

Сколковский институт науки и технологий

Аникин Евгений Викторович

**ТУННЕЛИРОВАНИЕ И
МНОГОФОТОННЫЙ РЕЗОНАНС В
МОДЕЛИ КВАНТОВОГО
НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА**

01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Гиппиус Николай Алексеевич

Москва — 2021 г.

Оглавление

1	Введение	1
2	Классический нелинейный осциллятор во внешнем поле	9
2.1	Классическая динамика	9
2.2	Классический нелинейный осциллятор с белым шумом	13
2.3	Уравнение Фоккера–Планка в пространстве квазиэнергий	15
2.4	Стационарное распределение вероятностей	18
2.5	Переходы между стационарными состояниями	20
3	Динамика квантового нелинейного осциллятора	23
3.1	Квантовый гамильтониан осциллятора	23
3.2	Теория среднего поля	25
3.3	Квазиклассическое квантование	27
3.4	Теория возмущений	33
3.5	Симметрия обобщенной модели	39
3.6	Туннелирование и многофотонные переходы	43
3.7	Собственные состояния вблизи многофотонного резонанса	45
3.8	Эффект нелинейностей высших порядков	51
4	Кинетика квантового нелинейного осциллятора	56
4.1	Осциллятор, взаимодействующий с диссипативным окружением	56
4.2	Обобщенное уравнение Фоккера–Планка	57
4.3	Балансное уравнение	58
4.4	Уравнение Фоккера–Планка как предел балансного уравнения .	62
4.5	Вывод туннельного члена в уравнении Фоккера–Планка	67
4.6	Эффекты туннельного члена в уравнении Фоккера–Планка	69
4.7	Нелинейность высшего порядка	73
5	Спектры флуоресценции	77
5.1	Введение	77
5.2	Корреляционные функции в технике Келдыша	78

5.3	Спектр в квазиклассическом пределе	79
5.4	Предел линейчатого спектра	81
5.5	Кроссовер между квазиклассическим и линейчатым спектрами .	83
6	Заключение	86
	Список литературы	88
	Приложения	92
7.1	Приближение вращающейся волны для осциллятора с нелинейностью q^4	92
7.2	Коэффициенты уравнения Фоккера–Планка в представлении квазиэнергий	93
7.3	Квазиклассическое приближение в представлении когерентных состояний	97
7.4	Оператор преобразования обобщённого гамильтониана осциллятора	98
7.5	Решение уравнения Фоккера–Планка с туннельным членом . . .	99
7.6	Техника Келдыша для системы, взаимодействующей с марковским резервуаром	100
7.6.1	Вывод квантового управляющего уравнения	100
7.6.2	Поляризационный оператор	103

Глава 1

Введение

Актуальность работы

Модели из одной или нескольких осцилляторных мод с нелинейными взаимодействиями описывают широкий класс явлений в различных областях науки: физике конденсированного состояния, квантовой оптике, сложных биологических системах и многих других. В частности, эти модели применяются для описания резонансного отклика на внешнее поле разнообразных линейных и нелинейных систем. К таким системам относятся, к примеру, лазерные системы вблизи порога генерации [1], высокочастотные резонаторы с нелинейностью (или взаимодействующие с нелинейной системой) [2, 3, 4, 5], наномеханические системы [6], поляритонные микрополости [7, 8, 9], сверхпроводниковые квантовые цепи [10, 11]. Нелинейность вблизи резонанса приводит к возникновению множества нетривиальных динамических эффектов, в частности, бистабильности, гистерезиса в отклике на внешнее поле, динамического хаоса.

С уменьшением размеров систем и повышением их добротности становится важным учёт квантовых эффектов. Уже существуют доступные для эксперимента системы, в которых числа заполнения осциллятора — десятки квантов [11, 12, 13], при этом добротность системы может быть настолько высокой, что уширение линии меньше или порядка величины нелинейного сдвига частоты на один квант. Теоретическому исследованию квантового нелинейного осциллятора посвящено множество работ [14, 15, 16, 17, 18, 19], кроме того, в ряде недавних публикаций рассматривается именно мезоскопический режим [20, 21, 22]. Интерес к таким системам связан с возможностью их применения для генерации неклассических и перепутанных состояний [23], а также возможным приложениям в области квантовой информации. Кроме того, модель нелинейного осциллятора во внешнем поле представляет фундаментальный интерес с точки зрения теории открытых квантовых систем: наличие порога переключения между двумя устойчивыми состояниями можно интерпретиро-

вать как диссипативный фазовый переход [24]. Наконец, в рамках этой модели можно исследовать некоторые общие особенности соответствия между классической и квантовой физикой.

Замечательной особенностью мезоскопического режима, когда заселённость осциллятора — десятки квантов, является применимость квазиклассического приближения при одновременной значимости квантовых эффектов. В этом режиме сохраняются особенности, характерные для соответствующих классических моделей, в частности, имеет смысл говорить о классическом фазовом портрете системы.

Важнейшим свойством многих систем рассматриваемого типа в классическом пределе является би- или мультистабильность, то есть наличие двух и более устойчивых состояний с различными амплитудами поля. Би- и мультистабильность может проявляться в наличии гистерезиса в отклике на меняющиеся внешние параметры, кроме того, в эксперименте можно напрямую наблюдать переходы между стабильными состояниями, вызванные взаимодействием с окружением [11]. Исследование неравновесной заселённости стабильных состояний, статистики флуктуационных переходов между ними, а также возможности управления переходами между стабильными состояниями представляет интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения [25].

В то время как для классического нелинейного осциллятора в бистабильном режиме переходы между стабильными состояниями вызывает шум, обусловленный взаимодействием с окружением, в квантовом режиме переходы могут также происходить из-за квантового туннелирования. Дело в том, что на фазовом портрете мультистабильной системы могут существовать разные классические траектории с одним и тем же значением функции Гамильтона. Из-за туннелирования система может переходить между соответствующими состояниями, что модифицирует заселённости стационарных состояний и скорости флуктуационных переходов.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию простейшей модели одного нелинейного осциллятора с Керровской нелинейностью во внешнем поле. Эта модель рассматривалась теоретически во многих работах: в ра-

боте [14] получено аналитическое стационарное решение управляющего уравнения для нулевой температуры окружения, в работе [15] исследованы скорости релаксации к стационарному распределению на основе балансных уравнений в базисе точных состояний, в [26] изучен квазиклассический предел и получены уравнения Фоккера-Планка на функции распределения. Туннелирование между областями фазового портрета осциллятора было рассмотрено в [27], в [19] была показана связь между туннелированием и многофотонным возбуждением внешним полем, аналогичная связи между туннельной и многофотонной ионизацией атомов [28], а в работе [21] был рассмотрен мезоскопический режим для осциллятора. Однако ряд вопросов, касающихся динамики и кинетики квантового осциллятора, оставался нерешённым. Во-первых, для исследования туннелирования между областями фазового портрета либо использовался квазиклассический подход, либо пертурбативно вычислялась только многофотонная амплитуда перехода. Полный анализ, учитывающий все порядки разложения теории возмущений или все порядки квазиклассического разложения, не проводился. Во-вторых, не было изучено аналитически влияние туннелирования на кинетику и не был исследован профиль максимумов интенсивности, соответствующих многофотонным резонансам. Кроме того, не рассматривался вклад малых нелинейностей высшего порядка, в то время как он важен из-за резонансного характера туннелирования. Наконец, недостаточно изучены спектры флуоресценции системы.

Целью диссертационной работы является исследование влияния квантовых эффектов на статистику и кинетику нелинейного осциллятора в резонансном внешнем поле в бистабильном режиме. Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

1. Рассмотреть динамику квантового осциллятора во внешнем поле без учёта взаимодействия с окружением, в частности, исследовать структуру собственных состояний и установить роль туннелирования между разными областями фазового портрета;
2. На основе квантового управляющего уравнения и балансного уравнения изучить статистические свойства осциллятора в стационарном состоянии, в частности, найти вероятности заполнения классических устойчи-

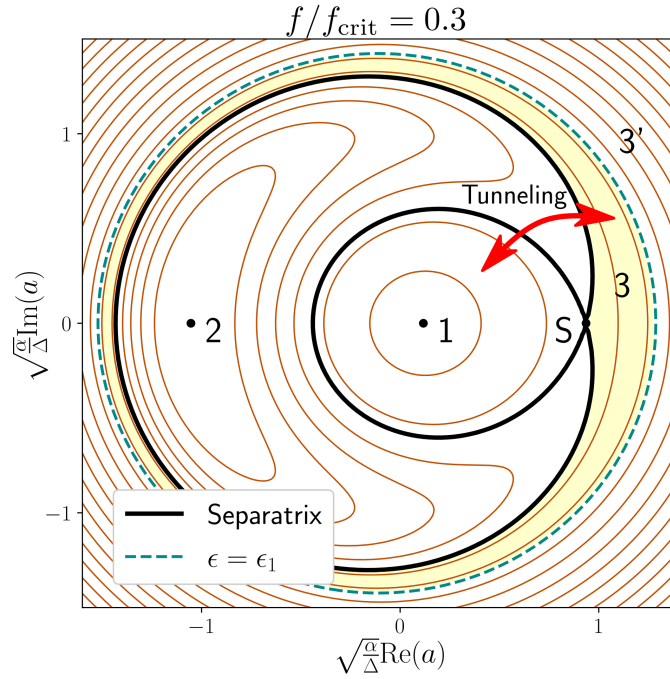


Рис. 1.1: Фазовый портрет нелинейного осциллятора, возбуждаемого внешним полем вблизи резонанса. Между областями фазового портрета, соединёнными стрелкой, возможно туннелирование.

вых состояний, определить порог переключения между состояниями;

3. Сравнить результаты квантовомеханического описания системы с описанием на основе классического уравнения Ланжевена и установить роль квантовых эффектов;
4. Изучить спектры флуоресценции осциллятора в различных режимах: в ультраквантовом, квазиклассическом и промежуточном.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В модели квантового нелинейного осциллятора во внешнем поле с керровской нелинейностью наблюдается многофотонный резонанс одновременно между многими парами энергетических уровней при целых значениях $2\Delta/\alpha$. Собственные состояния гамильтониана при этом являются суперпозициями состояний, соответствующих движению внутри двух областей фазового портрета осциллятора. Можно наблюдать одновременные многофотонные осцилляции Раби между многими парами энергетических уровней.

-
2. Одновременные антипересечения между многими парами энергетических уровней являются следствием точной симметрии поправок теории возмущений к уровням квазиэнергии, рассматриваемых как аналитические функции числа квантов ν , относительно замены $\nu \rightarrow 2\Delta/\alpha - \nu$. Найдено доказательство того, что эта симметрия выполнена, основанное на преобразовании матрицы гамильтониана, аналитически продолженной на область вещественных ν .
 3. Стационарное распределение осциллятора в пространстве квазиэнергий можно описывать с помощью классического уравнения Фоккера–Планка, дополненного туннельным членом, описывающим переходы между двумя классическими областями фазового портрета. Скорость переходов зависит от расстройки между частотой внешнего поля и частотой осциллятора и резко возрастает, когда выполнено условие многофотонного резонанса. Наличие переходов между областями фазового портрета приводит к осциллирующей зависимости интенсивности поля осциллятора от расстройки с логарифмическими пиками, соответствующим многофотонным резонансам. В присутствии нелинейностей шестого порядка и выше эти пики расщепляются на несколько близко отстоящих пиков.
 4. Получены спектры флуоресценции осциллятора вблизи порога переключения между стабильными состояниями и вблизи многофотонного резонанса. Вблизи порога переключения спектр флуоресценции имеет пять пиков: центральный — на частоте внешнего поля, а четыре боковых отстоят от центрального на частоты классических колебаний около устойчивых состояний осциллятора. В зависимости высот пиков от расстройки есть осцилляции, которые объясняются многофотонным резонансом. Также получены спектры флуоресценции в промежуточном режиме, когда неприменимо ни приближение линейчатого спектра, ни линеаризация обобщённого уравнения Фоккера–Планка.

Научная новизна

1. Впервые получено доказательство симметрии поправок теории возмущений к уровням квазиэнергии осциллятора, которая объясняет одно-

временные антипересечения многих уровней квазиэнергии при целых и полуцелых отношениях расстройки к нелинейному сдвигу на один квант, а также независимость положений антипересечений от амплитуды внешнего поля.

2. Исследовано, каким образом туннелирование модифицирует собственные состояния осциллятора. Продемонстрирована связь между пертурбативным и квазиклассическим подходами. Исследованы собственные состояния при малых отстройках от многофотонного резонанса, проведён анализ эффектов нелинейностей высших порядков.
3. Проведён анализ влияния туннелирования на кинетику системы. Показано, что туннелирование можно учесть в рамках уравнения Фоккера–Планка в представлении квазиэнергий, причём вид туннельного члена определён из квантового управляющего уравнения на матрицу плотности. Определён профиль пиков интенсивности осциллятора, возникающих из-за туннелирования между областями фазового портрета.
4. Получены спектры флуоресценции нелинейного осциллятора в различных режимах, исследован кроссовер между квазиклассическим режимом, хорошо описываемым линейаризованным обобщённым уравнением Фоккера–Планка, и ультраквантовым, описываемым балансным уравнением.

Теоретическая и практическая значимость работы Полученные результаты дополняют существующую теоретическую картину туннелирования и многофотонного резонанса в системах из квантовых осцилляторных мод в присутствии взаимодействия с окружением. Разработанные в работе приближённые квазиклассические методы могут быть использованы для исследования широкого класса аналогичных систем. Кроме того, применённый в данной работе метод одновременного учёта туннельных эффектов как в спектре собственных состояний системы, так и в кинетическом уравнении Фоккера–Планка позволяет самосогласованно анализировать различные системы с несколькими каналами возможных переходов между устойчивыми состояниями. Кроме того, найденная симметрия обобщённого гамильтониана осциллятора может

послужить инструментом для получения новых точных результатов для нелинейного осциллятора во внешнем поле. Результаты расчётов для статистических свойств осциллятора могут быть применимы для описания экспериментов с различными типами высокодобротных резонаторов и локализованных мод. Предсказанные новые формы пиков интенсивности, возникающих из-за многофотонного резонанса, могут быть обнаружены в экспериментах с высокодобротными резонаторами в квантовом пределе.

Степень достоверности работы обеспечивается использованием строгих математических методов квантовой механики и квантовой оптики, подкрепляемых численной проверкой полученных в работе аналитических результатов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы На основе результатов диссертации были сделаны доклады на конференциях: International Conference on Physics of Semiconductors, 2018, на конференции молодых учёных “Ломоносов 2019”, на конференции МФТИ 2020. Результаты обсуждались на научных семинарах ФИАН, МФТИ и Сколковского института науки и технологий.

Личный вклад автора Автор лично участвовал в постановке задач исследований, разрабатывал численные модели, выполнял аналитические и численные расчёты, выполнял интерпретацию результатов и проводил их обсуждение с квалифицированными сотрудниками. Также автор подготовил публикации по результатам работы и представил несколько докладов.

Публикации Основные результаты по теме диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК и индексируемых Web of Science и Scopus. Список публикаций:

- Evgeny V. Anikin, Natalya S. Maslova, Nikolay A. Gippius, and Igor M. Sokolov, Transmission spectra of bistable systems: From the ultraquantum to the classical regime, *Phys. Rev. A* 102, 033725 (2020)
- Evgeny V. Anikin, Natalya S. Maslova, Nikolay A. Gippius, and Igor M. Sokolov, Enhanced excitation of a driven bistable system induced by spectrum degeneracy, *Phys. Rev. A* 100, 043842 (2019)

-
- Natalya S. Maslova, Evgeny V. Anikin, Vladimir N. Mantsevich, Nikolay A. Gippius, and Igor M. Sokolov, Quantum tunneling effect on switching rates of bistable driven system, *Laser Phys. Lett.* 16 045205 (2019)
 - Natalya S. Maslova, Evgeny V. Anikin, Nikolay A. Gippius, and Igor M. Sokolov, Effects of tunneling and multiphoton transitions on squeezed-state generation in bistable driven systems, *Phys. Rev. A* 99, 043802 (2019)
 - Evgeny V. Anikin, Natalya S. Maslova, Nikolay A. Gippius, Igor M. Sokolov, Multiphoton resonance in a driven Kerr oscillator in presence of high-order nonlinearities, *Phys. Rev. A* 104, 053106 (2021)

Структура и объём диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и 6 приложений. Полный объём диссертации составляет 116 страниц с 31 рисунками. Список литературы содержит 36 наименований.

Глава 2

Классический нелинейный осциллятор во внешнем поле

2.1 Классическая динамика

Модель осцилляторной моды с Керровской нелинейностью описывает отклик многих систем на внешнее резонансное поле. Она применима, когда в системе присутствует осцилляторная мода, достаточно удалённая по частоте от других мод системы. Когда нелинейные эффекты малы, наиболее существенным является эффект Керра, то есть нелинейный сдвиг частоты в зависимости от амплитуды. Но даже если нелинейный сдвиг частоты мал по сравнению с частотой моды, он может приводить к качественно новым эффектам, если система возбуждается внешним полем достаточно близко к резонансу. В этом случае можно использовать приближение вращающейся волны, и эффективный гамильтониан для моды принимает вид

$$H(a, a^*) = -\Delta|a|^2 + \frac{\alpha}{2}|a|^2 + f(a + a^*), \quad (2.1)$$

где a — медленно меняющаяся комплексная классическая амплитуда осциллятора. Параметры гамильтониана имеют следующий смысл: Δ - расстройка между частотой внешнего поля и резонансной частотой осциллятора, α — нелинейный сдвиг частоты, f — амплитуда внешнего поля. За пределами применимости приближения вращающейся волны в гамильтониане возникают также члены, быстро осциллирующие на частотах порядка частоты внешнего поля. Это можно увидеть в ходе вывода эффективного гамильтониана (2.1) из гамильтониана нелинейного осциллятора в q - p представлении с нелинейностью q^4 , приведённого для справочных целей в Приложении 7.1.

Уравнения движения на классическую амплитуду поля в отсутствие дис-

сипации имеют вид уравнений Гамильтона:

$$\begin{aligned} i\partial_t a &= \frac{\partial H}{\partial a^*} \\ i\partial_t a^* &= -\frac{\partial H}{\partial a} \end{aligned} \quad (2.2)$$

При наличии диссипации они должны быть дополнены силой трения, и в результате принимают следующий вид:

$$i\partial_t a = -(\Delta + i\gamma)a + \alpha a|a|^2 + f. \quad (2.3)$$

Отметим, что эти уравнения движения можно привести к безразмерному виду, если ввести нормированную амплитуду $A \equiv a\sqrt{\alpha/\Delta}$ и безразмерное время $\tau = \Delta t$. Приведём уравнение, описывающее динамику безразмерной амплитуды:

$$i\frac{\partial A}{\partial \tau} = -(1 + i\vartheta)A + A|A|^2 + \sqrt{\beta}, \quad (2.4)$$

где $\beta = \frac{\alpha f^2}{\Delta^3}$, а $\vartheta = \frac{\gamma}{\Delta}$. Отметим, что в отсутствие диссипации β — единственный безразмерный параметр, определяющий классическую динамику системы.

Замечательной особенностью модели (3.2) является бистабильность, то есть наличие двух устойчивых стационарных состояний при не слишком больших амплитудах внешнего поля и расстройке Δ того же знака, что и керровский коэффициент α . Стационарные решения определяются решениями уравнения (2.3) с нулевой левой частью и приведены на рисунках 2.1(a,b). На Рис. 2.1(a) представлена зависимость амплитуды поля осциллятора от f для различных значений константы затухания γ . При $\gamma < \Delta/\sqrt{3}$ отклик амплитуды на внешнее поля имеет вид S-образной кривой. Кроме того, зависимость стационарных амплитуд от частоты при постоянном внешнем поле перестаёт иметь лоренцев вид и тоже становится неоднозначной (см. Рис. 2.1(b)). Таким образом, в зависимостях амплитуды поля в осцилляторе от внешнего поля и частоты имеется гистерезис.

Анализ устойчивости стационарных состояний показывает, что из трёх ветвей зависимости стационарных амплитуд от внешнего поля нижняя и верх-

няя являются устойчивыми, а средняя — неустойчивой.

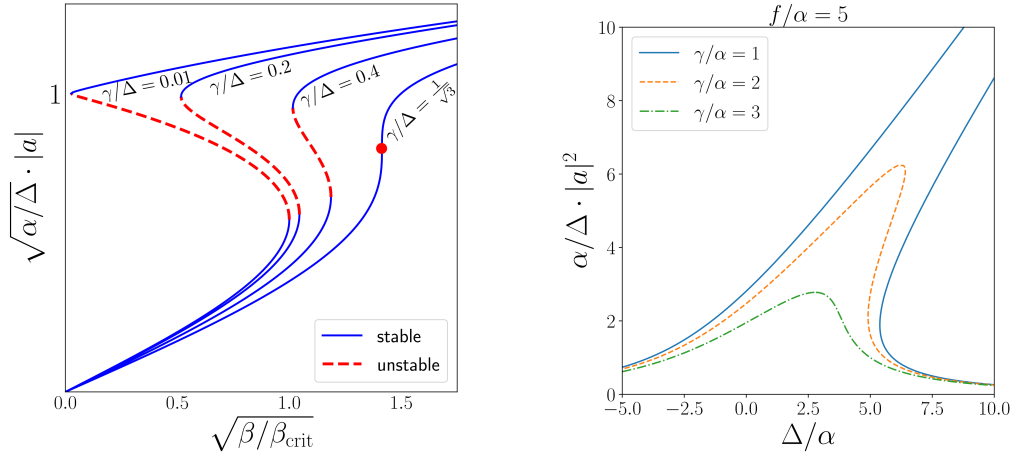


Рис. 2.1: S -образная кривая отклика амплитуды осциллятора на внешнее поле для различных значений константы затухания. В области бистабильности у осциллятора есть три стационарных состояния: два из них устойчивы (сплошные линии), одно — неустойчиво (пунктирная линия). В пределе $\gamma \rightarrow 0$ область бистабильности — интервал $0 < f < f_{\text{crit}} \equiv 4/27\sqrt{\Delta^3/\alpha}$.

Теперь рассмотрим классический фазовый портрет системы. Так как гамильтониан является функцией всего одной пары канонически сопряженных переменных, условие сохранения энергии полностью определяет классические фазовые траектории при $\gamma = 0$, которые являются линиями уровня гамильтониана как функции $\text{Re } a$ и $\text{Im } a$. При этом экстремумы и седловые точки гамильтониана являются стационарными состояниями осциллятора. Структуру фазового портрета системы легко понять, рассматривая гамильтониан как функцию двух переменных $\text{Re } a$ и $\text{Im } a$. При $f = 0$ функция Гамильтона представляет собой радиально симметричную «мексиканскую шляпу», и её линиями уровня являются концентрические окружности. При $a = 0$ имеется локальный максимум, а значения $|a| = \sqrt{\Delta/\alpha}$ образуют линию локальных минимумов. При $f \neq 0$ функция гамильтона является суммой «мексиканской шляпы» и линейной функции a, a^* : в результате «мексиканская шляпа» деформируется, что можно видеть на Рис. 2.2(b). Вместо бесконечного числа вырожденных локальных минимумов возникает локальный минимум и седловая точка, а локальный максимум при не слишком больших значениях f сдвигается от нулевого значения. Когда внешнее поле становится достаточно большим и достигает по модулю $f = f_{\text{crit}} = \sqrt{4\Delta^3/27\alpha^2}$, происходит бифур-

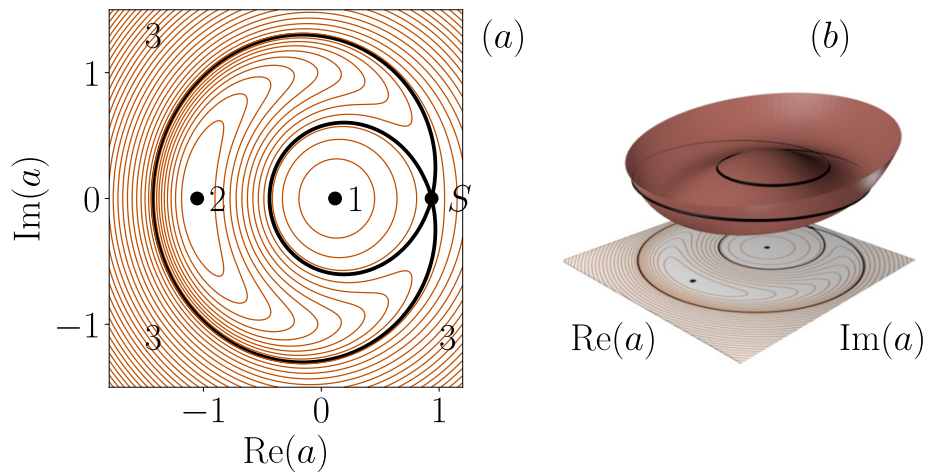


Рис. 2.2: (а) Линии уровня классического гамильтониана (3.2) при $f/f_{\text{crit}} = 0.3$. Сепаратриса (жирная чёрная линия) делит фазовый портрет на три области, обозначенные цифрами 1, 2 и 3. Область 1 содержит устойчивое стационарное состояние с меньшим значением амплитуды, область 2 содержит устойчивое стационарное состояние с большим значением амплитуды. Кроме устойчивых состояний 1 и 2, есть неустойчивое стационарное состояние S , которое совпадает с точкой самопересечения сепаратрисы. (б) Линии уровня изображены вместе с трёхмерным графиком функции Гамильтона. Видно, что стационарные состояния 1, 2 и S — это соответственно локальный максимум, локальный минимум и седловая точка функции Гамильтона.

кация типа седло–узел: седловая точка сливается с локальным максимумом, и остаётся только одно стационарное состояние. Это объясняет зависимость стационарных амплитуд от внешнего поля при $\gamma = 0$: седловая точка функции Гамильтона соответствует неустойчивому стационарному состоянию, а экстремумы — устойчивым. Эти выводы об устойчивости сохраняются и при ненулевых γ .

Через седловую точку проходит самопересекающаяся классическая траектория, называемая сепаратрисой, которая делит фазовый портрет на три области. Эти области играют различную роль при описании динамики и кинетики системы, поэтому примем соглашение об их обозначении. Область фазового портрета, в которой лежит устойчивое состояние с меньшей амплитудой, (область, имеющая вид вытянутой капли) будем называть областью 1, а соответствующее состояние — состоянием 1. Аналогично, устойчивое состояние с большей амплитудой и соответствующую область фазового портрета (имеющую вид серпа) будем называть областью 2 и состоянием 2. Наконец, внешнюю область фазового портрета, не содержащую стационарных состояний, назовём областью 3. Наконец, неустойчивое стационарное состояние будем называть состоянием S .

2.2 Классический нелинейный осциллятор с белым шумом

Во многих реальных экспериментальных ситуациях временная динамика поля осциллятора $a(t)$ не является строго детерминированной, а должна описываться как случайный процесс из-за взаимодействия с диссипативным окружением (шума). Шум может вызывать переходы между устойчивыми состояниями осциллятора, а также менять диапазон внешних полей, при которых наблюдается гистерезис. Для математического описания этого круга явлений нужно дополнить классические уравнения движения осциллятора (2.3) случайной внешней силой $\xi(t)$, описывающей действие шума:

$$i\partial_t a = -(\Delta + i\gamma)a + \frac{\alpha}{2}a|a|^2 + f + \xi(t) \quad (2.5)$$

В результате амплитуда $a(t)$ становится случайной функцией времени. При наличии случайной внешней силы $\xi(t)$ (шума) осциллятор из произвольного начального условия может эволюционировать как в состояние 1, так и в состояние 2 в зависимости от конкретной реализации $\xi(t)$. Более того, шум может вызывать переходы между стационарными состояниями осциллятора. Поэтому типичная зависимость амплитуды осциллятора от времени выглядит следующим образом. Сначала она релаксирует к окрестности одного из стационарных состояний на временах порядка γ^{-1} . На протяжении длительного времени она испытывает малые флуктуации в окрестности этого состояния, но в некоторый случайный момент переходит в другое стационарное состояние, и далее редкие переходы между состояниями происходят бесконечно. Это позволяет понять, как эволюционирует во времени распределение вероятности амплитуды в фазовом пространстве. Произвольное распределение вероятности сначала быстро релаксирует к распределению, имеющему пики в окрестностях стационарных состояний. Затем происходит его медленная релаксация к истинно стационарному распределению: это происходит из-за флуктуационных переходов между состояниями 1 и 2. Таким образом, на больших временах типичная зависимость амплитуды осциллятора от времени имеет характер, как на Рис. 2.3.

В простейшем случае дельта-коррелированного шума, когда $\langle \xi(t)\xi^*(t') \rangle = Q\delta(t-t')$, из уравнения Ланжевена следует уравнение в частных производных на плотность вероятности в фазовом пространстве $\mathcal{P}(t, a, a^*)$ как функцию времени:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left(i\mathcal{P} \frac{\partial H}{\partial a^*} + \gamma a \mathcal{P} + \frac{Q}{2} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial a^*} \right) + \text{с.с.} \quad (2.6)$$

Исследуя решения этого уравнения, можно найти стационарное распределение вероятностей для амплитуды осциллятора, в частности, вероятности обнаружения осциллятора в окрестностях одного из устойчивых состояний, а также найти частоту флуктуационных переходов между состояниями.

Любое решение уравнения Фоккера–Планка, достаточно быстро убывающее при $|a| \rightarrow \infty$, может быть разложено по собственным функциям операто-

ра в правой части уравнения (2.6):

$$\mathcal{P}(t, a, a^*) = \sum_k \mathcal{P}_k(a, a^*) e^{-\lambda_k t}, \quad (2.7)$$

Из существования стационарного решения следует, что всегда присутствует нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$. Ненулевые собственные значения определяют скорость релаксации к стационарному решению. Тот факт, что релаксация в рассматриваемой системе имеет различный характер на временах $t \sim \gamma^{-1}$ и $t \gg \gamma^{-1}$, отражается на наборе собственных значений уравнения Фоккера–Планка. Редкие флуктуационные переходы между состояниями 1 и 2 приводят к тому, что у уравнения Фоккера–Планка возникает очень маленькое собственное значение $\lambda_1 \ll \gamma$. Таким образом, на больших временах $t \gg \gamma^{-1}$ решение уравнения Фоккера–Планка может быть приближено всего двумя собственными функциями,

$$\mathcal{P}(t, a, a^*) \approx \mathcal{P}_0(a, a^*) + \mathcal{P}_1(a, a^*) e^{-\lambda_1 t} \quad (2.8)$$

Функция $\mathcal{P}_1(a, a^*)$, как и стационарное распределение $\mathcal{P}_0(a, a^*)$ локализована в окрестности состояний 1 и 2. Поэтому решение (2.8) описывает «перетекание» плотности вероятности между состояниями 1 и 2, в соответствии с качественными рассуждениями, приведёнными выше.

2.3 Уравнение Фоккера–Планка в пространстве квазиэнергий

Для классического уравнения Фоккера–Планка (2.6) неизвестно аналитическое решение даже в стационарном случае. Однако оно упрощается в пределе $Q, \gamma \rightarrow 0$: в этом случае оно сводится к одномерному уравнению Фоккера–Планка в пространстве квазиэнергий. Для последнего можно найти аналитическое решение в стационарном случае, а также приближённо найти скорость переходов между стационарными состояниями.

Вывод одномерного уравнения Фоккера–Планка в пространстве квазиэнергий производится следующим образом. В случае, когда затухание и шум

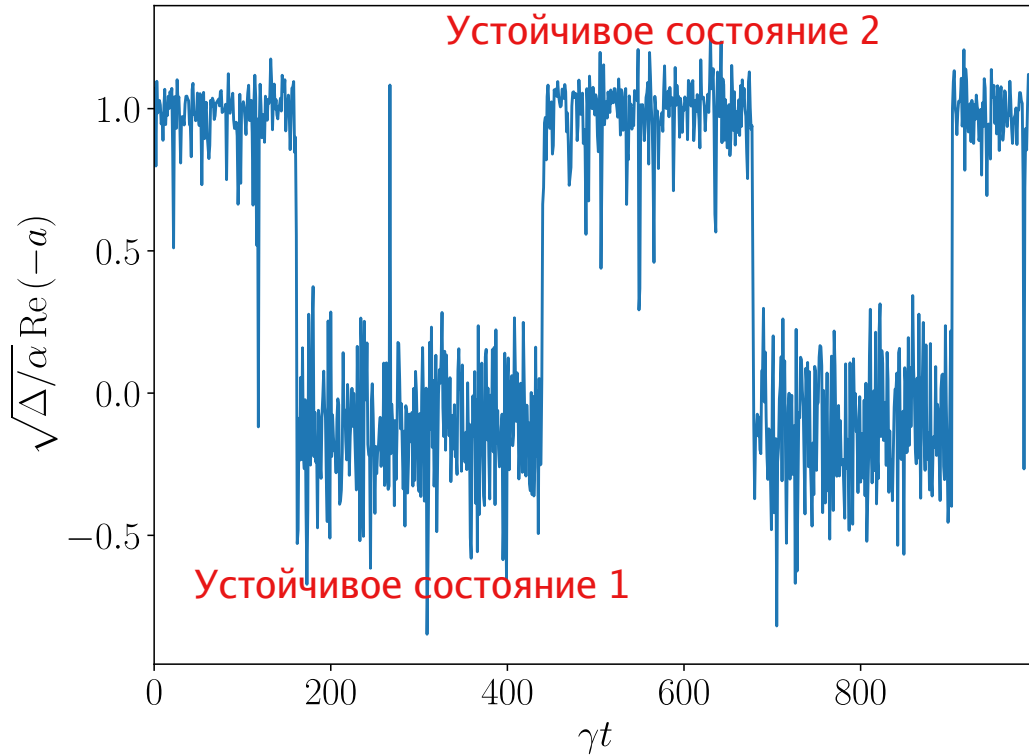


Рис. 2.3: Типичная зависимость амплитуды осциллятора $a(t)$ полученная из уравнения Ланжевена (2.5), при следующих значениях параметров: $f/f_{\text{crit}} = 0.25$, $\gamma/\Delta = 0.01$, $Q/\gamma = 0.0015$.

малы, можно считать, что они дают лишь малую поправку к движению системы вдоль классической фазовой траектории. Следовательно, можно рассматривать функцию распределения, усреднённую вдоль классической траектории (изложенный здесь метод усреднения для уравнения Фоккера–Планка является близким аналогом метода Боголюбова–Крылова для динамических систем [29]). При этом её эволюция во времени обусловлена медленным дрейфом и диффузией в пространстве траекторий. В каждой области фазового портрета можно искать приближённое решение уравнения Фоккера–Планка в следующем виде:

$$\mathcal{P}(t, a, a^*) = P_i(t, H(a, a^*)), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

где для каждой области i фазового портрета вводится своя функция $P_i(t, \epsilon)$.

