, что предел применимости слабо нелинейной теории находится значительно ниже порога опрокидывания. Авторы [10] сформулировали критерий малости нелинейности, который формально задает пределы применимости

Таблица 4.2. Значения интенсивностей второй гармоники, вычисленные по теории возмущений I_2^{PT} и в релятивистской теории I_2 для различных плотностей потоков Nd-лазера I_0 при $L = 10\lambda$, $T = 3 \text{ кэВ}$ и $\theta = \theta_{\min}$.

I_0 , Вт/см ²	I_2^{PT} , Вт/см ²	I_2 , Вт/см ²
10^{16}	10^{14}	10^{14}
10^{17}	4×10^{16}	4×10^{15}
10^{18}	10^{18}	3×10^{16}

теории возмущений для оценки эффективности генерации второй гармоники:

$$\left| \frac{eH_0 \sin \theta}{2mc\omega_0\beta} \right| < \left(\frac{\beta}{\rho_0} \right)^{2/3} \quad (4.16)$$

Здесь H_0 – амплитуда магнитного поля в точке плазменного резонанса, $\beta = \sqrt{T_e/mc^2}$, $\rho_0 = \omega_0 L/c$. В терминах интенсивности лазерного излучения I_0 , для набора параметров из таблицы 4.2, это условие эквивалентно неравенству $I_0 < 5 \times 10^{15} \text{ Вт/см}^2$. Однако, как показывает таблица 4.2, при $I_0 = 10^{16} \text{ Вт/см}^2$ теория возмущений всё еще дает значения I_2^{PT} , совпадающие со значениями из релятивистской теории. Таким образом, слабо нелинейная теория генерации второй гармоники дает хорошую оценку эффективности генерации даже за пределами формальной применимости теории.

В завершение приведем сравнение эффективности генерации высших гармоник при различных плотностях потока лазерного излучения (Рис. 4.6). При малых и умеренных интенсивностях I_0 лазерного поля результаты слабо нелинейной теории [11] совпадают с результатами релятивистской теории до номеров гармоник $n \approx 10$ (Рис. 4.6a). Затем, с ростом интенсивности поля лазерной накачки, теория Владимирского-Силина начинает существенно завышать значения амплитуд гармоник (Рис. 4.6b). Наконец, в области параметров лазерно-плазменной системы, при которых существенны эффекты релятивизма в окрестности плазменного резонанса, наблюдается расходимость ряда теории возмущений (Рис. 4.6c), и последняя уже не может претендовать на сколько-нибудь удовлетворительную оценку интенсивностей I_n гармоник лазерного излучения в вакууме.

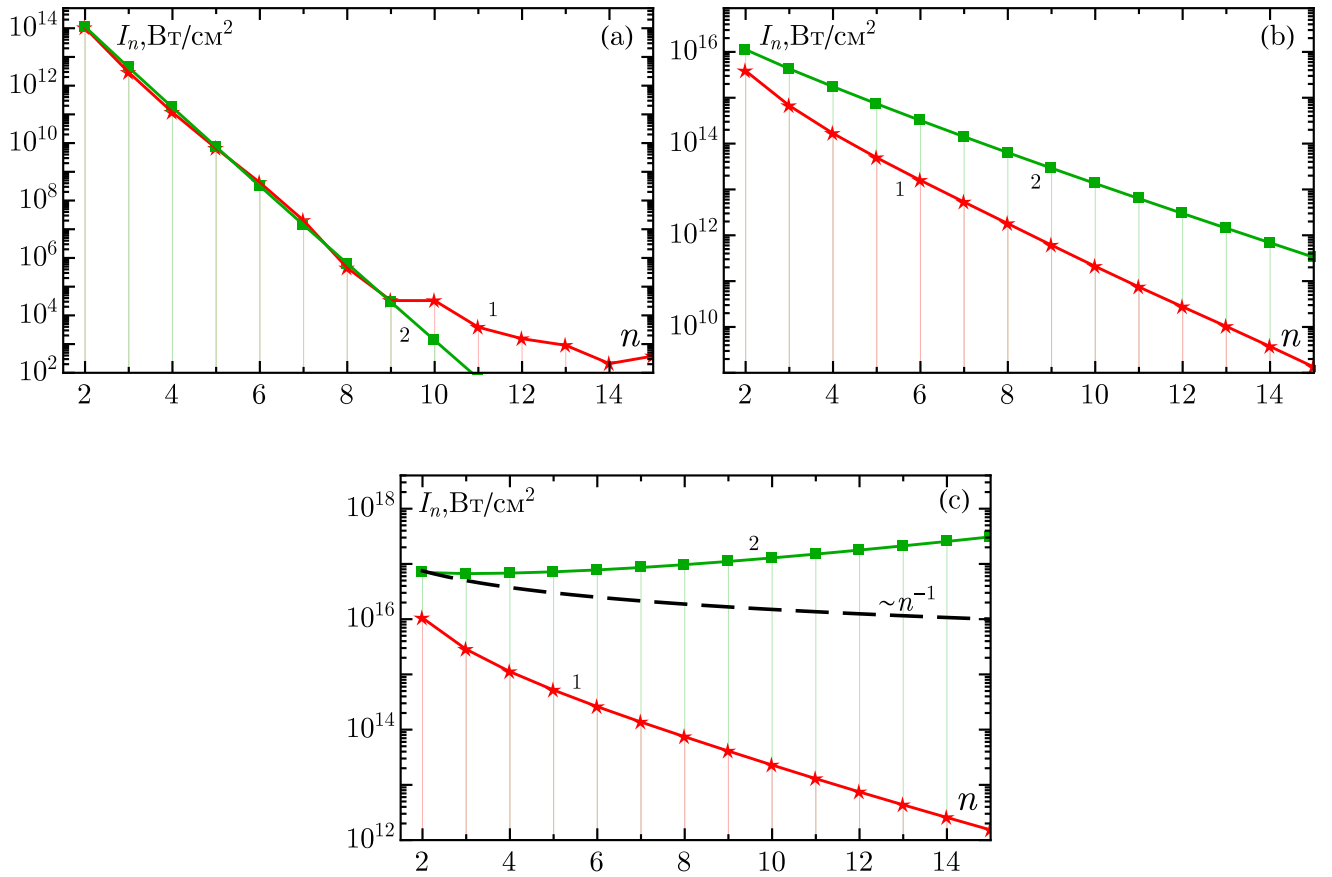


Рис. 4.6. Спектры магнитного поля в вакууме, полученные в релятивистской теории (1) и в теории возмущений [11] (2) для различных интенсивностей Nd-лазерного излучения: $I_0 = 10^{16} \text{ Вт}/\text{см}^2$ (a), $I_0 = 10^{17} \text{ Вт}/\text{см}^2$ (b), $I_0 = 2.5 \times 10^{17} \text{ Вт}/\text{см}^2$ (c). Графики построены при фиксированных $T = 3 \text{ кэВ}$, $L = 10\lambda$, $\rho = 1$.

4.4 Заключение

В данной главе развита аналитическая теория генерации гармоник в неоднородной плазме, использующая представление об электромагнитном поле в области плазменного резонанса как об эффективном источнике их возбуждения. Выражения, определяющие эффективность генерации гармоник при больших углах падения лазерного излучения ($\rho > 1$), получены с учетом релятивистской нелинейности электромагнитных полей и скоростей электронов в окрестности критической плотности плазмы. Вычислен нелинейный ток, определяющий источник генерации электромагнитных полей, излучаемых плазмой

Таблица 4.3. Отношения интенсивностей гармоник с номерами $n = 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15$, полученные в релятивистской теории (I_n) и нелинейной нерелятивистской теории [14] (I_n^{NR}) при $I_0 = 10^{17}$ Вт/см², $T = 2$ кэВ и $\theta = \theta_{\min}$.

