

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу

Аникина Евгения Викторовича

**«Туннелирование и многофотонный резонанс**

**в модели квантового нелинейного осциллятора»**

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертационная работа Е. В. Аникина посвящена теоретическому исследованию модели бозонной моды с керровской нелинейностью (нелинейного осциллятора), резонансно возбуждаемой внешним полем и взаимодействующей с диссипативным окружением. Эта модель представляет как практический, так и фундаментальный интерес в связи с многочисленными приложениями в оптике и наноэлектронике, а также разнообразием описываемых этой моделью нелинейных явлений, таких как бистабильность, гистерезис в отклике на внешнее поле, переключение между устойчивыми состояниями, вызванное шумом. Исследование этих явлений в совокупности с последовательным учётом квантовых эффектов представляет собой важную фундаментальную проблему. Кроме того квантовые эффекты важны для корректного описания ряда систем, представляющих интерес для современного эксперимента, так как они влияют на неравновесную статистику и кинетику модели и на скорости переключения между устойчивыми состояниями. Одним из наиболее интересных режимов в модели, рассмотренной в диссертации Е. В. Аникина, является мезоскопический режим, когда число квантов в осцилляторе составляет несколько десятков. С одной стороны, в этом случае применимо квазиклассическое приближение, позволяющее использовать понятие классического фазового портрета для описания динамики осциллятора, а с другой стороны, проявляются квантовые эффекты. В этих условиях одним из существенных квантовых эффектов является туннелирование и многофотонные переходы между уровнями осциллятора. Данные соображения делают тему диссертации Е. В. Аникина актуальной и важной с точки зрения фундаментальной науки и практики.

Диссертация состоит из Введения, четырёх глав и Заключения. В первой главе диссертации произведён обзор известных результатов, касающихся динамики и кинетики классического нелинейного осциллятора, взаимодействующего с резонансным внешним полем. В частности, рассматривается классический фазовый портрет осциллятора, а также проясняется роль различных областей фазовой плоскости. Кроме того, значительное внимание уделяется формализму уравнения Фоккера-Планка в пространстве квазиэнергий, который позволяет получить аналитические результаты для стационарных функций распределения осциллятора и скоростей релаксации. Эти результаты используются Е. В. Аникиным в последующих главах для анализа динамики и кинетики квантового осциллятора.

Остальные главы диссертации основываются на публикациях Е. В. Аникина и имеют оригинальный характер.

Во второй главе модель квантового осциллятора исследуется без учёта взаимодействия с окружением. Основная часть этой главы посвящена туннелированию между областями фазового портрета, рассмотренному с помощью двух дополняющих друг друга подходов - квазиклассического и пертурбативного, а также исследованному численно. Во-первых, получено соответствие между квазиклассической амплитудой туннелирования между областями фазового портрета и многофотонной амплитудой перехода между фокковскими состояниями. Показано, что туннелирование между областями фазового портрета имеет

резонансный характер, а именно, что оно наиболее выражено при целых и полуцелых отношениях расстройки к керровскому коэффициенту (что позволяет говорить о многофотонном резонансе). Оказывается, при таких значениях расстройки есть одновременные антипересечения многих уровней энергии осциллятора как функций расстройки, причём положение этих антипересечений не зависит от внешнего поля. Для доказательства последнего факта Е. В. Аникиным было построено преобразование симметрии, доказывающее равенство поправок теории возмущений к уровням энергии осциллятора во многих порядках. Кроме того, показано, что собственные функции осциллятора при целых и полуцелых отношениях расстройки являются суперпозициями состояний, соответствующих квазиклассическим траекториям из двух областей фазового портрета. Также исследуются собственные функции при малых отстройках от многофотонного резонанса. Наконец, Е. В. Аникиным был рассмотрен квантовый осциллятор с дополнительной нелинейностью шестого порядка. Оказалось, что нелинейность шестого порядка нарушает симметрию, справедливую для осциллятора с керровской нелинейностью.