Траектории в каждой из областей фазового портрета могут иметь следующие значения квазиэнергий. Обозначим квазиэнергии состояний 1, 2 и S как

ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_S . Тогда классические траектории, принадлежащие областям 1, 2 и 3, имеют следующие значения квазиэнергий. Траектории из области 2 лежат в области квазиэнергий $\epsilon_2 < \epsilon < \epsilon_S$; траектории из области 1 имеют квазиэнергии $\epsilon_{sep} < \epsilon < \epsilon_1$; наконец, траектории из области 3 имеют квазиэнергии $\epsilon > \epsilon_{sep}$. Следовательно, $P_1(t, \epsilon)$, $P_2(t, \epsilon)$ и $P_3(t, \epsilon)$ определены соответственно в областях $\epsilon_{sep} < \epsilon < \epsilon_1$, $\epsilon_2 < \epsilon < \epsilon_{sep}$ и $\epsilon > \epsilon_{sep}$.

Таким образом, для значений квазиэнергий ϵ , лежащих в области $\epsilon_{sep} < \epsilon < \epsilon_1$, полная функция распределения двузначна из-за наличия двух вырожденных по квазиэнергии траекторий из областей 1 и 3 фазового портрета.

Для вывода уравнения Фоккера–Планка в пространстве квазиэнергий необходимо подставить (2.9) в двумерное уравнение Фоккера–Планка (2.6) и произвести усреднение по классическим траекториям. Формально усреднение производится как взятие интеграла $\int da da^* \delta(\epsilon - H(a, a^*)) \langle \dots \rangle$ от обеих частей уравнения Фоккера–Планка. В результате одномерное уравнение Фоккера–Планка в пространстве квазиэнергий принимает вид

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{1}{T_i(\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\gamma K_i(\epsilon) P_i + Q D_i(\epsilon) \frac{\partial P_i}{\partial \epsilon} \right]. \quad (2.10)$$

Коэффициенты $T_i(\epsilon)$, $K_i(\epsilon)$, и $D_i(\epsilon)$, входящие в (2.10), выражаются в виде интегралов по классическим фазовым траекториям:

$$\begin{aligned} T_i(\epsilon) &= \int_{\text{reg.}i} da^* da \delta(\epsilon - H(a^*, a)), \\ K_i(\epsilon) &= \frac{i}{2} \oint_{\text{reg.}i} a da^* - a^* da, \\ D_i(\epsilon) &= \frac{i}{2} \oint_{\text{reg.}i} \frac{\partial H}{\partial a} da - \frac{\partial H}{\partial a^*} da^*, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь $T_i(\epsilon)$ — период движения по замкнутой траектории классического фазового портрета, $\gamma K_i(\epsilon)$ отвечает за дрейф в пространстве квазиэнергий, а $D_i(\epsilon)$ — за диффузию. Их зависимость от квазиэнергий приведена на Рис. 2.4.

Уравнение (2.10) должно быть дополнено граничными условиями при $\epsilon = \epsilon_{sep}$, которые определяют сшивку трёх функций $P_1(\epsilon)$, $P_2(\epsilon)$ и $P_3(\epsilon)$. Два из условий — это непрерывность плотности распределения, $P_1(\epsilon) = P_2(\epsilon) = P_3(\epsilon)$. Ещё условие можно получить из условия сохранения тока вероятности.

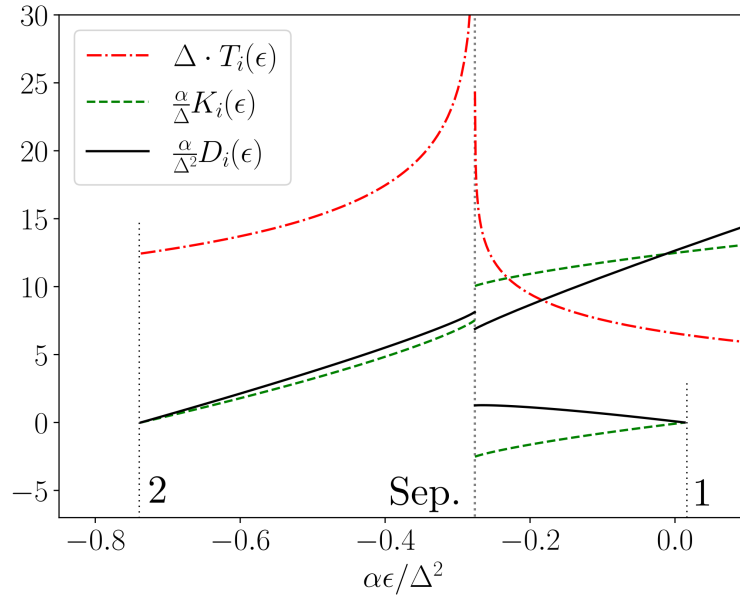


Рис. 2.4: На рисунке приведены графики зависимости от квазиэнергий коэффициентов уравнения Фоккера–Планка в квазиэнергетическом представлении (2.10) для значения внешнего поля, такого что $f/f_{\text{crit}} = 0.3$. Коэффициенты дрейфа $K_i(\epsilon)$ и диффузии $D_i(\epsilon)$ имеют две ветви для квазиэнергий, лежащих в интервале $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_1$, в то время как для периода $T_i(\epsilon)$ эти две ветви совпадают: $T_1(\epsilon) = T_3(\epsilon)$.

Из определения (2.9) следует, что полная вероятность получается из функций распределения $P_i(\epsilon)$ как интеграл $\int d\epsilon T(\epsilon)P_i(\epsilon)$. Из структуры уравнения (2.10) легко увидеть, что ток вероятности —

$$J_r(\epsilon) = \gamma K_r(\epsilon)P_r + QD_r(\epsilon)\frac{\partial P_r}{\partial \epsilon}. \quad (2.12)$$

Для сохранения полной вероятности нужно потребовать, чтобы $J_2(\epsilon) = J_1(\epsilon) + J_3(\epsilon)$.

2.4 Стационарное распределение вероятностей

Одномерное уравнение Фоккера–Планка в пространстве квазиэнергий (2.10) позволяет получить явное выражение для стационарной функции распределения. Легко видеть, что стационарное распределение должно удовлетворять

дифференциальному уравнению первого порядка

$$\gamma K_i(\epsilon) P_i + Q D_i(\epsilon) \frac{\partial P_i}{\partial \epsilon} = 0, \quad (2.13)$$

Его решение —

$$P_i^{\text{st}}(\epsilon) = C_i \exp \left\{ -\frac{\gamma}{Q} \int_{\epsilon_i}^{\epsilon} \frac{K_i(\epsilon')}{D_i(\epsilon')} d\epsilon' \right\}, \quad (2.14)$$

где константы C_i должны быть выбраны так, чтобы выполнялось граничное условие при $\epsilon = \epsilon_{\text{sep}}$ и условие нормировки. Качественное поведение функций распределения можно понять из вида функций K_i и D_i (см. Рис. 2.4). Так как $K_2, K_3 > 0$ а $K_1 < 0$, распределения $P_1^{\text{st}}(\epsilon)$ и $P_2^{\text{st}}(\epsilon)$ экспоненциально растут при удалении от сепаратрисы, а $P_3^{\text{st}}(\epsilon)$ экспоненциально убывает. Следовательно, функция распределения имеет резкие максимумы в около значений квазиэнергии ϵ_1 и ϵ_2 , то есть в окрестностях состояний 1 и 2 [8], [26].

Вычисление функций распределения по формулам (2.14) показывает, что величины локальных максимумов в окрестностях устойчивых состояний 1 и 2 могут сильно различаться по величине в зависимости от амплитуды внешнего поля из-за экспоненциальной зависимости функции распределения по квазиэнергиям. Отношение значений функции распределения в двух стационарных состояниях может быть найдено из уравнения (2.14):

$$\frac{P_2(\epsilon_2)}{P_1(\epsilon_1)} = \exp \left\{ \frac{\gamma}{Q} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_{\text{sep}}} \frac{K_2(\epsilon')}{D_2(\epsilon')} d\epsilon' + \frac{\gamma}{Q} \int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon_1} \frac{K_1(\epsilon')}{D_1(\epsilon')} d\epsilon' \right\} \quad (2.15)$$

Из этого уравнения, а также из зависимостей коэффициентов дрейфа и диффузии от квазиэнергии легко получить, что при малых значениях внешнего поля заселённость состояния с большей амплитудой поля осциллятора (состояния 2) экспоненциально мала, и осциллятор большую часть времени находится в окрестности состояния 1. При некотором пороговом значении внешнего поля f_0 заселённости состояний 1 и 2 становятся сравнимыми по величине. При значениях поля больше порогового и вплоть до f_{crit} осциллятор, наоборот, находится в состоянии 2 с вероятностью, близкой к единице.

Из формулы (2.15), а также выражений (7.14), (7.15) видно, что отношение f_0/f_{crit} не зависит ни от каких параметров задачи в пределах применимости

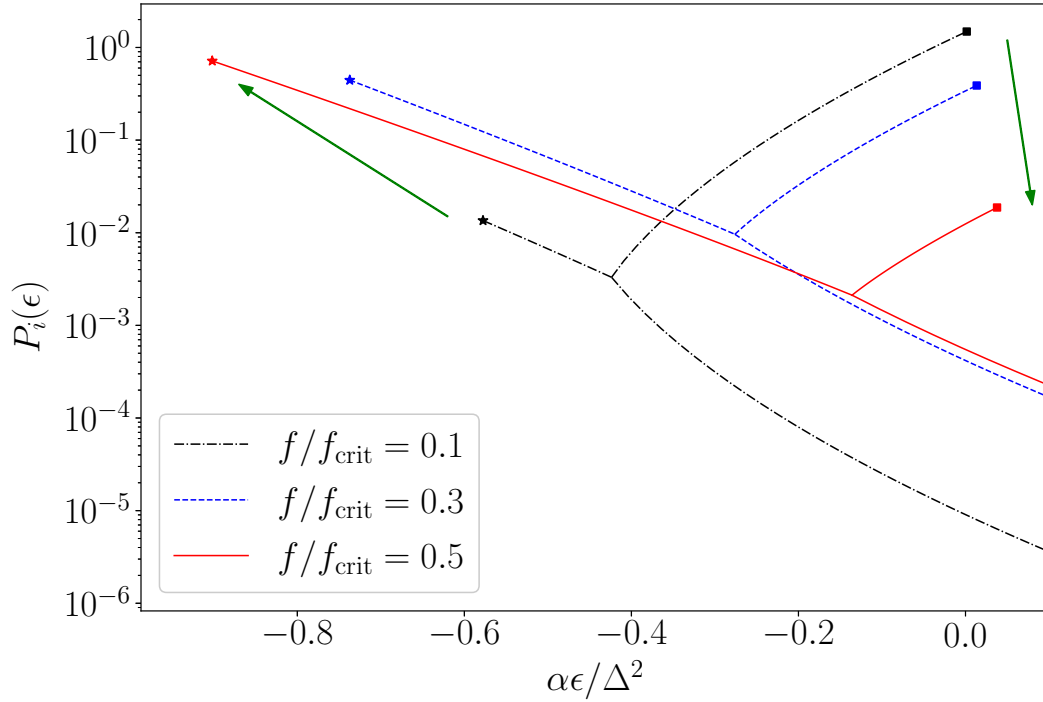


Рис. 2.5: Стационарные функции распределения классического нелинейного осциллятора для различных значений внешнего поля f и $Q/\gamma = 0.1$. Каждая функция распределения однозначна при $\epsilon_2 < \epsilon < \epsilon_{\text{sep}}$ и $\epsilon > \epsilon_1$ и двузначна при $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_1$, потому что в последнем случае для каждого значения ϵ существуют две классические траектории. Распределения имеют локальные максимумы при $\epsilon = \epsilon_{1,2}$, показанные квадратами (ϵ_1) и звёздами (ϵ_2). При $f \approx f_0$ максимумы одного порядка, а при $f < f_0$ ($f > f_0$) максимум около $\epsilon_1(\epsilon_2)$ много больше максимума при $\epsilon_2(\epsilon_1)$.

(2.10). Расчёт с использованием значений для коэффициентов дрейфа и диффузии, полученных численно, показывает, что $f_0 = 0.29f_{\text{crit}}$.

Примеры стационарных распределений для различных параметров, вычисленных по формулам (2.14), приведены на Рис. 2.5. Из приведённых графиков видно, что при $f = f_0$ происходит смена наиболее вероятного устойчивого состояния.

2.5 Переходы между стационарными состояниями

Кроме стационарного распределения, из одномерного уравнения Фоккера–Планка (2.10) можно найти асимптотическое выражение для скорости флуктуационных переходов между устойчивыми состояниями. Как и для двумер-

ного уравнения, каждое решение одномерного уравнения Фоккера–Планка может быть разложено в ряд по собственным функциям

$$P_i(t, \epsilon) = \sum_{\lambda} P_i^{\lambda}(\epsilon) e^{-\lambda t}, \quad (2.16)$$

где P^{λ} — решение задачи на собственные значения

$$-\lambda P_i^{\lambda} = \frac{1}{T_i(\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\gamma K_i(\epsilon) + Q D_i(\epsilon) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right] P_i^{\lambda}. \quad (2.17)$$

В соответствии с рассуждениями, приведёнными в разделе 2.2, минимальное ненулевое собственное значение определяет скорость медленной стадии релаксации к стационарному состоянию.

При малой величине шума минимальное ненулевое собственное значение экспоненциально мало по сравнению с γ . В этом случае его можно приближённо найти аналитически, используя теорию возмущений для P_i^{λ} [26]. В качестве нулевого приближения используется стационарная функция распределения $P^{\text{st}}(\epsilon)$, и учитывается поправка к ней первого порядка по λ . В результате в каждой области фазового пространства функцию распределения можно представить в виде

$$P_i^{\lambda}(\epsilon) = P_i^{\text{st}}(\epsilon) \left[1 + \frac{1}{Q} \int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon} \frac{\Phi_i(\epsilon') d\epsilon'}{D_i(\epsilon') P_i^{\text{st}}(\epsilon')} \right], \quad (2.18)$$

$$\Phi_i(\epsilon) = -\lambda \int_{\epsilon_i}^{\epsilon} d\epsilon' T_i(\epsilon') P^{\text{st}}(\epsilon'),$$

Используя непрерывность функции распределения и условие сохранения тока вероятности, можно «сшить» решения в разных областях фазового портрета и найти собственное значение:

$$\lambda = \frac{\gamma^2}{Q} \cdot \frac{K_1(\epsilon_{\text{sep}}) K_2(\epsilon_{\text{sep}})}{K_2(\epsilon_{\text{sep}}) - K_1(\epsilon_{\text{sep}})} \left[\frac{e^{-S_2}}{D_2'(\epsilon_2)} - \frac{e^{-S_1}}{D_1'(\epsilon_1)} \right], \quad (2.19)$$

$$S_i = \frac{\gamma}{Q} \int_{\epsilon_i}^{\epsilon_{\text{sep}}} \frac{K_i(\epsilon')}{D_i(\epsilon')} d\epsilon'$$

Эта формула подтверждает, что в бистабильном режиме минимальное ненулевое собственное значение экспоненциально мало по сравнению с γ и много

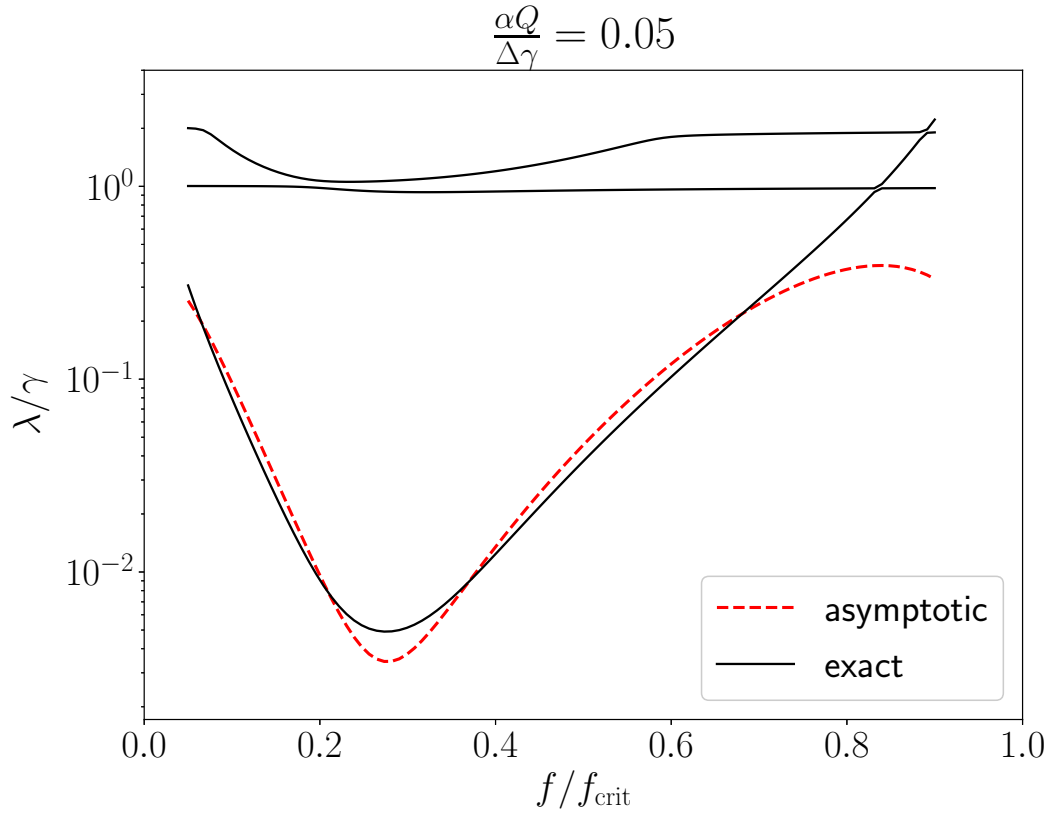


Рис. 2.6: Минимальное ненулевое собственное значение уравнения Фоккера–Планка при $\alpha Q/(\Delta\gamma) = 0.05$ (чёрные ромбы) сравнивается с асимптотической формулой (2.19) (красная кривая). Минимальное собственное значение меньше γ и всех остальных собственных значений. Асимптотическая формула хорошо согласуется с численным расчётом везде, кроме окрестности границ области бистабильности.

меньше, чем все остальные собственные значения задачи (2.17). Аналитическая формула (2.19) хорошо согласуется с численным расчётом, кроме случаев очень малых внешних полей и полей, близких к точке бифуркации $f = f_{\text{crit}}$ (см. Рис. 2.6). Согласно аналитической формуле (2.19) и численному решению задачи на собственные значения (2.17), минимальное ненулевое собственное значение зависит от внешнего поля f немонотонно. Оно достигает своего минимума около порогового значения внешнего поля $f = f_0$, соответствующего равной заселённости областей 1 и 2 (см. раздел 2.4).

Глава 3

Динамика квантового нелинейного осциллятора

3.1 Квантовый гамильтониан осциллятора

Модель классического нелинейного осциллятора во внешнем поле хорошо описывает широкий круг явлений, связанных с резонансным возбуждением осцилляторной моды внешним полем. Однако более фундаментальной является квантовая модель, где поле осциллятора описывается не классическими амплитудами a, a^* , а операторами рождения и уничтожения \hat{a}^\dagger, \hat{a} , удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (3.1)$$

В приближениях, аналогичным описанным в разделе 2.1, гамильтониан запишется в виде

$$\hat{H} = -\Delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\alpha}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + f(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.2)$$

где параметры Δ, α, f имеют такой же смысл¹, как и в (2.1).

Этот гамильтониан записан в представлении, вращающемся с частотой внешнего поля, и он не зависит от времени, так как в нём не учитываются члены, быстро осциллирующие на частотах порядка частоты внешнего поля. Его собственные состояния соответствуют состояниям Флоке полного периодически зависящего от времени гамильтониана, а собственные значения являются квазиэнергиями Флоке.

Унитарная динамика, описываемая гамильтонианом (3.2), может быть рассмотрена в квазиклассическом приближении, если нелинейность мала по сравнению с расстройкой $\Delta \gg \alpha$. Дело в том, что, хотя в классическом гамильтониане есть всего один безразмерный параметр $\beta = \frac{\alpha f^2}{\Delta^3}$, в квантовом появляется ещё один: $\mu = \frac{2\Delta}{\alpha}$. В следующем разделе будет показано, что он является

¹Для квантового гамильтониана, в отличие от классического, отсутствуют неопределённость в выборе масштаба для амплитуды. Поэтому коэффициент α для квантового гамильтониана — это нелинейный сдвиг частоты, приходящийся на один квант.

параметром квазиклассичности, и в пределе $\mu \rightarrow \infty$ для осциллятора применимо (с некоторыми оговорками) классическое описание. В то время как квантовая динамика полей \hat{a} и \hat{a}^\dagger описывается уравнениями Гейзенберга, в классическом пределе операторы могут быть заменены их средними значениями. Тогда временная эволюция классических амплитуд — это движение вдоль фазовых траекторий классического фазового портрета, причём классические траектории являются линиями уровня гамильтониана $H(a, a^*)$.

Квантовая модель (3.2) связана со своим квазиклассическим пределом посредством правила квантования Бора–Зоммерфельда. Хорошо известно, что в задаче о частице во внешнем потенциале набор собственных состояний можно идентифицировать с дискретным набором траекторий на классическом фазовом портрете, удовлетворяющем правилу квантования Бора–Зоммерфельда. Гамильтониан (3.2) не сводится к гамильтониану частицы в потенциале из-за неквадратичной зависимости от канонического импульса. Тем не менее, в следующем разделе будет показано, что к гамильтониану (3.2) правило квантования тоже применимо при больших значениях параметра $\mu = 2\Delta/\alpha$. Величина μ^{-1} играет роль малого параметра, аналогичного постоянной Планка: по ней проводится разложение волновой функции в квазиклассическом приближении.

Оказывается, квазиклассическое приближение для волновых функций даёт хорошие результаты для собственных значений гамильтониана и средних значений операторов даже при умеренном числе фотонов (~ 20) [30], циркулирующих в моде. Однако подход, основанный на квантовании Бора–Зоммерфельда, не учитывает возможности квантового туннелирования между областями 1 и 3 классического фазового портрета. Туннелирование возможно, потому что (см. Рис. 2.2) каждой траектории из классической области 1 соответствует классическая траектория из области 3 с тем же значением квазиэнергии. В последующих разделах этот эффект будет подробно изучен, и будет показано, что при определённых условиях собственные состояния гамильтониана (3.2) соответствуют суперпозициям классических траекторий из областей 1 и 3.

3.2 Теория среднего поля

В этом разделе собственные состояния квантовой модели (3.2) будут изучены в окрестностях устойчивых стационарных состояний с помощью приближения среднего поля. Используя это приближение, мы покажем, что собственное состояние нелинейного осциллятора, соответствующего волновому пакету в окрестности классического состояния 2, близко к сжатому когерентному состоянию. Будет продемонстрировано, что степень сжатия максимальна при небольших значениях возмущающей силы, и её максимальное значение степенным образом зависит от Δ/α .

Если нелинейность осциллятора достаточно мала, её можно использовать как малый параметр разложения. Однако с помощью прямой теории возмущений по α можно изучать только состояния с малым числом квантов. Это может быть не выполнено при достаточно больших амплитудах внешнего поля f , кроме того, это заведомо не позволяет описывать квантовые состояния, соответствующие движению в окрестности классического состояния 2 (число квантов в нём — порядка Δ/α). Поэтому можно применить теорию среднего поля, а именно, подействовать на гамильтониан таким оператором сдвига, переводящим \hat{a} в $\langle a \rangle + \hat{a}'$, чтобы гамильтониан, выраженный через \hat{a}' , не содержал линейных по \hat{a}' слагаемых. Оказывается, для этого нужно, чтобы $\langle a \rangle$ было одной из амплитуд устойчивых состояний 1 или 2, то есть решением уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial a^*}(\langle a \rangle, \langle a^* \rangle) = -\Delta \langle a \rangle + \alpha \langle a \rangle |\langle a \rangle|^2 + f = 0. \quad (3.3)$$

Подставляя $\hat{a} = \langle a \rangle + \hat{a}'$ в гамильтониан (3.2) и оставляя члены не выше второго порядка по \hat{a}' , получим

$$\hat{H} = H(\langle a \rangle, \langle a^* \rangle) - (\Delta - 2\alpha |\langle a \rangle|^2) \hat{a}'^\dagger \hat{a}' + \frac{\alpha}{2} \langle a \rangle^2 \hat{a}'^\dagger \hat{a}'^\dagger + \frac{\alpha}{2} \langle a^\dagger \rangle^2 \hat{a}' \hat{a}'. \quad (3.4)$$

Члены, содержащие больше двух операторов рождения/уничтожения, малы по параметру $\sqrt{\alpha/\Delta}$, и при не слишком малых амплитудах внешнего поля ими можно пренебречь.

Квадратичная часть гамильтониана (3.4) диагонализуеться с помощью пре-

образования Боголюбова:

$$\begin{aligned}\hat{a}' &= \hat{b} \cosh \theta - \hat{b}^\dagger \sinh \theta, \\ \tanh 2\theta &= \frac{\alpha |\langle a \rangle|^2}{2\alpha |\langle a \rangle|^2 - \Delta},\end{aligned}\tag{3.5}$$

При этом неопределённости квадратур $\hat{q}' = \frac{a' + (a')^\dagger}{\sqrt{2}}$ и $\hat{p}' = \frac{a' - (a')^\dagger}{\sqrt{2}i}$ в состоянии с нулевым числом возбуждений, уничтожаемых оператором \hat{b}' , имеют вид

$$\begin{aligned}\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle_2^2 &= \frac{e^{-2\theta}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha |\langle a \rangle_2|^2 - \Delta}{3\alpha |\langle a \rangle_2|^2 - \Delta}} \\ \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle_2^2 &= \frac{e^{2\theta}}{2},\end{aligned}\tag{3.6}$$

а частота малых колебаний —

$$\omega = \sqrt{(3\alpha |\langle a \rangle|^2 - \Delta)(\alpha |\langle a \rangle|^2 - \Delta)}.\tag{3.7}$$

Покажем теперь, что собственное состояние, соответствующее нулевым колебаниям в окрестности классического состояния 2, является сжатым, причём сжатие максимально при значениях возмущающего поля, много меньших f_{crit} .

При небольших значениях внешнего поля f для классических амплитуд в устойчивых состояниях легко получить выражения

$$\begin{aligned}\langle a \rangle_1 &\approx \frac{f}{\Delta}, \\ \langle a \rangle_2 &\approx -\sqrt{\frac{\Delta}{\alpha}} \left(1 + \frac{f}{2\Delta} \sqrt{\frac{\alpha}{\Delta}} \right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Рассмотрим выражения (3.6) более подробно для состояния, соответствующего нулевым колебаниям в окрестности классического состояния 2: оказывается, в нём степень сжатия растёт с увеличением Δ/α , в отличие от устойчивого состояния 1. Подставляя выражение для состояния 2 в (3.6), можно получить

$$\begin{aligned}\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle_2^2 &= \left(\frac{f}{2\Delta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right)^{\frac{1}{4}}, \\ \omega &= (2f)^{1/2} (\alpha \Delta)^{1/4}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Видно, что неопределённость квадратуры q для состояния с нулевым числом возбуждений около классического состояния 2 убывает с уменьшением внешнего поля как $f^{1/2}$. Разумеется, это не может быть выполнено для произвольно малых f , потому что при малых f квадратичное приближение перестаёт быть применимым. При $f = 0$ собственные состояния осциллятора являются фоковскими. Так как при адиабатическом уменьшении внешнего поля до нуля собственные состояния осциллятора с внешним полем переходят в собственные состояния невозмущённого осциллятора, очевидно, что рассматриваемое состояние (соответствующее малым колебаниям в окрестности состояния 2) перейдёт в фоковское с $\sim \Delta/\alpha$ квантами. Поэтому очевидно, что при очень малых f неопределённость квадратуры начинает, наоборот, расти.

Результаты численного расчёта неопределённости квадратуры в собственном состоянии, соответствующем нулевым колебаниям в окрестности классического состояния 2, приведены на рис. 3.1(a, b) в сравнении с аналитической формулой (3.6). На рис. 3.1(a) видно, что при $2\Delta/\alpha \rightarrow \infty$ неопределённость квадратуры как функция f стремится к значению, определяемому формулой (3.6), однако не описывается этой формулой в области малых f . Минимальное возможное значение неопределённости квадратуры и соответствующее значение внешнего поля f степенным образом зависят от $2\Delta/\alpha$, что можно видеть на рис. 3.1(b).

3.3 Квазиклассическое квантование

Метод среднего поля, описанный в предыдущем разделе, даёт хорошие приближения для собственных состояний, соответствующих слабым возбуждениями в окрестностях классических стационарных состояний. Однако для произвольных значений квазиэнергии нельзя пользоваться линеаризованным гамильтонианом (3.4), поэтому требуются другие методы для аналитического описания собственных состояний.

При достаточно больших значениях параметра μ для гамильтониана (3.2) применимо квазиклассическое приближение, аналогичное приближению ВКБ для квантовомеханической частицы в одномерной потенциальной яме. Для квантовомеханической частицы в потенциальной яме в приближении ВКБ

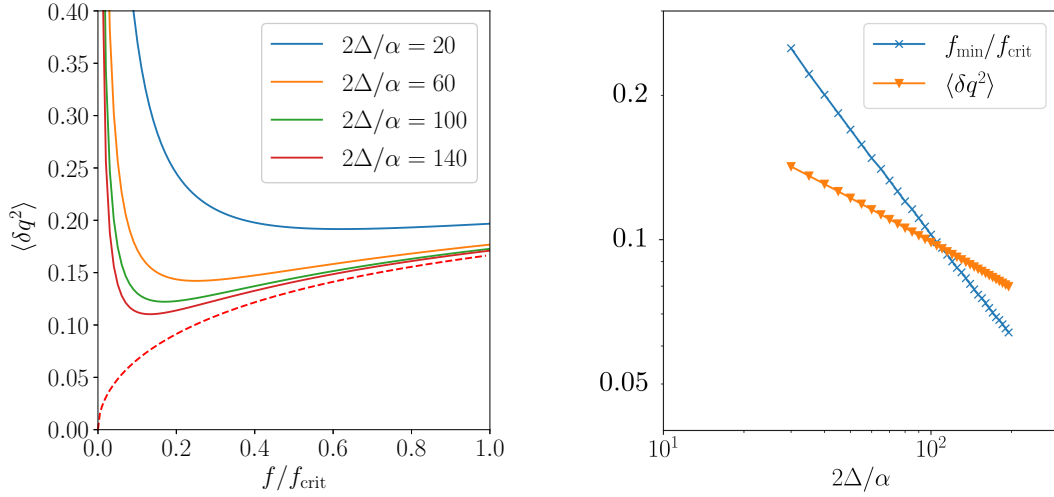


Рис. 3.1: (а) Неопределённость квадратуры в квазиэнергетическом состоянии осциллятора с минимальной квазиэнергией в зависимости от внешнего поля при различных $2\Delta/\alpha$. Пунктиром обозначено предсказание (3.6). (б) Минимальная неопределённость и соответствующее значение внешнего поля в зависимости от $2\Delta/\alpha$.

собственные состояния соответствуют дискретному набору классических траекторий на классической фазовой плоскости, удовлетворяющих правилу квантования Бора–Зоммерфельда. Оказывается, такой же взгляд справедлив для гамильтониана (3.2). Однако метод ВКБ для гамильтониана (3.2) сложнее, чем для частицы в потенциальной яме, потому что он содержит члены вплоть до четвёртого порядка по каноническому импульсу (канонические координата и импульс определяются равенствам $\hat{a}, \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} \pm i\hat{p})$). Из-за этого координатное представление становится неудобным, и удобнее пользоваться представлением когерентных состояний, в котором состояние осциллятора с известным разложением по фоковскому базису $|\psi\rangle = \sum c_n |n\rangle$ представляется в виде интеграла по когерентным состояниям,

$$|\psi\rangle = \int \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\pi} e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}} F(\zeta) |\zeta\rangle, \quad (3.10)$$

где $F(\zeta)$ — аналитическая функция, определяемая коэффициентами разложения:

$$F(\zeta) = e^{\frac{|\zeta|^2}{2}} \langle \zeta | \psi \rangle = \sum \frac{c_n \zeta^n}{\sqrt{n!}}. \quad (3.11)$$

В терминах аналитической функции $F(\zeta)$ стационарное уравнение Шрёдин-

гера может быть переписано как дифференциальное уравнение второго порядка. Легко проверить, что действие операторов \hat{a} и \hat{a}^\dagger на функцию F —

$$\begin{aligned} F(\zeta) &\xrightarrow{a} \frac{\partial F}{\partial \zeta} \\ F(\zeta) &\xrightarrow{a^\dagger} \zeta F. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Поэтому стационарное уравнение Шрёдингера принимает вид

$$\left[\frac{\alpha}{2} \left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 - \Delta \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + f \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \zeta \right) \right] F = \epsilon F. \quad (3.13)$$

В приложении 7.3 показывается, что решение этого уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} F &= \exp \left\{ \frac{\Delta}{\alpha} \int w(z) dz \right\}, \\ z &= \sqrt{\frac{\alpha}{\Delta}} \zeta \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $w(z)$ — некоторая функция, которую можно представить в виде формального ряда по μ^{-1} :

$$w(z) = w_0(z) + \frac{1}{\mu} w_1(z) + \dots, \quad (3.15)$$

Оказывается, ведущий член разложения определяется алгебраическим уравнением

$$\mathcal{H}(w_0, z) \equiv -w_0 z + \frac{1}{2} w_0^2 z^2 + \sqrt{\beta} (w_0 + z) = \frac{\alpha \epsilon}{\Delta^2}, \quad (3.16)$$

функция $\mathcal{H}(w_0, z)$ совпадает с классической функцией Гамильтона, выраженной через нормированные амплитуды поля: A, A^* , $A = a \sqrt{\alpha/\Delta}$, а $\beta = \alpha f^2 / \Delta^3$ (см. раздел 2.1). Подчеркнём, что в классической функции Гамильтона (2.1) переменные a и a^* считаются комплексно сопряжёнными, поэтому уравнение $H(a, a^*) = \epsilon$ определяет кривую на двумерной фазовой плоскости. В то же время w_0 и z — две независимые комплексные переменные, поэтому решение уравнения (3.16) существует при любом комплексном z . При этом классическая фазовая траектория определяется дополнительным условием $w_0 = z^*$.