L	I_2/I_2^{NR}	I_5/I_5^{NR}	I_7/I_7^{NR}	I_9/I_9^{NR}	I_{11}/I_{11}^{NR}	I_{13}/I_{13}^{NR}	I_{15}/I_{15}^{NR}
30λ	10^{-1}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

в вакуум, рассчитаны спектральные и угловые характеристики вторичного излучения. Продемонстрирован эффект выполаживания спектральной кривой с ростом плотности потока лазерного излучения, который является следствием учета как нерелятивистской нелинейности движения электронов плазмы, так и релятивистской нелинейности. Пологие спектры высших гармоник при умеренных интенсивностях лазерного излучения наблюдались экспериментально, например, в [51]. Поскольку значительное выполаживание спектров соответствует сильно нелинейной моде плазменных колебаний, экспериментально наблюдаемое усиление высших гармоник может указывать на приближение к режиму опрокидывания колебаний электронной компоненты плазмы.

Что касается абсолютных величин интенсивностей I_n гармоник с различными номерами, то здесь сравнение результатов релятивистской и нерелятивистской [14] теорий при фиксированной плотности потока лазерного излучения I_0 показывает, что в области сильной нелинейности нерелятивистская теория существенно – на порядки – завышает значения I_n . Мы показали, что понижение эффективности генерации гармоник при переходе к релятивистской теории связано с эффектом подавления релятивистски-нелинейного резонансного поглощения, который, в свою очередь, является следствием фазовой модуляции релятивистских плазменных колебаний. В таблице 4.3 приведены значения отношений интенсивностей гармоник с номерами $n = 2, 5, 12, 15$, демонстрирующие отличия в интенсивностях, вычисленных в релятивистской и нерелятивистской [14] теориях (физические параметры соответствуют Рис. 4.2).

Согласно построенной теории гармоника высшего порядка генерируются наиболее эффективно вблизи порога опрокидывания плазменных колебаний

при характерных масштабах неоднородности плотности плазмы $L \sim 10\lambda$. В сильно нелинейном режиме формируются медленно затухающие энергетические спектры $I_n \propto n^{-\alpha}$, $\alpha > 1$. Это происходит уже при интенсивностях поля

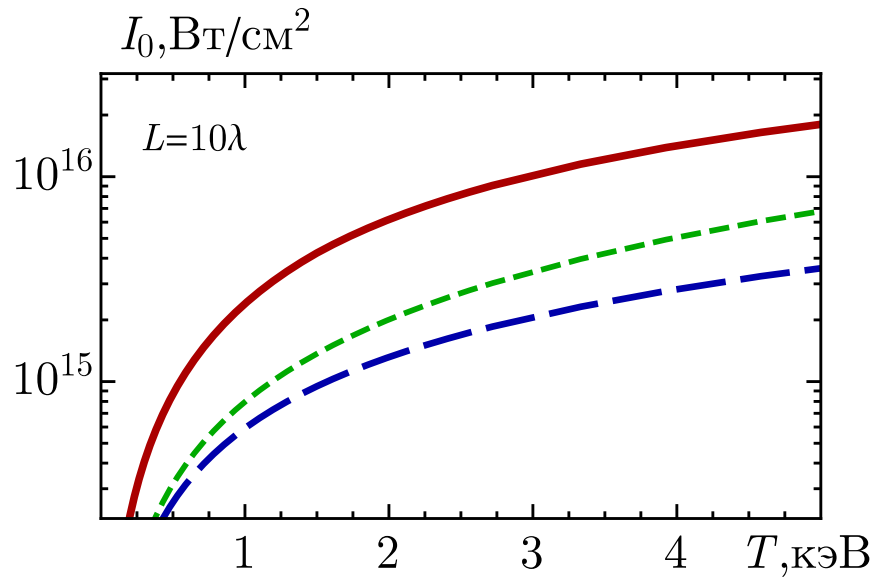


Рис. 4.7. Область применимости теории (гидродинамической модели) на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ для CO_2 -лазера и масштаба неоднородности плотности плазмы $L = 10\lambda$. Сплошная красная кривая обозначает границу опрокидывания в релятивистской гидродинамике с учетом нелинейной перенормировки на амплитуду поля плазменного резонанса. Синяя штриховая линия отвечает релятивистской границе опрокидывания, но без учета нелинейной перенормировки. Зеленая пунктирная кривая соответствует порогу опрокидывания в нерелятивистской теории [14]. Угол падения равен минимальному $\theta = \theta_{min} = 14.5^\circ$.

лазерной накачки, которые по современным стандартам можно назвать небольшими или умеренными (от $I_0 = 10^{17} \text{ Вт/см}^2$ до 10^{18} Вт/см^2 для Nd-лазера), в отличие от результатов работ [63, 130], где формирование степенных спектров вторичного излучения из плазмы соответствует релятивистской и ультрарелятивистской интенсивностям лазерного излучения.

Мы проанализировали формальное условие слабой нелинейности, рассчитанное в [10] и показали, что оно не выполняется для рассматриваемых параметров лазерно-плазменной системы. Например, в случае неодимового лазера, как следует из [10], область применимости слабо нелинейной теории генерации

второй гармонике описывается неравенством $I_0 < 5 \times 10^{15}$ Вт/см² для $L = 10\lambda$, $T = 3$ кэВ, и находится за пределами интересующего нас диапазона интенсивностей лазера $I_0 \simeq 10^{17} \div 10^{18}$ Вт/см². При этом оценка интенсивности второй гармонике при небольших лазерных интенсивностях до $I_0 \simeq 10^{16}$ Вт/см² по теории возмущений [8, 10] не отличается от интенсивностей, рассчитанных в рамках релятивистской теории (см. Табл. 4.2). Этот результат подтверждает вывод в [10] о слабой зависимости эффективности генерации второй гармонике от ширины резонанса (эффективной частоты столкновений) в области малой нелинейности. Однако дальнейший рост интенсивности лазерного поля приводит к существенной разнице между интенсивностью I_2^{PT} второй гармонике, вычисленной в [10] и интенсивностью I_2 , полученной в рамках релятивистской теории. А именно, теория возмущений дает существенно завышенные значения I_2^{PT} . Аналогичный вывод следует из сопоставления спектров высших гармоник, полученных в нашей теории, со спектрами в слабо нелинейной теории [11]. Вследствие расходимости ряда теории возмущений [11] можно говорить о ее неприменимости для оценки интенсивностей высших гармоник в области лазерно-плазменных параметров, где сильна нелинейность. В случае Nd-лазера эта область соответствует интенсивностям $I_0 \simeq 5 \times 10^{16} \div 10^{17}$ Вт/см² при характерных масштабах неоднородности $L \simeq 10\lambda$.

Результаты представленной в диссертации теории хорошо согласуются с медленно убывающими спектрами гармоник СО₂-лазера, наблюдаемыми в экспериментах [51, 124]. Действительно, как показано на Рис. 4.7, при интенсивности СО₂-лазера $I_0 \simeq 10^{15}$ Вт/см² и температуре электронов $T \simeq 1$ кэВ, нелинейные эффекты в окрестности критической плотности настолько сильны, что могут привести к опрокидыванию плазменных колебаний. Вблизи такой интенсивности наша теория предсказывает спектры гармоник, характеризующиеся слабой зависимостью от n . Так, для интенсивностей падающего излучения $I_0 \simeq 10^{15}$ Вт/см² при $L = 10\lambda$ и $T \simeq 1$ кэВ получаем $I_2/I_3 \approx 2$, $I_3/I_4 \approx 1.7$ и $I_5/I_6 \approx 1.4$, что соответствует экспериментальным результатам [51]. В случае, когда $I_0 \simeq 10^{14} \div 10^{15}$ Вт/см², наша теория дает $I_2/I_3 \approx 9$, $I_3/I_4 \approx 6.5$ и $I_5/I_6 \approx 5$, что хорошо согласуется с [124], где уменьшение энергии гармоник с ростом n оценивалось как $I_n/I_{n+1} \approx 6$.

Заключение

Подведем итог диссертационной работы. Построена аналитическая теория релятивистского плазменного резонанса в неоднородной плазме. С использованием метода ренормгрупповых симметрий найдены решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие стационарную структуру резонансно-усиленного электрического поля и скорости электронов в окрестности критической плотности неоднородной плазмы с учетом двух типов нелинейности движения электронов – нерелятивистской (конвективной) и релятивистской. Проведен подробный анализ решения, а именно исследованы пространственно-временные и спектральные характеристики резонансно-усиленного электрического поля; показано, что полученные решения описывают электрическое поле плазменного резонанса с богатым спектральным составом. На языке безразмерных управляющих параметров задачи найдены условия опрокидывания стационарных релятивистских плазменных колебаний вблизи критической плотности, которые задают границы применимости используемой здесь гидродинамической модели. Выяснены роли как нерелятивистской, так и релятивистской нелинейностей в опрокидывании электронных колебаний, а также продемонстрирован эффект фазовой модуляции нелинейных колебаний в релятивистском режиме и показано незначительное изменение ширины плазменного резонанса по сравнению с шириной в линейной теории [1, 3].