В третьей главе исследуется кинетика квантового нелинейного осциллятора в резонансном внешнем поле, взаимодействующего с диссипативным окружением. Основное внимание уделено случаю слабой связи с окружением, так как именно в этом случае туннелирование оказывает наибольшее влияние на кинетику. Анализ производится на основе квантового управляющего уравнения для матрицы плотности осциллятора. Показывается, что в пределе большого числа квантов квантовое управляющее уравнение сводится к одномерному уравнению Фоккера-Планка в пространстве квазиэнергий, аналогичному случаю классического осциллятора. Уравнение Фоккера-Планка для квантового осциллятора отличается от классического случая наличием туннельного члена, соответствующего переходам между различными областями фазового портрета. С помощью перехода к непрерывному пределу в полном квантовом управляющем уравнении, а также с использованием результатов о структуре собственных состояний, полученных во второй главе, Е. В. Аникиным были получены аналитические выражения для скорости туннелирования между областями фазового портрета. С их помощью Е. В. Аникину удалось показать, что туннелирование сильно меняет заселённости классических устойчивых состояний, когда отношение расстройки к керровскому коэффициенту близко к целым и полуцелым значениям (вблизи многофотонного резонанса). В частности, были найдены аналитические выражения для стационарных функций распределения с учётом туннелирования. Также было показано, что вблизи многофотонного резонанса наблюдаются максимумы интенсивности поля осциллятора. Наконец, продемонстрировано, что эти пики расщепляются на несколько близких пиков в присутствии нелинейности шестого порядка.

В четвёртой главе изучаются спектры флуоресценции квантового нелинейного осциллятора в различных режимах. С помощью диаграммной техники Келдыша Е. В. Аникиным было показано, что эволюция матрицы плотности и корреляционные функции системы описываются квантовым управляющим уравнением при любой величине константы связи с резервуаром, при условии, что резервуар дельта-коррелирован. Это позволило получить удобные для численного расчёта формулы для спектров. С их помощью были получены спектры вблизи порога переключения между устойчивыми состояниями осциллятора и показано, что в окрестности порога спектр одновременно содержит две пары пиков, соответствующих двум устойчивым стационарным состояниям. Кроме того, Е. В. Аникиным была обнаружена осциллирующая зависимость спектров от расстройки вблизи порога, что объясняется многофотонными резонансами. Наконец, продемонстрирована симметрия спектров при нулевой температуре окружения.

Представленная диссертация имеет высокий научный уровень. Модель бозонной моды с керровской нелинейностью и туннелирование в этой модели изучаются Е. В. Аникиным с использованием различных теоретических подходов, которые дополняют и обогащают друг друга. В частности, квазиклассическое описание переходов между областями фазового портрета как туннелирования даёт наглядное и интуитивное понимание этих процессов, в то время как пертурбативное разложение и построенное преобразование симметрии гамильтониана осциллятора обеспечивают математическую строгость. Кроме того, кинетика и спектры модели исследуются как аналитически, так и численно. В ходе работы получено много новых результатов. В частности, найдено преобразование симметрии гамильтониана осциллятора, доказывающее симметричность поправок к уровням энергии осциллятора при целых и полужелтых отношениях расстройки к нелинейности. Это объясняет наличие одновременных антипересечений в уровнях энергии осциллятора и специальную структуру собственных состояний. Последнее отражается на кинетике осциллятора и приводит к наличию туннельного члена в уравнении Фоккера-Планка. Из-за резонансного характера туннелирования возникает осциллирующая зависимость пиков интенсивности от расстройки.

По диссертационной работе можно сделать следующие замечания:

1. На Рис. 2.2 представлены линии уровня и трехмерный график классического гамильтониана (2.1), на котором обозначены два устойчивых и неустойчивое состояния. Вместе с тем не ясно, как определялась устойчивость состояний, так как устойчивыми являются состояния, соответствующие как минимуму, так и максимуму энергии, что противоречит стандартным представлениям. В подписи к рисунку ошибочно поставлена ссылка не на классический, а на квантовый гамильтониан (3.2).
2. На рисунке 4.4 приведены стационарные решения балансового уравнения вместе с решениями классического уравнения Фоккера-Планка в квазиэнергетическом представлении, однако отсутствует четкая информация, какая из кривых соответствует первому и второму случаям.
3. В уравнении (4.22) перед членом, соответствующем скорости туннелирования, стоит знак «плюс/минус», однако в дальнейшем анализе роль этого знака теряется. Необходимо пояснить, к каким результатам приводит наличие этого знака.
4. На стр. 75 имеется путаница в ссылках: имеется ошибочная ссылка на уравнение Фоккера-Планка с туннельным членом (неправильно указано 4.7), а также на отсутствующее Приложение 4.7. В приложении 7.5 также имеется некорректная ссылка на уравнение 4.7, не имеющее отношения к уравнению Фоккера-Планка с туннельным членом, содержащим дельта-функцию.
5. В автореферате и особенно в диссертации имеется большое количество опечаток. Особенно неприятно, что имеются опечатки в формулах, например, в уравнениях (2.1), (7.11), а также в уравнении на первой строке стр. 32.
6. На стр. 75 имеется фраза «...пик заселённости состояния 2 имеет следующую форму», однако какова эта форма – не написано.