При заданных параметрах Δ , α , и f уравнение (3.13) имеет решения для любого значения ϵ . В общем случае эти решения являются многозначными функциями комплексного переменного ζ , в то время как решения, соответ-

ствующие собственным состояниям, должны быть аналитическими на всей комплексной плоскости. (см. (3.11)). Из однозначности F следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint w(z) dz = \frac{2n}{\mu}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.17)$$

Легко показать, что это условие в ведущем порядке по μ^{-1} совпадает с обычным правилом квантования Бора–Зоммерфельда. Для этого выберем контур интегрирования в (3.17) так, что $w_0(z) = z^*$. Тогда контур совпадает с классической фазовой траекторией на плоскости комплексных амплитуд A , так как w_0 связан с z условием $\mathcal{H}(w_0, z) = E$. Если заменить w_0 и z на $A = \sqrt{\alpha/\Delta}a$ и A^* соответственно, получим обычное условие квантования:

$$\oint a^* da = 2\pi i n. \quad (3.18)$$

Состояние $|\psi\rangle$ с функцией F из уравнения (3.14), соответствующей нулевому приближению по μ^{-1} , можно интерпретировать как волновой пакет, распределённый вдоль классической фазовой траектории. Вспомним, что проекция $|\psi\rangle$ на когерентное состояние $|z\rangle$ равна $e^{-|z|^2/2} F(\zeta)$. Легко показать, что абсолютное значение $\langle z|\psi\rangle$ достигает максимума вблизи классической фазовой траектории. Для этого потребуем равенства нулю производных по ζ и ζ^* :

$$0 = \partial_{\zeta} e^{-|\zeta|^2} |F(\zeta)|^2 = (\partial_{\zeta} F(\zeta) - \zeta^*) F(\zeta)^* e^{-|\zeta|^2} = (w_0(\zeta) - \zeta^*) |F(\zeta)|^2 e^{-|\zeta|^2} \quad (3.19)$$

Это равенство выполняется, когда $w_0(\zeta) = \zeta^*$. Согласно написанному выше, это равенство выполняется на классической фазовой траектории $H(\zeta, \zeta^*) = \epsilon$.

Интерпретация $|\psi\rangle$ с функцией F как распределённого вдоль фазовой траектории волнового пакета хорошо согласуется с численным расчётом. Проекция волновой функции на когерентные состояния могут быть найдены численно с помощью точной диагонализации гамильтониана и продемонстрированы для разных собственных состояний на см. Рис. 3.2. Численный расчёт подтверждает, что матричный элемент $|\langle z|\psi\rangle|$ как функция z имеет максимальное значение в окрестностях классической фазовой траектории и быстро убывает при удалении от неё.

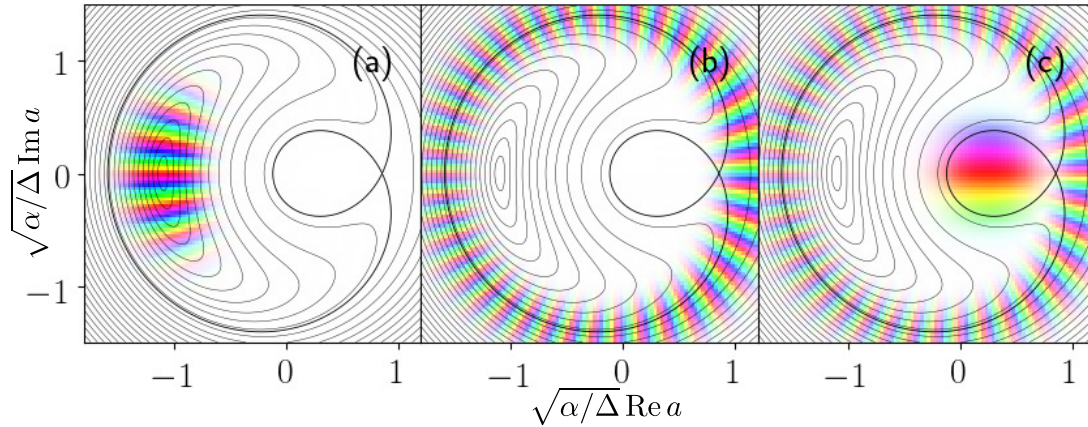


Рис. 3.2: Для отдельных собственных состояний осциллятора $|\psi\rangle$ изображены матричные элементы $\langle a|\psi\rangle$, где $|a\rangle$ — когерентное состояние, как функции комплексного аргумента a (цвет соответствует фазе, а яркость — амплитуде). Видно, что проекции $\langle a|\psi\rangle$ быстро убывают при удалении от классических траекторий. Состояние на рисунке (а) соответствует нулевым колебаниям в окрестности устойчивого состояния 2 и является сжатым. Состояние, изображенное на рисунке (с), соответствует суперпозиции двух классических траекторий.

В квазиклассическом подходе, использованном в этом разделе, не учитывается возможность квантового туннелирования между двумя вырожденными областями 1 и 3 фазового портрета. С другой стороны, имея набор квазиклассических волновых функций, влияние туннелирования можно оценить следующим образом. Во-первых, можно вычислить амплитуду туннелирования при данной квазиэнергии ϵ (это сделано ниже, в разделе 3.6). Далее, так как амплитуда туннелирования много меньше, чем расстояние между квазиэнергетическими уровнями внутри каждой из областей фазового портрета, для каждого состояния из области 1 можно учитывать только ближайшее по квазиэнергии состояние из области 3. Таким образом, в квазиклассическом режиме туннелирование между областями фазового портрета имеет резонансный характер: туннелирование будет существенно, только если найдётся пара классических траекторий из областей 1 и 3, определённых правилом квантования Бора–Зоммерфельда, с равными или достаточно близкими квазиэнергиями.

Определим, при каких параметрах гамильтониана существуют квантованные траектории из областей 1 и 3 с равными квазиэнергиями, исходя из правила квантования в ведущем порядке по μ^{-1} . Через адиабатический инвариант

траектории, определённый как $n_r(\epsilon) \frac{1}{2\pi} \oint pdq$ (r — область фазового портрета), правило квантования запишется как

$$n_r(\epsilon) \in \mathbb{Z}, \quad (3.20)$$

(Отметим, что $n_r(\epsilon)$ с точностью до коэффициента 2π совпадают с коэффициентами дрейфа $K_r(\epsilon)$ в пространстве квазиэнергий, фигурирующими в уравнении Фоккера–Планка (2.10).) Если определить обратные к $n_r(\epsilon)$ функции, $\epsilon_r(n)$ (квазиэнергии как функции адиабатического инварианта), то условие равенства квазиэнергий запишется как

$$\epsilon_1(n_1) = \epsilon_3(n_3), \quad (3.21)$$

где n_1, n_3 — некоторые целые числа. Вообще говоря, (3.21) — некоторые сложные неявные соотношения на Δ, α и f . Однако оказывается, что для рассматриваемой модели решение (3.21) выглядит очень просто в из-за того, что n_1 и n_3 связаны между собой тождеством

$$n_3(\epsilon) - n_1(\epsilon) = \mu. \quad (3.22)$$

Доказательство, основанное на выражениях для $n_r(\epsilon)$ через эллиптические интегралы, приведено в Приложении 7.2. Из этого следует тождество для квазиэнергий как функций адиабатического инварианта:

$$\epsilon_1(n) = \epsilon_3(\mu - n) \quad (3.23)$$

Следовательно, равенство квазиэнергий квантованных траекторий из областей 1 и 3 достигается при целых значениях μ независимо от значения внешнего поля f , причём для всех траекторий из области 1 сразу. (Вырождение уровней из областей 1 и 3 фазового портрета осциллятора было рассмотрено аналогичным образом в работе [19]).

Вывод о таком необычном поведении квазиэнергетических уровней был сделан на основе правила квантования Бора–Зоммерфельда в ведущем порядке по параметру квазиклассичности μ^{-1} . Учёт поправок следующих порядков

по μ^{-1} мог бы изменить описанную картину, однако в следующих разделах с помощью теории возмущений будет показано, что этого не происходит.

3.4 Теория возмущений

Собственные состояния квантового нелинейного осциллятора (3.2) можно изучать не только в квазиклассическом приближении, но и по теории возмущений, если в качестве возмущения рассматривать внешнее поле. В отсутствие поля (при $f = 0$) гамильтониан коммутирует с оператором числа квантов $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, поэтому собственные состояния — это фоковские состояния $|n\rangle$, которым соответствуют квазиэнергии

$$\epsilon_n^{(0)} = -\Delta n + \frac{\alpha n^2}{2} = \frac{\alpha}{2} n(n - \mu). \quad (3.24)$$

При $f = 0$, таким образом, тождества (3.22) и (3.23) становятся очевидными: адиабатический инвариант переходит в номер фоковского состояния², и тождество (3.23) переходит в очевидное равенство $\epsilon_n^{(0)} = \epsilon_{\mu-n}^{(0)}$.

Спектр квазиэнергий при $f = 0$ невырожден, если параметр $\mu \equiv 2\Delta/\alpha$ нецелый. В этом случае можно пользоваться обычной невырожденной теорией возмущений, и собственные состояния остаются близки к фоковским при малых f . При адиабатическом включении поля каждое фоковское состояние $|n\rangle$ проэволюционирует в собственное состояние $|\psi_n\rangle$ с квазиэнергией $\epsilon_n(f)$. Эти квазиэнергии в случае невырожденного спектра можно разложить в ряд по f , коэффициенты которого можно найти по обычным формулам теории возмущений.

$$\epsilon_n(f) = \frac{\alpha}{2} n(n - \mu) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_n^{(k)} f^k, \quad (3.25)$$

$$\delta\epsilon_n^{(2)} = \sum_{n'} \frac{|V_{nn'}|^2}{\epsilon_n^{(0)} - \epsilon_{n'}^{(0)}} = \frac{f^2}{\alpha} \cdot \frac{(\mu + 1)}{(\mu - 2n)^2 - 1}, \quad (3.26)$$

$$\delta\epsilon_n^{(4)} = \frac{f^4}{\alpha^3} \cdot \frac{-3(2n - \mu)^4 + (2n - \mu)^2(5\mu^2 + 10\mu + 11) + 7\mu^2 + 14\mu + 4}{2(2n - \mu - 2)(2n - \mu + 2)(2n - \mu - 1)^3(2n - \mu + 1)^3}. \quad (3.27)$$

Однако при целом $\mu = m$, то есть при значениях расстройки $\Delta = m\alpha/2$,

²В этом месте важен знак адиабатического инварианта: для траекторий из области 1 адиабатический инвариант отрицателен.

фоковские состояния с числом квантов $\leq m$ разбиваются на пары $|n\rangle, |m-n\rangle$ с одинаковыми значениями квазиэнергий: $\epsilon_n^{(0)} = \epsilon_{m-n}^{(0)}$. Таким образом, даже малые возмущения могут привести к гибридизации состояний $|n\rangle$ и $|m-n\rangle$, и в этом случае для нахождения собственных функций и квазиэнергий нужно использовать вырожденную теорию возмущений. Обычная вырожденная теория возмущений первого порядка в этом случае не позволяет получить собственные состояния, потому что матричные элементы оператора возмущения $V_{nn'}$ отличны от нуля только при $n' = n \pm 1$, и амплитуда перехода из состояния $|n\rangle$ в $|m-n\rangle$ имеет порядок $m-2n$ по возмущению. Это можно интерпретировать как многофотонный переход с поглощением $m-2n$ квантов внешнего поля.

Таким образом, чтобы найти многофотонную амплитуду перехода между $|n\rangle$ и $|m-n\rangle$, нужно рассматривать все порядки теории возмущений вплоть до $m-2n$. Однако, помимо многофотонных переходов, возмущение также вызывает нерезонансные сдвиги уровня $|n\rangle$ за счёт взаимодействия с $|n \pm 1\rangle, |n \pm 2\rangle, \dots$ (и аналогично для $|m-n\rangle$). Эти сдвиги, вообще говоря, могли бы привести к зависимости положения многофотонного резонанса от f , и в результате значения расстройки, соответствующие многофотонному резонансу, могли бы отличаться от $m\alpha/2$.

Однако оказывается, что нерезонансные сдвиги уровней n и $m-n$ в точности равны во всех порядках теории возмущений вплоть до $m-2n$, и при целом μ расщепление между $|n\rangle$ и $|m-n\rangle$ происходит только в порядке $m-2n$ за счёт многофотонных переходов. Математически это выражается следующим образом. Коэффициенты разложения $\epsilon_n^{(k)}$ квазиэнергий $\epsilon_n(f)$ пока что определены только для целых положительных n , потому что n имеет смысл номера фоковского состояния. Однако очевидно, что эти коэффициенты являются рациональными функциями n . Поэтому можно рассмотреть их аналитическое продолжение на случай всех возможных вещественных³ ν . Оказывается, для аналитических продолжений справедливо следующее тождество:

$$\epsilon_\nu^{(k)} = \epsilon_{\mu-\nu}^{(k)} \quad \forall k \quad (3.28)$$

³Можно рассматривать и комплексные ν , но в данной работе это нигде не потребуется.

Выполнение этого тождества легко видеть на примере приведённых выражений (3.26) и (3.27) для поправок второго и четвёртого порядков, а полное доказательство будет приведено в следующем разделе 3.5.

Подчёркнём, что из равенства для аналитических продолжений поправок не следует попарное вырождение уровней энергии при целых μ . Дело в том, что при целых μ невырожденная теория возмущений неприменима, что формально проявляется в наличии полюсов у $\epsilon_\nu^{(k)}$ при целых значениях μ и ν . Однако аккуратный анализ, проведённый ниже, позволяет сделать вывод о том, что расщепление между уровнями n и $m - n$ при целых $\mu = n$ происходит только в порядке $m - 2n$, причём именно за счёт многофотонного процесса. Для этого потребуются рассмотреть много порядков теории возмущений, и для этого мы будем использовать формализм функций Грина.

Собственные функции и собственные энергии можно найти, если известна матричная функция Грина оператора \hat{H} , определённая как

$$\hat{G} = [\omega - \hat{H}]^{-1} = \sum_n \frac{|\psi_n\rangle\langle\psi_n|}{\omega - \epsilon_n}, \quad (3.29)$$

где $|\psi_n\rangle$ — набор собственных состояний с квазиэнергиями ϵ_n . Функцию Грина $\hat{G}(\omega)$ можно найти, суммируя ряд фейнмановских диаграмм.

Используя обычное уравнение Дайсона, можно вычислить матричный элемент G_{nn} ,

$$G_{nn}(\omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_n^{(0)} - \Sigma_n(\omega)}, \quad (3.30)$$

где $\Sigma_n(\omega)$ — неприводимая вершинная часть, состоящая из всех диаграмм, не содержащих «голую» функцию Грина $G_{nn}^{(0)}$. Если спектр невозмущённой задачи невырожден, то $\Sigma_{nn}(\omega)$ регулярна в окрестности $\epsilon_n^{(0)}$, и положение полюса можно искать в виде ряда по f из уравнения $\omega - \epsilon_n^{(0)} - \Sigma_n(\omega) = 0$. Разумеется, результат будет таким же, как и при применении обычной теории возмущений.

Однако если в невозмущённой системе присутствует уровень энергии, близкий к $\epsilon_n^{(0)}$, то в окрестности $\epsilon_n^{(0)}$ у $\Sigma_{nn}(\omega)$ будет присутствовать полюс. Из-за этого решение уравнения $\omega - \epsilon_n^{(0)} - \Sigma_n(\omega) = 0$ нельзя найти в виде простого разложения по f .

Чтобы проанализировать поведение полюсов, когда в невозмущённой системе есть вырожденные уровни n и $m - n$, удобно рассмотреть следующую матрицу, состоящую из матричных элементов функции Грина:

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} G_{nn} & G_{n,m-n} \\ G_{m-n,n} & G_{m-n,m-n} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Для неё, как и для матричного элемента G_{nn} , справедливо уравнение Дайсона, записывающееся через матричную собственно–энергетическую часть \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \mathfrak{G}^{(0)} + \mathfrak{G}^{(0)} \mathcal{S} \mathfrak{G}, \\ \mathcal{S} &= \begin{pmatrix} \Sigma_{n,n} & \Sigma_{n,m-n} \\ \Sigma_{m-n,n} & \Sigma_{m-n,m-n} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Матричные собственно–энергетические части $\Sigma_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{n, m - n\}$ определяются как суммы диаграмм, начинающихся в α , заканчивающиеся в β и не содержащие функции Грина $G_n^{(0)}$ и $G_{m-n}^{(0)}$. В отличие от собственно–энергетических частей Σ_n , определённых выше, $\Sigma_{\alpha\beta}$ не имеют особенностей, когда $\epsilon_n^{(0)} = \epsilon_{m-n}^{(0)}$. Это упрощает анализ полюсов функций Грина.

Важная особенность собственно–энергетической части — то, что диагональная и недиагональная части имеют различный порядок по f . Диагональная часть — ряд по чётным степеням f , начинающийся с члена порядка f^2 . В дальнейшем нам не понадобится явное выражение для диагональных элементов собственно–энергетической части. В то же время $\Sigma_{n,m-n}$ имеет порядок f^{m-2n} . В ведущем порядке

$$\Sigma_{n,m-n}(\omega, f, \mu) = \frac{V_{n,n+1} \cdots V_{m-n-1,m-n}}{(\omega - \epsilon_{n+1}^0) \cdots (\omega - \epsilon_{m-n-1}^0)}. \quad (3.33)$$

Именно недиагональная часть ответственна за многофотонные переходы между состояниями $|n\rangle$ и $|m - n\rangle$. В дальнейшем мы покажем, что величина $\Sigma_{n,m-n}(\epsilon_n^0, f, m)$ может быть интерпретирована как частота многофотонных переходов между $|n\rangle$ и $|m - n\rangle$. Принимая во внимание вид гамильтониана

(3.2), легко получить явное выражение для многофотонной амплитуды:

$$t_{n,m-n} = \alpha \left(\frac{2f}{\alpha} \right)^{m-2n} \frac{1}{(m-2n-1)!^2} \sqrt{\frac{(m-n)!}{n!}}. \quad (3.34)$$

Из матричного уравнения Дайсона (3.32) можно легко найти матрицу \mathfrak{G} :

$$\mathfrak{G}^{-1} = \begin{pmatrix} \omega - \epsilon_n - \Sigma_{nn}(\omega) & -\Sigma_{n,m-n}(\omega) \\ -\Sigma_{m-n,n}(\omega) & \omega - \epsilon_{m-n} - \Sigma_{m-n,m-n}(\omega) \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

Полюса функции Грина определяются равенством нулю детерминанта \mathfrak{G}^{-1} :

$$(\omega - \epsilon_n - \Sigma_{nn}(\omega)) (\omega - \epsilon_{m-n} - \Sigma_{m-n,m-n}(\omega)) = |\Sigma_{n,m-n}(\omega)|^2 \quad (3.36)$$

Регулярность $\Sigma_{\alpha\beta}$ в окрестностях $\epsilon_n^{(0)}$ и $\epsilon_{m-n}^{(0)}$ позволяет в ведущем приближении анализировать (3.36) как квадратное уравнение, а затем искать малые поправки к найденным решениям по f .

Рассмотрим решение этого уравнения в ведущем порядке по f . Как говорилось выше, $\Sigma_{n,m-n}(\omega)$ пропорциональна f^{m-2n} . Это значит, что, если требуется найти поправки к уровням энергии ниже порядка f^{m-2n} , правой стороной уравнения можно пренебречь, и уравнение (3.36) распадается на два независимых:

$$\begin{aligned} (\omega - \epsilon_n - \Sigma_{nn}(\omega)) &= 0 \\ (\omega - \epsilon_{m-n} - \Sigma_{m-n,m-n}(\omega)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Определим точные решения этих уравнений как $\tilde{\epsilon}_n$ и $\tilde{\epsilon}_{m-n}$. Оказывается, с их помощью можно решить уравнение (3.36) уже с учётом недиагональных членов собственно-энергетической части. В ведущем порядке по f это можно сделать, просто заменив каждый из членов $(\omega - \epsilon_\alpha - \Sigma_{\alpha\alpha}(\omega))$ в (3.36) на $\omega - \tilde{\epsilon}_\alpha$. Так как нас интересует случай, когда $\epsilon_n^{(0)}$ и $\epsilon_{m-n}^{(0)}$ (а, следовательно, и $\tilde{\epsilon}_n$ и $\tilde{\epsilon}_{m-n}$) очень близки, можно также заменить аргумент ω в $\Sigma_{n,m-n}$ на $\frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}_n + \tilde{\epsilon}_{m-n})$. В результате получается квадратное уравнение на ω . Решение принимает вид

$$\epsilon_{n,m-n}^\pm \approx \frac{\tilde{\epsilon}_n + \tilde{\epsilon}_{m-n}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{\epsilon}_n - \tilde{\epsilon}_{m-n}}{2} \right)^2 + |\Sigma_{n,m-n}|^2}, \quad (3.38)$$

а расщепление между уровнями —

$$\epsilon_{n,m-n}^+ - \epsilon_{n,m-n}^- \approx 2\sqrt{\left(\frac{\tilde{\epsilon}_n - \tilde{\epsilon}_{m-n}}{2}\right)^2 + |\Sigma_{n,m-n}|^2}, \quad (3.39)$$

Как видно, минимальное значение расщепления достигается при таких значениях расстройки и амплитуды, что $\tilde{\epsilon}_n - \tilde{\epsilon}_{m-n} = 0$, и равно $2|\Sigma_{n,m-n}|$. Обратим внимание, что, хотя $\epsilon_n^{(0)} = \epsilon_{m-n}^{(0)}$ при $2\Delta/\alpha = m$, неочевидно, при каком значении расстройки $\tilde{\epsilon}_n = \tilde{\epsilon}_{m-n}$, так как и $\tilde{\epsilon}_n$, и $\tilde{\epsilon}_{m-n}$ являются функциями f . Как уже говорилось выше, эффект возмущения состоит не только в том, что оно индуцирует многофотонные переходы между $|n\rangle$ и $|m-n\rangle$, но и в том, что оно вызывает сдвиг уровней энергии $|n\rangle$ и $|m-n\rangle$ за счёт нерезонансного взаимодействия со всеми другими уровнями. Величины $\tilde{\epsilon}_n$ и $\tilde{\epsilon}_{m-n}$ — это и есть сдвинутые значения уровней энергии $|n\rangle$ и $|m-n\rangle$ без учёта многофотонных переходов между ними.

Теперь вспомним про равенство поправок теории возмущений (3.4). Хотя при целых значениях ν у поправок $\epsilon_\nu^{(k)}$ могут быть полюсы, оказывается, что эти полюсы есть только для поправок достаточно высокой степени, а именно, для $k \geq 2|m-2n|$. Значит, при $k < 2|m-2n|$ можно утверждать о симметрии поправок невырожденной теории возмущений даже для целых m . Кроме того, можно установить связь между $\tilde{\epsilon}_n(f)$ и $\epsilon_n(f)$. Вообще говоря, они не равны между собой. Однако разница между ними проявляется только в порядке теории возмущений $k \geq 2|m-2n|$, потому что Σ_n отличается от Σ_{nn} только в порядке $2|m-2n|$ по f (это очевидно из диаграммного разложения).

Следовательно, разложение $\tilde{\epsilon}_n(f)$ в ряд по f даётся рядом невырожденной теории возмущений вплоть до порядка $2|m-2n|$, несмотря на наличие вырождения. В совокупности с симметрией поправок это позволяет сделать вывод, что разложения $\tilde{\epsilon}_n(f)$ и $\tilde{\epsilon}_{m-n}(f)$ при $\mu = m$ совпадают вплоть до порядка $f^{2|m-2n|}$. Это доказывает, что антипересечения всех пар уровней $n, m-n$ действительно происходят при одном и том же значении $\mu = m$.

Утверждения этого раздела об уровнях осциллятора были проверены путём численной диагонализации гамильтониана (3.2). Во-первых, на Рис. 3.3 показана зависимость уровней квазиэнергии при $\mu \in \mathbb{Z}$ от внешнего поля f .

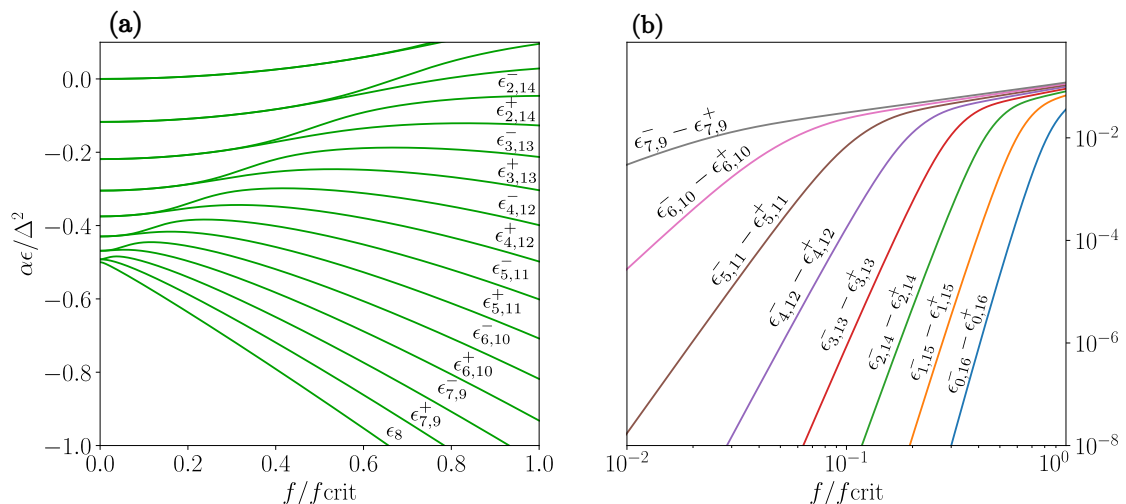


Рис. 3.3: (а) Уровни квазиэнергии квантового нелинейного осциллятора с $\Delta/\alpha = 8$ в зависимости от f . (б) Расщепления между состояниями, соответствующими суперпозициям $|n\rangle$ и $|m-n\rangle$. Можно видеть, что $\epsilon_{n,m-n}^- - \epsilon_{n,m-n}^+ \propto f^{|m-2n|}$.

Видно, что расщепления между состояниями, образованными $|n\rangle$ и $|m-n\rangle$, зависят от внешнего поля как f^{m-2n} . Кроме того, на Рис. 3.4 показана зависимость уровней квазиэнергии от $\mu = 2\Delta/\alpha$ при постоянном внешнем поле. При $\mu \in \mathbb{Z}$ можно видеть одновременные антипересечения многих пар уровней.

3.5 Симметрия обобщенной модели

В этом разделе будет приведено доказательство симметрии поправок теории возмущений к уровням квазиэнергии осциллятора (3.2), аналитически продолженных на область вещественных чисел квантов (см. уравнение (3.4)). Для этого мы рассмотрим аналитическое продолжение самих квазиэнергий осциллятора $\epsilon_\nu(f)$ на область вещественных ν и докажем равенство

$$\epsilon_\nu(f) = \epsilon_{\mu-\nu}(f) \quad (3.40)$$

во всех порядках по f .

Чтобы построить аналитическое продолжение квазиэнергий, расширим действие гамильтониана (3.2) на пространство «фоковских состояний» со всеми возможными вещественными числами квантов ν . Для этого определим

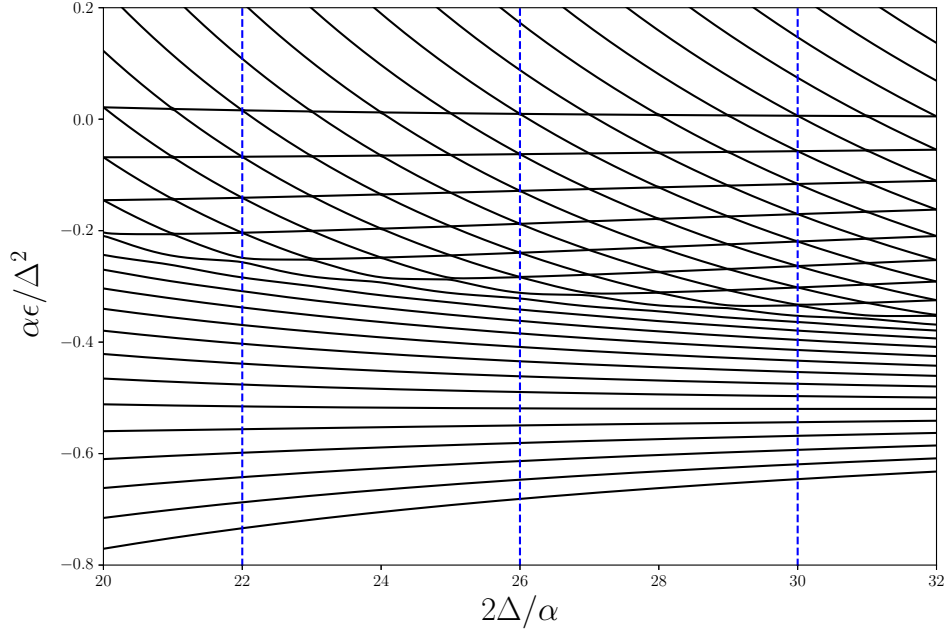


Рис. 3.4: Уровни квазиэнергий квантового нелинейного осциллятора с $f/\alpha = 4.47$ в зависимости от Δ . При целых значениях $2\Delta/\alpha$ наблюдаются одновременные антипересечения многих пар уровней.

действия операторов a , a^\dagger :

$$\langle \nu | a | \nu + 1 \rangle = \langle \nu + 1 | a^\dagger | \nu \rangle = \sqrt{\nu + 1} \quad (3.41)$$

Это определение сохраняет коммутационное соотношение $[a, a^\dagger] = 1$, однако a и a^\dagger уже не являются эрмитово сопряжёнными. Гамильтониан (3.2), таким образом, становится неэрмитовой, но симметричной матрицей.

При $f = 0$ каждый вектор $|\nu\rangle$ является собственным состоянием гамильтониана (3.2) с собственным значением $\epsilon_\nu^{(0)} = \frac{\alpha}{2}\nu(\nu - m)$. При $f \neq 0$, возмущение делает возможными переходы $|\nu\rangle$ в $|\nu \pm 1\rangle, |\nu \pm 2\rangle, \dots, |\nu \pm k\rangle \dots$. Таким образом, для каждого ν гамильтониан инвариантно действует на подпространстве, являющемся линейной оболочкой набора векторов $|\nu + k\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Определим это подпространство как \mathcal{V}_ν . Очевидно, что \mathcal{V}_ν совпадает с $\mathcal{V}_{\nu+k}$ для любого целого k . Кроме того, при $\nu = 0$ соответствующее подпространство \mathcal{V}_0 распадается ещё на два инвариантных подпространства, \mathcal{V}_+ , порождённое $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$, и \mathcal{V}_- , порождённое $|-1\rangle, |-2\rangle, \dots$. Действие обобщённого гамильтониана на подпространстве \mathcal{V}_+ тождественно совпадает с действием исходного

гамильтониана, определённого для неотрицательных чисел квантов. Напротив, подпространства \mathcal{V}_ν при $\nu \notin \mathbb{Z}$ и \mathcal{V}_- не имеют прямого физического смысла, и мы их рассматриваем для того, чтобы исследовать свойства $\epsilon_\nu(f)$ как функций вещественного аргумента ν , а затем перейти к пределу целых ν и μ .

Обозначим действие \mathcal{H} на подпространство \mathcal{V}_ν как \mathcal{H}_ν . Его можно записать в виде

$$\mathcal{H}_\nu = \frac{\alpha}{2} \sum_{\sigma-\nu \in \mathbb{Z}} [\sigma(\sigma-m)|\sigma\rangle\langle\sigma| + f\sqrt{\sigma}(|\sigma-1\rangle\langle\sigma| + |\sigma\rangle\langle\sigma-1|)] \quad (3.42)$$

Собственные значения этого оператора являются функциями f . Если $2\nu - m$ не является целым, то набор собственных значений \mathcal{H}_ν при $f = 0$ невырожден. Таким образом, можно определить функцию $\epsilon_\nu(f)$ как собственное значение состояния, в которое переходит $|\nu\rangle$ после адиабатического включения возмущения. Более того, $\epsilon_\nu(f)$ можно разложить в ряд теории возмущений по f , и при $\nu \in \mathbb{Z}$ и $\mu \notin \mathbb{Z}$ этот ряд совпадает с рядом невырожденной теории возмущений для исходного гамильтониана.

Теперь перейдём к доказательству тождества $\epsilon_\nu(f) = \epsilon_{m-\nu}(f)$. По определению, $\epsilon_\nu(f)$ — это собственное значение оператора \mathcal{H}_ν , соответствующее состоянию, адиабатически проэволюционировавшему из $|\nu\rangle$. Аналогично, $\epsilon_{m-\nu}(f)$ — это собственное значение оператора $\mathcal{H}_{m-\nu}$, соответствующее состоянию, адиабатически проэволюционировавшему из $|\mu - \nu\rangle$. Очевидно, что при $f = 0$ спектры \mathcal{H}_ν и $\mathcal{H}_{m-\nu}$ совпадают. Следовательно, требуется доказать, что спектры \mathcal{H}_ν и $\mathcal{H}_{m-\nu}$ совпадают при любом f : из этого будет следовать и равенство $\epsilon_\nu(f) = \epsilon_{m-\nu}(f)$.

Для доказательства идентичности спектров \mathcal{H}_ν и $\mathcal{H}_{m-\nu}$ достаточно найти линейное преобразование, которое один оператор переводит в другой. По определению, оператор $\mathcal{H}_{m-\nu}$ имеет вид

$$\mathcal{H}_{m-\nu} = \frac{\alpha}{2} \sum_{\sigma-m+\nu \in \mathbb{Z}} \sigma(\sigma-m)|\sigma\rangle\langle\sigma| + f\sqrt{\sigma}(|\sigma-1\rangle\langle\sigma| + |\sigma\rangle\langle\sigma-1|). \quad (3.43)$$

Разница между (3.42) и (3.43) — в том, по каким σ ведётся суммирование.