На основе представлений об электромагнитном поле в области плазменного резонанса как об эффективном источнике излучения из плазмы, построены аналитические теории релятивистски-нелинейного резонансного поглощения и генерации высших гармоник в неоднородной плазме. Сформулированы и решены уравнения волнового типа с нелинейным источником в правой части, которые определяют амплитуду магнитного поля на основной (лазерной) частоте и аппли-

туды высших гармоник, излучаемых из плазмы в вакуум. Найдена нелинейная связь амплитуды магнитного поля в точке плазменного резонанса с амплитудой поля лазерной накачки и выявлено насыщение амплитуды поля релятивистского плазменного резонанса, т. е. замедление роста резонансной амплитуды с увеличением плотности потока энергии лазерного излучения. С помощью найденной связи совершен переход от безразмерных управляющих параметров к естественным физическим параметрам лазерно-плазменной системы, на языке которых уточнены границы применимости релятивистской гидродинамики. Так, в широком диапазоне параметров, определены границы опрокидывания на плоскости «температура плазмы – лазерная интенсивность». При сравнении с результатами нелинейной нерелятивистской теории [14] обнаружен сдвиг границы опрокидывания по интенсивности лазерного излучения в область больших интенсивностей, что является следствием насыщения амплитуды поля релятивистского плазменного резонанса.

Получены аналитические выражения для коэффициента релятивистски-нелинейного резонансного поглощения при больших и малых углах падения лазерного излучения на плазму, которые являются функциями четырех управляющих физических параметров: лазерной интенсивности, масштаба неоднородности плотности плазмы, ее температуры и угла падения лазерного излучения на плазму. Продемонстрирован эффект подавления поглощения с ростом потока энергии лазерного излучения за счет фазовой модуляции релятивистских плазменных колебаний, что находится в качественном согласии с результатами работ [38, 39], проведенных в рамках численного моделирования. Показано, что подавление нелинейного резонансного поглощения с ростом лазерной интенсивности проявляется наиболее существенно в случае протяженной плазменной короны, т. е. при масштабах неоднородности плотности плазмы в десятки длин волн лазера. Анализ асимптотического поведения коэффициента поглощения при больших и малых углах падения лазерного излучения на плазму позволил выдвинуть предположение об асимметричности влияния релятивистской нелинейности на угловую функцию коэффициента резонансного поглощения. А именно, мы заключаем, что при больших углах падения поглощение подавляется существенно, чем при малых. Такая асимметричность может означать, что рост интенсивности поля накачки приводит не только к уменьшению

релятивистски-нелинейного резонансного поглощения в широком диапазоне углов падения, но и к смещению максимума поглощения в область меньших углов. Также исследованы свойства квазистатического электрического поля, генерируемого в окрестности критической плотности плазмы, и показано, что форма пространственного распределения поля при переходе к релятивистской теории остается такой же, как предсказывают слабо [17] и сильно нелинейная нерелятивистская [14] теории: поле биполярно и меняет знак в точке плазменного резонанса. При этом релятивистская нелинейность заметно влияет на амплитуду электростатического поля, понижая его максимальные значения в сравнении с результатами сильно нелинейной нерелятивистской теории.

Получена формула для коэффициента преобразования в гармонику вторичного излучения из плазмы с произвольным номером $n \geq 2$ при больших углах падения лазерного излучения на плазму и с ее помощью исследованы спектральные кривые для различных значений управляющих параметров лазерно-плазменной системы. Показано выполаживание спектральной кривой с ростом интенсивности лазерного излучения, которое может приводить к формированию спектров со степенной зависимостью интенсивности гармоник от их номера n вблизи границы опрокидывания плазменных колебаний. Рассмотрена зависимость эффективности генерации от угла падения лазерного излучения на плазму и проведено сравнение с результатами сильно нелинейной нерелятивистской теории генерации гармоник [14], а также с теорией возмущений для генерации второй гармоники [8, 10] и для генерации высших гармоник [11]. В результате сравнения уточнены границы применимости построенных ранее слабо и сильно нелинейных теорий генерации гармоник. Кроме того, мы показали, что результаты нашей теории находятся в хорошем согласии с результатами экспериментов [51, 124], в которых были получены медленно убывающие спектры гармоник из плазмы при небольших интенсивностях $I_0 \simeq 10^{15}$ Вт/см² излучения СО₂-лазера.

Основные научные результаты

Перечислим основные результаты, которые отвечают положениям диссертации, выносимым на защиту:

1. Построена аналитическая теория резонансного поглощения и генерации гармоник лазерного излучения в неоднородной плазме с учетом релятивистски-нелинейных эффектов в окрестности критической плотности плазмы, позволяющая вычислять коэффициент нелинейного резонансного поглощения и спектрально-угловые характеристики излучения из плазменного резонанса в диапазоне лазерных интенсивностей до $I_0\lambda^2 = 10^{18} \text{ Вт/см}^2 \times \text{мкм}^2$ (λ – длина волны лазерного света, нормированная на мкм).
2. Получен коэффициент нелинейного резонансного поглощения как функция четырех управляющих лазерно-плазменных параметров: лазерной интенсивности I_0 , масштаба неоднородности плазмы L , её температуры T и угла θ падения лазерного излучения на плазму.
3. Сравнение с результатами линейной теории резонансного поглощения показало, что учет релятивистски-нелинейных эффектов в плазменном резонансе приводит к уменьшению коэффициента поглощения с ростом лазерной интенсивности и сдвигу его максимума в область малых углов падения лазерного излучения на плазму.
4. Продемонстрировано формирование спадающих по степенному закону энергетических спектров излучения из плазмы вблизи порога опрокидывания резонансно-усиленных плазменных колебаний. Расчет коэффициентов конверсии лазерного излучения в гармоники показал, что генерация высших гармоник наиболее эффективна при градиентных масштабах плазмы порядка 10λ и в диапазоне интенсивностей лазерного излучения $I_0\lambda^2 = 5 \times 10^{17} \div 10^{18} \text{ Вт/см}^2 \times \text{мкм}^2$.
5. Показано, что при лазерных потоках, не превышающих $I_0\lambda^2 = 10^{18} \text{ Вт/см}^2 \times \text{мкм}^2$, генерируемое в окрестности критической плотности неоднородной плазмы квазистатическое электрическое поле не превышает величины в несколько МВ/см, что ограничивает максимальную энергию ускоренных электронов на уровне нескольких десятков кэВ.

Благодарности

Выражаю глубокую признательность моему научному руководителю, доктору физ.-мат. наук, профессору Валерию Юрьевичу Быченкову, под чутким и мудрым руководством которого была выполнена настоящая диссертационная работа. Именно ему я обязан интереснейшей темой диссертации, полученными знаниями и навыками научной работы, возможностью постоянного роста и совершенствования. Я глубоко признателен моему консультанту, наставнику и соавтору, доктору физ.-мат. наук Владимиру Федоровичу Ковалеву, который на протяжении всего пути помогал справляться с математическими трудностями, и работа с которым существенно расширила мой научный кругозор. Также я благодарен коллегам по Сектору лазерно-плазменной физики высоких энергий за возможность совместного участия в научных проектах и грантах, и особенно – Андрею Владимировичу Брантову и Сергею Геннадьевичу Бочкареву за разнообразную помощь и поддержку. Выражаю признательность сотрудникам Отделения квантовой радиофизики им. Н. Г. Басова ФИАН, заинтересованно обсуждавшим результаты работы, и в особенности – Андрею Алексеевичу Ионину, Сергею Юрьевичу Гуськову, Николаю Николаевичу Демченко и Леониду Владимировичу Селезневу, чьи полезные замечания помогли улучшить работу. Хочу поблагодарить Евгения Александровича Говраса за помощь в ходе обучения в аспирантуре и в процессе освоения системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Особую благодарность выражаю дорогим родителям за их заботу, неоценимую поддержку и понимание, без которых эта работа не состоялась бы.