Данные замечания не снижают ценности полученных результатов. Диссертационная работа соответствует специальности 01.04.02 - теоретическая физика. Автореферат правильно отражает структуру и содержание работы. Диссертация Аникина Евгения Викторовича "Туннелирование и многофотонный резонанс в модели квантового нелинейного осциллятора" представляет собой законченную научно-квалификационную работу, удовлетворяющую всем требованиям к кандидатским диссертациям, установленным Положением о присуждении ученых степеней, утвержденным постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 года, а ее автор, Аникин Евгений Викторович, заслуживает

присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Заместитель директора по науке  
Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт физики высоких давлений им. Л.Ф. Верещагина Российской академии наук  
доктор физико-математических наук,

Рыжов Валентин Николаевич

12.08.2022

Подпись В.Н. Рыжова удостоверяю

Директор  
Федерального государственного бюджетного учреждения науки  
Институт физики высоких давлений им. Л.Ф. Верещагина  
Российской академии наук  
Академик РАН,



Вадим Вениаминович Бражкин

12.08.2022

Данные оппонента:

Адрес: 108840, г. Москва, г. Троицк, Калужское шоссе, стр. 14  
e-mail: ryzhov@hppi.troitsk.ru  
тел.: +7(495) 851-00-13

Список основных работ оппонента по теме защищаемой диссертации в рецензируемых научных изданиях за последние 5 лет:

1. В.Н. Рыжов, Е.Е. Тареева, Ю.Д. Фомин, Е.Н. Циок, Переход Березинского—Костерлица—Таулеса и двумерное плавление, УФН 187, №9, 921 (2017) (DOI: 10.3367/UFNr.2017.06.038161).
2. Yu. D. Fomin, V. N. Ryzhov, E. N. Tsiok, V. V. Brazhkin, Excitation spectra of liquid iron up to superhigh temperatures, *J. Phys.: Condens. Matter*, **29**, N34, 345401 (2017) (<https://doi.org/10.1088/1361-648X/aa7c0e>).
3. E. N. Tsiok, Y. D. Fomin, V. N. Ryzhov, Random pinning elucidates the nature of melting transition in two-dimensional core-softened potential system, *Physica A* **490**, 819–827 (2018). (<http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2017.08.042>)
4. N. P. Kryuchkov, S. O. Yurchenko, Y. D. Fomin, E. N. Tsiok and V. N. Ryzhov, Complex crystalline structures in a two-dimensional core-softened system, *Soft Matter*, **14**, 2152 - 2162 (2018) DOI: 10.1039/C7SM02429K.
5. Yu. D. Fomin, V. N. Ryzhov, E. N. Tsiok, J. E. Proctor, C. Prescher, V. B. Prakapenka, K. Trachenko, and V. V. Brazhkin, Dynamics, thermodynamics and structure of liquids and supercritical fluids: crossover at the Frenkel line, *J. Phys.: Condens. Matter* **30** (13), 134003 (2018) DOI:10.1088/1361-648X/aaaf39 (<https://doi.org/10.1088/1361-648X/aaaf39>)
6. Yu. D. Fomin, E. A. Gaiduk, E. N. Tsiok & V. N. Ryzhov, The phase diagram and melting scenarios of two-dimensional Hertzian spheres, *Molecular Physics*, **116** (21-22), 3258-3270 (2018) DOI: 10.1080/00268976.2018.1464676
7. V.V. Brazhkin, Yu. D. Fomin, V.N. Ryzhov, E.N. Tsiok, K. Trachenko, Liquid-like and gas-like features of a simple fluid: An insight from theory and simulation, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **509**, 690–702 (2018) <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.06.084>
8. E. A. Gaiduk, Yu.D. Fomin, E. N. Tsiok & V. N. Ryzhov, The influence of random pinning on the melting scenario of two-dimensional soft-disk systems, *Molecular Physics* **117(20)**, 2910-2919 (2019) DOI: 10.1080/00268976.2019.1607917
9. Yu.D. Fomin, E.N. Tsiok and V.N. Ryzhov, The stripe phase of two-dimensional core-softened systems: Structure recognition, *Physica A* **527**, 121401 (2019), <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.121401> Impact Factor: 2.132
10. Yu. D. Fomin, V. N. Ryzhov, E. N. Tsiok, The influence of long-range interaction on the structure of a two-dimensional multi scale potential system, *J. Phys.: Condens. Matter* **31**, 315103 (2019) DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-648X/ab1df6>
11. Yu.D. Fomin, E.N. Tsiok, V.N. Ryzhov, V.V. Brazhkin, Anomalous behavior of dispersion of longitudinal and transverse collective excitations in water, *Journal of Molecular Liquids* **287**, 110992 (2019) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2019.110992>
12. Yu. D. Fomin, E. N. Tsiok, V. N. Ryzhov, V. V. Brazhkin, Anomalous behavior of dispersion curves in water-like systems and water, *Fluid Phase Equilibria* **498**, 45-50 (2019). IF=2.514 DOI: 10.1016/j.fluid.2019.06.013
13. Elena N. Tsiok, Evgeniy A. Gaiduk, Yury Fomin and Valentin N. Ryzhov, Melting scenarios of two-dimensional Hertzian spheres with a single triangular lattice, *Soft Matter*, **16**, 3962 - 3972 (2020) <https://doi.org/10.1039/C9SM02262G> DOI: 10.1039/c9sm02262g
14. Yu. D. Fomin, V. N. Ryzhov & E. N. Tsiok, Interplay between freezing and density anomaly in a confined core-softened fluid, *Molecular Physics*, **118**, No 15, e1718792 (2020) DOI: 10.1080/00268976.2020.1718792.
15. E.N. Tsiok, Y.D. Fomin and V.N. Ryzhov, The effect of confinement on the solid–liquid transition in a core-softened potential system, *Physica A* **550**, 124521 (2020) <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124521>
16. L. N. Dzhavadov, V. V. Brazhkin, Yu. D. Fomin, V. N. Ryzhov, and E. N. Tsiok, Experimental study of water thermodynamics up to 1.2 GPa and 473 K, *J. Chem. Phys.* **152**, 154501 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0002720>