В то время как \mathcal{H}_ν действует на подпространстве \mathcal{V}_ν , $\mathcal{H}_{\mu-\nu}$ действует на $\mathcal{V}_{\mu-\nu}$. Удобно определить изоморфизм I между \mathcal{V}_ν и $\mathcal{V}_{\mu-\nu}$:

$$|m - \sigma\rangle \xrightarrow{I} |\sigma\rangle. \quad (3.44)$$

Очевидно,

$$I\mathcal{H}_{m-\nu}I^{-1} = \frac{\alpha}{2} \sum_{\sigma-\nu \in \mathbb{Z}} \sigma(\sigma-m)|\sigma\rangle\langle\sigma| + f \sum \sqrt{m-\sigma}(|\sigma+1\rangle\langle\sigma| + |\sigma\rangle\langle\sigma+1|) \quad (3.45)$$

Теперь осталось построить линейный оператор, связывающий между собой \mathcal{H}_ν и $I\mathcal{H}_{m-\nu}I^{-1}$. Оказывается, такой оператор \mathcal{T} существует и имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}_\nu = \mathcal{T}I\mathcal{H}_{m-\nu}I^{-1}\mathcal{T}^{-1}, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{T} = UTU'^{-1}, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} U &= \sum_{\sigma} \sqrt{\Gamma(\sigma+1)} |\sigma\rangle\langle\sigma| \\ U' &= \sum_{\sigma} \sqrt{\Gamma(m-\sigma)} |\sigma\rangle\langle\sigma| \\ T &= \exp \left\{ \frac{2f}{\alpha} \sum |\sigma\rangle\langle\sigma+1| \right\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Тождества (3.46), (3.47), (3.48) могут быть проверены прямым вычислением, которое приведено в Приложении 7.4.

Эквивалентность \mathcal{H}_ν и $\mathcal{H}_{\mu-\nu}$ доказывает равенство их спектров и, следовательно, равенство $\epsilon_\nu(f) = \epsilon_{m-\nu}(f)$ при $2\nu - m \notin \mathbb{Z}$. Теперь легко доказать равенство (3.4). Собственные значения $\epsilon_\nu(f)$ можно разложить в ряд по f :

$$\epsilon_\nu(f) = \frac{\alpha}{2} \nu(\nu - m) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_\nu^{(k)} f^k \quad (3.49)$$

Как было указано в разделе 3.4, коэффициенты разложения — рациональные функции. Кроме того, обобщённый гамильтониан для целых неотрицательных ν совпадает с исходным гамильтонианом осциллятора. Значит, коэффициенты разложения (3.49) совпадают с аналитическими продолжениями коэффициентов, из формулы (3.4). Кроме того, так как $\epsilon_\nu(f) = \epsilon_{m-\nu}(f)$, то же

самое верно и для каждого из коэффициентов $\epsilon_\nu^{(k)}$. Это доказывает тождество (3.4).

3.6 Туннелирование и многофотонные переходы

В разделе 3.4 расщепление между состояниями $|n\rangle$ и $|m-n\rangle$ вычислено с помощью теории возмущений. С другой стороны, то же самое расщепление можно найти с помощью квазиклассического подхода, рассматривая переход между областями фазового портрета как туннелирование. В этом разделе квазиклассическая экспонента будет вычислена с использованием q - p представления для исходного гамильтониана (3.2). В q - p представлении комплексные амплитуды выражаются через канонические координату и импульс следующим образом: $a, a^* = \frac{q \pm ip}{\sqrt{2}}$. Гамильтониан при этом принимает вид

$$\mathcal{H} = -\Delta \left(\frac{q^2 + p^2}{2} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{q^2 + p^2}{2} \right)^2 + \sqrt{2}fq \quad (3.50)$$

Туннельное действие, соответствующее переходам между двумя траекториями с квазиэнергией ϵ , можно вычислить с помощью следующего формального трюка. Заменяем в гамильтониане (3.50) канонический импульс p на $i\tilde{p}$ (эта замена соответствует динамике во мнимом времени). Тогда гамильтониан принимает следующий вид:

$$\mathcal{H} = -\Delta \left(\frac{q^2 - \tilde{p}^2}{2} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{q^2 - \tilde{p}^2}{2} \right)^2 + \sqrt{2}fq \quad (3.51)$$

Фазовый портрет во мнимом времени изображен на Рис. 3.5.

Оказывается, что туннельное действие для квазиэнергии ϵ можно вычислить как интеграл по замкнутой траектории во мнимом времени в пространстве q, \tilde{p} :

$$S = \frac{1}{2} \oint \tilde{p}dq, \quad (3.52)$$

Легко видеть, что периодические траектории во мнимом времени существуют в интервале квазиэнергий $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_1$, то есть для всех квазиэнергий, при которых есть две вырожденные траектории в вещественном времени.

Туннельное действие, полученное таким образом, может быть выражено

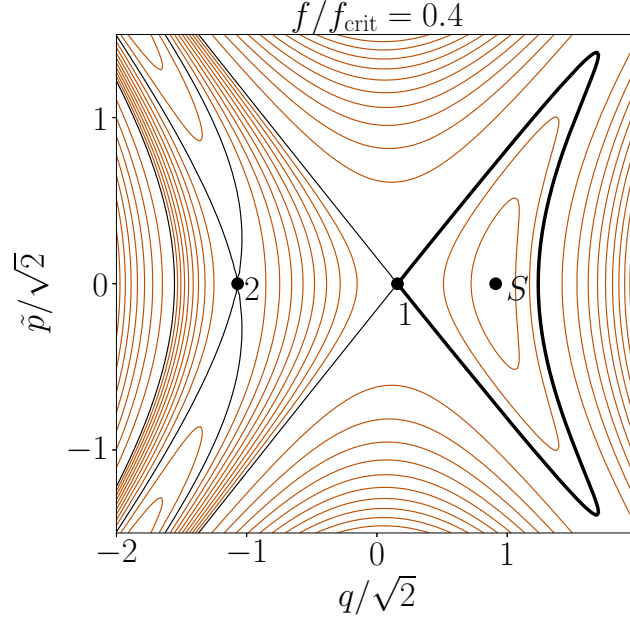


Рис. 3.5: Классический фазовый портрет осциллятора во мнимом времени с гамильтонианом (3.51). Жирная чёрная линия обозначает границу области с периодическими траекториями во мнимом времени, ответственными за туннелирование.

в виде интеграла

$$S_{\text{tunn}} = \frac{\Delta}{\alpha} \int \text{acosh} \left\{ \frac{\frac{\alpha\epsilon}{\Delta^2} + \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{8}}{\sqrt{2\alpha/\Delta^3} fs} \right\} s ds. \quad (3.53)$$

Соответствующую амплитуду перехода можно оценить как

$$\omega_R \sim \frac{1}{T(\epsilon)} e^{-S_{\text{tunn}}}. \quad (3.54)$$

Обсудим вопрос о соответствии между квазиклассическим и пертурбативным способами нахождения амплитуды перехода между областями фазового портрета, в частности, сравним между собой выражение (3.34), полученное по теории возмущений, и (3.54).

При малых f туннельная экспонента может быть аппроксимирована

$$S_{\text{tunn}} = \frac{\Delta}{\alpha} \left[\sqrt{1 + \frac{2\alpha\epsilon}{\Delta^2}} \ln \frac{2\Delta^3}{\alpha f^2} + \int_{x_1}^{x_2} \ln \frac{\frac{2\alpha\epsilon}{\Delta^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}}{x} x dx \right] \quad (3.55)$$

$$x_{1,2} = \sqrt{2 \mp 2\sqrt{1 + \frac{2\alpha\epsilon}{\Delta^2}}}.$$

С другой стороны, логарифм отношения $t_{n,m-n}/\Delta$ для больших m, n равен

$$\ln \frac{\omega_R^{n,m-n}}{\Delta} = \frac{m}{2} \left[(1-r) \ln \frac{1}{\beta} + (1-r)(2 \ln 2 - 3) + 4(1-r) \ln(1-r) - \frac{1}{2}((2-r) \ln(2-r) - r \ln r) \right], \quad (3.56)$$

где $r = 2n/m$, а факториалы в (3.34) были преобразованы с помощью формулы Стирлинга. Так как при малых f квазиэнергия выражается через число квантов как $\epsilon = -\Delta n + \frac{\alpha n^2}{2}$, формулы (3.55) и (3.56) находятся в полном соответствии друг с другом. Следовательно, можно сделать вывод, что при малой амплитуде внешнего поля и при большом числе квантов переходы между областями фазового портрета можно описывать и как многофотонные переходы, и как туннелирование: результаты обоих подходов согласуются между собой.

Интересно проследить аналогию между изложенной здесь теорией и теорией Келдыша ионизации атомов в электромагнитном поле. В теории Келдыша то, как описывается ионизация (как туннелирование или как многофотонную), зависит от величины параметра Келдыша. В рассматриваемой задаче можно определить параметр Келдыша следующим образом:

$$\gamma_K = \frac{T_{\text{im}}}{T} \quad (3.57)$$

где T_{im} — период осцилляций относительно устойчивого положения равновесия во мнимом времени, а $T = 2\pi/\Delta$. При малых внешних полях можно показать, что $\gamma_K \sim \log \frac{1}{\beta}$. Таким образом, во всём диапазоне полей, при котором существует бистабильность, $\gamma_K \gg 1$. Это согласуется с тем, что пертурбативная формула для частоты многофотонных переходов справедлива почти во всём этом диапазоне полей.

3.7 Собственные состояния вблизи многофотонного резонанса

В предыдущих разделах было показано, что в нелинейном осцилляторе многофотонные резонансы происходят одновременно между многими парами ква-

зиэнергетических уровней в точности при целых $\mu \equiv 2\Delta/\alpha$. Несмотря на то, что использовалась теория возмущений, полученные результаты справедливы не только для малых f : достаточно малости многофотонной амплитуды перехода. В частности, рассуждения раздела 3.4 справедливы и в квазиклассическом случае, рассмотренном в разделе 3.3, для состояний из областей 1 и 3.

Анализ предыдущих разделов, основанный на теории возмущений, позволяет понять, как включить многофотонные переходы (туннелирование) в квазиклассическое описание собственных состояний системы. Наличие преобразования симметрии из раздела показывает, что в квазиклассическом разложении собственных функций по μ^{-1} энергии состояний из областей 1 и 3 при $\mu \in \mathbb{Z}$ будут равны не только в ведущем порядке разложения по μ^{-1} , но и во всех порядках по μ^{-1} , и расщепление появится только с учётом туннелирования. Таким образом, при целых μ собственные состояния гамильтониана — это симметричные и антисимметричные суперпозиции некоторых квазиклассических состояний, которые сами не являются собственными состояниями, но наиболее близко соответствуют движению по классическим фазовым траекториям внутри одной области фазового портрета. В частности, в случае настолько малых f , что теория возмущений применима для всех пар уровней $|n\rangle, |m-n\rangle$, собственные состояния буквально являются симметричными и антисимметричными суперпозициями $|n\rangle$ и $|m-n\rangle$ (см. рис. 3.6, где приведены собственные состояния, полученные путём численной диагонализации).

Базис, состоящий из квантованных классических траекторий, удобен для анализа случая, когда μ не является целым в точности, но слабо отличается от целого: $\mu = m + \delta\mu$. Очевидно, что при достаточно больших $\delta\mu$ гибридизации состояний из разных областей фазового портрета не будет, и все собственные состояния будут соответствовать определённым траекториям из одной области. Ниже мы покажем, как с увеличением $\delta\mu$ происходит переход от полной гибридизации состояний из двух областей к отсутствию гибридизации.

В таком базисе гамильтониан уже не будет диагональным, а будет содержать члены, описывающие туннелирование между различными областями фазового портрета. Так как при μ , близких к целому, все уровни осцилля-

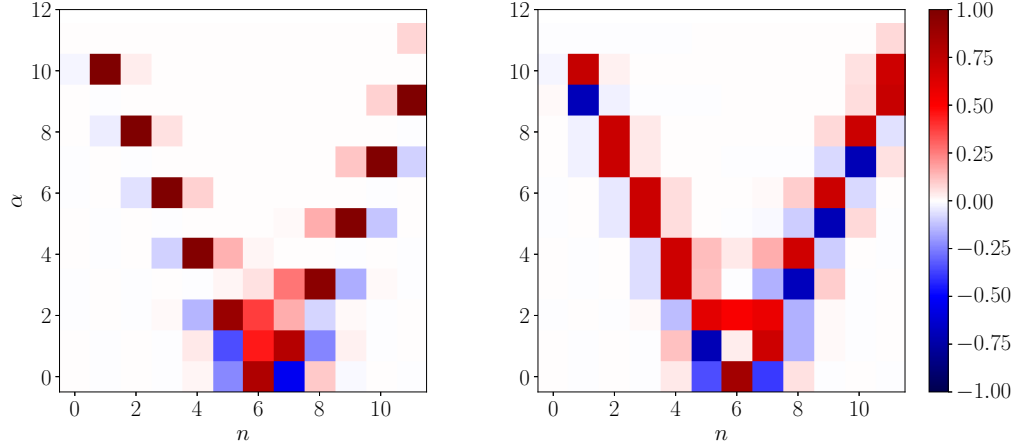


Рис. 3.6: Показаны коэффициенты разложения $c_{\alpha n}$ (α — индекс состояния, n — номер фоковского состояния) собственных состояний квантового нелинейного осциллятора в фоковском базисе при $2\Delta/\alpha = 12.5$ (слева) и $2\Delta/\alpha = 12$ (справа) и для внешнего поля с $f/f_{\text{crit}} = 0.02$. При $2\Delta/\alpha = 12.5$, собственные состояния близки к фоковским состояниям. Напротив, при $2\Delta/\alpha = 12$, 13 состояний с минимальными значениями квазиэнергий близки к симметричным и антисимметричным суперпозициям $|n\rangle$ и $|12 - n\rangle$.

тора, соответствующие состояниям из областей 1 и 3, группируются в пары с близкими квазиэнергиями, можно учитывать только матричные элементы только между состояниями, образующими пару. В этом приближении гамильтониан примет вид

$$\hat{H} = \sum_n \begin{pmatrix} |n, 1\rangle & |n, 3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{n1} & t_n \\ t_n & \epsilon_{n3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |n, 1\rangle \\ |n, 3\rangle \end{pmatrix} + \sum_n \epsilon_{n2} |n, 2\rangle \langle n, 2| + \sum_n \epsilon_{n3'} |n, 3'\rangle \langle n, 3'|. \quad (3.58)$$

Здесь $|n, 2\rangle$ — состояния из классической области 2, а $|n, 3'\rangle$ — состояния из области 3 с квазиэнергией $> \epsilon_1$. Состояния $|n, 1\rangle$ и $|n, 3\rangle$ соответствуют движению по классическим траекториям в областях 1 и 3, причём значения квазиэнергий ϵ_{n1} и ϵ_{n3} могут быть сколь угодно близки друг к другу при $\mu \approx t \in \mathbb{Z}$.

Примем соглашение о нумерации состояний $|n, r\rangle$. Для состояний из области 2 будем нумеровать состояния по возрастанию квазиэнергии. Для состояний из областей 1 и 3 учтём, что при малых δt эти состояния образуют много пар с близкими значениями квазиэнергий. Поэтому каждую пару будем обо-

значать $|n, 1\rangle$ и $|n, 3\rangle$, нумеруя состояния по убыванию квазиэнергии. Легко понять, что при таком способе нумерации состояния $|n, 1\rangle$ и $|n, 3\rangle$ переходят в пару фоковских состояний $|n\rangle$ и $|m - n\rangle$ при $f \rightarrow 0$. Наконец, состояния из области 3, у которых нет пары из области 1, будем нумеровать тоже по возрастанию квазиэнергии. Кроме того, примем следующие обозначения для матричных элементов операторов: $\langle n, r | \hat{O} | n', r' \rangle \equiv O_{nn'}^{rr'}$.

Гамильтониан (3.58) позволяет найти собственные состояния как суперпозиции $|n, 1\rangle$ и $|n, 3\rangle$ в зависимости от ϵ_{n1} и ϵ_{n3} , которые, в свою очередь, являются функциями расстройки. Средние квазиэнергии ϵ_{n1} и ϵ_{n3} без учёта туннелирования можно, в принципе, найти из правила квантования Бора–Зоммерфельда или из уравнений (3.37). Однако их конкретный вид здесь не важен: достаточно того, что при целых $\mu = 2\Delta/\alpha$ $\epsilon_{n1} = \epsilon_{n3}$, и поэтому собственные состояния осциллятора в этом случае — симметричные и антисимметричные суперпозиции $|n, 1\rangle$ и $|n, 3\rangle$. Кроме того, можно найти поправки к ϵ_{n1} и ϵ_{n3} при отклонении μ от целого.

Пусть $\mu = m + \delta\mu$, где $\delta\mu \ll 1$. Тогда поправки к ϵ_{n1} и ϵ_{n3} можно вычислить, рассматривая изменение параметра Δ как возмущение. Если $\Delta = m\alpha/2 + \delta\Delta$, то гамильтониан запишется в виде $\hat{H} = \hat{H}_0 - \delta\Delta(\hat{a}^\dagger\hat{a})$. Возмущение $-\delta\Delta(\hat{a}^\dagger\hat{a})$ можно считать диагональным в базисе (3.58), и поправка к ϵ_{nr} вычисляется через среднее от $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ по состояниям $|n, r\rangle$:

$$\epsilon_{n,r}(m + \delta\mu) = \epsilon_{n,r}(m) - \delta\Delta(\hat{a}^\dagger\hat{a})_{nn}^{rr}, \quad (3.59)$$

При нецелых μ собственные состояния (3.58) будут уже суперпозициями $|n, 1\rangle$ и $|n, 3\rangle$ общего вида, не обязательно симметричными и антисимметричными:

$$\begin{aligned} |n_+\rangle &= \cos\theta_n|n, 1\rangle + \sin\theta_n|n, 3\rangle, \\ |n_-\rangle &= -\sin\theta_n|n, 1\rangle + \cos\theta_n|n, 3\rangle, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где θ_n —

$$\theta_n = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_n}{\delta\epsilon_{13n}}, \quad (3.61)$$

$$\delta\epsilon_{13n} \equiv \epsilon_{n,1} - \epsilon_{n,3}. \quad (3.62)$$

Разность между квазиэнергиями $\delta\epsilon_{13n}$ вычисляется с помощью (3.59):

$$\delta\epsilon_{13n} = \delta\Delta((\hat{a}^\dagger\hat{a})_{nn}^{33} - (\hat{a}^\dagger\hat{a})_{nn}^{11}) \approx \frac{2\pi\delta\mu}{T(\epsilon_{n,1})}. \quad (3.63)$$

Последнее приближённое равенство выполняется потому, что среднее по квантовому состоянию можно заменить на среднее по классической фазовой траектории, также использовано тождество, связывающее между собой средние по классическим траекториям с одинаковой квазиэнергией из областей 1 и 3: $\langle |a|^2 \rangle_3 - \langle |a|^2 \rangle_1 = \frac{4\pi}{\alpha T(\epsilon)}$ (см. 7.2).

Согласно (3.34), t_n экспоненциально зависит от n , в то время как $\delta\epsilon_{13n}$ зависит от n медленно. Поэтому при фиксированном значении $\delta\mu$ коэффициенты $\cos\theta_n$ и $\sin\theta_n$ имеют ступенчатую зависимость от n . А именно, существует некоторое пороговое n_{crit} , зависящее от $\delta\mu$, при котором туннельная амплитуда сравнивается с расщеплениями между уровнями из областей 1 и 3. Из условия

$$|\delta\epsilon_{13n}| = t_n \quad (3.64)$$

и приближённых формул (3.63), (3.54) получаем неявное уравнение на соответствующую квазиэнергию ϵ_{crit} :

$$\delta\mu = \frac{1}{2\pi} e^{-S_{\text{tunn}}(\epsilon_{\text{crit}})}. \quad (3.65)$$

где S_{tunn} — квазиклассическая туннельная экспонента.

При значениях n , меньших n_{crit} (соответствующим траекториям, лежащим дальше от сепаратрисы), туннельная амплитуда пренебрежимо мала по сравнению с $\delta\epsilon_{13n}$, и угол θ_n быстро стремится к нулю. При больших n (соответствующим траекториям, лежащим ближе к сепаратрисе) угол, наоборот, стремится к $\pi/4$, и собственные состояния близки к симметричным и антисимметричным суперпозициям $|n, 1\rangle$ и $|n, 3\rangle$. Описанная структура собственных состояний изображена на Рис. 3.7. Отметим, что при $\delta\mu$, меньших, чем $e^{-S_{\text{tunn}}(\epsilon_1)}$, в частности, при $\delta\mu = 0$, вообще все пары состояний образуют суперпозиции. Поэтому можно считать, что при $\delta\mu = 0$ критическая квазиэнергия равна ϵ_1 .

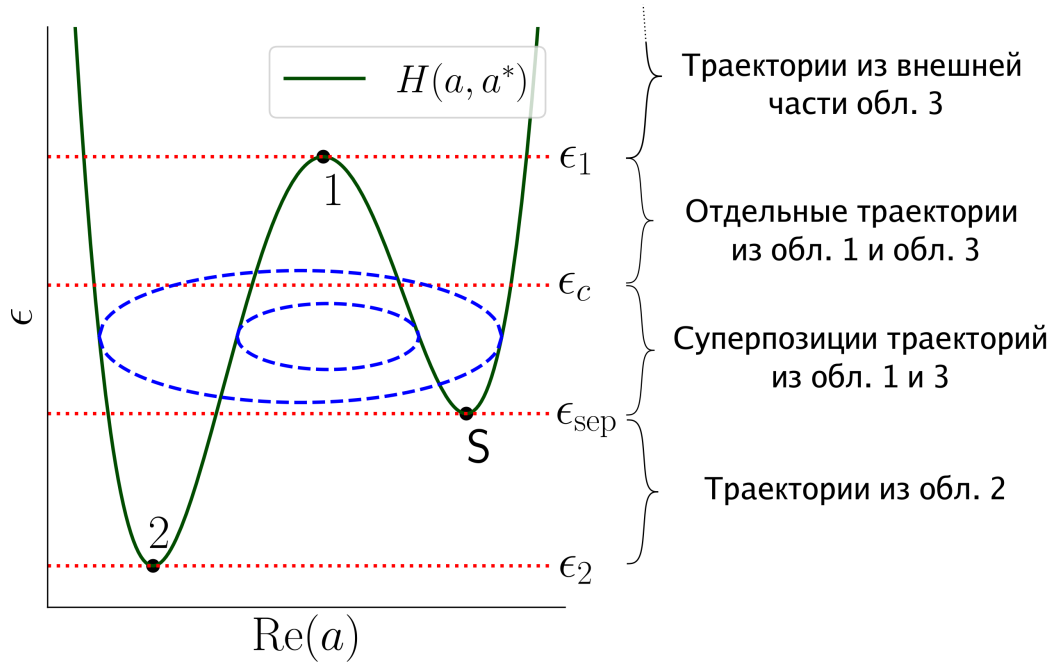


Рис. 3.7: Изображены области квазиэнергий, содержащие собственные состояния гамильтониана (3.2) разных типов. Тёмно-зелёная линия схематически изображает классическую функцию Гамильтона $H(a, a^*)$ при $\text{Im } a = 0$. Экстремумы гамильтониана — стационарные состояния 1, 2 и S. Голубая штрихованная линия схематически изображает состояние, соответствующее суперпозиции классических траекторий из областей 1 и 3.

Из вида гамильтониана (3.58) следует ещё одно интересное свойство, касающееся временной динамики осциллятора. Рассмотрим осциллятор, изначально находившийся в состоянии $|\psi_0\rangle = |n, 1\rangle$. Тогда несложно получить, что при целых μ , когда $\epsilon_{n1} = \epsilon_{n3}$, волновая функция приближённо зависит от времени τ как

$$|\psi(\tau)\rangle = e^{-i\epsilon_{n1}\tau} [\cos(t_n\tau)|n, 1\rangle + \sin(t_n\tau)|n, 3\rangle], \quad (3.66)$$

причём это справедливо для всех n , соответствующих классической области 1. Кроме того, вспомним, что при малых внешних полях квазиклассические состояния $|n, 1\rangle$, $|n, 3\rangle$ переходят в фоковские состояния $|n\rangle$ и $|m - n\rangle$. Следовательно, при целых μ можно наблюдать многофотонные осцилляции Раби между многими парами фоковских состояний. Этот результат подтверждается численным решением уравнения Шрёдингера для осциллятора с начальной волновой функцией $|\psi_0\rangle = |n\rangle$, где $|n\rangle$ — различные фоковские состояния (см.

Рис. 3.8). Для достаточно малых значений внешнего поля наблюдаются медленные осцилляции Раби на масштабах обратной многофотонной амплитуды перехода, промодулированные быстрыми колебаниями на масштабах периода колебаний осциллятора.

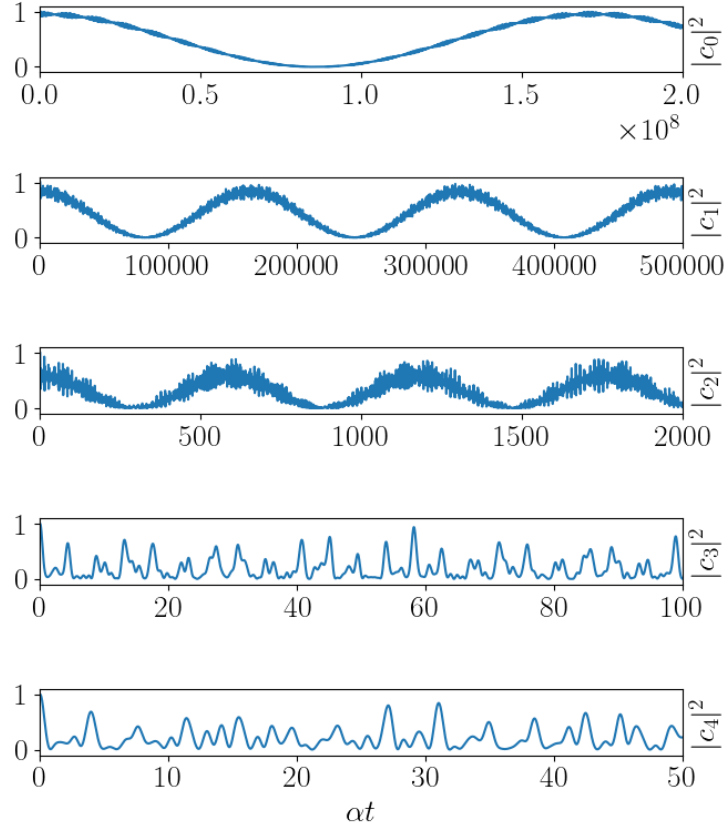


Рис. 3.8: Абсолютные значения коэффициентов $c_k(\tau)$ разложения волновой функции осциллятора по фоковским состояниям для начального фоковского состояния $|k\rangle$ при $2\Delta/\alpha = 9$, $\sqrt{\alpha/\Delta^3}f = 0.15$. Для $k = 0, 1, 2$ зависимость $c_k(t)$ от времени близка к $\cos t_n\tau$: для соответствующих начальных условий динамика приближённо описывается (3.66). Для $k = 3, 4$ ту же самую картину можно пронаблюдать при меньших значениях поля.

3.8 Эффект нелинейностей высших порядков

Симметрия обобщённого гамильтониана, ведущая к одновременным антипересечениям многих уровней квазиэнергии при целых $2\Delta/\alpha$ и описанной выше структуре состояний вблизи целых значений $2\Delta/\alpha$, является особенностью осциллятора с керровской нелинейностью. С одной стороны, присутствие в гамильтониане (3.2) слабых нелинейностей высших порядков не меняет каче-

ственного устройства классического фазового портрета системы (по крайней мере при малых амплитудах поля). С другой стороны, при наличии дополнительных возмущений антипересечения разных пар уровней могут происходить при разных значениях Δ . В этом разделе мы рассмотрим гамильтониан (3.2) с дополнительным возмущением, диагональным в фоковском базисе:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\Delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\alpha}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + \hat{V} + f(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ \hat{V} &= \sum_{q=3}^{\infty} \alpha_q (a^\dagger a)^q,\end{aligned}\tag{3.67}$$

Продemonстрируем, что в присутствии возмущения \hat{V} антипересечения различных пар уровней происходят при близких, но различных значениях расстройки (см. Рис. 3.10b). Для этого будем рассматривать \hat{V} как возмущение в базисе состояний $|n, r\rangle$ (см. (3.58)).

Рассмотрим пару уровней $|n, 1\rangle$ и $|n, 3\rangle$, между которыми в отсутствие возмущения есть антипересечение при значении расстройки $\Delta_0 = m\alpha/2$, $m \in \mathbb{Z}$. Это значит, что при этом значении Δ средние значения гамильтониана по состояниям $|n, 1\rangle$ и $|n, 3\rangle$ равны: $\epsilon_{n1}(\Delta_0) = \epsilon_{n3}(\Delta_0)$. В присутствии нелинейностей высших порядков к ϵ_{n1} и ϵ_{n3} добавляется поправка первого порядка: $\epsilon_{n1} \rightarrow \epsilon_{n1} + V_{nn}^{11}$ и $\epsilon_{n3} \rightarrow \epsilon_{n3} + V_{nn}^{33}$. Из-за возмущения значение Δ , соответствующее антипересечению, сдвигается и становится равно $\Delta = \Delta_0 + \delta\Delta$. Найти $\delta\Delta$ можно, рассматривая член с $\delta\Delta$ тоже как возмущение. С учётом $\delta\Delta$, уровни имеют значения

$$\begin{aligned}\epsilon_{n1} &\rightarrow \epsilon_{n1} + V_{nn}^{11} - \delta\Delta (a^\dagger a)_{nn}^{11} \\ \epsilon_{n3} &\rightarrow \epsilon_{n3} + V_{nn}^{33} - \delta\Delta (a^\dagger a)_{nn}^{33}\end{aligned}\tag{3.68}$$

Новое положение антипересечения можно найти, приравнявая $\epsilon_{n1}(\Delta_0 + \delta\Delta_n, \alpha_q)$ и $\epsilon_{n3}(\Delta_0 + \delta\Delta_n, \alpha_q)$:

$$\delta\Delta_n = \frac{V_{nn}^{33} - V_{nn}^{11}}{(\hat{a}^\dagger \hat{a})_{nn}^{33} - (\hat{a}^\dagger \hat{a})_{nn}^{11}}\tag{3.69}$$

Когда сдвиги $\delta\Delta_n$ много меньше, чем $\alpha/2$, все антипересечения всё ещё сгруппированы около целых значений $2\Delta/\alpha$.

Теперь исследуем, как наличие нелинейностей высших порядков модифицирует описанную в разделе 3.7 структуру собственных состояний с учётом

туннелирования. Было показано, что собственные состояния при $2\Delta/\alpha$, близких к целым, либо являются симметричными и антисимметричными суперпозициями квазиклассических состояний из областей 1 и 3, либо, наоборот, являются негибридованными квазиклассическими состояниями. То, какая из этих двух альтернатив реализуется, для каждой пары $|n, 1\rangle, |n, 3\rangle$ определяется соотношением между $\delta\epsilon_{13n}$ и t_n . Эффект нелинейностей высших порядков состоит в том, что он меняет $\delta\epsilon_{13n}$, которое теперь определяется формулой

$$\delta\epsilon_{n13} = -\delta\Delta \left((a^\dagger a)_{nn}^{11} - (a^\dagger a)_{nn}^{33} \right) + V_{nn}^{11} - V_{nn}^{33}. \quad (3.70)$$

Во-первых, в этом случае $\delta\epsilon_{n13}$ уже не обращается в ноль при $\delta\Delta = 0$. Во-вторых, зависимость от n становится, вообще говоря, немонотонной. Поэтому для того, чтобы определить, для каких пар состояний туннелирование важно, а для каких — нет, нужно заново провести сравнение $\delta\epsilon_{n13}$ с t_n в зависимости от n , $\delta\Delta$ и величины поправок высшего порядка.

Здесь и далее будем считать, что \hat{V} в основном определяется нелинейностью шестого порядка:

$$\hat{V} = \alpha_3 (a^\dagger a)^3. \quad (3.71)$$

Анализируя выражение (3.70), можно заключить, что неравенство $t_n \gg |\delta\epsilon_{n13}|$ может быть выполнено в двух случаях. Во-первых, оно заведомо выполнено, когда $t_n \gg \delta\Delta, \alpha_3$. При достаточно малых $\delta\Delta$ и α_3 может существовать много пар уровней, для которых выполнено это условие: здесь тоже можно ввести соответствующую критическую квазиэнергию. Рассматривая туннельную амплитуду и $\delta\epsilon_{13n}$ как непрерывные функции, можно определить критическую квазиэнергию как минимальное значение из корней уравнений

$$\delta\epsilon_{13}(\epsilon) = \pm t(\epsilon), \quad (3.72)$$

см. рис. 3.9. Тогда для всех пар уровней, удовлетворяющих неравенству $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_{\text{crit}}$, выполнено неравенство $t_n \gg \delta\epsilon_{n13}$. Можно показать, что в этом случае критическая квазиэнергия никогда не достигает ϵ_1 , в отличие от случая исключительно керровской нелинейности.

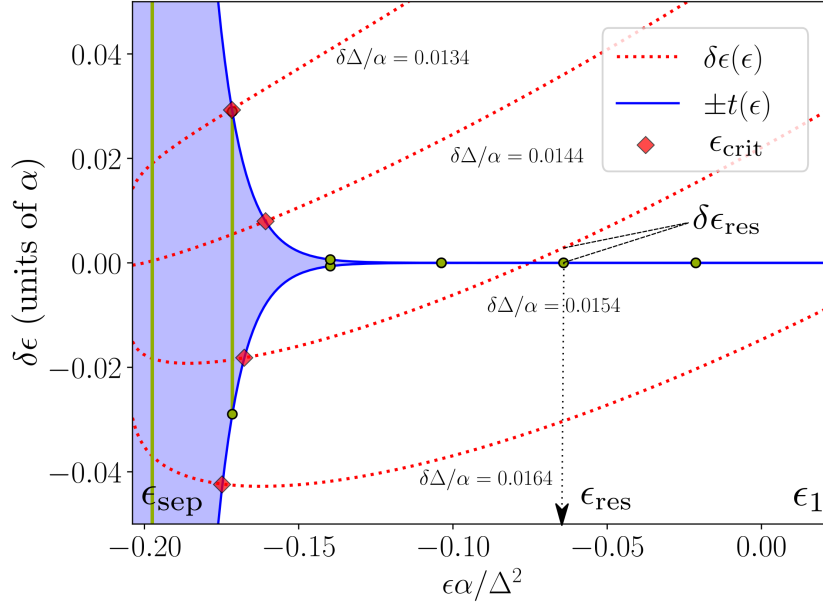


Рис. 3.9: Показаны левая и правая части равенства (3.72), определяющего зависимость ϵ_{crit} от расстройки.