Список литературы

- [1] Денисов Н. Г. Об одной особенности поля электромагнитной волны, распространяющейся в неоднородной плазме // ЖЭТФ. 1956. Т. 31, № 10. С. 609–619.
- [2] Гершман Б. Н., Гинзбург В. Л., Денисов Н. Г. Распространение электромагнитных волн в плазме (ионосфере) // УФН. 1957. Т. 61. С. 561–612.
- [3] Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. С. 321–344.
- [4] Силин В. П. Поглощение излучения турбулентной плазмой // УФН. 1985. Т. 145, № 2. С. 225–253.
- [5] Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979. С. 31–43.
- [6] Theory and simulation of resonant absorption in a hot plasma / D. W. Forslund, J. M. Kindel, Kenneth Lee [и др.] // Physical Review A. 1975. Feb.. Т. 11, № 2. С. 679–683.
- [7] Pert G J. The analytic theory of linear resonant absorption // Plasma Physics. 1978. Mar.. Т. 20, № 3. С. 175–188.
- [8] Ерохин Н. С., Захаров В. Е., Моисеев С. С. Генерация второй гармоники при падении электромагнитной волны на неоднородную плазму // ЖЭТФ. 1969. Т. 29, № 1. С. 179–185.
- [9] Виноградов А. В., Пустовалов В. В. Генерация второй гармоники в неоднородной плазме // ЖЭТФ. 1972. Т. 63, № 3(9). С. 940–949.

-
- [10] Erokhin N.S., Moiseev S.S., Mukhin V.V. Theory of second-harmonic generation in an inhomogeneous hot plasma // Nuclear Fusion. 1974. Jun.. Т. 14, № 3. С. 333–339.
- [11] Владимирский А. Б., Силин В. П. Теория генерации высших гармоник в неоднородной плазме // Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 2. С. 354–362.
- [12] Генерация второй гармоники в лазерной плазме (обзор) / Н. Г. Басов, В. Ю. Быченков, О. Н. Крохин [и др.] // Квантовая электроника. 1979. Т. 6, № 9. С. 1829–1865.
- [13] Троценко Н. П. Сильно нелинейная теория плазмы без столкновений на основе диэлектрических проницаемостей. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук М. 1983. 184 с.
- [14] Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. Функциональная автомодельность в одной из задач теории плазмы с электронной нелинейностью // ТМФ. 1989. Т. 81, № 1(10). С. 69–85.
- [15] Teubner U., Gibbon P. High-order harmonics from laser-irradiated plasma surfaces // Reviews of Modern Physics. 2009. Apr.. Т. 81, № 2. С. 445–479.
- [16] Laser-Pulse-Induced Second-Harmonic and Hard X-Ray Emission: Role of Plasma-Wave Breaking / A. S. Sandhu, G. R. Kumar, S. Sengupta [и др.] // Physical Review Letters. 2005. Jul.. Т. 95, № 2.
- [17] Генерация статических электрических полей при воздействии на плазму мощного электромагнитного излучения / А. Ш. Абдуллаев, Ю. М. Алиев, В. Ю. Быченков [и др.] // Препринт ФИАН СССР. 1986. № 8. С. 1–12.
- [18] Albritton James, Koch Paul. Cold plasma wavebreaking: Production of energetic electrons // Physics of Fluids. 1975. Т. 18, № 9. С. 1136.
- [19] DeNeef Peter. Electron Acceleration during Resonant Absorption // Physical Review Letters. 1977. Oct.. Т. 39, № 16. С. 997–1000.
- [20] Forslund D. W., Kindel J. M., Lee K. Theory of Hot-Electron Spectra at High Laser Intensity // Physical Review Letters. 1977. Aug.. Т. 39, № 5. С. 284–288.

-
- [21] Буланов С. В., Коврижных Л. М., Сахаров А. С. Ленгмюровские колебания конечной амплитуды в области плазменного резонанса // ЖЭТФ. 1977. Т. 72, № 5. С. 1869–1873.
- [22] Hot Electrons Produced by Resonance Absorption in a Microwave-Plasma Interaction / Ann Y. Lee, Y. Nishida, N. C. Luhmann [и др.] // Physical Review Letters. 1982. Feb.. Т. 48, № 5. С. 319–322.
- [23] Gibbon Paul. Efficient production of fast electrons from femtosecond laser interaction with solid targets // Physical Review Letters. 1994. Aug.. Т. 73, № 5. С. 664–667.
- [24] Gibbon P, Forster E. Short-pulse laser - plasma interactions // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1996. Jun.. Т. 38, № 6. С. 769–793.
- [25] Эффективность генерации высокоионизованных атомов в условиях резонансного поглощения излучения СО₂-лазера / Гуськов С. Ю., Демченко Н. Н., Макаров К. Н. [и др.] // Квантовая электроника. 2011. Т. 41, № 10. С. 886–894.
- [26] Басов Н. Г., Крохин О. Н. Условия разогрева плазмы излучением оптического генератора // ЖЭТФ. 1964. Т. 46. в. 1. С. 171–175.
- [27] Dawson J. M. On the production of plasma by giant pulse lasers // Phys. Fluids/ 1964. Т. 7 № 7. С. 981–987.
- [28] Max C. E. Physic of the coronal plasma in laser fusion targets, Les Houches, Session XXXIV, 1980, Laser-Plasma Interaction, eds. R. Balian, J. C. Adam, North-Holland Publishing Company, 1982.
- [29] Ignition and high gain with ultrapowerful lasers / Max Tabak, James Hammer, Michael E. Glinsky [и др.] // Physics of Plasmas. 1994. May. Т. 1, № 5. С. 1626–1634.
- [30] Direct-drive inertial confinement fusion: A review / R. S. Craxton, K. S. Anderson, T. R. Boehly [и др.] // Physics of Plasmas. 2015. Nov.. Т. 22, № 11. С. 110501.

-
- [31] Термоядерные мишени прямого облучения лазерным импульсом мегаджоульного уровня / Бельков С. А., Бондаренко С. В., Вергунова Г. А. [и др.] // ЖЭТФ. 2015. Т. 148. в. 4. С. 784–798.
- [32] Influence of laser induced hot electrons on the threshold for shock ignition of fusion reactions / A. Colaitis, X. Ribeyre, E. Le Bel [и др.] // Physics of Plasmas. 2016. Jul.. Т. 23, № 7. С. 072703.
- [33] Origins and Scaling of Hot-Electron Preheat in Ignition-Scale Direct-Drive Inertial Confinement Fusion Experiments / M. J. Rosenberg, A. A. Solodov, J. F. Myatt [и др.] // Physical Review Letters. 2018. Jan.. Т. 120, № 5.
- [34] Демченко Н. Н. Численное моделирование поглощения лазерного излучения в плазме с учетом резонансного механизма и генерации быстрых электронов для условий зажигания термоядерной мишени // ЖЭТФ. 2020. Т. 157. в. 6. С. 1120–1130.
- [35] Hot electron retention in laser plasma created under terawatt subnanosecond irradiation of Cu targets / T. Pisarczyk, M. Kalal, S. Yu. Gus'kov [и др.] // Plasma Phys. Control. Fusion 2020. Т. 62. С. 115020.
- [36] Speziale Thomas, Catto P. J. Linear wave conversion in an unmagnetized, collisionless plasma // Physics of Fluids. 1977. Т. 20, № 6. С. 990.
- [37] Short-pulse laser absorption in very steep plasma density gradients / Hong bo Cai, Wei Yu, Shao ping Zhu [и др.] // Physics of Plasmas. 2006. Sep. Т. 13, № 9. С. 094504.
- [38] Intensity-dependent resonance absorption in relativistic laser-plasma interaction / Hui Xu, Zheng-Ming Sheng, Jie Zhang [и др.] // Physics of Plasmas. 2006. Dec.. Т. 13, № 12. С. 123301.
- [39] Bulk resonance absorption induced by relativistic effects in laser-plasma interaction / Wen-Jun Ding, Z.-M. Sheng, J. Zhang [и др.] // Physics of Plasmas. 2009. Apr.. Т. 16, № 4. С. 042315.