17. В. Н. Рыжов, Е. Е. Тареева, Ю. Д. Фомин, Е. Н. Циок, Сложные фазовые диаграммы систем с изотропными потенциалами: результаты компьютерного моделирования, УФН **190**, №5, 449-473 (2020) DOI: 10.3367/UFNr.2018.04.038417
18. V. N. Ryzhov, E. A. Gaiduk, E. E. Tareyeva, Yu. D. Fomin, and E. N. Tsiok, The Berezhinskii–Kosterlitz–Thouless Transition and Melting Scenarios of Two-Dimensional Systems, *Physics of Particles and Nuclei*, **51**, No. 4, pp. 786–790 (2020) DOI: 10.1134/S1063779620040632 (published in *Fizika Elementarnykh Chastits i Atomnogo Yadra*, 2020, Vol. 51, No. 4).
19. Yu. D. Fomin, E.N. Tsiok, V.N. Ryzhov, V.V. Brazhkin, The temperature dependence of the frequency of longitudinal excitations in liquid along isobars: Simple liquid and water, *Journal of Molecular Liquids* **337**, 116450 (2021) <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2021.116450> Impact factor 5.065
20. E. N. Tsiok, Yu. D. Fomin, E. A. Gaiduk, and V. N. Ryzhov, Structural transition in two-dimensional Hertzian spheres in the presence of random pinning, *Phys. Rev. E* **103**, 062612 (2021) DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.103.062612> IF 2.529
21. Elena N. Tsiok, Yuri D. Fomin, Eugene A. Gaiduk, Elena E. Tareyeva, Valentin N. Ryzhov, Pavel A. Libet, Nikita A. Dmitryuk, Nikita P. Kryuchkov, and Stanislav O. Yurchenko, The role of attraction in the phase diagrams and melting scenarios of generalized 2D Lennard-Jones systems, *J. Chem. Phys.* **156**, 114703 (2022); doi: 10.1063/5.0075479
22. Eu. A. Gaiduk, Yu. D. Fomin, E. N. Tsiok, and V. N. Ryzhov, Anomalous behavior of a two-dimensional Hertzian disk system, *Phys. Rev. E* **106**, 024602 (2022); DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.106.024602>.