Однако даже в обратном случае $t_n \ll \delta\Delta$, α_3 неравенство $\delta\epsilon_{n13}$ всё ещё может быть выполнено из-за того, что вклады $\delta\Delta$ и α_3 в $\delta\epsilon_{n13}(\epsilon)$ имеют разный знак, поэтому $\delta\epsilon_{n13}$ может быть меньше t_n при некотором одном $n = n_{\text{res}}$. Это возможно только при значениях расстройки, близких к $\delta\Delta_n$, определённым формулой (3.69). При этом происходит резонансное туннелирование между областями фазового портрета через какую-то одну выделенную пару уровней с энергией ϵ_{res} .

Таким образом, в присутствии нелинейности шестого порядка (3.71) структура собственных состояний следующая. По-прежнему существует область квазиэнергий $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_{\text{crit}}$, в которой туннелирование приводит к образованию суперпозиций состояний из областей 1 и 3. Однако критическая квазиэнергия ϵ_{crit} в этом случае определяется уже уравнением (3.72) и ни при каких $\delta\Delta$ не достигает ϵ_1 . Значит, в присутствии нелинейности шестого порядка невозможна ситуация, когда одновременно все состояния из областей 1 и 3 образуют суперпозиции. Кроме того, при расстройках, определяемых (3.69), суперпозиции образует ещё одна пара состояний с $n = n_{\text{res}}$ и квазиэнергией ϵ_{res} , превышающей критическую.

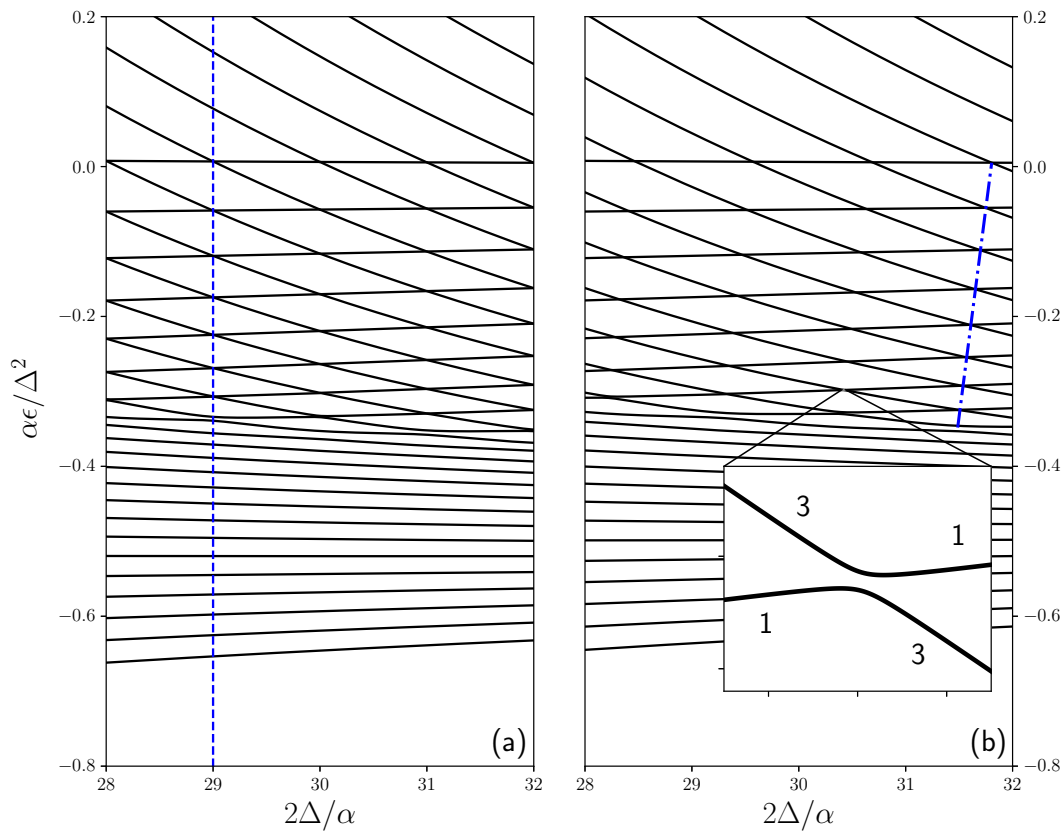


Рис. 3.10: Собственные значения гамильтониана (3.2), полученные численной диагонализацией, для различных значений расстройки Δ при постоянном значении внешнего поля $f/f_{\text{crit}} = 4.47$ и (a) $\alpha_3 = 0$, (b) $\alpha_3/\alpha = 0.005$. В отсутствие нелинейностей высших порядков, все антипересечения происходят при целых значениях $2\Delta/\alpha$ и лежат на одной вертикальной прямой (для примера показана голубая штрихованная линия на панели (a)). В присутствии нелинейности высших порядков все антипересечения происходят при различных значениях $2\Delta/\alpha$. На вставке показана увеличенная область антипересечения между уровнями.

Глава 4

Кинетика квантового нелинейного осциллятора

4.1 Осциллятор, взаимодействующий с диссипативным окружением

В главе 3 была подробно изучена квантовая динамика нелинейного осциллятора в резонансном внешнем поле, рассматриваемого как изолированная система. В этой и следующей главах модель будет рассмотрена с учётом взаимодействия с диссипативным окружением, что позволит исследовать релаксацию к стационарному состоянию и флуктуационные переходы. Гамильтониан системы с учётом взаимодействия с резервуаром записывается в виде

$$\hat{H}_{\text{full}} = \hat{H}_0 + \hat{\xi}^\dagger \hat{a} + \hat{\xi} \hat{a}^\dagger. \quad (4.1)$$

Для марковского резервуара можно считать, что гейзенберговские операторы резервуара ξ, ξ^\dagger дельта-коррелированы:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\xi}(t) \hat{\xi}^\dagger(t') \rangle &= \gamma(N+1) \delta(t-t'), \\ \langle \hat{\xi}^\dagger(t) \hat{\xi}(t') \rangle &= \gamma N \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (4.2)$$

В этом случае можно описывать эволюцию матрицы плотности с помощью квантового управляющего уравнения [31, 32, 33, 14, 15]:

$$\partial_t \rho = i[\rho, H_0] + \frac{\gamma}{2}(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho + 2N[[\hat{a}, \rho], \hat{a}^\dagger]), \quad (4.3)$$

где ρ — матрица плотности осциллятора, γ — константа связи с окружением, а N — среднее число квантов в резервуаре. В Приложении 7.6 приведён вывод управляющего уравнения (4.3) из (4.1) и (4.2).

Ниже будет показано, что модель классического осциллятора с шумом является предельным случаем (4.3), поэтому из квантового управляющего уравнения можно получить все результаты, описанные в главе 2. С другой

стороны, в общем случае предсказания (4.3) отличаются от предсказаний, полученных из классической модели с ланжевеновским шумом. Отличия возникают, во-первых, из-за дискретности энергетического спектра для квантовой модели, во-вторых, из-за квантового туннелирования, в-третьих, из-за квантовых поправок, возникающих при низкой температуре окружения.

Общие свойства решений квантового управляющего уравнения похожи на свойства решений уравнений Фоккера–Планка (2.6), (2.10). Как и для уравнений Фоккера–Планка, на больших временах матрица плотности релаксирует к стационарной матрице плотности, не зависящей от начальных условий. Общее решение может быть представлено в виде суммы убывающих экспонент,

$$\hat{\rho}(t) = \sum_k \hat{\rho}_k e^{-\lambda_k t}, \quad (4.4)$$

где $\hat{\rho}_k$ — решения задачи на собственные значения

$$-i[\hat{H}\hat{\rho}_k] + \mathcal{L}[\hat{\rho}_k] = -\lambda_k \hat{\rho}_k. \quad (4.5)$$

Из-за наличия в классическом пределе двух устойчивых состояний первое ненулевое собственное значение много меньше по величине, чем все остальные, имеющие порядок γ^{-1} . Поэтому эволюция на больших временах $t \gg \gamma^{-1}$ определяется двумя первыми членами разложения (4.6):

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_0 + e^{-\lambda_1 t} \hat{\rho}_1. \quad (4.6)$$

Это позволяет говорить о бистабильности для квантовой системы.

4.2 Обобщенное уравнение Фоккера–Планка

Квантовое управляющее уравнение может быть без каких-либо приближений преобразовано к виду, аналогичному двумерному уравнению Фоккера–Планка [14]. Для этого нужно перейти от матрицы плотности к одной из функций квазивероятности таких как P -функция, Q -функция или функция Вигнера. Полученное таким образом уравнение (обобщенное уравнение

Фоккера–Планка) отличается от обычного тем, что его матрица диффузии не обязательно положительно определена. Для примера приведём уравнение на обобщённую функцию Глаубера $P(a, a^*)$ [14]:

$$\frac{\partial P(a, a^*)}{\partial t} = \left[i \frac{\partial}{\partial a} ((-\Delta - i\gamma/2)a + \alpha a^2 a^* + f) - \frac{i\alpha}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} a^2 + \frac{\gamma N}{2} \frac{\partial^2}{\partial a \partial a^*} \right] P(a, a^*) + \text{с.с.} \quad (4.7)$$

По сравнению с матричной формой у управляющего уравнения в форме обобщённого уравнения Фоккера–Планка есть ряд преимуществ. Во-первых, в этой форме легко перейти к классическому пределу: в классическом пределе функции квазивероятности переходят в обычные плотности распределения в фазовом пространстве. Во-вторых, для нелинейного осциллятора, используя представление обобщённой функции Глаубера, можно найти стационарную матрицу плотности точно в случае нулевой температуры диссипативного окружения.

Обобщённое уравнение Фоккера–Планка отличается от уравнения Фоккера–Планка для классического осциллятора наличием членов со вторыми производными по a и a^* . Однако ими можно пренебречь в классическом пределе, после чего обобщённое уравнение Фоккера–Планка в точности принимает вид классического. Таким образом устанавливается соответствие между классической и квантовой моделью.

Однако переход от обобщённого уравнения Фоккера–Планка к классическому нельзя выполнить таким образом, если константа связи с окружением очень мала. В этом случае целесообразно использовать другой формализм, а именно, приближение балансного уравнения, которое будет рассмотрено в следующем разделе.

4.3 Балансное уравнение

В пределе малых γ квантовое управляющее уравнение (4.3) упрощается и может быть сведено к балансному уравнению — уравнению на элементы матрицы плотности, диагональные в представлении собственных состояний га-

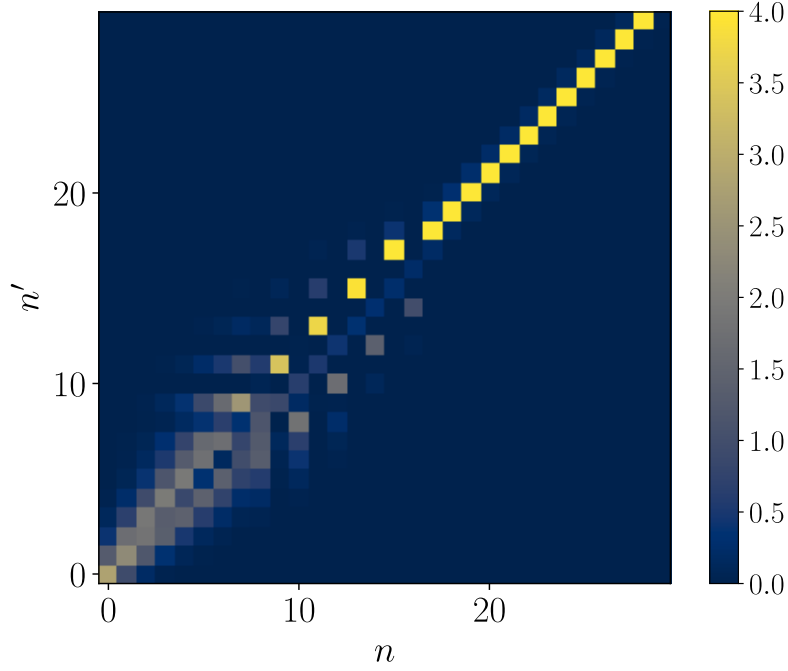


Рис. 4.1: Абсолютные величины матричных элементов оператора уничтожения в представлении собственных состояний гамильтонана осциллятора при $2\Delta/\alpha = 16.5$, $f/f_{\text{crit}} = 0.2$. Собственные состояния упорядочены по возрастанию квазиэнергии.

мильтониана системы. Его можно также получить, применяя золотое правило Ферми для скоростей переходов $|n'\rangle \rightarrow |n\rangle$. Если обозначить диагональные элементы матрицы плотности как $\rho_{nn} = P_n$, балансное уравнение будет иметь вид [15]

$$\frac{dP_n}{dt} = \sum_{n'} w_{nn'} P_{n'} - w_{n'n} P_n, \quad (4.8)$$

$$w_{nn'} = \gamma [(N+1)|\langle n|\hat{a}|n'\rangle|^2 + N|\langle n'|\hat{a}|n\rangle|^2],$$

где $w_{nn'}$ — скорости перехода из состояния n в состояние n' за счёт поглощения или испускания кванта резервуара.

В уравнении (4.8) состояния $|n\rangle$ — это собственные состояния гамильтониана (3.2). Поэтому вероятности перехода $w_{nn'}$ в общем случае могут быть найдены только численно путём диагонализации гамильтониана (3.2) и вычисления матричных элементов операторов \hat{a} , \hat{a}^\dagger (см. Рис. 4.1).

Рассуждения раздела 4.1, касающиеся временной эволюции для квантового управляющего уравнения, в полной мере сохраняют свою силу для балансного уравнения. Решение балансного уравнения можно разложить по собственным векторам, вклад каждого из которых экспоненциально затухает со

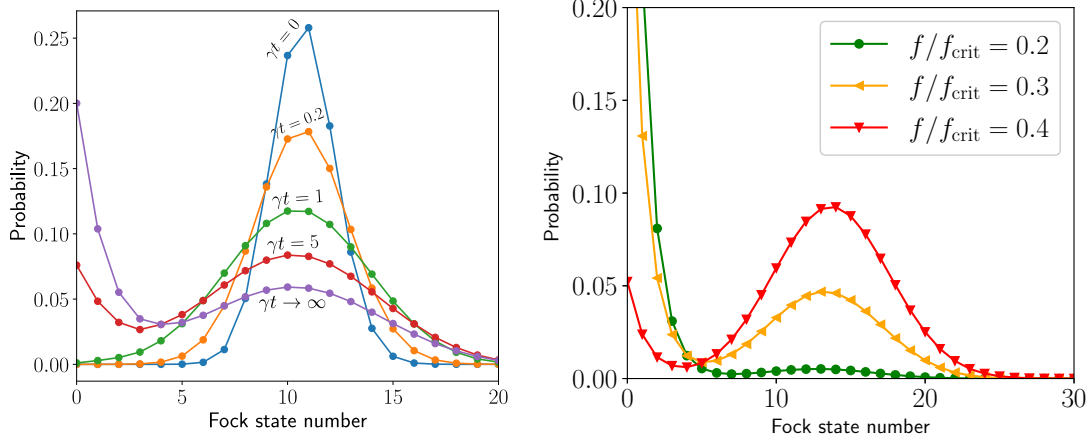


Рис. 4.2: (а) Распределения вероятностей по фоковским состояниям осциллятора в различные моменты времени для внешнего поля с $f/f_{\text{crit}} = 0.3$. В начальный момент времени осциллятор находится в квантовом состоянии, соответствующем классическому состоянию 2. (б) Стационарные распределения осциллятора по числам фотонов для различных амплитуд внешнего поля.

временем, а эволюция на больших временах определяется вектором с минимальным ненулевым собственным значением.

Приведём некоторые результаты для стационарного состояния осциллятора и его временной динамики, полученные из балансного уравнения. На Рис 4.2(а) приведены распределения по фоковским состояниям осциллятора в стационарном случае для различных значений внешнего поля. Как видно из результатов симуляций, у стационарных распределений по фоковским состояниям есть два пика: один из них — при малом числе квантов, другой — при числе квантов порядка Δ/α . Кроме того, на Рис 4.2(б) показана эволюция функции распределения по фоковским состояниям, найденная из балансного уравнения. Видно, что начальное распределение с одним максимумом эволюционирует к распределению с двумя пиками. Наконец, на Рис. 4.3(а) показаны собственные значения для уравнения (4.8) в зависимости от внешнего поля. Видно, что минимальное собственное значение много меньше γ практически во всём диапазоне полей от 0 до f_{crit} , кроме окрестностей $f = 0$ и $f = f_{\text{crit}}$.

Таким образом, приведённые на рисунках 4.2 и 4.3(а) результаты численных расчётов согласуются с картиной для кинетики классического бистабильного осциллятора, изложенной в главе 2.

Приведённые результаты позволяют определить пороговое значение внеш-

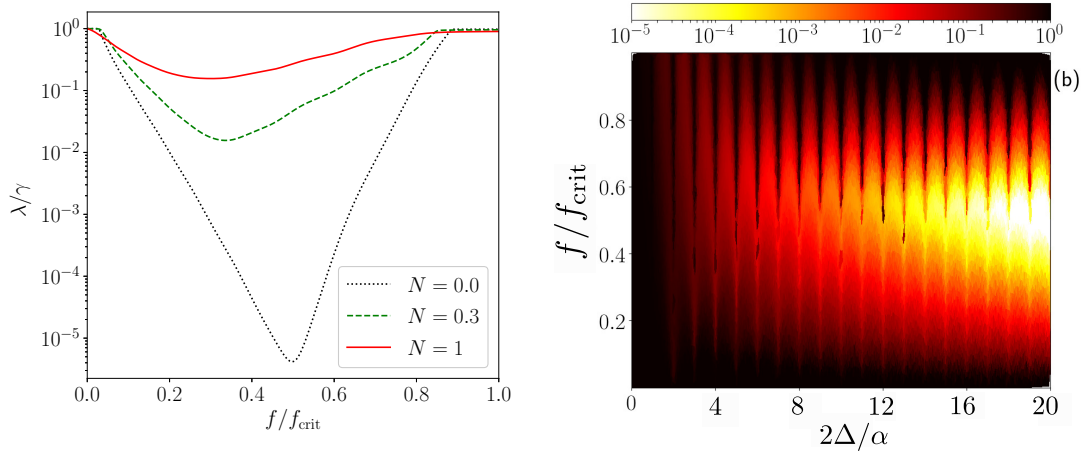


Рис. 4.3: (а) Минимальное ненулевое собственное значение матрицы перехода балансного уравнения в зависимости от внешнего поля для различных N . (б) Минимальное ненулевое собственное значение при $N = 0$ как функция Δ/α и f/f_{crit} .

него поля f_0 , определённое в разделе 2.4. Оказывается, что при достаточно больших значениях N (для десятков квантов — порядка единицы) и в отсутствие многофотонного резонанса пороговое значение близко к $0.3f_{\text{crit}}$ в соответствии с предсказаниями классической модели. Однако наблюдается расхождение при малых N : в этом случае пороговое значение превышает классическое значение $0.3f_{\text{crit}}$ и достигает $0.5f_{\text{crit}}$ для $N = 0$. Отметим, что в присутствии нелинейности стационарное состояние системы остаётся нетривиальным, так как для произвольной пары состояний $|n\rangle$ и $|n'\rangle$ могут быть отличны от нуля и матричный элемент $a_{nn'}$, и $a_{n'n}$, в отличие от линейного осциллятора. Поэтому при $N = 0$ тоже возможны флуктуационные переходы между классическими состояниями.

Кроме того, наблюдаются отклонения от классической модели вблизи многофотонного резонанс, то есть когда расстройка близка к $n\alpha/2$, где n — целое. В этом случае, наоборот, пороговое значение поля уменьшается. Это можно видеть на рис. 4.3(b), где минимальное собственное значение построено на плоскости f, Δ . Видно, что значение поля, при котором скорость релаксации имеет минимальное значение, резко уменьшается в окрестности целых значений $2\Delta/\alpha$, и оно отличается от значения $f = 0.3f_{\text{crit}}$, предсказанного в модели классического осциллятора с шумом. Это говорит о том, что многофотонный резонанс между многими парами уровней при целых значениях $2\Delta/\alpha$,

который обсуждался в Главе 3, влияет на стационарное состояние и кинетику системы.

В следующих разделах мы покажем, что туннелирование между областями фазового портрета можно учесть в рамках классической модели. Для этого, во-первых, продемонстрируем, что классическое уравнение Фоккера–Планка (2.10) в представлении квазиэнергий можно вывести из балансного уравнения (4.8). Во-вторых, мы найдём поправки к уравнению Фоккера–Планка, существенные вблизи многофотонного резонанса, которые ответственны за туннелирование. Это, в частности, позволит объяснить наличие провалов на 4.3 при целых $2\Delta/\alpha$.

4.4 Уравнение Фоккера–Планка как предел балансного уравнения

Одномерное уравнение Фоккера–Планка в пространстве квазиэнергий (2.10) не только возникает как предел двумерного уравнения Фоккера–Планка на классическую плотность вероятности, но и может быть получено как непрерывный предел балансного уравнения (4.8). Аналогию между ними легко провести в квазиклассическом пределе, когда собственные состояния квантового гамильтониана могут быть идентифицированы с классическими траекториями. Действительно, балансное уравнение описывает эволюцию вероятностей P_n находиться в n -м собственном состоянии гамильтониана осциллятора, в то время как одномерное уравнение Фоккера–Планка описывает эволюцию плотности вероятности $P_i(\epsilon)$ в пространстве классических фазовых траекторий. Если собственные состояния квантового гамильтониана соответствуют классическим траекториям, можно рассматривать $P(\epsilon_n)$ как непрерывный предел P_n . По определению, $P(\epsilon)T(\epsilon)d\epsilon$ — вероятность того, что система движется в интервале квазиэнергий между ϵ и $\delta\epsilon$. В то же время $T(\epsilon)d\epsilon = dK$, где K — классическое действие, то есть интеграл $K = \int pdq$ вдоль фазовой траектории. Согласно правилу Бора–Зоммерфельда, действие на соседних квантованных траекториях отличается на $dK = 2\pi$. Следовательно, соответствие

между P_n и $P(\epsilon)$ в пределе большого числа квантов следующее:

$$P_n \rightarrow 2\pi P(\epsilon_n) \quad (4.9)$$

Ниже, при выводе уравнения Фоккера–Планка из балансного уравнения, будет показано, что интенсивность шума в результирующем уравнении Фоккера–Планка равна $\gamma(N + \frac{1}{2})$. Это позволяет провести сравнение численных расчётов для квантовой модели с предсказаниями классической. На Рис. 4.4, 4.5 показаны классические стационарные функции распределения, вычисленные из уравнения Фоккера–Планка (2.10), вместе с стационарными распределениями P_n , найденными из (4.8). Стационарные распределения P_n изображаются графически следующим образом: каждому собственному состоянию $|n\rangle$ ставится в соответствие точка на плоскости ϵ, P , где $\epsilon = \epsilon_n$ (квазиэнергия состояния n), а P_n — вероятность находиться в этом состоянии. Если справедливо соответствие (4.9), точки из квантового распределения должны ложиться на кривые классического распределения.

Необходимо пояснить, каким образом двузначное стационарное распределение (2.14) может возникнуть из дискретного набора точек (ϵ_n, P_n) , где ϵ_n — дискретный невырожденный набор квазиэнергий. Как обсуждалось в Главе 3, собственные состояния осциллятора при нецелых $2\Delta/\alpha$ соответствуют классическим траекториям их одной из областей фазового портрета. Поэтому P_n для семейства состояний из каждой области фазового портрета имеет свой непрерывный предел, и отсюда возникают две ветви, соответствующие областям 1 и 3.

Приведём результаты для стационарной матрицы плотности, полученной из численного решения балансного уравнения (4.8), и сравним их классическими функциями распределения (2.14). Во-первых, на рисунке 4.4 приведены функции распределения при нецелых $2\Delta/\alpha$, достаточно большом $N = 2$ и различных внешних полях. Видно, что точки $(\epsilon_n, P_n/(2\pi))$ действительно ложатся на классические распределения. Заметим, что совпадение квантовой и классических хорошее даже при достаточно малых $2\Delta/\alpha \sim 30$, при которых характерное число квантов в системе — тоже порядка 30.

Однако при малых N распределения по квазиэнергиям качественно похо-

жи на классические, но количественно ими не описываются, что можно видеть из результатов 4.4(b). В частности, как уже было отмечено в разделе 4.3, при малых N и нецелых $2\Delta/\alpha$ порог переключения сдвигается в сторону больших внешних полей.

Наконец, распределения по квазиэнергиям сильно отличаются от классических вблизи многофотонного резонанса. Когда параметр μ приближается к целому, $\mu = t + \delta\mu$, две ветви функции распределения, соответствующие областям 1 и 3, начинают сливаться между собой в области квазиэнергий, близких к квазиэнергии сепаратрисы ϵ_{sep} . При этом увеличиваются вероятности обнаружить систему в состояниях классической области 2. При целых μ две ветви функции распределения полностью сливаются, и функция распределения в этом случае имеет единственный максимум при $\epsilon = \epsilon_2$, монотонно убывая с увеличением квазиэнергии (см. Рис. 4.5).

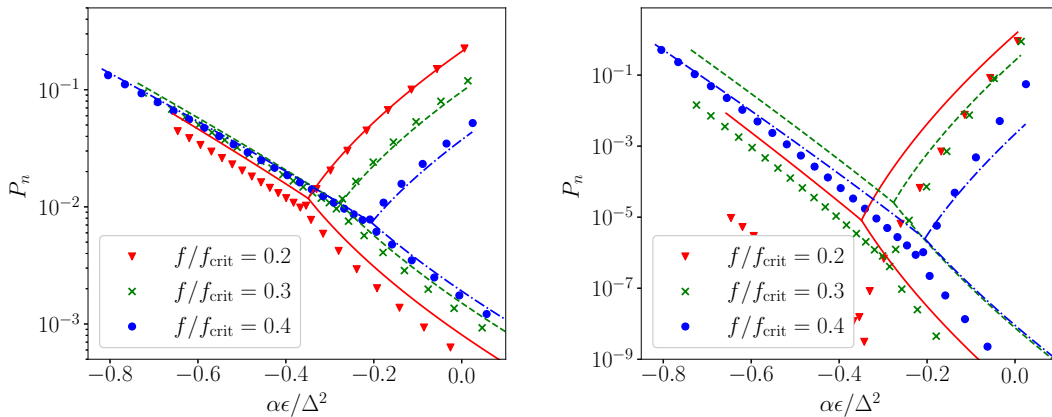


Рис. 4.4: Стационарные решения балансного уравнения вместе с решениями классического уравнения Фоккера–Планка в квазиэнергетическом представлении для $2\Delta/\alpha = 30.5$, различных значений внешнего поля и (а) при $N = 2$; (б) при $N = 0.1$.

Теперь перейдём непосредственно к выводу. Пока не будем рассматривать случай, когда $2\Delta/\alpha$ близко к целому и существенно квантовое туннелирование между различными областями фазового портрета. Тогда каждое квантовое состояние можно сопоставить определённой классической траектории. В квазиклассическом пределе P_n является медленно меняющейся функцией индекса состояния n внутри каждой области фазового портрета, и кроме того, скорости перехода $w_{n,n'}$ являются медленно меняющимися функциями

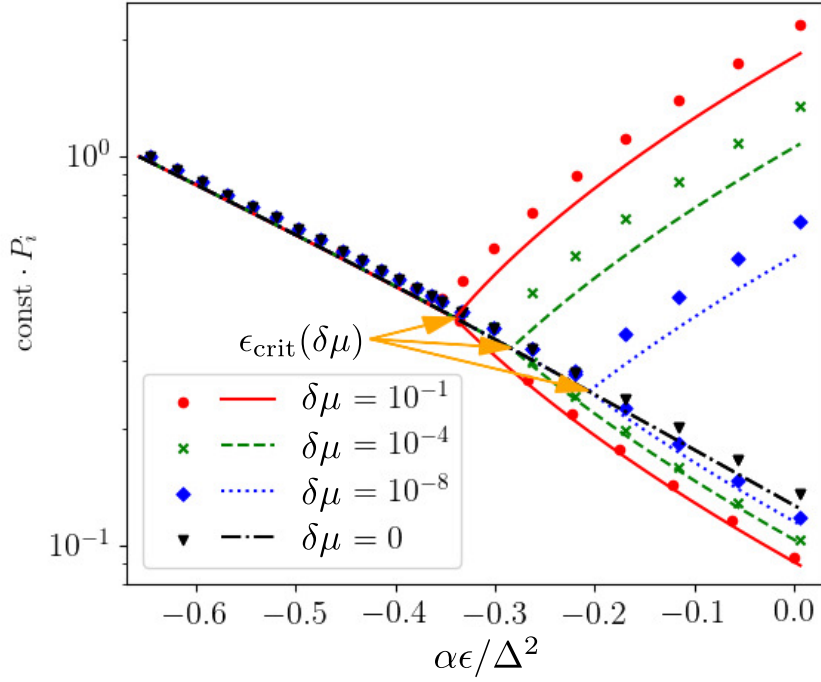


Рис. 4.5: Стационарные решения балансного уравнения для $f/f_{\text{crit}} = 0.2$, $N = 4$, $2\Delta/\alpha = 30 + \delta\mu$ с различными $\delta\mu$. Сплошные линии — распределения, вычисленные по формулам раздела 4.6

суммарного аргумента $n + n'$ и быстро убывающими функциями разностного аргумента $n - n'$ (см. Рис. 4.1). Поэтому можно произвести градиентное разложение P_n , считая индекс n непрерывной переменной:

$$P_{n+k} = P_n + \frac{\partial P_n}{\partial n} k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_n}{\partial n^2} k^2 + \dots, \quad (4.10)$$

Для $w_{n,n'}$ удобно явно перейти к суммарному и разностному аргументам,

$$w_{n,n'} \equiv \tilde{w}_{\bar{n},k}, \quad \bar{n} = \frac{n + n'}{2}, \quad (4.11)$$

и выполнить градиентное разложение по суммарному аргументу:

$$w_{n,n+k} = \tilde{w}_{n,k} + \frac{\partial \tilde{w}_{n,k}}{\partial \bar{n}} \left(\frac{k}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{w}_{n,k}}{\partial \bar{n}^2} \left(\frac{k}{2} \right)^2 + \dots \quad (4.12)$$

Подставляя эти выражения в (4.8) и удерживая члены до 2 порядка, получим

дифференциальное уравнение в частных производных на $P(t, n)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n} \left[A(n)P + B(n) \frac{\partial P}{\partial n} \right], \quad (4.13)$$

где коэффициенты $A(n)$ и $B(n)$ определяются выражениями

$$A(n) = - \sum_k \tilde{w}_{n,k} k = \frac{i\gamma}{2\pi} T(\epsilon_n) \langle n | \hat{a} \partial_t \hat{a}^\dagger | n \rangle, \quad (4.14)$$

$$B(n) = \frac{1}{2} \sum_k \tilde{w}_{n,k} k^2 = \frac{\gamma (N + \frac{1}{2})}{4\pi^2} T(\epsilon_n)^2 \langle n | \partial_t \hat{a} \partial_t \hat{a}^\dagger | n \rangle. \quad (4.15)$$

Здесь $T(\epsilon_n)$ — период движения по классической фазовой траектории с квазиэнергией ϵ_n .

В квазиклассическом пределе средние по квантовым состояниям переходят в средние по времени при движении по классическим фазовым траекториям. Это позволяет выразить коэффициенты $A(n)$ и $B(n)$ как интегралы по классическим фазовым траекториям:

$$\begin{aligned} A(n) &= \frac{i\gamma}{4\pi} \oint_{C(\epsilon_n)} [a da^* - a^* da], \\ B(n) &= \frac{i\gamma \tilde{T}(\epsilon_n)}{8\pi^2} \left(N + \frac{1}{2} \right) \oint_{C(\epsilon_n)} \left[\frac{\partial H}{\partial a} da - \frac{\partial H}{\partial a^*} da^* \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Переходя от переменной n к квазиэнергии ϵ , уравнение (4.13) переходит в точности в классическое уравнение Фоккера–Планка в квазиэнергетическом представлении (2.10). При этом $A(n)$ переходит в $\gamma K(\epsilon)$, а $B(n)$ переходит в $QT(\epsilon)D(\epsilon)$, где $Q = \gamma (N + \frac{1}{2})$.

Приведённая процедура вывода классического уравнения Фоккера–Планка из балансного уравнения позволяет понять причины расхождения между квантовыми и классическими функциями распределения в случаях, описанных выше. Во-первых, при слишком малых N неприменимо градиентное разложение функции распределения, потому что её зависимость от квазиэнергии становится слишком резкой. Во-вторых, при μ , близких к целым, нельзя считать средние по квантовым состояниям как средние по фазовым траекториям из-за туннелирования между областями фазового портрета.

4.5 Вывод туннельного члена в уравнении Фоккера–Планка

В предыдущем разделе уравнение Фоккера–Планка было выведено из балансного уравнения в предположении, что $2\Delta/\alpha = \mu = m + \delta\mu$ с $\delta\mu \sim 1/2$, поэтому переходы между разными областями фазового портрета не учитывались. В этом разделе мы рассмотрим случай малых $\delta\mu$ и покажем, что в этом случае туннелирование между областями фазового портрета приводит к появлению дополнительного члена в уравнении Фоккера–Планка.

Как обсуждалось в Главе 3, при малых $\delta\mu$ у осциллятора есть много пар почти вырожденных состояний с экспоненциально малыми расщеплениями. Эти состояния соответствуют суперпозициям классических траекторий из областей 1 и 3. Из-за этого удобно работать не в базисе собственных состояний, а в базисе состояний $|n, 1\rangle$, $|n, 2\rangle$, $|n, 3\rangle$ и $|n, 3'\rangle$, принадлежащих определённой области фазового портрета. (см. уравнение (3.58) в разделе 3.7). Кроме того, диагональное приближение, которое использовалось для вывода балансного уравнения из уравнения Фоккера–Планка, становится неприменимым уже при очень малых константах связи с окружением. Поэтому в этом случае следует рассматривать кинетику осциллятора с помощью квантового управляющего уравнения с учётом наиболее важных недиагональных элементов матрицы плотности.