-
- [40] Rajouria Satish Kumar, K Magesh Kumar K, Tripathi V. K. Nonlinear resonance absorption of laser in an inhomogeneous plasma // *Physics of Plasmas*. 2013. Aug.. T. 20, № 8. C. 083112.
- [41] Estabrook K. G., Valeo E. J., Kruer W. L. Two-dimensional relativistic simulations of resonance absorption // *Physics of Fluids*. 1975. T. 18, № 9. C. 1151.
- [42] Wilks S. C. Simulations of ultraintense laser-plasma interactions // *Physics of Fluids B: Plasma Physics*. 1993. Jul.. T. 5, № 7. C. 2603–2608.
- [43] Gibbon P, Andreev A A, Platonov K Yu. A kinematic model of relativistic laser absorption in an overdense plasma // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2012. Mar.. T. 54, № 4. C. 045001.
- [44] Mendel C. W., Olsen J. N. Charge-Separation Electric Fields in Laser Plasmas // *Physical Review Letters*. 1975. Apr.. T. 34, № 14. C. 859–862.
- [45] Donaldson T.P, Ladrach P, Wagli P. Child's law for fast ion emission from a laser-generated plasma // *Physics Letters A*. 1979. Apr.. T. 70, № 5-6. C. 419–421.
- [46] Yabe T., Mima K., Yoshikawa K. // *Jpn. J. Appl. Phys.* 1981. T. 20, № 269.
- [47] Estabrook Kent, Kruer W. L. Properties of Resonantly Heated Electron Distributions // *Physical Review Letters*. 1978. Jan.. T. 40, № 1. C. 42–45.
- [48] Adam J. C., Heron A. Parametric instabilities in resonant absorption // *Physics of Fluids*. 1988. Sep. T. 31, № 9. C. 2602–2614.
- [49] Generation of high-order spatially coherent harmonics from solid targets by femtosecond laser pulses / A. Tarasevitch, A. Orisch, D. von der Linde [и др.] // *Physical Review A*. 2000. Jul.. T. 62, № 2.
- [50] Three-halves harmonic emission from femtosecond laser produced plasmas with steep density gradients / L. Veisz, W. Theobald, T. Feuerer [и др.] // *Physics of Plasmas*. 2004. Jun.. T. 11, № 6. C. 3311–3323.

-
- [51] Carman R. L., Rhodes C. K., Benjamin R. F. Observation of harmonics in the visible and ultraviolet created in CO₂-laser-produced plasmas // Physical Review A. 1981. Nov.. Т. 24, № 5. С. 2649–2663.
- [52] Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. Генерация гармоник горячей лазерной плазмой при укрупнении профиля возбуждаемой ленгмюровской волны // Препринт ФИАН. 1988. № 56. С. 35.
- [53] Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. Лазерный поток опрокидывания плазменных волн // Квантовая электроника. 1988. Т. 15, № 4. С. 726–731.
- [54] Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. Функциональная автомодельность в нелинейной теории плазмы // КСФ ФИАН СССР. 1989. № 3. С. 41–43.
- [55] Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. Сильнонелинейная генерация гармоник излучения лазерной плазмой // Физика плазмы. 1989. Т. 15, № 1. С. 47–54.
- [56] Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. Спектральный состав излучения гармоник неоднородной плазмы в поле сильнонелинейной волны // Физика плазмы. 1989. Т. 15, № 5. С. 563–568.
- [57] Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. Температурные осцилляции гармоник излучения, генерируемых лазерной плазмой // Квантовая электроника. 1989. Т. 16, № 11. С. 2261–2266.
- [58] Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. Группа симметрии нелинейных одномерных уравнений электронной плазмы // КСФ ФИАН СССР. 1991. № 2. С. 29–32.
- [59] Strickland D., Mourou G. Compression of amplified chirped optical pulses // Opt. Commun. 1985. Vol. 56, no. 3. С. 219.
- [60] Повышение частоты электромагнитного излучения при взаимодействии с нелинейными плазменными волнами / С. В. Буланов, И. Н. Иновенков, В. И. Кирсанов [и др.] // КСФ ФИАН. 1991. Т. 6. С. 9–11.

-
- [61] Релятивистские зеркала в плазме – новые результаты и перспективы / С. В. Буланов, Т. Ж. Есиркепов, М. Кандо [и др.] // УФН. 2013. Т. 183, № 5. С. 449–486.
- [62] Relativistic Generation of Isolated Attosecond Pulses in a Focal Volume / N. M. Naumova, J. A. Nees, I. V. Sokolov [и др.] // Physical Review Letters. 2004. Feb.. Т. 92, № 6.
- [63] Attosecond pulse generation in the relativistic regime of the laser-foil interaction: The sliding mirror model / Alexander S. Pirozhkov, Sergei V. Bulanov, Timur Zh. Esirkeпов [и др.] // Physics of Plasmas. 2006. Jan.. Т. 13, № 1. С. 013107.
- [64] Single-cycle high-intensity electromagnetic pulse generation in the interaction of a plasma wakefield with regular nonlinear structures / S. S. Bulanov, T. Zh. Esirkeпов, F. F. Kamenets [и др.] // Physical Review E. 2006. Mar.. Т. 73, № 3.
- [65] Bulanov Sergei V., Esirkeпов Timur, Tajima Toshiki. Light Intensification towards the Schwinger Limit // Physical Review Letters. 2003. Aug.. Т. 91, № 8. 32
- [66] Flying mirror model for interaction of a super-intense nonadiabatic laser pulse with a thin plasma layer: Dynamics of electrons in a linearly polarized external field / Victor V. Kulagin, Vladimir A. Cherepenin, Min Sup Hur [и др.] // Physics of Plasmas. 2007. Nov.. Т. 14, № 11. С. 113101.
- [67] ter Vehn J. Meyer, Wu H.-C. Coherent Thomson backscattering from laser-driven relativistic ultra-thin electron layers // The European Physical Journal D. 2009. Mar.. Т. 55, № 2. С. 433–441.
- [68] Ensemble of ultra-high intensity attosecond pulses from laser-plasma interaction / S.S. Bulanov, A. Maksimchuk, K. Krushelnick [и др.] // Physics Letters A. 2010. Jan.. Т. 374, № 3. С. 476–480.
- [69] Relativistic spherical plasma waves / S. S. Bulanov, A. Maksimchuk, C. B. Schroeder [и др.] // Physics of Plasmas. 2012. Feb.. Т. 19, № 2. С. 020702.

-
- [70] Boosted High-Harmonics Pulse from a Double-Sided Relativistic Mirror / Т. Zh. Esirkepov, S. V. Bulanov, M. Kando [и др.] // Physical Review Letters. 2009. Jul.. Т. 103, № 2.
- [71] Mourou Gerard, Tajima Toshiki. More Intense, Shorter Pulses // Science. 2011. Jan.. Т. 331, № 6013. С. 41–42.
- [72] Breaking of Large-Amplitude Waves as a Result of Relativistic Electron-Mass Variation / J. F. Drake, Y. C. Lee, K. Nishikawa [и др.] // Physical Review Letters. 1976. Jan.. Т. 36, № 4. С. 196–200.
- [73] Милютин С. В., Фролов А. А., Чижонков Е. В. Пространственное опрокидывание нелинейных плазменных колебаний // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14. С. 295–305.
- [74] Фролов А. А., Чижонков Е. В. О релятивистском опрокидывании плазменных колебаний в плазменном слое // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. С. 537–548.
- [75] Давыдова Т. А. Динамика процессов возбуждения, трансформации и затухания поверхностных волн // Физика плазмы. 1981. Т. 7, № 4. С. 291.
- [76] Каплан А. Е. Теория явления гистерезисного отражения и преломления света на границе нелинейной среды // ЖЭТФ. 1977. Т. 72, в. 5. С. 1710–1726.
- [77] Ahedo E, Sanmartin J R. Resonant absorption in a plasma step profile // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1987. Mar.. Т. 29, № 3. С. 419–432.
- [78] Ковалев В. Ф., Ширков Д. В. Ренормгрупповые симметрии для решений нелинейных краевых задач // УФН. 2008. Т. 178. С. 849–865.
- [79] Shirkov D. V. Several topics on renorm-group theory // “Renormalization group-91”, edited by D. V. Shirkov and V. B. Priezev, WS, Singapore. 1992. С. 1–10.

-
- [80] Kovalev V. F., Krivenko S. V., Pustovalov V. V. The renormalization group method based on group analysis // “Renormalization group-91”, edited by D. V. Shirkov and V. B. Priezzev, WS, Singapore. 1992. С. 300—314.
- [81] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. О ренормализационной группе в квантовой электродинамике // Доклады Академии Наук СССР. 1955. Т. 103. С. 391–394.
- [82] Bogoliubov N. N., Shirkov D. V. Charge Renormalization Group in Quantum Field Theory // Nuovo Cim. 1956. Т. 3. С. 845–863.
- [83] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Мультипликативная ренормализационная группа в квантовой теории поля // ЖЭТФ. 1956. Т. 3. С. 57.
- [84] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. 4-е изд. М.: Наука 1984. 600 с.
- [85] Жекулин Л. А. Исследование распространения электромагнитной волны в неомогенной ионизированной среде // ЖЭТФ. 1934. Т. 4, № 1. С. 76–95.
- [86] Жекулин Л. А. Отражение импульса от неоднородного ионизированного слоя // Известия Академии Наук СССР. 1940. Т. 4, № 3. С. 409–414.
- [87] Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн. ГИТЛ. С. 883.
- [88] Forsterling K. Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem geschichteten Medium der Mitwirkung eines Magnetfeldes bei schiefer Inzidenz // Arch. Elektr. Uebertr. 1949. Т. 3. С. 115–120.
- [89] Forsterling K. Uber die entstehung von oberwellen in der ionosphere. // Journ. Atm. Terr. Phys. 1951. Т. 2. С. 22–31.
- [90] Hirsch Peter, Shmoys Jerry. E-mode propagation in a plane-stratified plasma // J. Res. Natl. Bur. Stand., Sect. D. 1965. Т. 69, № 4. С. 521–527.
- [91] Hirsch Peter. Transient E-Mode Propagation in a Plane-Stratified Plasma // Radio Science. 1967. Apr.. Т. 2, № 4. С. 407–413.

-
- [92] Пилия А. Д. О трансформации волн в неоднородной плазме // ЖТФ. 1966. Т. 36, № 5. С. 818–826.
- [93] Омельченко А. Я., Степанов К. Н. О поглощении и трансформации электромагнитных волн в резонансном слое при наклонном падении на неоднородную плазму // УФЖ. 1967. Т. 12. № 9. С. 1445–1453.
- [94] wei Tang Ting. Propagation of Oblique E Waves in a Warm Plane Stratified Plasma // Radio Science. 1970. Jan.. Т. 5, № 1. С. 111–119.
- [95] Омельченко А. Я., Панченко В. И., Степанов К. Н. О поглощении электромагнитных волн в линейном слое в области плазменного резонанса // Известия ВУЗов, Радиофизика. 1971. Т. 14. С. 10.
- [96] Kelly D. L., Banos Jr. A. // UCLA Plasma Physics Group Report NO. PPG-170. 1974.
- [97] Budden K. G. Radio Waves in the ionosphere. Cambridge University, Cambridge, England. С. 348.
- [98] Hinkel-Lipsker Denise E., Fried Burton D., Morales G. J. Analytic expression for mode conversion of Langmuir and electromagnetic waves // Physical Review Letters. 1989. Jun.. Т. 62, № 23. С. 2680–2682.
- [99] Hinkel-Lipsker D. E., Fried B. D., Morales G. J. Conversion of electrostatic and electromagnetic waves in a plasma at the peak of a parabolic density profile // Physical Review Letters. 1991. Apr.. Т. 66, № 14. С. 1862–1865.
- [100] Hinkel-Lipsker D. E., Fried B. D., Morales G. J. Analytic expressions for mode conversion in a plasma at the peak of a parabolic density profile // Physics of Fluids B: Plasma Physics. 1992. Mar.. Т. 4, № 7. С. 1772–1787.
- [101] Hinkel-Lipsker D. E., Fried B. D., Morales G. J. Analytic expressions for mode conversion in a plasma with a parabolic density profile: Generalized results // Physics of Fluids B: Plasma Physics. 1993. Jun.. Т. 5, № 6. С. 1746–1753.
- [102] Гильденбург В. Б. Нелинейные эффекты в неоднородной плазме // ЖЭТФ. 1964. Т. 46, № 3. С. 2156–2164.

-
- [103] Жаров А. А., Кондратьев И. Г., Миллер М. А. О резонансном поглощении электромагнитных волн в неоднородной плазме // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 25. С. 355-357; Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 261.
- [104] Гильденбург В. Б., Литвак А. Г., Петрова Т. А., Фейгин А. М. Резонансное поглощение сильной электромагнитной волны в неоднородной плазме // Физика плазмы. 1981. Т. 7, в. 4. С.732-738.
- [105] Алиев Ю. М., А. А. Жаров, И. Г. Кондратьев, А. А. Фролов. О резонансном поглощении интенсивного электромагнитного излучения в неоднородной плазме // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42, в. 11. С.437-439.
- [106] Ахиезер А. И., Любарский Г. Я. К нелинейной теории колебаний электронной плазмы // Доклады Академии Наук СССР. 1951. Т. 80, № 2. С. 193–195.
- [107] Ахиезер А. И., Половин Р. В. К теории волновых движений электронной плазмы // ЖЭТФ. 1956. Т. 30, № 5. С. 915–928.
- [108] Dawson John M. Nonlinear Electron Oscillations in a Cold Plasma // Physical Review. 1959. Jan.. Т. 113, № 2. С. 383–387.
- [109] Coffey T. P. Breaking of Large Amplitude Plasma Oscillations // Physics of Fluids. 1971. Т. 14, № 7. С. 1402.
- [110] Kruer William L. Wavebreaking amplitudes in warm, inhomogeneous plasmas // Physics of Fluids. 1979. Т. 22, № 6. С. 1111.
- [111] Цинцадзе Н. Л. Breaking of Large Amplitude Plasma Oscillations // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 1251.
- [112] Bulanov S. V., Naumova N. M., Pegoraro F. Interaction of an ultrashort, relativistically strong laser pulse with an overdense plasma // Physics of Plasmas. 1994. Mar.. Т. 1, № 3. С. 745–757.
- [113] Second-harmonic generation in laser produced plasmas / A. Caruso, A. De Angelis, G. Gatti [и др.] // Physics Letters A. 1970. Sep. Т. 33, № 1. С. 29–30.

-
- [114] Decroisette M., Meyer B., Piar G. OBSERVATION DE L'HARMONIQUE 2 DANS UN PLASMA CREE PAR LASER // Le Journal de Physique Colloques. 1971. Oct.. Т. 32, № C5. С. C5b-119-C5b-120.
- [115] Рупасов А. А., Цапенко В. П., Шиканов А. С. // Препринт ФИАН СССР. 1972. № 94.
- [116] Виноградов А. В., Пустовалов В. В. Генерация второй гармоники в неоднородной лазерной плазме // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. С. 940-949.
- [117] Нелинейная параметрическая генерация мощного излучения в плазме / В. В. Пустовалов, В. П. Силин, А. Н. Стародуб [и др.] // Доклад на II Международной конф. по теории плазмы. – Киев. 1974.
- [118] Saleres Alain, Decroisette Michel, Patou Claude. Plasma density scale length determination in a deuterium, laser generated plasma // Optics Communications. 1975. Mar.. Т. 13, № 3. С. 321-323.
- [119] А. А. Горохов, В. Д. Дятлов, Р. Н. Медведев [и др.] // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. С. 11.
- [120] О. Н. Крохин, В. В. Пустовалов, А. А. Рупасов [и др.] // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22. С. 47.
- [121] Fast-ion production and harmonic generation in CO₂ laser generated plasma / E. Fabre, C. Garban, C. Popovics [и др.] // Optics Communications. 1976. Jul.. Т. 18, № 2. С. 218-219.
- [122] Быченков В. Ю., Силин В. П., Тихончук В. Т. // Физика плазмы. 1977. Т. 3. С. 1314.
- [123] Baldis H. A., Pepin H., Grek B. Third harmonic generation from laser-produced plasma // Applied Physics Letters. 1975. Sep. Т. 27, № 5. С. 291-292.
- [124] Harmonic generation in CO₂ laser target interaction / N. H. Burnett, H. A. Baldis, M. C. Richardson [и др.] // Applied Physics Letters. 1977. Aug.. Т. 31, № 3. С. 172-174.