Мы рассмотрим квантовое управляющее уравнение в базисе (3.58), используя следующие приближения. Во-первых, будем учитывать только матричные элементы матрицы плотности, диагональные по индексу n , то есть $\rho_{nn'}^{rr'}$ с $n = n'$, далее обозначаемые $\rho_n^{rr'}$. Во-вторых, для операторов \hat{a} , \hat{a}^\dagger и $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ пренебрежём матричными элементами, отвечающие разным областям фазового портрета. В результате квантовое управляющее уравнение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_n^{rr} = & \pm i t_n (\rho_n^{13} - \rho_n^{31}) - \gamma(N+1) \left((a^\dagger a)_{nn}^{rr} \rho_n^{rr} - \sum_{n'} a_{nn'}^{rr} (a_{nn'}^{rr})^* \rho_{n'}^{rr} \right) \\ & - \gamma N \left((a a^\dagger)_{nn}^{rr} \rho_n^{rr} - \sum_{n'} (a_{n'n}^{rr})^* a_{n'n}^{rr} \rho_{n'}^{rr} \right), \quad r = 1, 3 \quad (4.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho_n^{13} = & -i(\epsilon_{n1} - \epsilon_{n3})\rho_n^{13} + it_n(\rho_n^{11} - \rho_n^{33}) \\
 & - \frac{\gamma}{2}(N+1) \left((a^\dagger a)_{nn}^{11} \rho_n^{13} + (a^\dagger a)_{nn}^{33} \rho_n^{13} - \sum_{n'} 2a_{nn'}^{11} (a_{nn'}^{33})^* \rho_{n'}^{13} \right) \\
 & - \frac{\gamma N}{2} \left((aa^\dagger)_{nn}^{11} \rho_n^{13} + (aa^\dagger)_{nn}^{33} \rho_n^{13} - \sum_{n'} 2(a_{n'n}^{11})^* a_{n'n}^{33} \rho_{n'}^{13} \right) \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Чтобы из этого уравнения получить уравнение Фоккера–Планка с туннельным членом, нужно, как в разделе 4.4, перейти к непрерывному пределу и произвести градиентное разложение, считая зависимость $\rho_n^{rr'}$ от индекса n медленной. (Удобно сделать замену переменной и перейти от индекса номера состояния к новой непрерывной переменной — средней квазиэнергии $\epsilon(n) = (\epsilon_{n1} + \epsilon_{n3})/2$).

Из-за того, что учитываются недиагональные элементы матрицы плотности, появляется различие с разделом 4.4: в непрерывном пределе нужно ввести не только функции $P_r(\epsilon)$, но и новую функцию $R(\epsilon)$, являющуюся непрерывным пределом ρ_n^{13} . В результате преобразований, полностью аналогичных 4.4, из (4.17) получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial P_r}{\partial t} = \pm it(\epsilon)(R - R^*) + \frac{1}{T_r(\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\gamma K_r P_r + Q D_r \frac{\partial P_r}{\partial \epsilon} \right] \quad (4.19)$$

Кроме того, чтобы перейти к непрерывному пределу в (4.18), нужно произвести градиентное разложение диссипативного члена в (4.18).

Если ограничиться только нулевым порядком, уравнение на недиагональную часть не будет содержать производных по квазиэнергии и примет вид

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -i\delta\epsilon_{13}R + it(\epsilon)(P_1 - P_3) - \gamma_{13}(\epsilon)R, \quad (4.20)$$

где $\delta\epsilon_{13}(\epsilon)$ — непрерывный предел $\delta\epsilon_{13n} = \epsilon_{n1} - \epsilon_{n3}$ (см. раздел 3.7), а $\gamma_{13}(\epsilon)$ — непрерывный предел

$$\gamma_{13} = \gamma \left((a^\dagger a)_{nn}^{11} + (a^\dagger a)_{nn}^{33} - 2 \sum_{n'} a_{nn'}^{11} (a_{nn'}^{33})^* \right). \quad (4.21)$$

Так как уравнение на недиагональную часть локально, в стационарном случае можно выразить R через P_1 и P_3 и подставить в (4.17). В результате получает-

ся стационарное уравнение Фоккера–Планка с туннельным членом в области квазиэнергий $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_1$:

$$\frac{1}{T_r(\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\gamma K_r P_r + Q D_r \frac{\partial P_r}{\partial \epsilon} \right] \pm \lambda_T (P_3 - P_1) = 0, \quad (4.22)$$

где «скорость туннелирования» $\lambda_T(\epsilon)$ —

$$\lambda_T(\epsilon) = \frac{\gamma_{13}(\epsilon) t^2(\epsilon)}{\delta \epsilon_{13}(\epsilon)^2 + \frac{\gamma_{13}^2(\epsilon)}{4}}. \quad (4.23)$$

Согласно рассуждениям раздела 3.7, разница квазиэнергий пропорциональна $\delta\mu$ и монотонно зависит от квазиэнергии (см. уравнение (3.63)).

4.6 Эффекты туннельного члена в уравнении Фоккера–Планка

В этом разделе исследуется, каким образом наличие туннельного члена в уравнении Фоккера–Планка (4.22) модифицирует стационарное состояние системы.

Для начала рассмотрим влияние туннелирования качественно. Можно без вычислений показать, что туннелирование между областями 1 и 3 фазового портрета приводит к уменьшению стационарной заселённости области 1 и, соответственно, увеличению заселённости области 2. Действительно, в отсутствие туннелирования функция распределения осциллятора всегда состоит из двух локализованных пакетов около классических состояний 1 или 2. Эффект туннелирования состоит в следующем. Если осциллятор находится в окрестности состояния 2, то наличие туннелирования ничего не меняет: для траектории из области 2 с данной квазиэнергией ϵ не существует других траекторий с такой же квазиэнергией. Напротив, если осциллятор находится в окрестности состояния 1, туннельные переходы могут перевести осциллятор в область 3. Затем осциллятор из-за наличия диссипации окажется либо в состоянии 2, либо снова в состоянии 1. Таким образом, туннелирование приводит к наличию дополнительного канала ухода из состояния 1 и, следовательно, уменьшает его заселённость.

Теперь перейдём к анализу стационарного распределения осциллятора на основе уравнения (4.22). Основные особенности поведения функции распределения в зависимости от Δ обусловлены двумя факторами: экспоненциальной зависимостью скорости туннелирования от квазиэнергии и малостью знаменателя (4.23) вблизи целых значений $2\Delta/\alpha$. С одной стороны, туннельная амплитуда экспоненциально убывает при удалении от сепаратрисы. С другой стороны, знаменатель (4.23) тоже может быть малым: он равен $\delta\epsilon_{13}(\epsilon)^2 + \frac{\gamma_{13}^2(\epsilon)}{4}$, где $\delta\epsilon_{13}$ определяется (3.63), монотонно зависит от квазиэнергии и пропорционально $\delta\mu$, а γ предполагается малым. Поэтому, аналогично разделу 3.7, все пары состояний из областей 1 и 3 можно разделить на две группы: состояния, для которых скорость туннелирования много больше γ , и где скорость туннелирования много меньше γ . Как и в разделе 3.7, можно ввести критическую квазиэнергию ϵ_{crit} , разделяющую эти два режима, при которой $\lambda_T(\epsilon_{\text{crit}}) = \gamma$. Она будет определяться из уравнения

$$\sqrt{\delta\epsilon_{13}(\tilde{\epsilon}_{\text{crit}})^2 + \frac{\gamma_{13}^2(\tilde{\epsilon}_{\text{crit}})}{4}} = |t(\tilde{\epsilon}_{\text{crit}})| \quad (4.24)$$

Из-за экспоненциальной зависимости туннельной амплитуды выше этой критической квазиэнергии туннелирование почти сразу становится пренебрежимо малым, а ниже, наоборот, настолько сильным, что выравнивает населённости в областях 1 и 3. Отметим, что для уравнения Фоккера–Планка с туннельным членом критическая квазиэнергия, разделяющая два режима туннелирования в присутствии диссипации, зависит уже не только от отстройки от многофотонного резонанса $\delta\Delta$, но и от γ , что отличает её от критической квазиэнергии, определённой в 3.7. Она совпадает с критической квазиэнергией раздела 3.7 только в том случае, когда γ меньше, чем любая из туннельных амплитуд.

Таким образом, области квазиэнергий $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \tilde{\epsilon}_{\text{crit}}$ и $\tilde{\epsilon}_{\text{crit}} < \epsilon < \epsilon_1$ нужно рассматривать по отдельности. Чтобы найти стационарное распределение в области $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \tilde{\epsilon}_{\text{crit}}$, нужно рассмотреть сумму двух уравнений в (4.22), считая, что $P_1(\epsilon) \approx P_3(\epsilon) \approx \bar{P}(\epsilon)$. В результате на усреднённую функцию распределения получается стационарное уравнение Фоккера–Планка с коэф-

коэффициентом дрейфа $K_1 + K_3$ и диффузии $D_1 + D_3$:

$$\left[\gamma(K_1 + K_3)P_{1,3} + Q(D_1 + D_3)\frac{\partial P_{1,3}}{\partial \epsilon} \right] = 0, \quad (4.25)$$

Его решение —

$$P_r(\epsilon) = P(\epsilon_{sep}) \exp \left\{ -\frac{\gamma}{Q} \int_{\epsilon_{sep}}^{\epsilon} \frac{K_1(\epsilon') + K_3(\epsilon')}{D_1(\epsilon') + D_3(\epsilon')} d\epsilon' \right\} \quad (4.26)$$

В отличие от функции распределения классического осциллятора по квази-энергиям, функция распределения (4.26) убывает при удалении от сепаратрисы.

В области $\tilde{\epsilon}_{crit} < \epsilon < \epsilon_1$ туннелированием можно пренебречь, поэтому функции распределения с точностью до постоянного множителя определяются выражениями для классического осциллятора (2.14). Чтобы найти полную функцию распределения, нужно использовать условие непрерывности для сшивки решений, определяемых формулами (2.14) и (4.26).

Из-за того, что функции распределения в области $\epsilon_{sep} < \epsilon < \tilde{\epsilon}_{crit}$ убывают при удалении от сепаратрисы, полная вероятность находиться в области 1 уменьшается, а в области 2 — увеличивается. Чем больше $\tilde{\epsilon}_{crit}$, тем меньше вклад состояния 1, а при точном многофотонном резонансе и $\gamma \rightarrow 0$, когда $\tilde{\epsilon}_{crit} = \epsilon_1$, локальный максимум функции распределения при $\epsilon = \epsilon_1$ исчезает. Это обосновывает качественные рассуждения о влиянии туннелирования, приведённые в начале этого раздела.

Сами функции распределения, вычисленные с помощью (4.26), показаны на рисунке 4.6 и согласуются с численным решением балансного уравнения.

Кроме того, из формул (4.26) можно вычислить отношение значений функции распределения при $\epsilon = \epsilon_1$ и $\epsilon = \epsilon_2$, аналогичную (2.15):

$$P(\epsilon_1)/P(\epsilon_2) = \exp \left\{ -\frac{\gamma}{Q} \left[\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_{sep}} \frac{K_2(\epsilon')}{D_2(\epsilon')} d\epsilon' + \int_{\epsilon_{sep}}^{\tilde{\epsilon}_{crit}} \frac{K_1(\epsilon') + K_3(\epsilon')}{D_1(\epsilon') + D_3(\epsilon')} d\epsilon' + \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_1} \frac{K_1(\epsilon')}{D_1(\epsilon')} d\epsilon' \right] \right\} \quad (4.27)$$

Найденное с помощью этой аналитической формулы отношение $P(\epsilon_1)/P(\epsilon_2)$ как функция расстройки приведено вместе с численным расчётом на рис. 4.6

(в пределе $\gamma \rightarrow 0$). На основном рисунке зависимость показана в логарифмическом масштабе по горизонтальной оси: видно, что численный расчёт хорошо сходится с аналитической формулой. Ступенчатый характер численной зависимости объясняется дискретностью квазиэнергетических уровней. В окрестности многофотонного резонанса зависимость $P(\epsilon_1)/P(\epsilon_2)$ от $\delta\Delta$ близка к логарифмической, что обусловлено аналогичной зависимостью критической квазиэнергии от расстройки (см. главу 3). Кроме того, на вставке показана зависимость $P(\epsilon_1)/P(\epsilon_2)$ в линейном масштабе по Δ при постоянном отношении f/f_{crit} . Зависимость имеет осциллирующий характер с резкими логарифмическими провалами в окрестности целых $2\Delta/\alpha$. Аналогичные зависимости можно построить и для других физических величин осциллятора, в частности, для средней интенсивности поля (среднего числа квантов).

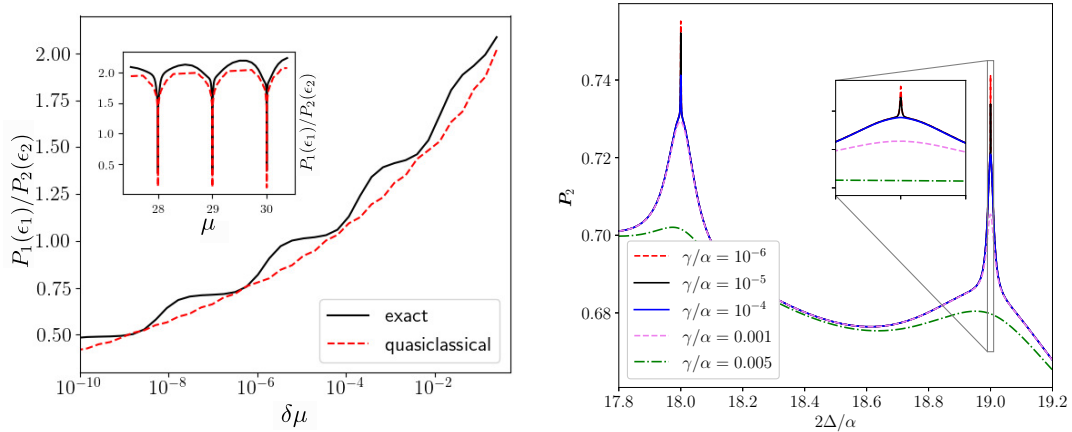


Рис. 4.6: (а) Отношение вероятностей найти осциллятор в квантовых состояниях, соответствующих классическим состояниям 1 и 2 при $f/f_{\text{crit}} = 0.2$, $N = 4$, $\mu = 30 + \delta\mu$, в зависимости от $\delta\mu$. На основном рисунке — логарифмический масштаб по оси $\delta\mu$, на вставке показана зависимость в линейном масштабе по μ . (б) Вероятность найти осциллятор в классической области 2 фазового портрета при $f/\alpha = 4.16$ (что соответствует $f/f_{\text{crit}} \approx 0.4$) как функция $2\Delta/\alpha$ для различных γ .

Наконец, обсудим, как рассмотренные зависимости меняются при изменении константы связи с окружением. В случае очень малой связи с окружением, рассмотренном выше, критическая квазиэнергия при $\delta\mu = 0$ равна ϵ_1 , и функции распределения в областях 1 и 3 полностью «склеиваются». С другой стороны, в более общем случае $\tilde{\epsilon}_{\text{crit}}$ при $\delta\mu = 0$ определяется из выражения

$$t(\epsilon_{\text{crit}}) = \gamma_{13}(\epsilon) \sim \gamma. \quad (4.28)$$

Ясно, что в этом случае критическая квазиэнергия будет уже меньше, чем ϵ_1 . Мы приходим к ожидаемому выводу, что из-за диссипации эффект туннелирования между областями фазового портрета ослабляется. В частности, уменьшаются величины провалов (или пиков) при целых μ . Это можно видеть из результатов численного моделирования, представленных на Рис. 4.6(b).

4.7 Нелинейность высшего порядка

В этом разделе будет рассмотрено влияние нелинейностей высших порядков на стационарные функции распределения нелинейного осциллятора. Эффект нелинейностей высших порядков на структуру квазиэнергетических уровней осциллятора был рассмотрен в разделе 3.8, и было показано, что в их присутствии антипересечения уровней происходят не при целых значениях $2\Delta/\alpha$ и не одновременно, в отличие от случая чисто керровской нелинейности. В то же время именно одновременные антипересечения вызывают поведение функций распределения, описанного в 4.6. Поэтому осциллятор с нелинейностями высших порядков требует особого рассмотрения.

Однако, согласно анализу 3.8, основной эффект слабых нелинейностей высших порядков — небольшие сдвиги уровней квазиэнергий. При этом основные качественные особенности задачи, в частности, наличие трёх областей фазового портрета, поведение собственных функций, свойства матричных элементов \hat{a} , не меняются. Поэтому можно повторить рассуждения раздела 4.5 и аналогичным образом получить уравнение Фоккера–Планка на функции распределения. Однако из-за того, что $\delta\epsilon_{13n}$ начинает по-другому зависеть от квазиэнергии, вывод модифицируется. Вспомним, что в разделе 3.8 производилось сравнение t_n и $\delta\epsilon_{13n}$ для различных n . Было показано, что $t_n \gg \delta\epsilon_{13n}$, когда $\epsilon_n < \epsilon_{\text{crit}}$, и, кроме того, при определённых значениях расстройки может существовать ещё одна пара уровней с $n = n_{\text{res}}$ и квазиэнергией $\epsilon_{\text{res}} > \epsilon_{\text{crit}}$, для которой тоже $t_n \gg \delta\epsilon_{13n}$. Это значит, что в уравнениях (4.17), (4.18) существенны во-первых, недиагональные элементы матрицы плотности ρ_{13n} с

$n > n_{\text{crit}}$, и, во-вторых, матричный элемент $\rho_{13n_{\text{res}}}$.

Поэтому при переходе к непрерывному пределу области квазиэнергий $\epsilon < \epsilon_{\text{crit}}$ и $\epsilon > \epsilon_{\text{crit}}$ требуют различного рассмотрения. В области $\epsilon < \epsilon_{\text{crit}}$, где туннельная амплитуда велика по сравнению с расщеплениями, по сравнению с разделом 4.5 ничего не меняется. В области $\epsilon > \epsilon_{\text{crit}}$ есть всего один существенный недиагональный элемент матрицы плотности. Поэтому соответствующий вклад в уравнение Фоккера–Планка должен описываться дельта-функцией.

В результате получается следующее выражение для скорости туннелирования:

$$\lambda_T(\epsilon) = \begin{cases} \frac{\gamma_{13}(\epsilon)t^2(\epsilon)}{\delta\epsilon_{13}(\epsilon)^2 + \frac{\gamma_{13}^2(\epsilon)}{4}}, & \epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_{\text{crit}} \\ \frac{\tilde{\gamma}_{n_{\text{res}}}^{13} t^2(\epsilon_{\text{res}})}{\delta\epsilon_{13\text{res}}^2 + \frac{(\tilde{\gamma}_{n_{\text{res}}}^{13})^2}{4}} \frac{\delta(\epsilon - \epsilon_{\text{res}})}{T(\epsilon)}, & \epsilon_{\text{crit}} < \epsilon < \epsilon_1 \end{cases}, \quad (4.29)$$

где

$$\tilde{\gamma}_{n_{13}} = \gamma \left((a^\dagger a)_{nn}^{11} + (a^\dagger a)_{nn}^{33} - 2a_{nn}^{11} (a_{nn}^{33})^* \right) \quad (4.30)$$

В результате стационарная функция распределения усложняется. В разделе 4.6 функция распределения описывается разными аналитическими формулами в интервалах квазиэнергий $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_{\text{crit}}$ и $\epsilon_{\text{crit}} < \epsilon < \epsilon_1$. В случае присутствия нелинейностей высших порядков, когда скорость туннелирования описывается формулой , функция распределения по квазиэнергиям будет иметь разный вид уже в трёх интервалах: $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_{\text{crit}}$, $\epsilon_{\text{crit}} < \epsilon < \epsilon_{\text{res}}$ и $\epsilon_{\text{res}} < \epsilon < \epsilon_1$. Эффект наличия дельта-пика в скорости туннелирования качественно объяснён на рис. 4.7. в области $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_{\text{crit}}$, как и раньше, туннелирование «склеивает» функции распределения в областях 1 и 3, поэтому результирующие функции даются выражением (4.26). Однако в области $\epsilon_{\text{crit}} < \epsilon < \epsilon_{\text{res}}$, несмотря на то, что туннельным членом можно пренебречь, нельзя пренебречь влиянием дельта-пика при $\epsilon = \epsilon_{\text{res}}$: оно приводит к наличию ненулевого тока вероятности в этой области квазиэнергий. Наконец, в области $\epsilon_{\text{res}} < \epsilon < \epsilon_1$ туннелирование не влияет на функции распределения, поэтому они определяются классическими выражениями (2.14).

Коэффициент перед членом с дельта-функцией в формуле для скорости туннелирования (4.23) содержит разность квазиэнергий между двумя резонансными уровнями $\delta\epsilon_{13n_{\text{res}}}$. Эта разность квазиэнергий зависит от расстрой-

ки, а именно, пропорциональна $\Delta - \Delta_{n_{res}}$. Поэтому скорость туннелирования через резонансную пару уровней как функция Δ является узким лоренцевым пиком с центром около $\Delta_{n_{res}}$.

Стационарное решение уравнения Фоккера–Планка с туннельным членом, описываемым формулой (4.7), и значение потока J в области $\epsilon_{crit} < \epsilon < \epsilon_{res}$ получены в Приложении 4.7. Оказывается, что из лоренцевой зависимости коэффициента перед дельта-функцией от Δ , следует, что и отношение заселённости состояний 2 и 1 тоже имеет лоренцеву зависимость от Δ . В результате получаем, что в присутствии нелинейностей высших порядков пик заселённости состояния 2 имеет следующую форму. Как и в случае чисто керровской нелинейности, имеется логарифмический пик, возникающий из-за зависимости ϵ_{crit} от расстройки. Однако высота этого пика уменьшается с увеличением α_3 , потому что при ненулевом α_3 максимальное значение ϵ_{crit} не достигает ϵ_1 . На фоне этого логарифмического пика имеются дополнительные узкие пики, возникающие из-за наличия резонансной пары.

Эта картина согласуется с результатами численного моделирования, приведёнными на Рис. 4.7(b), 4.8.

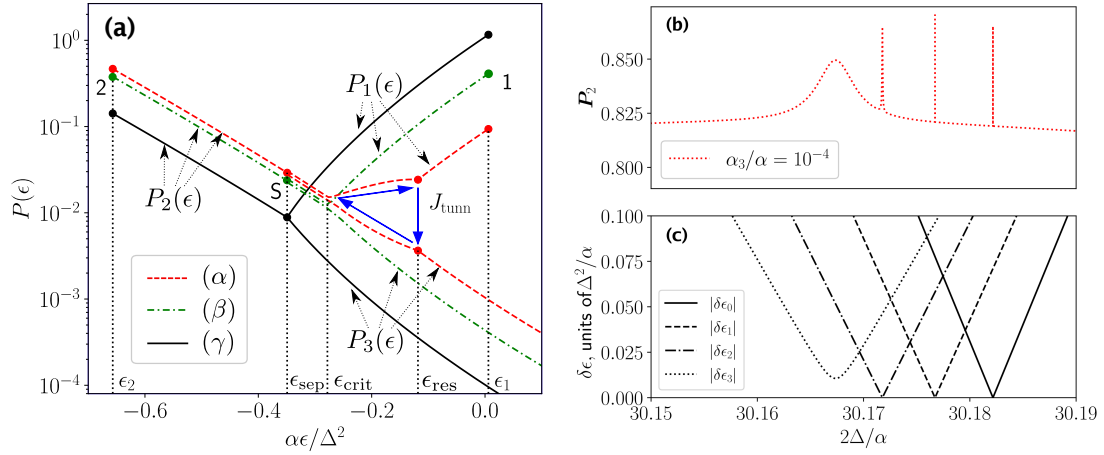


Рис. 4.7: (а) Для осциллятора с $f/f_{crit} = 0.2$ и $\alpha(N + \frac{1}{2})/\Delta = 0.1$ приведены функции распределения, вычисленные по аналитическим формулам (2.14), (4.26), (7.33). Распределение (α) построено с учётом туннелирования через резонансную пару уровней; распределение (β) соответствует осциллятору без нелинейностей высшего порядка вблизи многофотонного резонанса; распределение (γ) построено без учёта туннелирования. (б) Вероятность найти осциллятор с нелинейностью шестого порядка в области 2 классического фазового портрета в зависимости от $2\Delta/\alpha$ при $f/\alpha = 8.94$ (что соответствует $f/f_{crit} \approx 0.4$ в этом диапазоне Δ), $\alpha_3/\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$. (с) Разности квазиэнергий уровней осциллятора в зависимости от $2\Delta/\alpha$ при $f/\alpha = 8.94$.

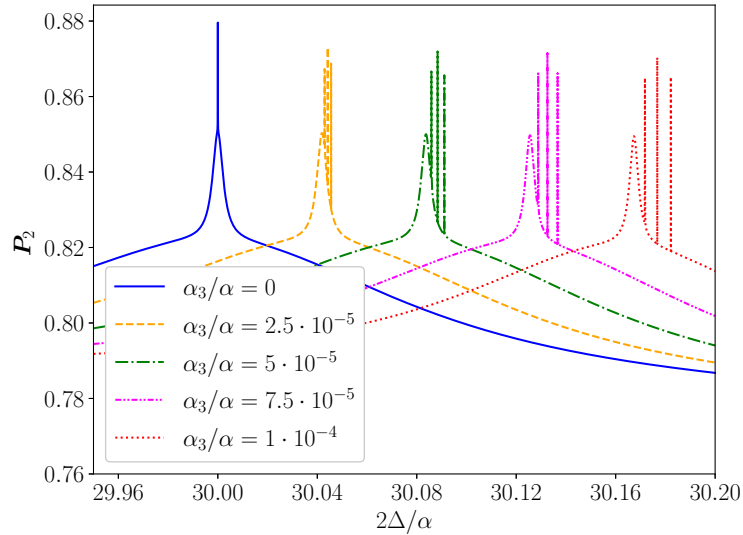


Рис. 4.8: Вероятность найти осциллятор с нелинейностью шестого порядка в области 2 классического фазового портрета в зависимости от $2\Delta/\alpha$ при $f/\alpha = 8.94$, $N = 3$, и различных значений α_3/α .

Глава 5

Спектры флуоресценции

5.1 Введение

В этой главе для квантового нелинейного осциллятора, взаимодействующего с диссипативным окружением, будут рассмотрены спектры резонансной флуоресценции. Из-за взаимодействия с окружением осциллятор становится источником излучения в резервуар, и спектр этого излучения пропорционален фурье-образу корреляционной функции операторов \hat{a}, \hat{a}^\dagger [14]:

$$S(\omega) = \int dt e^{i\omega t} \langle \hat{a}^\dagger(0) \hat{a}(t) \rangle. \quad (5.1)$$

Изучение этих спектров позволяет по-новому посмотреть на переход между классическим и квантовым режимами кинетики осциллятора.

В работе [14] эти спектры были найдены получены с помощью линеаризации обобщённого уравнения Фоккера–Планка (4.7) около классических стационарных состояний. Аналогичные подходы использовались в [1], где ансамбль атомов в полости рассматривался с помощью приближения среднего поля, и в [34], для получения спектра использовалась процедура факторизации для бесконечного набора уравнений на корреляционные функции. Эти подходы справедливы в пределе малых флуктуаций (классических и квантовых) около классических стационарных состояний. Приближение [14] предсказывает спектры с широкими лоренцевыми пиками, отстроенными на частоту классических колебаний в окрестности стационарных состояний осциллятора.

С другой стороны, в режиме очень слабой связи с окружением качественная картина кинетики — редкие переходы между квазиэнергетическими состояниями. В этом случае можно ожидать, что спектры будут состоять из большого количества узких лоренцевых пиков, соответствующих переходам между квазиэнергетическими состояниями. Также интересно проследить, как происходит переход между двумя описанными режимами с изменением величины

связи с резервуаром. Наконец, представляют интерес спектры в промежуточном режиме, когда, с одной стороны, флуктуации нельзя считать малыми, а с другой стороны, спектр ещё нельзя считать линейчатым.

Кроме того, на спектрах отражаются особенности динамики и кинетики осциллятора, рассмотренные в предыдущих главах, такие как переходы между стационарными состояниями, наличие порога переключения и многофотонный резонанс.

5.2 Корреляционные функции в технике Келдыша

В этом разделе обсудим общие свойства корреляционных функций, подобных (5.1), для систем, взаимодействующих с резервуаром. Корреляционная функция двух операторов \hat{A} и \hat{B} выражается через оператор эволюции следующим образом:

$$\langle \hat{A}(t), \hat{B}(t') \rangle = \text{Tr} \left[\rho_0 U(t, t')^\dagger \hat{A} U(t, t') \hat{B} \right] = \text{Tr} \left[\hat{A} U(t, t') \hat{B} \rho_0 U(t, t')^\dagger \right] \quad (5.2)$$

где матрица плотности ρ_0 предполагается коммутирующей с гамильтонианом. Эта формула верна для изолированной системы с унитарной динамикой. Когда система не является изолированной, эта формула уже неприменима. Однако её можно провести аналогию и обобщить (5.2) на случай системы, описываемой квантовым управляющим уравнением. Предположим, что в момент времени t' система находится в состоянии с матрицей плотности $\rho_{st} \otimes \rho_{\text{bath}}$, где ρ_{st} — стационарная матрица плотности подсистемы. Тогда для вычисления коррелятора можно действовать следующим образом: в момент времени t' нужно рассмотреть формально матрицу плотности $\hat{B} \rho_{st}$, а затем и подействовать на него оператором эволюции, то есть решить квантовое управляющее уравнение в интервале от t' до t . В результате для (5.2) получится следующее выражение:

$$\langle \hat{A}(t), \hat{B}(t') \rangle = \text{Tr} \left[\hat{A} \cdot e^{\mathcal{L}t} [\hat{B} \rho_0] \right]. \quad (5.3)$$

Приведённое рассуждение основывается на предположении, что система, находящаяся в стационарном состоянии, описывается сепарабельной матрицей

плотности $\rho_{\text{st}} \otimes \rho_{\text{bath}}$, что, вообще говоря, неверно. Однако оказывается, что для дельта-коррелированного резервуара это несущественно. Это показано в Приложении 7.6 на основе модели (4.1) рассмотренной с помощью диаграммной техники Келдыша. Оказывается, для дельта-коррелированного шума действительно можно пользоваться вышеописанным рецептом.

Из этого выражения легко получить формулу для фурье-образа корреляционной функции операторов \hat{a}, \hat{a}^\dagger :

$$S(\omega) = 2 \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \{ \hat{a} [-i\omega \check{\mathbb{1}} - \check{\mathcal{L}}]^{-1} (\hat{\rho}_{\text{st}} \hat{a}^\dagger) \}, \quad (5.4)$$

где супероператор \mathcal{L} —

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ij,kl} = & -i(\epsilon_i - \epsilon_j) \delta_{ik} \delta_{lj} \\ & + \frac{\gamma(N+1)}{2} (2a_{ik} a_{jl}^* - (\hat{a}^\dagger \hat{a})_{ik} \delta_{lj} - \delta_{ik} (\hat{a}^\dagger \hat{a})_{lj}) \\ & + \frac{\gamma N}{2} (2a_{ki}^* a_{lj} - (\hat{a} \hat{a}^\dagger)_{ik} \delta_{lj} - \delta_{ik} (\hat{a} \hat{a}^\dagger)_{lj}), \quad (5.5) \end{aligned}$$

а ρ_{st} — стационарная матрица плотности, определяемая квантовым управляющим уравнением (4.3). Формулы (5.4), (5.5) позволяют найти спектры численно с помощью стандартных процедур для обращения матриц.

5.3 Спектр в квазиклассическом пределе

Спектр флуоресценции, определяемый корреляционной функцией (5.1), можно вычислить с помощью обобщённого УФП (4.7) в случае, когда флуктуации малы [14]. В [14] показывается, что обобщённое уравнение Фоккера-Планка можно преобразовать к виду стохастических уравнений на две независимые комплексные переменные a, a^* . В пределе малых флуктуаций эти уравнения можно линеаризовать в окрестности классических положений равновесия, после чего корреляционные функции легко находятся аналитически.

В предположении, что осциллятор флуктуирует около одного из положений равновесия $q = 1, 2$ со средним числом квантов n_q , получается следующее

выражение для спектра [14]:

$$S_q(\omega) = \frac{1}{4\pi^2 |\lambda_q(\omega)|^2} \gamma [(1 + N)\alpha^2 n_q^2 + N|\omega - \Delta + 2\alpha n_q - i\gamma/2|^2] \quad (5.6)$$

где

$$\lambda_q(\omega) = -(\omega - \Delta + 2\alpha n_q - i\gamma/2)(\omega + \Delta - 2\alpha n_q - i\gamma/2) - \alpha^2 n_q^2, \quad (5.7)$$

Качественно зависимость спектра, определяемого этой формулой, от ω выглядит следующим образом. У спектра имеется два лоренцевых пика, отстоящих от частоты внешнего поля на $\pm\omega_r$, где ω_r — частота малых колебаний в окрестности классических положений равновесия. При $N = 0$ спектры симметричны и высоты этих пиков равны друг другу, а при $N > 0$ пик при $+\omega_r$ имеет большую амплитуду.

Ограничением такого подхода является то, что осциллятор считается находящимся только в одном классическом состоянии, а переходы между стационарными состояниями не учитываются. С другой стороны, в окрестности порога переключения нельзя считать, что осциллятор находится только в одном из двух стационарных состояний.

Естественным обобщением формулы (5.6) вблизи порога будет следующая формула, основанная на предположении, что вклады обоих устойчивых состояний в спектр независимы:

$$S(\omega) = P_1 S_1(\omega) + P_2 S_2(\omega), \quad (5.8)$$

где P_q — вероятности найти систему в окрестности классического состояния q .

Из выражения (5.8) следует, что спектр вблизи порога будет содержать уже не два, а четыре пика, отстоящих от частоты внешнего поля на $\pm\omega_{1,2}$. Этот вывод подтверждается численными расчётами на основе решения квантового управляющего уравнения.

Однако есть ещё один эффект, который не учитывается в линеаризованном рассмотрении спектров и не отражается формулой (5.8): флуктуацион-

ные переходы между стационарными состояниями. Качественно их влияние можно оценить, описывая эти переходы как телеграфный шум. Так как частота переходов для бистабильного осциллятора много меньше, чем частоты флуктуаций около стационарных состояний, спектр этого телеграфного шума — это узкий лоренцев пик в окрестности несущей частоты. Его тоже можно видеть в результатах численных симуляций.

5.4 Предел линейчатого спектра

В случае, когда γ много меньше, чем расстояния между уровнями системы, для вычисления спектра неприменимо приближение предыдущего раздела. С другой стороны, можно применить приближения, аналогичные случаю балансного уравнения.

Эволюция матрицы плотности при малых γ выглядит следующим образом. Диагональные элементы матрицы плотности эволюционируют согласно балансному уравнению (4.8), однако для вычисления спектра $S(\omega)$ требуется знать эволюцию недиагональных элементов матрицы плотности (кроме окрестности $\omega = 0$). Все они осциллируют с разными частотами $\epsilon_n - \epsilon_{n'}$ и медленно затухают на временах $\sim \gamma^{-1}$. Поэтому можно считать, что каждый из них затухает независимо, и получается следующее:

$$\partial_t \rho_{nn'} = -i(\epsilon_n - \epsilon_{n'})\rho_{nn'} - \frac{\Gamma_{nn'}}{2}\rho_{nn'}, \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{n'n} = \gamma(N + 1) & \left((\hat{a}^\dagger \hat{a})_{n'n'} + (\hat{a}^\dagger \hat{a})_{nn} - 2 \operatorname{Re} a_{n'n'} a_{nn}^* \right) \\ & + \gamma N \left((\hat{a} \hat{a}^\dagger)_{n'n'} + (\hat{a} \hat{a}^\dagger)_{nn} - 2 \operatorname{Re} a_{n'n'}^* a_{nn} \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

Комбинируя (5.9) с (5.3), можно получить следующее выражение для спектров:

$$S(\omega) = \sum_{n'n} P_{n'} |a_{nn'}|^2 \frac{\Gamma_{n'n}}{(\omega - \epsilon_n + \epsilon_{n'})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_{n'n}^2}, \quad (5.11)$$

где $P_{n'}$ — стационарные вероятности заполнения собственных состояний $|n'\rangle$,

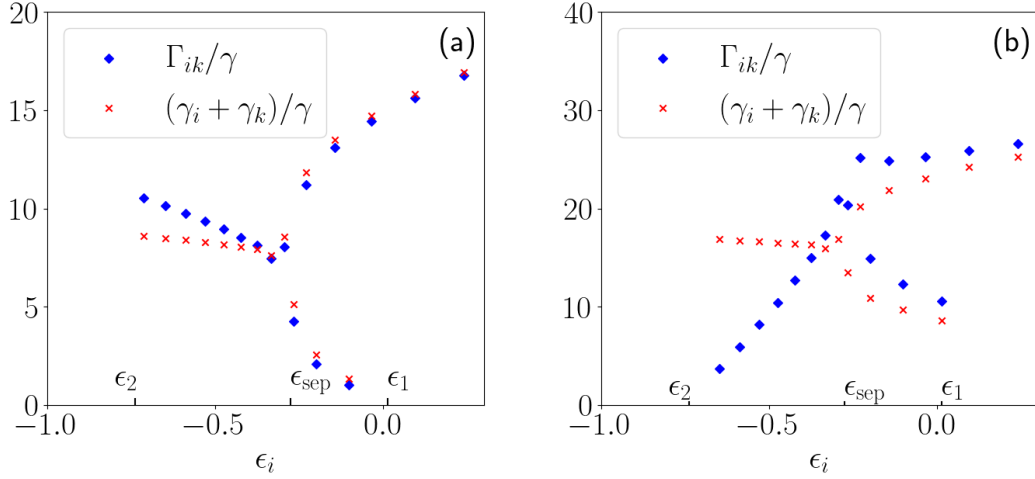


Рис. 5.1: Ширины линий пиков спектров флуоресценции осциллятора с $2\Delta/\alpha = 15.4$, $f/f_{\text{crit}} = 0.3$, соответствующих переходам между состоянием $|n\rangle$ и всеми другими состояниями, где $|n\rangle$ соответствует классическому состоянию 1 (a) и 2 (b) (показаны синими ромбами). Для сравнения показаны суммы ширин линий (красные кресты).

определяемых (4.8).

Обсудим интересные особенности спектров, которые видны из формул (5.11) и (5.10).

Формула (5.11) описывает спектр, состоящий из узких линий, описывающих переходы между квазиэнергетическими состояниями. Оказывается, ширины линий перехода могут быть меньше, чем сумма ширин каждого из уровней, из-за наличия слагаемых $\text{Re } a_{n'n'} a_{nn}^*$. Вклады $\text{Re } a_{n'n'} a_{nn}^*$ имеют заметную величину для состояний из классической области 2, что можно видеть на рисунке 5.1. Происхождение члена $\text{Re } a_{n'n'} a_{nn}^*$ можно также увидеть из вычисления поляризационного оператора в технике Келдыша: он возникает из-за суммирования лестничных диаграмм для поляризационного оператора.

Другая особенность спектров — их симметрия при $N = 0$. В то время как эта симметрия очевидна для аналитических формул, полученных из линеаризованного уравнения Фоккера–Планка, для спектра общего вида (5.11) автору неизвестно доказательство симметрии. Однако эта симметрия эквивалентна условию детального баланса в балансном уравнении при $N = 0$:

$$P_{n'} |a_{nn'}|^2 = P_n |a_{n'n}|^2 \quad (5.12)$$

Численная проверка подтверждает справедливость условия детального баланса.

5.5 Кроссовер между квазиклассическим и линейчатым спектрами

В этом разделе качественно анализируются спектры флуоресценции, найденные численно с помощью квантового управляющего уравнения.

Во-первых, выясним, каким образом происходит переход между режимами большой и малой константы связи с окружением. Результаты численного расчёта спектра для различных γ приведены на Рис. 5.2. При малых γ точный спектр, вычисленный с помощью выражения (5.4), хорошо описывается приближением (5.11), а при больших γ — приближением (5.6). Из численной симуляции видно, что наблюдается плавный переход от одного типа спектра к другому: с увеличением константы связи пики, соответствующие переходам между квазиэнергетическими состояниями, объединяются между собой, образуя плавную кривую линейаризованного спектра.

Далее, рассмотрим эффект наличия порога переключения между стационарными состояниями на спектры. На Рис. 5.2 приведены спектры для различных значений внешнего поля. Видно, что справедлива качественная картина, описанная в разделе 5.3: в окрестности порога переключения спектр содержит пик на несущей частоте и четыре пика с отстройками $\pm\omega_{1,2}$ от несущей частоты. При меньших и больших амплитудах поля остаются только пики, соответствующие классическому состоянию 1(2).

Кроме того, для спектров в окрестности порога был исследован эффект малых изменений расстройки Δ . Оказалось, что при целых $\mu \equiv 2\Delta/\alpha$ высота пиков, соответствующих классическому состоянию с большей амплитудой, увеличивается (см. 5.3). Это находится в соответствии с тем, что при целых μ заселённость стационарного состояния с большей амплитудой увеличивается из-за туннелирования.

Наконец, численный расчёт показал, что симметрия спектра при $N = 0$ присутствует при всех значениях γ и является точной (вплоть до точности

численных расчётов), и исчезает при $N \neq 0$.

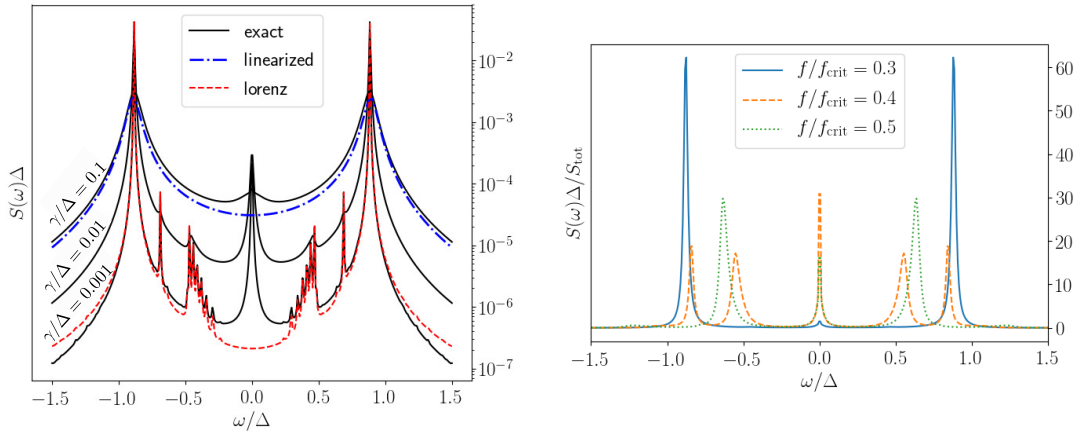


Рис. 5.2: (а) Спектры флуоресценции осциллятора При $\mu = 12.5$, $N = 0$, $f/f_{\text{crit}} = 0.2$ и при различных значениях константы связи с окружением. Чёрные кривые — спектры, полученные из уравнения (5.4), штрихпунктирная линия — спектр, полученный и линейризованного уравнения Фоккера–Планка, красная пунктирная линия — приближение линейчатого спектра. (б) Спектры флуоресценции осциллятора, нормированные на полную интенсивность $S_{\text{tot}} \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega)$, при различных значениях внешних полей. $m = 12.5$, $\vartheta = 0.03$, $N = 0$ и различных значениях f .

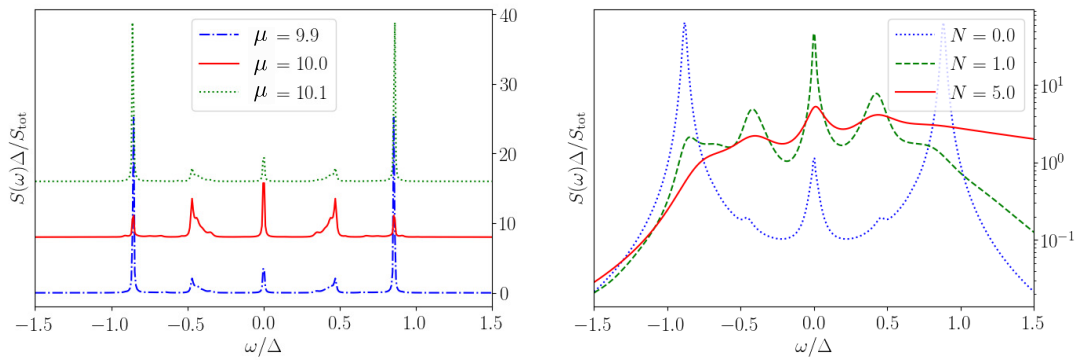


Рис. 5.3: Спектры флуоресценции осциллятора (а) при $f/f_{\text{crit}} = 0.29$, $\gamma/\Delta = 0.005$, $N = 0$ и различных значениях μ (для удобства сравнения графики сдвинуты на произвольные константы по вертикальной оси). (б) Спектры флуоресценции при $f/f_{\text{crit}} = 0.29$, $\gamma/\Delta = 0.03$, $\mu = 12.5$ и различных числах заполнения резервуара.

Глава 6

Заключение

В работе получены следующие основные результаты.

1. Для модели изолированного квантового нелинейного осциллятора в резонансном внешнем поле исследовано туннелирование между областями фазового портрета. Показано, что туннелирование имеет резонансный характер и приводит к антипересечениям уровней осциллятора как функций расстройки.
2. Антипересечения уровней осциллятора происходят при целых и полужелтых отношениях расстройки к нелинейному сдвигу на один квант в диапазоне внешних полей от нуля до критического значения, при котором исчезает одно из устойчивых состояний системы. Математически это выражается как симметрия поправок невырожденной теории возмущений, которая справедлива для всех порядков.
3. Симметрия поправок теории возмущений доказана с помощью построенного в данной работе точного преобразования симметрии для аналитического продолжения матрицы гамильтониана на дробные числа заполнения.
4. Показано, что влияние туннелирования между областями фазового портрета на кинетику можно учитывать, вводя туннельный член в уравнение Фоккера–Планка в квазиэнергетическом представлении, причём туннелирование имеет резонансный характер и его эффект наиболее существенен при малых отстройках от многофотонного резонанса.
5. Туннелирование увеличивает заселённость устойчивого состояния осциллятора с большей амплитудой: она имеет резкие максимумы при значениях расстройки, соответствующих многофотонному резонансу. Эти максимумы имеют логарифмический профиль с дополнительной ступенчатой структурой, вызванной дискретностью квазиэнергетических

уровней. Квантовое состояние, соответствующее нулевым колебаниям в окрестности устойчивого состояния с большей амплитудой, является сжатым. Таким образом, туннелирование усиливает генерацию сжатых состояний в осцилляторе.

6. Нелинейность высшего порядка вызывает расщепление максимумов многофотонного резонанса на несколько близко отстоящих пиков различной ширины и интенсивности.
7. Выявлены особенности спектров флуоресценции нелинейного осциллятора в различных режимах. Продемонстрировано, что спектры флуоресценции имеют пороговую зависимость от внешнего поля. Также показано, что вблизи многофотонного резонанса в спектрах флуоресценции увеличиваются высоты пиков, соответствующих устойчивому состоянию с большей амплитудой поля.

Благодарности

В заключение я хотел бы поблагодарить своего научного руководителя Николая Алексеевича Гиппиуса и Наталью Сергеевну Маслову за постановку задач, непосредственное участие в их решении и всестороннюю помощь и поддержку. Я признателен своим коллегам за ценные вопросы и замечания. Эта работа не была бы написана без поддержки моей семьи и друзей.

Список литературы

- [1] R. Bonifacio and L. A. Lugiato. Optical bistability and cooperative effects in resonance fluorescence. *Phys. Rev. A*, 18:1129–1144, Sep 1978.
- [2] H. M. Gibbs, S. L. McCall, and T. N. C. Venkatesan. Differential gain and bistability using a sodium-filled fabry-perot interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 36:1135–1138, 1976.
- [3] V.B. Braginsky, M.L. Gorodetsky, and V.S. Ilchenko. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes. *Physics Letters A*, 137(7):393 – 397, 1989.
- [4] Hannes Gothe, Tristan Valenzuela, Matteo Cristiani, and Jürgen Eschner. Optical bistability and nonlinear dynamics by saturation of cold yb atoms in a cavity. *Phys. Rev. A*, 99:013849, Jan 2019.
- [5] Farhad Azadpour and Ali Bahari. All-optical bistability based on cavity resonances in nonlinear photonic crystal slab-reflector-based fabry–perot cavity. *Optics Communications*, 437:297 – 302, 2019.
- [6] Fabio Pistolesi. Bistability of a slow mechanical oscillator coupled to a laser-driven two-level system. *Phys. Rev. A*, 97:063833, Jun 2018.
- [7] NA Gippius, SG Tikhodeev, VD Kulakovskii, DN Krizhanovskii, and AI Tartakovskii. Nonlinear dynamics of polariton scattering in semiconductor microcavity: Bistability vs. stimulated scattering. *EPL (Europhysics Letters)*, 67(6):997, 2004.
- [8] N. S. Maslova, R. Johne, and N. A. Gippius. Role of fluctuations in nonlinear dynamics of a driven polariton system in semiconductor microcavities. *JETP Letters*, 86(2):126, September 2007.
- [9] T. Boulier, M Bamba, A. Amo, C. Adrados, A. Lemaitre, E. Galopin, I. Sagnes, J. Bloch, C. Ciuti, E. Giacobino, and A. Bramati. Polariton-

- generated intensity squeezing in semiconductor micropillars. *Nature Comm.*, 5(3260):3260, February 2014.
- [10] I. Siddiqi, R. Vijay, F. Pierre, C. M. Wilson, M. Metcalfe, C. Rigetti, L. Frunzio, and M. H. Devoret. RF-driven josephson bifurcation amplifier for quantum measurement. *Physical Review Letters*, 93(20):207002, nov 2004.
- [11] P. R. Muppalla, O. Gargiulo, S. I. Mirzaei, B. Prasanna Venkatesh, M. L. Juan, L. Grunhaupt, I. M. Pop, and G. Kirchmair. Bistability in a mesoscopic josephson junction array resonator. *Phys. Rev. B*, 97:024518, 2018.
- [12] Zhaoyou Wang, Marek Pechal, E. Alex Wollack, Patricio Arrangoiz-Arriola, Maodong Gao, Nathan R. Lee, and Amir H. Safavi-Naeini. Quantum dynamics of a few-photon parametric oscillator. *Physical Review X*, 9(2):021049, jun 2019.
- [13] Patrick Winkel, Kiril Borisov, Lukas Grünhaupt, Dennis Rieger, Martin Spiecker, Francesco Valenti, Alexey V. Ustinov, Wolfgang Wernsdorfer, and Ioan M. Pop. Implementation of a transmon qubit using superconducting granular aluminum. *Phys. Rev. X*, 10:031032, Aug 2020.
- [14] P. D. Drummond and D. F. Walls. Quantum theory of optical bistability. i. nonlinear polarisability model. *J. of Physics A: Mathematical and General*, 13:725–741, 1980.
- [15] H. Risken, C. Savage, F. Haake, and D. F. Walls. Quantum tunneling in dispersive optical bistability. *Phys. Rev. A*, 35:1729–1739, 1987.
- [16] K. Vogel and H. Risken. Quantum-tunneling rates and stationary solutions in dispersive optical bistability. *Phys. Rev. A*, 38:2409–2422, September 1988.
- [17] B. Wielinga and G. J. Milburn. Quantum tunneling in a kerr medium with parametric pumping. *Physical Review A*, 48(3):2494–2496, sep 1993.
- [18] V I Manko, G Marmo, E C G Sudarshan, and F Zaccaria. f-oscillators and nonlinear coherent states. *Physica Scripta*, 55(5):528–541, may 1997.

-
- [19] M. I. Dykman and M. V. Fistul. Multiphoton antiresonance. *Phys. Rev. B*, 71:140508(R), 2005.
- [20] Tatsuhiko Shirai, Synge Todo, Hans de Raedt, and Seiji Miyashita. Optical bistability in a low-photon-density regime. *Phys. Rev. A*, 98:043802, Oct 2018.
- [21] Christian Kraglund Andersen, Archana Kamal, Nicholas A. Masluk, Ioan M. Pop, Alexandre Blais, and Michel H. Devoret. Quantum versus classical switching dynamics of driven dissipative kerr resonators. *Physical Review Applied*, 13(4):044017, apr 2020.
- [22] Xin H. H. Zhang and Harold U. Baranger. Driven-dissipative phase transition in a kerr oscillator: From semiclassical PT symmetry to quantum fluctuations. *Physical Review A*, 103(3):033711, mar 2021.
- [23] N. S. Maslova, V. N. Mantsevich, P. I. Arseyev, and I. M. Sokolov. Tunneling current induced squeezing of the single-molecule vibrational mode. *Phys. Rev. B*, 100:035307, Jul 2019.
- [24] Toni L. Heugel, Matteo Biondi, Oded Zilberberg, and R. Chitra. Quantum transducer using a parametric driven-dissipative phase transition. *Physical Review Letters*, 123(17):173601, oct 2019.
- [25] Robert Johne, Natalia S Maslova, and Nikolay A Gippius. Fluctuation-induced transitions of a bistable driven polariton system in the presence of damping. *Solid State Comm.*, 149(11-12):496–500, 2009.
- [26] K. Vogel and H. Risken. Dispersive optical bistability for large photon numbers and low cavity damping. *Phys. Rev. A*, 42:627–638, July 1990.
- [27] I. Serban and F. K. Wilhelm. Dynamical tunneling in macroscopic systems. *Physical Review Letters*, 99(13):137001, sep 2007.
- [28] L. V. Keldysh. Ionization in the field of strong electromagnetic wave. *Sov. Phys. JETP*, 20:1307, 1965.

-
- [29] Nicolas Kryloff and Nicolas Bogoliouboff. La theorie generale de la mesure dans son application a l'etude des systemes dynamiques de la mecanique non lineaire. *The Annals of Mathematics*, 38(1):65, jan 1937.
- [30] Natalya S. Maslova, Evgeny V. Anikin, Nikolay A. Gippius, and Igor M. Sokolov. Effects of tunneling and multiphoton transitions on squeezed-state generation in bistable driven systems. *Phys. Rev. A*, 99:043802, Apr 2019.
- [31] H. Haken. *Zeitschrift für Physik*, 219:411, 1965.
- [32] H. Risken. *Zeitschrift für Physik*, 186:85, 1965.
- [33] R. Graham and H. Haken. *Zeitschrift für Physik*, 219:246, 1970.
- [34] L. M. Narducci, R. Gilmore, Da Hsuan Feng, and G. S. Agarwal. Quantum analysis of optical bistability and spectrum of fluctuations. *Opt. Lett.*, 2(4):88–90, Apr 1978.
- [35] Yoshisuke Ueda. Survey of regular and chaotic phenomena in the forced duffing oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1(3):199–231, jan 1991.
- [36] Petr I. Arseev. On the nonequilibrium diagram technique: derivation, some features and applications. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 185(12):1271–1321, 2015.

Приложения

7.1 Приближение вращающейся волны для осциллятора с нелинейностью q^4

Покажем, что эффективный гамильтониан (3.2) описывает динамику обычного нелинейного осциллятора в q - p представлении с нелинейностью q^4 , резонансно возбуждаемого внешним полем (осциллятора Дуффинга). Гамильтониан этого осциллятора имеет вид

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} + \chi q^4 - Fq \cos \Omega t, \quad (7.1)$$

Уравнения движения на импульс и координату, дополненные феноменологической силой трения, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{p} + 2\gamma\omega_0 p + m\omega_0^2 q + 4\chi q^3 &= F \cos \Omega t \\ \dot{q} &= \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

В общем случае эти уравнения не имеют аналитического решения. При некоторых значениях параметров в этой системе наблюдается хаос [35].

Однако ситуация упрощается в случае, когда частота внешнего поля Ω близка к ω_0 . Тогда можно применить приближение вращающейся волны и искать решение уравнений движения в виде

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}} [a_{\text{slow}}(t)e^{-i\Omega t} + \text{c.c.}] \\ p &= -i\sqrt{\frac{m\omega_0}{2}} [a_{\text{slow}}(t)e^{-i\Omega t} - \text{c.c.}], \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $a_{\text{slow}}(t)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда. В результате подстановки (7.3) в уравнения движения (7.2) $a_{\text{slow}}(t)$, $a_{\text{slow}}^*(t)$ получают сле-

дующие уравнения движения первого порядка:

$$i\partial_t a = (\omega_0 - \Omega)a + \frac{3\chi}{(m\omega_0)^2} a|a|^2 - \frac{F}{2\sqrt{2m\omega_0}} + \frac{3\chi}{(m\omega_0)^2} (e^{-2i\Omega t} a^3 + 3e^{2i\Omega t} a^* |a|^2 + e^{4i\Omega t} a^{*3}) - \frac{F}{2\sqrt{2m\omega_0}} e^{2i\Omega t} \quad (7.4)$$

В общем случае эти уравнения настолько же сложны, как и уравнения движения (7.2), но вблизи резонанса можно пренебречь членами, содержащими быстро осциллирующие множители $e^{\pm 2i\Omega t}$, $e^{\pm 4i\Omega t}$. В результате получаются уравнения движения без зависимости коэффициентов от времени:

$$i\partial_t a_{\text{slow}} = -\Delta a_{\text{slow}} + \alpha a_{\text{slow}} |a_{\text{slow}}|^2 + f \quad (7.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \Omega - \omega_0 \\ \alpha &= \frac{3\chi}{(m\omega_0)^2} \\ f &= -\frac{F}{2\sqrt{2m\omega_0}} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Они совпадают с уравнениями (2.3).

7.2 Коэффициенты уравнения Фоккера–Планка в представлении квазиэнергий

В этом Приложении будут приведены аналитические выражения для величин, выражающихся через контурные интегралы по классическим траекториям нелинейного осциллятора (3.2). Во-первых, в таком виде представляются коэффициенты уравнения Фоккера–Планка в квазиэнергетическом представлении, (см. (2.11)). Во-вторых, средние по классическим траекториям являются квазиклассическими пределами средних по квантовым состояниям. Здесь будет показано, что средние по классическим траекториям от полинома по a , a^* и коэффициенты уравнения Фоккера–Планка выражаются через эллиптические интегралы.

Перейдём для удобства от комплексных амплитуд a , a^* к каноническим координатам и импульсу, a , $a^* = \frac{q \pm ip}{\sqrt{2}}$. Покажем, что среднее по траектории

от произвольной функции $F(q, p)$ выражается в виде интеграла

$$\langle F \rangle_\epsilon = \frac{1}{T(\epsilon)} \int dq dp \delta(\epsilon - H(q, p)) F(q, p). \quad (7.7)$$

Действительно, интегрируя дельта-функцию по p , получим, что

$$\langle F \rangle_\epsilon = \frac{1}{T(\epsilon)} \oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}} F(q, p), \quad (7.8)$$

где p выражено через q из условия $H(q, p) = \epsilon$. С другой стороны, из уравнений движения имеем $dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt$, поэтому получаем определение среднего

$$\langle F \rangle_\epsilon = \frac{1}{T(\epsilon)} \oint dt F(q(t), p(t)), \quad (7.9)$$

где $T(\epsilon)$ определяется (2.11). Для выражения (7.7) через эллиптические интегралы удобно перейти от переменных q, p — к новым переменным Q, t через замену

$$\begin{aligned} t &= \frac{\alpha}{\Delta} (q^2 + p^2), \\ Q &= \sqrt{\frac{\alpha}{\Delta}} q. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Так как гамильтониан выражается через t и Q как

$$H = \frac{\Delta^2}{\alpha} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t^2}{2} + \sqrt{2\beta} Q \right), \quad \beta = \frac{\alpha f^2}{\Delta^3}, \quad (7.11)$$

переменную Q легко исключить и свести (7.7) к одномерному интегралу по t . В результате получается следующая формула для среднего, пригодная для вычисления среднего от любого $F(q, p)$:

$$\langle F \rangle_\epsilon = \frac{1}{T(\epsilon)} \int \frac{F(q(Q, t), p(Q, t)) dt}{\sqrt{2\beta t - \left(E + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}\right)^2}}, \quad (7.12)$$

где $E = \frac{\alpha \epsilon}{\Delta^2}$, $q(Q, t)$ и $p(Q, t)$ выражаются через Q и t с помощью обращения (7.10).

В частности, для периода и коэффициентов дрейфа и диффузии в про-

странстве квазиэнергий получаются выражения

$$T_r(\epsilon) = \frac{1}{\Delta} \int \frac{dt}{\sqrt{2\beta t - (E + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8})^2}}, \quad (7.13)$$

$$K_r(\epsilon) = \frac{\Delta}{\alpha} \int \frac{3t^2/16 - t/4 + E/2}{\sqrt{2\beta t - (E + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8})^2}} dt, \quad (7.14)$$

$$D_r(\epsilon) = \frac{\Delta^2}{\alpha} \int \frac{t^3/16 - t^2/8 + Et/2 + \beta - E}{\sqrt{2\beta t - (E + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8})^2}} dt. \quad (7.15)$$

Кроме того, средние от $|a|^{2n}$ выражаются через интегралы

$$\langle |a|^{2n} \rangle = \left(\frac{\Delta}{\alpha} \right)^n \frac{1}{T(\epsilon)} \int \frac{t^n dt}{\sqrt{2\beta t - (E + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8})^2}}. \quad (7.16)$$

Область интегрирования в этих выражениях — интервал между двумя корнями знаменателя. при этом в диапазоне квазиэнергий, соответствующем области 1 ($\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_1$), знаменателе 4 вещественных корня t_1, t_2, t_3, t_4 . При интегрировании от $t_1 < t < t_2$ получим коэффициенты для классической области 1, а от $t_3 < t < t_4$ — для классической области 3. Для всех остальных значений квазиэнергии, больших ϵ_2 , классические траектории невырождены, и у полинома знаменателя два корня.

Коэффициент дрейфа $K_i(\epsilon)$ пропорционален адиабатическому инварианту на траектории:

$$n_i(\epsilon) = \frac{1}{2\pi} K_i(\epsilon) \quad (7.17)$$

Из-за того, что коэффициенты для области 1 и области 3 при одном и том же значении квазиэнергии выражаются одним и тем же интегралом с разными областями интегрирования, между этими коэффициентами есть ряд соотношений. Укажем два из них.

Первое соотношение — равенство периодов движения в областях 1 и 3 с разными квазиэнергиями:

$$T_1(\epsilon) = T_3(\epsilon). \quad (7.18)$$

Его легко получить, дополнив интеграл (7.13) до замкнутого контура, обходящего разрез $t_1 < t < t_2$ и деформировав его так, чтобы он стал обходить

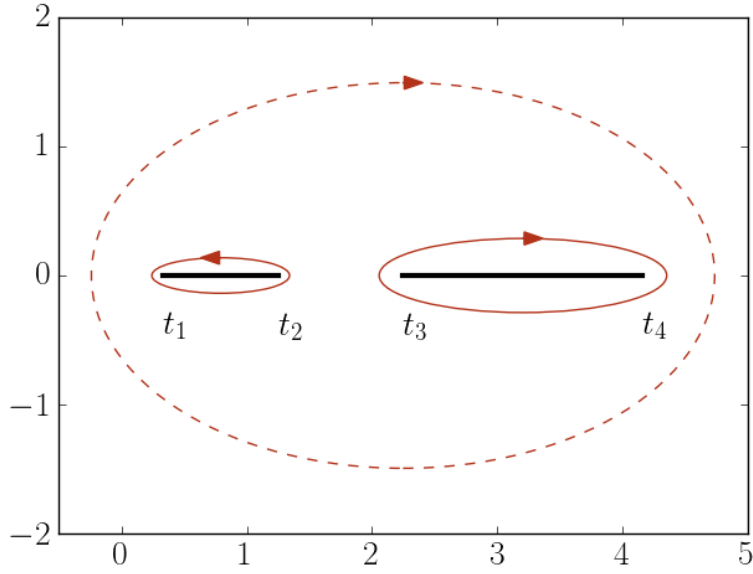


Рис. 7.1: Контуры интегрирования в (7.13), (7.14), (7.15) соответствующие областям 1 (левый внутренний контур) и 2 (правый внутренний контур) на плоскости комплексного t . Разность между двумя величинами соответствует интегралу по внешнему контуру.

разрез $t_3 < t < t_4$ (см. рис. 7.1), При этом нужно учесть вычет в бесконечно удалённой точке, но для подынтегрального выражения (7.13) вычет на бесконечности равен нулю.

Второе — соотношение между адиабатическими инвариантами:

$$n_3(\epsilon) - n_1(\epsilon) = \frac{2\Delta}{\alpha} = \mu. \quad (7.19)$$

Оно получается аналогично с той разницей, что в этом случае полюс на бесконечности отличен от нуля.

Наконец, для $\langle |a|^2 \rangle$ имеем тождество

$$\langle |a|^2 \rangle_3 - \langle |a|^2 \rangle_1 = \frac{4\pi}{\alpha T(\epsilon)}. \quad (7.20)$$

7.3 Квазиклассическое приближение в представлении когерентных состояний

В этом Приложении приведён вывод правила квантования Бора–Зоммерфельда и приближённых формул для волновых функций для гамильтониана (3.2) с использованием представления когерентных состояний и уравнения Шрёдингера в форме (3.13).

Квазиклассическое приближение к этому уравнению можно применить следующим образом. Сделаем подстановку

$$F = \exp \left\{ \int \omega(\zeta) d\zeta \right\} = \exp \left\{ \frac{\Delta}{\alpha} \int w(z) dz \right\}, \quad (7.21)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\Delta}{\alpha}} z, \quad \omega = \sqrt{\frac{\Delta}{\alpha}} w,$$

где w — новая неизвестная функция. Тогда уравнение (3.13) принимает вид уравнения Риккати

$$-zw + \frac{z^2}{2}w^2 + \frac{z^2}{\mu}w' + \sqrt{\beta}(w + z) = \frac{\alpha\epsilon}{\Delta^2}, \quad (7.22)$$

или

$$\frac{z^2 w'}{\mu} = E - \mathcal{H}(w, z), \quad (7.23)$$

где $\mu = 2\Delta/\alpha$, $E = \alpha\epsilon/\Delta^2$. а функция $\mathcal{H}(w, z)$ определена формулой (3.16).

Решение уравнения (7.22) можно искать в виде разложения по параметру μ^{-1} . Ограничимся первым порядком, так что $w(z) = w_0(z) + w_1(z)/\mu$. Подставляя таким образом определённое $w(z)$ в (7.22), получим неявное выражение для $w_0(z)$ и формулу для $w_1(z)$ через $w_0(z)$:

$$\mathcal{H}(w_0, z) = E$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w}(w_0, z)w_1 = z^2 \frac{\partial w_0}{\partial z}. \quad (7.24)$$

Также рассмотрим поправку первого порядка по μ^{-1} к условию квантования:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint w_0(z) dz + \frac{1}{2\pi i \mu} \oint w_1(z) dz = \frac{2n}{\mu}, \quad (7.25)$$

Здесь

$$w_1 = \frac{z^2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A^*}}{\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A}\right)^2} \quad (7.26)$$

Второй член в (7.25) — это поправка к правилу квантования. В случае частицы в потенциальной яме правило квантования имеет вид $\int pdq = 2\pi\hbar(n + 1/2)$, и аналогичная поправка равна \hbar и не зависит от энергии. В то же время поправка к правилу квантования (7.25) зависит от энергии из-за неквадратичной зависимости гамильтониана (3.2) от канонического импульса.

7.4 Оператор преобразования обобщённого гамильтониана осциллятора

В этом разделе будет прямым вычислением доказано тождество (3.46). Для этого преобразуем это тождество к виду

$$U^{-1}\mathcal{H}_\nu U = TU'^{-1}I\mathcal{H}_{m-\nu}I^{-1}U'T^{-1} \quad (7.27)$$

и введём новые операторы H_1 и H_2 определённые как $H_1 = U^{-1}\mathcal{H}_\nu U$, $H_2 = U'^{-1}I\mathcal{H}_{m-\nu}I^{-1}U'$. Операторы U и U' диагональны в фоковском базисе, и из их определений (3.48) легко найти явные выражения для H_1 и H_2 .

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\alpha}{2} \sum \sigma(\sigma - m)|\sigma\rangle\langle\sigma| + f \sum \sigma|\sigma - 1\rangle\langle\sigma| + |\sigma\rangle\langle\sigma - 1| \\ H_2 &= \frac{\alpha}{2} \sum \sigma(\sigma - m)|\sigma\rangle\langle\sigma| + f \sum (m - \sigma + 1)|\sigma - 1\rangle\langle\sigma| + |\sigma\rangle\langle\sigma - 1| \end{aligned} \quad (7.28)$$

Отметим, что эти операторы не являются симметрическими, однако с ними более удобно работать из-за отсутствия корней в матричных элементах. Тождество (3.46), выраженное через операторы H_1 и H_2 , принимает вид

$$H_1 T = T H_2. \quad (7.29)$$

Чтобы найти оператор T , удовлетворяющий этому равенству, будем искать его в виде разложения в ряд Тейлора по f :

$$T = \mathbf{1} + \frac{2f}{\alpha} T^{(1)} + \left(\frac{2f}{\alpha}\right)^2 T^{(2)} + \dots \quad (7.30)$$

Член нулевого порядка по f , очевидно, равен единичному оператору, потому что при $f = 0$ операторы H_1 и H_2 совпадают. Остальные члены разложения априори неизвестны.