-
- [125] Harmonic generation in Nd : laser-produced plasmas / E. A. McLean, J. A. Stamper, B. H. Ripin [и др.] // Applied Physics Letters. 1977. Dec.. Т. 31, № 12. С. 825–827.
- [126] Carman R. L., Forslund D. W., Kindel J. M. Visible Harmonic Emission as a Way of Measuring Profile Steepening // Physical Review Letters. 1981. Jan.. Т. 46, № 1. С. 29–32.
- [127] Bezzerides B., Jones R. D., Forslund D. W. Plasma Mechanism for Ultraviolet Harmonic Radiation Due to Intense CO₂ Light // Physical Review Letters. 1982. Jul.. Т. 49, № 3. С. 202–205.
- [128] Исиченко М. Б., Яньков В. В. О генерации в плазме высоких гармоник мощного лазерного излучения // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37. С. 297.
- [129] Исиченко М. Б., Яньков В. В. Генерация высоких гармоник лазерного излучения в плазме при опрокидывании электронных потоков // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1914.
- [130] Bulanov Sergei V., Esirkepov Timur, Tajima Toshiki. Light Intensification towards the Schwinger Limit // Physical Review Letters. 2003. Aug.. Т. 91, № 8.
- [131] Bulanov S. V., Naumova N. M., Pegoraro F. Interaction of an ultrashort, relativistically strong laser pulse with an overdense plasma // Physics of Plasmas. 1994. Mar.. Т. 1, № 3. С. 745–757.
- [132] Baeva T., Gordienko S., Pukhov A. Theory of high-order harmonic generation in relativistic laser interaction with overdense plasma // Physical Review E. 2006. Oct.. Т. 74, № 4.
- [133] Lichters R., ter Vehn J. Meyer, Pukhov A. Short-pulse laser harmonics from oscillating plasma surfaces driven at relativistic intensity // Physics of Plasmas. 1996. Sep. Т. 3, № 9. С. 3425–3437.
- [134] Efficient Extreme UV Harmonics Generated from Picosecond Laser Pulse Interactions with Solid Targets / P. A. Norreys, M. Zepf, S. Moustazis [и др.] // Physical Review Letters. 1996. Mar.. Т. 76, № 11. С. 1832–1835.

-
- [135] Transition to the Relativistic Regime in High Order Harmonic Generation / Alexander Tarasevitch, Konstantin Lobov, Clemens Wunsche [и др.] // Physical Review Letters. 2007. Mar.. Т. 98, № 10.
- [136] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [137] Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. М.–Л.: АН СССР, 1941. 235 с.
- [138] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1. М.: Наука, 1981. 800 с.
- [139] Stephens C. R. Why two renormalization groups are better than one. International Journal of Modern Physics B 12 1379-96 1998. (hep-th/9611062 8 Nov 1996).
- [140] A. V. Brantov, W. Rozmus, R. Sydora, C. E. Capjack, V. Y. Vychenkov, and V. T. Tikhonchuk, Phys. Plasmas 10, 3385 (2003).
- [141] Апфель П. Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматлит, 1960. 515 с.
- [142] Харкевич А. А. Основы радиотехники. М.: Физматлит, 2007. 512 с.
- [143] <https://reference.wolfram.com/language/ref/Integrate.html>
- [144] Гильденбург В. Б., Кондратьев И. Г., Марков Г. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12,. С. 655.
- [145] Гильденбург В. Б., Фрайман Г. М. Деформация области плазменного резонанса в сильном высокочастотном поле // ЖЭТФ. 1975. Т. 69, № 5. С. 1601-1606.
- [146] Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В.И. Диссипация мощной электромагнитной волны в точке плазменного резонанса // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21, В. 9. С. 539-543.
- [147] Ghen H. H., Liu O. S. Solitons in nonuniform media // Phys. Rev. Lett., 1976. Т. 37, № 10, С. 693-697; Soliton generation at resonance and density

- modifications in laser-irradiated plasmas // Phys. Rev. Lett. 1977. Т. 39, № 18 С. 1147-1151.
- [148] Shukla P. K., Spatschek K. H. Profile modifications at critical density of laser produced plasmas // J. Plasma Phys. 1978. Т. 19, № 3. С. 387-403.
- [149] Гильденбург В. Б., Литвак А. Г., Фрайман Г. М. Деформация профиля плотности и эффективность резонансного поглощения лазерного излучения в неоднородной плазме // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28, в. 7. С. 433-436.
- [150] Демченко Н. Н., Розанов В. Б., Тагвиашвили М. Н. Формирование профиля плотности плазмы вблизи критической поверхности под действием пондеромоторной силы // Квантовая электроника. 1989. Т. 16, № 3. С. 546–552.
- [151] Experimental study of the interaction of subpicosecond laser pulses with solid targets of varying initial scale lengths / S. Bastiani, A. Rousse, J. P. Geindre [и др.] // Physical Review E. 1997. Dec.. Т. 56, № 6. С. 7179–7185.
- [152] Comparison of measured and calculated x-ray and hot-electron production in short-pulse laser-solid interactions at moderate intensities / Th. Schlegel, S. Bastiani, L. Gremillet [и др.] // Physical Review E. 1999. Aug.. Т. 60, № 2. С. 2209–2217.

Приложение А

Вычисление допускаемой группы

А.1 Группы симметрии уравнений для продольных компонент электрического поля и скорости электронов

Для получения допускаемой уравнениями (1.6) группы преобразований воспользуемся процедурой классического группового анализа Ли дифференциальных уравнений, но с тем отличием, что в список независимых переменных, наряду с t, x, v, P , включим также параметры a, β . Такой прием расширения числа переменных, вовлекаемых в групповое преобразование, является характерным для метода ренормгруппы. Координаты ξ^i , $i = 1, \dots, 4$ и η^j , $j = 1, 2$ оператора (1.8) находятся из системы определяющих уравнений, являющихся критерием инвариантности системы (1.6) относительно искомой группы:

$$\begin{aligned} X_1 [\partial_t v + av \partial_x v - \gamma_0^{-3} P] |_{(1.6)} &= 0, \\ X_1 [\partial_t P + av \partial_x P + \omega_0^2 v] |_{(1.6)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Здесь X_1 – первое продолжение инфинитезимального оператора X искомой группы преобразований (1.8). Значок $|_{(1.6)}$ означает, что действие продолженного оператора X_1 рассматривается на многообразии, задаваемом уравнениями (1.6) и всеми их дифференциальными следствиями. Оператор X_1 связан с X формулой продолжения:

$$X_1 = X + \zeta_1^1 \partial_{\partial_t v} + \zeta_2^1 \partial_{\partial_x v} + \zeta_1^2 \partial_{\partial_t P} + \zeta_2^2 \partial_{\partial_x P}, \quad (\text{A.2})$$

а дополнительные координаты ζ_k^j , $j = 1, 2$, $k = 1, 2$ выражаются через ξ^i и η^j с помощью операторов полного дифференцирования D_t и D_x по времени t и

координате x :

$$\begin{aligned}
\xi_1^1 &= D_t \eta^1 - \partial_t v D_t \xi^1 - \partial_x v D_t \xi^2 - \partial_a v D_t \xi^3 - \partial_\beta v D_t \xi^4, \\
\xi_2^1 &= D_x \eta^1 - \partial_t v D_x \xi^1 - \partial_x v D_x \xi^2 - \partial_a v D_x \xi^3 - \partial_\beta v D_x \xi^4, \\
\xi_1^2 &= D_t \eta^2 - \partial_t P D_t \xi^1 - \partial_x P D_t \xi^2 - \partial_a P D_t \xi^3 - \partial_\beta P D_t \xi^4, \\
\xi_2^2 &= D_x \eta^2 - \partial_t P D_x \xi^1 - \partial_x P D_x \xi^2 - \partial_a P D_x \xi^3 - \partial_\beta P D_x \xi^4, \\
D_t &\equiv \partial_t + \partial_t v \partial_v + \partial_t P \partial_P, \quad D_x \equiv \partial_x + \partial_x v \partial_v + \partial_x P \partial_P.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