Из (7.29) следует следующее равенство на члены разложения T :

$$\sigma(\sigma-m)T_{\sigma\sigma'}^{(k+1)}+(\sigma+1)T_{\sigma+1,\sigma'}^{(k)}+T_{\sigma-1,\sigma'}^{(k)}=\sigma'(\sigma'-m)T_{\sigma\sigma'}^{(k+1)}+(m-\sigma'+1)T_{\sigma,\sigma'-1}^{(k)}+T_{\sigma,\sigma'+1}^{(k)} \quad (7.31)$$

По индукции легко доказать, что (7.31) удовлетворяются, когда

$$T_{\sigma,\sigma+k}^{(k)}=\frac{1}{k!}, \quad (7.32)$$

а все остальные матричные элементы равны нулю. Очевидно, что оператор (7.30) с коэффициентами (7.32) — это разложение $\exp\left\{\frac{2f}{\alpha}\sum_{\sigma}|\sigma\rangle\langle\sigma+1|\right\}$, в соответствии с (3.48).

7.5 Решение уравнения Фоккера–Планка с туннельным членом

В этом Приложении будет рассмотрено решение уравнение Фоккера–Планка с туннельным членом (4.7), содержащим дельта–функцию. В области $\epsilon_{\text{crit}} < \epsilon < \epsilon_{\text{res}}$ решение уравнения Фоккера–Планка — это решение стационарного уравнения с ненулевым потоком:

$$P_{1,3}(\epsilon)=\left[P_{\text{sep}}e^{-\int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon}\frac{K_r(\epsilon')}{D_r(\epsilon')}d\epsilon'}\pm J\int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon}\frac{d\epsilon'}{D_r(\epsilon')}e^{-\int_{\epsilon'}^{\epsilon}\frac{K_r(\tilde{\epsilon})}{D_r(\tilde{\epsilon})}d\tilde{\epsilon}}\right] \quad (7.33)$$

Поток J определяется граничным условием при $\epsilon = \epsilon_{\text{res}}$, которое легко получить, проинтегрировав дельта–функцию:

$$J=-\lambda_{\text{res}}(P_1(\epsilon_{\text{res}})-P_3(\epsilon_{\text{res}})) \quad (7.34)$$

Подставляя значения $P_1(\epsilon_{\text{res}})$ и $P_3(\epsilon_{\text{res}})$, определённые формулой (7.33), получим линейное уравнение на J . Решая его, получим следующее выражение:

$$J = - \frac{\lambda_T P_{\text{sep}} \left(e^{-\int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon_0} \frac{K_1(\bar{\epsilon})}{D_1(\bar{\epsilon})} d\bar{\epsilon}} - e^{-\int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon_0} \frac{K_3(\bar{\epsilon})}{D_3(\bar{\epsilon})} d\bar{\epsilon}} \right)}{1 + \lambda_T \left(\int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon_0} \frac{d\epsilon'}{D_1(\epsilon')} e^{-\int_{\epsilon'}^{\epsilon} \frac{K_1(\bar{\epsilon})}{D_1(\bar{\epsilon})} d\bar{\epsilon}} + \int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon_0} \frac{d\epsilon'}{D_3(\epsilon')} e^{-\int_{\epsilon'}^{\epsilon} \frac{K_3(\bar{\epsilon})}{D_3(\bar{\epsilon})} d\bar{\epsilon}} \right)} \quad (7.35)$$

$$\lambda_T = \frac{\Gamma_{n13} t_n^2}{(\epsilon_{n1} - \epsilon_{n3})^2 + \frac{\Gamma_{n13}^2}{4}} \quad (7.36)$$

$$J = \frac{\Gamma_{n13} t_n^2 P_{\text{sep}} \left(e^{-\int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon_0} \frac{K_1(\bar{\epsilon})}{D_1(\bar{\epsilon})} d\bar{\epsilon}} - e^{-\int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon_0} \frac{K_3(\bar{\epsilon})}{D_3(\bar{\epsilon})} d\bar{\epsilon}} \right)}{(\epsilon_{n1} - \epsilon_{n3})^2 + \frac{\Gamma_{n13}^2}{4} + \Gamma_{n13} t_n^2 \left(\int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon_0} \frac{d\epsilon'}{D_1(\epsilon')} e^{-\int_{\epsilon'}^{\epsilon} \frac{K_1(\bar{\epsilon})}{D_1(\bar{\epsilon})} d\bar{\epsilon}} + \int_{\epsilon_{\text{sep}}}^{\epsilon_0} \frac{d\epsilon'}{D_3(\epsilon')} e^{-\int_{\epsilon'}^{\epsilon} \frac{K_3(\bar{\epsilon})}{D_3(\bar{\epsilon})} d\bar{\epsilon}} \right)} \quad (7.37)$$

Вспомним, что $\epsilon_{n1} - \epsilon_{n3} \propto \delta\Delta_n$ (см. раздел 3.8). Значит, зависимость J от $\delta\Delta_n$ — лоренцева. Из уравнений (7.33) следует, что для вероятностей обнаружить осциллятор в областях 1 и 2 зависимость от $\delta\Delta_n$ — лоренцева.

7.6 Техника Келдыша для системы, взаимодействующей с марковским резервуаром

7.6.1 Вывод квантового управляющего уравнения

В этом Приложении будет приведён вывод квантового управляющего уравнения (4.3) для системы, взаимодействующей с дельта-коррелированным резервуаром. Будет показано, что для дельта-коррелированного резервуара квантовое управляющее уравнение является точным, и параметром малости является не константа связи с резервуаром, а $\gamma\tau_c$, где τ_c — время корреляции резервуара.

Будем работать в базисе $|n\rangle$ собственных состояний гамильтониана \hat{H}_0 . Удобно ввести фермионные операторы вторичного квантования $\hat{c}_n^\dagger, \hat{c}_n$ рождающие или уничтожающие псевдочастицу в состоянии $|n\rangle$. Через них \hat{H}_0, \hat{a} и

\hat{a}^\dagger выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \sum_n \epsilon_n \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n \\ \hat{a} &= \sum_{nn'} a_{nn'} \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_{n'}.\end{aligned}\tag{7.38}$$

Гамильтониан сохраняет число псевдочастиц в системе, и исходная задача соответствует подпространству с $\sum_n \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n = 1$.

Теперь перейдём к выводу кинетического уравнения на матрицу плотности. Матрица плотности напрямую связана с функцией Грина $G^<(t, t')$: $\rho_{nn'}(t) = -iG_{nn'}^<(t, t)$. Ограничение на гильбертово пространство приводит к тому, что диаграммы, которые входят в разложение по теории возмущений должны содержать ровно одну функцию Грина $G_0^<$ [36]. Оказывается, что из-за этого имеет смысл рассматривать следующие три функции Грина: $G^<$, соответствующую одной псевдочастице, и $G^{R,A}$, соответствующие нулю псевдочастиц.

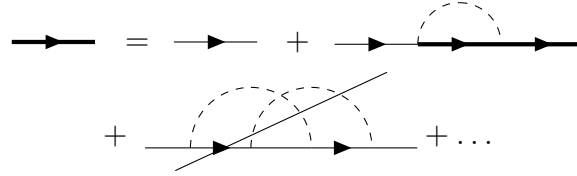


Рис. 7.2: Диаграммное представление уравнений Дайсона на G^R , G^A , $G^<$. Тонкая сплошная линия — “голая” псевдочастичная функция Грина, жирная линия — “одетая” функция Грина, пунктирная линия — функция Грина резервуара.

Диаграммы для этих функций Грина приведены на Рис. 7.2. В случае дельта-коррелированного шума можно пренебречь диаграммами с пересекающимися линиями окружения, что обосновывает применимость борновского приближения. По сравнению с диаграммами с непересекающимися линиями, эти диаграммы малы по параметру $\gamma\tau_c$, где τ_c — время корреляции резервуара.

Сумма всех диаграмм Рис. 7.2 может быть выражена в виде самосогласо-

ванного уравнения

$$\begin{aligned} G^< &= (1 + G^R \Sigma^R) G_0^< (1 + \Sigma^A G^A) + G^R \Sigma^< G^A, \\ G^R &= G_0^R + G_0^R \Sigma^R G^R, \\ G^A &= G_0^A + G^A \Sigma^A G_0^A, \end{aligned} \quad (7.39)$$

где $(G_0^{R,A})_{nn'}(t, t') = \mp i e^{-i\epsilon_n(t-t')} \theta(\pm(t-t')) \delta_{nn'}$, $(G_0^<)_{nn'}(t, t') = i e^{-i\epsilon_n(t-t')} n_n \delta_{nn'}$, n_n — псевдочастичные числа заполнения, $\Sigma^{R,A}$ — суммы неприводимых диаграмм, не содержащие линий $G_0^<$, и $\Sigma^<$ — сумма неприводимых диаграмм, содержащих только одну линию $G_0^<$. В самосогласованном борновском приближении они выражаются следующим образом:

$$\Sigma_{ij}^{R(A)}(t, t') = i \sum_{kl} a_{ik} G_{kl}^{R(A)}(t, t') D^{>(<)}(t, t') a_{jl}^* + a_{ki}^* G_{kl}^{R(A)}(t, t') D^{<(>)}(t', t) a_{lj}, \quad (7.40)$$

$$\Sigma_{ij}^<(t, t') = i \sum_{kl} a_{ik} G_{kl}^<(t, t') D^{>}(t, t') a_{jl}^* + a_{ki}^* G_{kl}^<(t, t') D^{<}(t, t') a_{lj}, \quad (7.41)$$

где

$$\begin{aligned} D^{<}(t, t') &= -i \left\langle \hat{\xi}^\dagger(t') \hat{\xi}(t) \right\rangle, \\ D^{>}(t, t') &= -i \left\langle \hat{\xi}(t) \hat{\xi}^\dagger(t') \right\rangle, \end{aligned} \quad (7.42)$$

а корреляционные функции $\hat{\xi}, \hat{\xi}^\dagger$ определяются уравнением (4.2). Применяя $G_0^{-1} \equiv i\partial_t - \hat{H}_0$ к первому уравнению (7.39) слева и справа, получаем следующее:

$$\begin{aligned} (i\partial_t + i\partial_{t'} - \epsilon_n + \epsilon_{n'}) G_{nn'}^<(t, t') &= \\ &= \int dt'' (\Sigma^R(t, t'') G^<(t'', t') + \Sigma^<(t, t'') G^A(t'', t') \\ &\quad - G^R(t, t'') \Sigma^<(t'', t') - G^<(t, t'') \Sigma^A(t'', t'))_{nn'}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

где собственные энергии $\Sigma^R, \Sigma^A, \Sigma^<$

$$\Sigma_{n_1 n_2}^{R(A)}(t, t') = \frac{i\gamma\delta(t-t')}{2} [(1+N)(\hat{a}^\dagger \hat{a})_{n_1 n_2} + N(\hat{a} \hat{a}^\dagger)_{n_1 n_2}], \quad (7.44)$$

$$\Sigma_{n_1 n_2}^< = \gamma\delta(t-t') [(1+N)a_{n_1 k} G_{kk'}^<(t, t) a_{n_2 k'}^* + N a_{kn_1}^* G_{kk'}^<(t, t) a_{k'n_2}]. \quad (7.45)$$

(здесь и ниже опущено суммирование по повторяющимся индексам) Подставляя эти выражения в (7.43), получаем в точности квантовое управляющее уравнение:

$$(i\partial_t - \epsilon_i + \epsilon_j)G_{nn'}^<(t, t) = \frac{i\gamma(1+N)}{2} (2a_{nk}a_{n'l}^* - (\hat{a}^\dagger\hat{a})_{nk}\delta_{n'l} - \delta_{nk}(\hat{a}^\dagger\hat{a})_{n'l}) G_{kl}^<(t, t) + \frac{i\gamma N}{2} (2a_{kn}^*a_{ln'} - (\hat{a}\hat{a}^\dagger)_{nk}\delta_{n'l} - \delta_{nk}(\hat{a}\hat{a}^\dagger)_{n'l}) G_{kl}^<(t, t). \quad (7.46)$$

7.6.2 Поляризационный оператор

В этом разделе с помощью диаграммной техники вычисляется корреляционная функция операторов \hat{a} , \hat{a}^\dagger в моменты времени $t > t'$. В ходе вывода не делается предположений о сепарабельности матрицы плотности подсистемы, однако полученный результат говорит о том, что это предположение для момента времени t' не меняет конечный результат, что обосновывает рассуждение раздела 5.2.

Поляризационный оператор $\Pi^<(t, t') \equiv \langle T_C \hat{a}_-(t) \hat{a}_+^\dagger(t') \rangle$, где T_C — символ упорядочения вдоль контура Келдыша, представляется в виде суммы диаграмм, показанной на Рис. 7.3. Для дельта-коррелированного резервуара он состоит из суммы лестничных диаграмм без пересекающихся линий. Сумма таких диаграмм может быть вычислена из уравнения Бете–Салпетера (см. Рис 7.3). В стационарном состоянии и в частотном представлении это уравнение принимает вид

$$\Pi^<(\omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \text{Tr} \hat{a} G^<(\omega + \omega') \Phi_1(\omega) G^R(\omega') - \int \frac{d\omega'}{2\pi} \text{Tr} \Phi_2(\omega) G^<(\omega' + \omega) \hat{a}^\dagger G^A(\omega'), \quad (7.47)$$

где $G^R(\omega)$, $G^A(\omega)$ — “одетые” функции Грина. Кроме того, можно показать, что стационарная функция Грина $G^<(\omega)$ выражается через запаздывающую и опережающую функции Грина и стационарную матрицу плотности следующим образом: $G^<(\omega)_{ij} = (\rho_{\text{st}} G^A(\omega))_{ij} - (G^R(\omega) \rho_{\text{st}})_{ij}$, $(\rho_{\text{st}})_{ij} \equiv -i \int \frac{d\omega}{2\pi} G^<(\omega)_{ij}$.

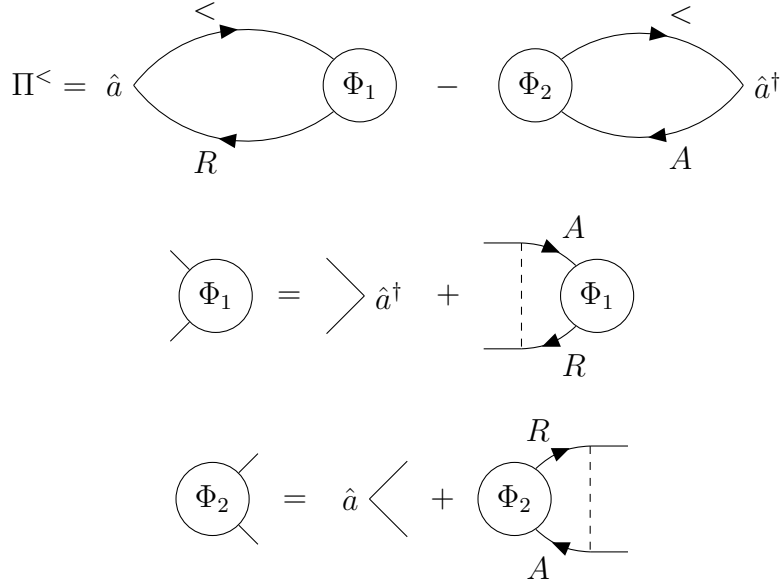


Рис. 7.3: Диаграммная лестница для поляризационного оператора $\Pi^<$. Кругами обозначаются вершинные функции $\Phi_{1,2}$.

Вершинные функции $\Phi_1(\omega)$, $\Phi_2(\omega)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(\omega)_{kl} = a_{lk}^* + \gamma \int \frac{d\omega'}{2\pi} (1 + N) (\hat{a} G^A(\omega + \omega') \Phi_1(\omega) G^R(\omega') \hat{a}^\dagger)_{kl} \\ + N (\hat{a}^\dagger G^A(\omega + \omega') \Phi_1(\omega) G^R(\omega') \hat{a})_{kl}, \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\omega)_{kl} = a_{kl} + \gamma \int \frac{d\omega'}{2\pi} (1 + N) (\hat{a} G^A(\omega') \Phi_2(\omega) G^R(\omega' + \omega) \hat{a}^\dagger)_{kl} \\ + N (\hat{a}^\dagger G^A(\omega') \Phi_2(\omega) G^R(\omega' + \omega) \hat{a})_{kl}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Из (7.48) и (7.49) можно явно получить $\Phi_{1,2}(\omega)$. Для этого удобно ввести тензорные обозначения для супероператоров: каждый супероператор можно считать оператором, действующим на тензорном произведении одночастичных гильбертовых пространств. К примеру, $\hat{a} G^A(\omega') \Phi_2(\omega) G^R(\omega + \omega') \hat{a}^\dagger$ можно записать в виде $(\hat{a} G^A(\omega') \otimes (G^R(\omega + \omega') \hat{a}^\dagger)^T) \Phi_2(\omega)$: это значит, что оператор $\hat{a} G^A(\omega') \otimes (G^R(\omega + \omega') \hat{a}^\dagger)^T$, действующий на тензорном произведении, умножается на Φ_2 , которое рассматривается как элемент тензорного произведения гильбертовых пространств.

Выражения для $\Phi_{1,2}$ в этих обозначениях принимают вид

$$\Phi_1(\omega) = \left[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \gamma \int \frac{d\omega'}{2\pi} [(1+N)\hat{a}^\dagger \otimes \hat{a}^T + N\hat{a} \otimes (\hat{a}^\dagger)^T] G^A(\omega + \omega') \otimes G^R(\omega')^T \right]^{-1} \hat{a}^\dagger, \quad (7.50)$$

$$\Phi_2(\omega) = \left[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \gamma \int \frac{d\omega'}{2\pi} [(1+N)\hat{a}^\dagger \otimes \hat{a}^T + N\hat{a} \otimes (\hat{a}^\dagger)^T] G^A(\omega') \otimes G^R(\omega + \omega')^T \right]^{-1} \hat{a}. \quad (7.51)$$

Для интегралов от произведений функций Грина справедливо следующее тождество:

$$\int \frac{d\omega'}{2\pi} G^A(\omega') \otimes G^R(\omega' + \omega) = \left[-i\omega - i\hat{H} \otimes \mathbf{1} + i\mathbf{1} \otimes \hat{H} + \frac{\gamma}{2} ((1+N)a^\dagger a + Na^\dagger a) \otimes \mathbf{1} + \frac{\gamma}{2} \mathbf{1} \otimes ((1+N)a^\dagger a + Na^\dagger a) \right]^{-1}. \quad (7.52)$$

Его можно получить, дифференцируя $G^A(-t) \otimes G^R(t)$ по t .

Используя это тождество вместе с уравнениями (7.47), (7.50), (7.51), поляризационный оператор можно вычислить явно. Для этого нужно подставить (7.52) в (7.50), (7.51), а выражения (7.50), (7.51), в свою очередь, в (7.47). Таким образом, поляризационный оператор $\Pi^<$ —

$$\Pi^< = \text{Tr} [\hat{a}^\dagger \{-i\omega \mathbf{1} - \mathcal{L}\} (\hat{a} \hat{\rho}_{\text{st}})] + \text{Tr} [\hat{a} \{i\omega \mathbf{1} - \mathcal{L}\} (\hat{\rho}_{\text{st}} \hat{a}^\dagger)]. \quad (7.53)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -i\hat{H}_0 \otimes \mathbf{1} + i\mathbf{1} \otimes \hat{H}_0^T \\ & + \frac{\gamma(1+N)}{2} (2\hat{a} \otimes (\hat{a}^\dagger)^T - \hat{a}^\dagger \hat{a} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes (\hat{a}^\dagger \hat{a})^T) \\ & + \frac{\gamma N}{2} (2\hat{a}^\dagger \otimes \hat{a}^T - \hat{a} \hat{a}^\dagger \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes (\hat{a} \hat{a}^\dagger)^T). \end{aligned} \quad (7.54)$$

В пределе малых γ вычисления выше могут быть значительно упрощены.

В этом пределе матрица плотности, G^R and G^A можно вычислить в диагональном приближении:

$$\begin{aligned}\rho_{nn'} &= P_n \delta_{nn'}, \\ G_{nn'}^{R,A} &= (\omega - \epsilon_n \pm \gamma_n)^{-1} \delta_{nn'}, \\ \gamma_n &= \frac{\gamma}{2} [(1 + N) \hat{a}^\dagger \hat{a} + N \hat{a} \hat{a}^\dagger]_{nn}.\end{aligned}\tag{7.55}$$

Когда ω близко к разнице энергий между двумя уровнями системы, можно использовать это приближение для вычисления Φ_1 , Φ_2 , and $\Pi^<$. Оставляя только диагональные компоненты запаздывающей и опережающей функций Грина в (7.52),

$$\int \frac{d\omega'}{2\pi} G_{n'n'}^A(\omega') G_{nn}^R(\omega' + \omega) = \frac{i}{\omega - \epsilon_n + \epsilon_{n'} + i(\gamma_n + \gamma_{n'})}.\tag{7.56}$$

Это позволяет найти $\Phi_{1,2}$ в резонансном приближении из уравнений (7.48), (7.49):

$$\begin{aligned}(\Phi_1)_{kl} &= a_{lk}^* \left(1 + \frac{i\Delta\gamma_{kl}}{\omega - \epsilon_k + \epsilon_l - i(\gamma_k + \gamma_l)} \right)^{-1}, \\ (\Phi_2)_{kl} &= a_{kl} \left(1 - \frac{i\Delta\gamma_{kl}}{\omega - \epsilon_k + \epsilon_l + i(\gamma_k + \gamma_l)} \right)^{-1}, \\ \Delta\gamma_{kl} &= \gamma ((1 + N)a_{kk}a_{ll}^* + Na_{kk}^*a_{ll}).\end{aligned}\tag{7.57}$$

Кроме того, оставляя только G_{nn}^R и $G_{n'n'}^A$ в $\Pi^<$, определяемом (7.47), можно получить (5.11) и (5.10).

Список иллюстраций

- 1.1 Фазовый портрет нелинейного осциллятора, возбуждаемого внешним полем вблизи резонанса. Между областями фазового портрета, соединёнными стрелкой, возможно туннелирование. 4
- 2.1 S -образная кривая отклика амплитуды осциллятора на внешнее поле для различных значений константы затухания. В области бистабильности у осциллятора есть три стационарных состояния: два из них устойчивы (сплошные линии), одно — неустойчиво (пунктирная линия). В пределе $\gamma \rightarrow 0$ область бистабильности — интервал $0 < f < f_{\text{crit}} \equiv 4/27\sqrt{\Delta^3/\alpha}$ 11
- 2.2 (а) Линии уровня классического гамильтониана (3.2) при $f/f_{\text{crit}} = 0.3$. Сепаратриса (жирная чёрная линия) делит фазовый портрет на три области, обозначенные цифрами 1, 2 и 3. Область 1 содержит устойчивое стационарное состояние с меньшим значением амплитуды, область 2 содержит устойчивое стационарное состояние с большим значением амплитуды. Кроме устойчивых состояний 1 и 2, есть неустойчивое стационарное состояние S , которое совпадает с точкой самопересечения сепаратрисы.
(б) Линии уровня изображены вместе с трёхмерным графиком функции Гамильтона. Видно, что стационарные состояния 1, 2 и S — это соответственно локальный максимум, локальный минимум и седловая точка функции Гамильтона. 12
- 2.3 Типичная зависимость амплитуды осциллятора $a(t)$ полученная из уравнения Ланжевена (2.5), при следующих значениях параметров: $f/f_{\text{crit}} = 0.25$, $\gamma/\Delta = 0.01$, $Q/\gamma = 0.0015$ 16

- 2.4 На рисунке приведены графики зависимости от квазиэнергий коэффициентов уравнения Фоккера–Планка в квазиэнергетическом представлении (2.10) для значения внешнего поля, такого что $f/f_{\text{crit}} = 0.3$. Коэффициенты дрейфа $K_i(\epsilon)$ и диффузии $D_i(\epsilon)$ имеют две ветви для квазиэнергий, лежащих в интервале $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_1$, в то время как для периода $T_i(\epsilon)$ эти две ветви совпадают: $T_1(\epsilon) = T_3(\epsilon)$ 18
- 2.5 Стационарные функции распределения классического нелинейного осциллятора для различных значений внешнего поля f и $Q/\gamma = 0.1$. Каждая функция распределения однозначна при $\epsilon_2 < \epsilon < \epsilon_{\text{sep}}$ и $\epsilon > \epsilon_1$ и двузначна при $\epsilon_{\text{sep}} < \epsilon < \epsilon_1$, потому что в последнем случае для каждого значения ϵ существуют две классические траектории. Распределения имеют локальные максимумы при $\epsilon = \epsilon_{1,2}$, показанные квадратами (ϵ_1) и звёздами (ϵ_2). При $f \approx f_0$ максимумы одного порядка, а при $f < f_0$ ($f > f_0$) максимум около $\epsilon_1(\epsilon_2)$ много больше максимума при $\epsilon_2(\epsilon_1)$ 20
- 2.6 Минимальное ненулевое собственное значение уравнения Фоккера–Планка при $\alpha Q/(\Delta\gamma) = 0.05$ (чёрные ромбы) сравнивается с асимптотической формулой (2.19) (красная кривая). Минимальное собственное значение много меньше γ и всех остальных собственных значений. Асимптотическая формула хорошо согласуется с численным расчётом везде, кроме окрестности границ области бистабильности. 22
- 3.1 (а) Неопределённость квадратуры в квазиэнергетическом состоянии осциллятора с минимальной квазиэнергией в зависимости от внешнего поля при различных $2\Delta/\alpha$. Пунктиром обозначено предсказание (3.6). (б) Минимальная неопределённость и соответствующее значение внешнего поля в зависимости от $2\Delta/\alpha$ 28

3.2 Для отдельных собственных состояний осциллятора $|\psi\rangle$ изображены матричные элементы $\langle a|\psi\rangle$, где $|a\rangle$ — когерентное состояние, как функции комплексного аргумента a (цвет соответствует фазе, а яркость — амплитуде). Видно, что проекции $\langle\alpha|\psi\rangle$ быстро убывают при удалении от классических траекторий. Состояние на рисунке (а) соответствует нулевым колебаниям в окрестности устойчивого состояния 2 и является сжатым. Состояние, изображенное на рисунке (с), соответствует суперпозиции двух классических траекторий. 31

3.3 (а) Уровни квазиэнергии квантового нелинейного осциллятора с $\Delta/\alpha = 8$ в зависимости от f . (б) Расщепления между состояниями, соответствующими суперпозициям $|n\rangle$ и $|m-n\rangle$. Можно видеть, что $\epsilon_{n,m-n}^- - \epsilon_{n,m-n}^+ \propto f^{|m-2n|}$ 39

3.4 Уровни квазиэнергий квантового нелинейного осциллятора с $f/\alpha = 4.47$ в зависимости от Δ . При целых значениях $2\Delta/\alpha$ наблюдаются одновременные антипересечения многих пар уровней. 40

3.5 Классический фазовый портрет осциллятора во мнимом времени с гамильтонианом (3.51). Жирная чёрная линия обозначает границу области с периодическими траекториями во мнимом времени, ответственными за туннелирование. 44

3.6 Показаны коэффициенты разложения $c_{\alpha n}$ (α — индекс состояния, n — номер фоковского состояния) собственных состояний квантового нелинейного осциллятора в фоковском базисе при $2\Delta/\alpha = 12.5$ (слева) и $2\Delta/\alpha = 12$ (справа) и для внешнего поля с $f/f_{\text{crit}} = 0.02$. При $2\Delta/\alpha = 12.5$, собственные состояния близки к фоковским состояниям. Напротив, при $2\Delta/\alpha = 12$, 13 состояний с минимальными значениями квазиэнергий близки к симметричным и антисимметричным суперпозициям $|n\rangle$ и $|12-n\rangle$. 47

- 3.7 Изображены области квазиэнергий, содержащие собственные состояния гамильтониана (3.2) разных типов. Тёмно-зелёная линия схематически изображает классическую функцию Гамильтона $H(a, a^*)$ при $\text{Im } a = 0$. Экстремумы гамильтониана — стационарные состояния 1, 2 и S. Голубая штрихованная линия схематически изображает состояние, соответствующее суперпозиции классических траекторий из областей 1 и 3. 50
- 3.8 Абсолютные значения коэффициентов $c_k(\tau)$ разложения волновой функции осциллятора по фоковским состояниям для начального фоковского состояния $|k\rangle$ при $2\Delta/\alpha = 9$, $\sqrt{\alpha/\Delta^3}f = 0.15$. Для $k = 0, 1, 2$ зависимость $c_k(t)$ от времени близка к $\cos t_n\tau$: для соответствующих начальных условий динамика приближённо описывается (3.66). Для $k = 3, 4$ ту же самую картину можно наблюдать при меньших значениях поля. 51
- 3.9 Показаны левая и правая части равенства (3.72), определяющего зависимость ϵ_{crit} от расстройки. 54
- 3.10 Собственные значения гамильтониана (3.2), полученные численной диагонализацией, для различных значений расстройки Δ при постоянном значении внешнего поля $f/f_{\text{crit}} = 4.47$ и (a) $\alpha_3 = 0$, (b) $\alpha_3/\alpha = 0.005$. В отсутствие нелинейностей высших порядков, все антипересечения происходят при целых значениях $2\Delta/\alpha$ и лежат на одной вертикальной прямой (для примера показана голубая штрихованная линия на панели (a)). В присутствии нелинейности высших порядков все антипересечения происходят при различных значениях $2\Delta/\alpha$. На вставке показана увеличенная область антипересечения между уровнями. . . 55
- 4.1 Абсолютные величины матричных элементов оператора уничтожения в представлении собственных состояний гамильтониана осциллятора при $2\Delta/\alpha = 16.5$, $f/f_{\text{crit}} = 0.2$. Собственные состояния упорядочены по возрастанию квазиэнергии. 59

4.2	(a) Распределения вероятностей по фоковским состояниям осциллятора в различные моменты времени для внешнего поля с $f/f_{\text{crit}} = 0.3$. В начальный момент времени осциллятор находится в квантовом состоянии, соответствующем классическому состоянию 2. (b) Стационарные распределения осциллятора по числам фотонов для различных амплитуд внешнего поля.	60
4.3	(a) Минимальное ненулевое собственное значение матрицы перехода балансного уравнения в зависимости от внешнего поля для различных N . (b) Минимальное ненулевое собственное значение при $N = 0$ как функция Δ/α и f/f_{crit}	61
4.4	Стационарные решения балансного уравнения вместе с решениями классического уравнения Фоккера–Планка в квазиэнергетическом представлении для $2\Delta/\alpha = 30.5$, различных значений внешнего поля и (a) при $N = 2$; (b) при $N = 0.1$	64
4.5	Стационарные решения балансного уравнения для $f/f_{\text{crit}} = 0.2$, $N = 4$, $2\Delta/\alpha = 30 + \delta\mu$ с различными $\delta\mu$. Сплошные линии — распределения, вычисленные по формулам раздела 4.6	65
4.6	(a) Отношение вероятностей найти осциллятор в квантовых состояниях, соответствующих классическим состояниям 1 и 2 при $f/f_{\text{crit}} = 0.2$, $N = 4$, $\mu = 30 + \delta\mu$. в зависимости от $\delta\mu$. На основном рисунке — логарифмический масштаб по оси $\delta\mu$, на вставке показана зависимость в линейном масштабе по μ . (b) Вероятность найти осциллятор в классической области 2 фазового портрета при $f/\alpha = 4.16$ (что соответствует $f/f_{\text{crit}} \approx 0.4$) как функция $2\Delta/\alpha$ для различных γ	72

- 4.7 (а) Для осциллятора с $f/f_{\text{crit}} = 0.2$ и $\alpha(N + \frac{1}{2})/\Delta = 0.1$ приведены функции распределения, вычисленные по аналитическим формулам (2.14), (4.26), (7.33). Распределение (α) построено с учётом туннелирования через резонансную пару уровней; распределение (β) соответствует осциллятору без нелинейностей высшего порядка вблизи многофотонного резонанса; распределение (γ) построено без учёта туннелирования. (б) Вероятность найти осциллятор с нелинейностью шестого порядка в области 2 классического фазового портрета в зависимости от $2\Delta/\alpha$ при $f/\alpha = 8.94$ (что соответствует $f/f_{\text{crit}} \approx 0.4$ в этом диапазоне Δ), $\alpha_3/\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$. (с) Разности квазиэнергий уровней осциллятора в зависимости от $2\Delta/\alpha$ при $f/\alpha = 8.94$ 76
- 4.8 Вероятность найти осциллятор с нелинейностью шестого порядка в области 2 классического фазового портрета в зависимости от $2\Delta/\alpha$ при $f/\alpha = 8.94$, $N = 3$, и различных значений α_3/α . . . 76
- 5.1 Ширины линий пиков спектров флуоресценции осциллятора с $2\Delta/\alpha = 15.4$, $f/f_{\text{crit}} = 0.3$, соответствующих переходам между состоянием $|n\rangle$ и всеми другими состояниями, где $|n\rangle$ соответствует классическому состоянию 1 (а) и 2 (б) (показаны синими ромбами). Для сравнения показаны суммы ширин линий (красные кресты). 82
- 5.2 (а) Спектры флуоресценции осциллятора При $\mu = 12.5$, $N = 0$, $f/f_{\text{crit}} = 0.2$ и при различных значениях константы связи с окружением. Чёрные кривые — спектры, полученные из уравнения (5.4), штрихпунктирная линия — спектр, полученный и линейаризованного уравнения Фоккера–Планка, красная пунктирная линия — приближение линейчатого спектра. (б) Спектры флуоресценции осциллятора, нормированные на полную интенсивность $S_{\text{tot}} \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega)$, при различных значениях внешних полей. $m = 12.5$, $\vartheta = 0.03$, $N = 0$ и различных значениях f 84

5.3	Спектры флуоресценции осциллятора (а) при $f/f_{\text{crit}} = 0.29$, $\gamma/\Delta = 0.005$, $N = 0$ и различных значениях μ (для удобства сравнения графики сдвинуты на произвольные константы по вертикальной оси). (б) Спектры флуоресценции при $f/f_{\text{crit}} = 0.29$, $\gamma/\Delta = 0.03$, $\mu = 12.5$ и различных числах заполнения резервуара.	85
7.1	Контурные интегрирования в (7.13), (7.14), (7.15) соответствующие областям 1 (левый внутренний контур) и 2 (правый внутренний контур) на плоскости комплексного t . Разность между двумя величинами соответствует интегралу по внешнему контуру.	96
7.2	Диаграммное представление уравнений Дайсона на G^R , G^A , $G^<$. Тонкая сплошная линия — “голая” псевдочастичная функция Грина, жирная линия — “одетая” функция Грина, пунктирная линия — функция Грина резервуара.	101
7.3	Диаграммная лестница для поляризационного оператора $\Pi^<$. Кругами обозначаются вершинные функции $\Phi_{1,2}$	104