С учетом (1.6), (1.8) и (A.3) система определяющих уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}
a\eta^1 + avY\xi^1 - Y\xi^2 + v\xi^3 &= 0, \\
Y\eta^1 - z^{3/2}(PY\xi^1 + \eta^2) + \frac{3}{2}(1-z)Pz^{1/2} \left[\frac{\xi^4}{\beta} + 2\frac{\eta^1}{v} \right] &= 0, \\
Y[a\eta^2 + \xi^2\omega_0^2 + \xi^3P] = 0, \quad Y\xi^3 = 0, \quad Y\xi^4 = 0,
\end{aligned} \tag{A.4}$$

где

$$Y \equiv \partial_t + av\partial_x + Pz^{3/2}\partial_v - \omega_0^2 v \partial_P, \quad z \equiv 1 - \beta v^2. \tag{A.5}$$

Опуская подробности решения уравнений (A.4), приведем найденные координаты оператора X :

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= \xi_1(I_1, I_2, I_3) - \eta^2/\omega_0^2 v + \\
&\quad + \frac{\xi^4}{4\sqrt{2}\omega_0\beta} \int dz \frac{2 - 3/\sqrt{z} + 1/z^{3/2}}{(1-z)^{3/2} \sqrt{\beta I_1/2 - 1/\sqrt{z} + 1}}, \\
\xi^2 &= \xi_2(I_1, I_2, I_3) - a\eta^2/\omega_0^2 - \xi^3 P/\omega_0^2, \\
\eta^1 &= \frac{z^{3/2}}{v} \left[\eta_1(I_1, I_2, I_3) - (P/\omega_0^2)\eta^2 - \frac{\xi^4}{2\beta^2} \left(2 - 3/\sqrt{z} + 1/z^{3/2} \right) \right], \\
\eta^2 &= \eta^2(t, x, v, P), \quad \xi^{3,4} = \xi^{3,4}(a, \beta, I_1, I_2, I_3).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Здесь $\xi_{1,2}$, $\xi^{3,4}$, η^2 – произвольные функции своих аргументов, а I_1, I_2, I_3 – инварианты оператора Y , определяющиеся следующим образом:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{2}{\beta} (1/\sqrt{z} - 1) + P^2/\omega_0^2, \\
I_2 &= x + Pa/\omega_0^2, \\
I_3 &= t - \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \int \frac{dz}{z^{3/2} \sqrt{1-z} \sqrt{I_1 - \frac{2\omega_0^2}{\beta} (1/\sqrt{z} - 1)}}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Оператор (1.8) с найденными координатами (А.6), задает бесконечную группу точечных непрерывных преобразований в пространстве шести переменных t, x, v, P, a, β , которая служит искомой наиболее широкой группой, допускаемой уравнениями (1.6), необходимой в дальнейшем при построении ренормгруппы. Конкретизация координат ξ^i , $i = 1, \dots, 4$ и η^j , $j = 1, 2$ с помощью операции сужения группы (1.8), (А.6) на частном решении определяет ренормгрупповые преобразования, позволяющие использовать результаты линейной теории при построении решения уравнений (1.6) в широкой области значений параметров нелинейности a и β . Конечные преобразования по групповым параметрам a и β находятся обычным образом – решением соответствующих уравнений Ли.

А.2 Группы симметрии уравнений для поперечных компонент электрического поля и скорости электронов

Рассмотрим теперь уравнения (1.7), описывающие y -компоненты электрического поля Q и скорости электронов u в окрестности критической плотности. Как показано в параграфе 1.3, ренормгрупповые преобразования в случае уравнений (1.6) для продольных компонент электрического поля P и скорости электронов v определяются инфинитезимальным оператором X_{RG} :

$$X_{RG} = R_1 + R_2 = \xi_{RG}^1 \partial_t + \xi_{RG}^2 \partial_x + \partial_a + \partial_\beta + \eta_{RG}^1 \partial_v, \quad (\text{А.8})$$

с координатами ξ_{RG}^i , $i = 1, \dots, 2$ и η_{RG}^j , $j = 1, 2$, имеющими вид (1.10).

Чтобы продолжить найденную в параграфе 1.3 ренормгрупповую симметрию для уравнений (1.6) на уравнения (1.7), следует дополнить генератор группы X_{RG} оператором X_{II} :

$$\tilde{X} = X_{RG} + X_0, \quad X_0 = \eta^3 \partial_u + \eta^4 \partial_Q, \quad (\text{А.9})$$

где координаты η^j , $j = 3, 4$, которые являются функциями переменных t, x, v, u, P, Q , а также параметров a и β , находятся стандартным образом с использованием условия инвариантности полной системы уравнений для всех компонент

электрического поля и скорости электронов относительно оператора \tilde{X} :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1[\partial_t(u\gamma_0) + av\partial_x(u\gamma_0) - Q]|_{(1.7)} &= 0, \\ \tilde{X}_1[\omega_0\partial_x Q + k_y\partial_t P]|_{(1.7)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Оператор \tilde{X}_1 связан с \tilde{X} формулой продолжения:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= \tilde{X} + \zeta_1^1\partial_{\partial_t v} + \zeta_2^1\partial_{\partial_x v} + \zeta_1^2\partial_{\partial_t P} + \zeta_2^2\partial_{\partial_x P} + \\ &+ \zeta_1^3\partial_{\partial_t u} + \zeta_2^3\partial_{\partial_x u} + \zeta_1^4\partial_{\partial_t Q} + \zeta_2^4\partial_{\partial_x Q}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

а дополнительные координаты ζ_k^j , $j = 1, \dots, 4$, $k = 1, 2$ выражаются через ξ^i и η^j с помощью операторов полного дифференцирования D_t и D_x по времени t и координате x :

$$\begin{aligned} \zeta_1^1 &= D_t\eta^1 - \partial_tvD_t\xi^1 - \partial_xvD_t\xi^2 - \partial_avD_t\xi^3 - \partial_\beta vD_t\xi^4, \\ \zeta_2^1 &= D_x\eta^1 - \partial_tvD_x\xi^1 - \partial_xvD_x\xi^2 - \partial_avD_x\xi^3 - \partial_\beta vD_x\xi^4, \\ \zeta_1^2 &= D_t\eta^2 - \partial_tPD_t\xi^1 - \partial_xPD_t\xi^2 - \partial_aPD_t\xi^3 - \partial_\beta PD_t\xi^4, \\ \zeta_2^2 &= D_x\eta^2 - \partial_tPD_x\xi^1 - \partial_xPD_x\xi^2 - \partial_aPD_x\xi^3 - \partial_\beta PD_x\xi^4, \\ \zeta_1^3 &= D_t\eta^3 - \partial_tuD_t\xi^1 - \partial_xuD_t\xi^2 - \partial_auD_t\xi^3 - \partial_\beta uD_t\xi^4, \\ \zeta_2^3 &= D_x\eta^3 - \partial_tuD_x\xi^1 - \partial_xuD_x\xi^2 - \partial_auD_x\xi^3 - \partial_\beta uD_x\xi^4, \\ \zeta_1^4 &= D_t\eta^4 - \partial_tQD_t\xi^1 - \partial_xQD_t\xi^2 - \partial_aQD_t\xi^3 - \partial_\beta QD_t\xi^4, \\ \zeta_2^4 &= D_x\eta^4 - \partial_tQD_x\xi^1 - \partial_xQD_x\xi^2 - \partial_aQD_x\xi^3 - \partial_\beta QD_x\xi^4, \\ D_t &\equiv \partial_t + \partial_tv\partial_v + \partial_tP\partial_P + \partial_tu\partial_u + \partial_tQ\partial_Q, \\ D_x &\equiv \partial_x + \partial_xv\partial_v + \partial_xP\partial_P + \partial_xu\partial_u + \partial_xQ\partial_Q. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

С учетом (1.7), (A.9) и (A.12) одно из определяющих уравнений примет вид:

$$D_x\eta^4 = (\partial_tQD_x - \partial_xQD_t)\xi_{RG}^1. \quad (\text{A.13})$$