

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П. Н. ЛЕБЕДЕВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Мишняков Виктор Викторович

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н.
Миронов Андрей Дмитриевич

Москва — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Аспекты теории матричных моделей	15
1.1 Тожества Уорда	15
1.1.1 Инвариантность на пространстве переменных интегрирования	15
1.1.2 Гауссова эрмитова модель	17
1.1.3 Кубическая модель	19
1.1.4 Модель Концевича	20
1.2 Интегрируемость в матричных моделях	21
1.2.1 τ -функции	22
1.2.2 Детерминантное представление одноматричной эрмитовой модели	28
1.2.3 Разложение по характерам	30
1.3 Суперинтегрируемость	32
1.3.1 Суперинтегрируемость в классической механике	32
1.3.2 Суперинтегрируемость в гауссовой матричной модели	33
Глава 2. Связь условий Вирасоро, интегрируемости и суперинтегрируемости в эрмитовой матричной модели	37
2.1 Условия Вирасоро и суперинтегрируемость	37
2.2 Условия Вирасоро и интегрируемость	43
Глава 3. W-представление матричных моделей	47
3.1 Единственное уравнение вместо тождеств Уорда	47
3.1.1 Единственное уравнение для комплексной модели	48
3.1.2 Правило составления уравнения	51
3.1.3 Больше примеров. Гауссова эрмитова модель	51
3.1.4 Модель Брезана-Гросса-Виттена	53
3.2 Доказательство суперинтегрируемости из W -представления	54
3.3 Неабелево W -представление обобщенной модели Концевича	58

3.3.1	W -представление в кубическом случае	59
3.3.2	W -представление для малых r	60
3.3.3	Случай произвольного r	66
3.3.4	О выводе W -представления из матричного тождества Уорда для ОМК	70
Глава 4. Деформации матричных моделей		73
4.1	β -деформация	73
4.1.1	Доказательство суперинтегрируемости β -деформированной эрмитовой гауссовой матричной модели	73
4.1.2	Построение W -операторов из гамильтонианов	78
4.2	Модель Брезана-Гросса-Виттена и Q -функции Шура.	79
4.2.1	Q -функции Шура и иерархия B -КП	80
4.3	Суперинтегрируемость и W -операторы для матричных моделей, связанных с Q -функциями.	81
4.4	Фермионная модель Натанзона-Орлова	83
4.4.1	Q -функции как характеры супералгебры	83
4.4.2	Модель Натанзона-Орлова	84
4.4.3	К Q -функциям Шура	86
Глава 5. Уравнение Пенлеве VI в логарифмической матричной модели		88
5.1	Введение	88
5.1.1	Уравнения Пенлеве из интегрируемости и условий Вирасоро	90
5.2	Матричные модели в переменных Мивы: уравнения Хироты	93
5.3	Матричные модели в переменных Мивы: условия Вирасоро	95
5.4	q -деформированная матричная модель и q -уравнения Пенлеве	98
5.4.1	Представление Доценко-Фатеева для конформных блоков	98
5.4.2	Детерминантное представление для конформного блока q -Вирасоро	101
5.5	q -деформированное уравнение Пенлеве VI	102
5.5.1	Восемь уравнений	103
5.6	Предел от q -Пенлеве до Пенлеве VI (от $5d$ до $4d$)	108
5.6.1	Конформный блок	108
5.6.2	Уравнение Пенлеве VI	109

5.6.3	Непрерывный предел восьми билинейных уравнений	114
5.7	Предел чистой калибровочной теории	118
5.7.1	Уравнение Пенлеве III	118
5.7.2	Конформный блок в калибровочном пределе как матричная модель БГВ	119
	Заключение	122
	Список литературы	125
	Приложение А. Симметрические функции	141
	Приложение Б. Статсуммы ОМК	146
	Приложение В. Доказательство интегрируемости в модели Натанзона-Орлова	148

Введение

За последнее время струнный подход к квантовой теории поля дал множество интересных и поучительных результатов. В рамках струнной парадигмы вместо изучения отдельных теорий предлагается задавать вопросы про пространство модулей теорий [1]. Оказывается, многие важные свойства открываются именно в форме динамики на пространстве параметров. Такие явления включают в себя, идею об интегрируемой природе эффективных действий, различные геометрические и комбинаторные интерпретации полевых систем, дуальности [2–4]. Такой подход позволяет обнаруживать общие для разных систем свойства, объединять похожие теории в единое целое.

Матричные модели занимают важное место в этом контексте по нескольким причинам. Во-первых, они являются наиболее естественным примером, который может быть решен точно [5–12]. Матричные модели достаточно просты, чтобы можно было строго определить общие вопросы и получить осмысленные ответы. С другой стороны, они сохраняют основные структурные свойства теорий поля, такие как сложную фазовую диаграмму, интегрируемость, бесконечную симметрию функционального интеграла и различные формы разложения ответа, такие как пертурбативные ряды, разложения по родам [13] и по инстантонам [7; 14]. Благодаря относительной простоте, матричные модели позволяют значительно углубиться в изучение вышеописанных структур, что приводит к полному описанию некоторых из них в простых терминах. Например, для большого класса матричных моделей известны свободно-полевые представления [15]. Матричные модели также могут служить полигоном как для проверки струнного подхода, так и для понимания, какие новые вопросы необходимо задавать в теории поля.

Другая причина, тесно связанная с предыдущей, заключается в возникновении матрично-модельного описания для конкретных моделей теории поля и теории струн [16; 17]. Исторически первым важным шагом в изучении теории струн стало описание статсуммы теории струн как непрерывного предела матричной модели [18–23]. В результате оказалось, что разложение по диаграммам Фейнмана-т'Хоофта в матричных моделях отлично описывает разложение по римановым поверхностям в теории струн. Кроме того, была разработана комби-

наторно-геометрическая интерпретация этого результата, как утверждение об интегралах по пространству модулей кривых [21; 24]. Активное развитие этого подхода привело к появлению множества методов, о которых мы поговорим далее, таких, как использование тождеств Уорда и интегрируемости. Сегодня ведется интенсивная работа по матрично-модельному описанию различных режимов двумерной квантовой гравитации [25; 26]. Аналогично двумерной гравитации, известно описание некоторых топологических теорий поля, двумерных калибровочных теорий в терминах матричных моделей [27; 28]. Часто, такое описание позволяет предъявить теорию в новом, явном виде, который связан с пересчетной геометрией. В таких задачах матричные модели являются производящими функциями, что проявляется в нетривиальности прямого вычисления величин, таких как числа Гурвица [29–33], числа пересечений на пространстве модулей и инварианты Громова-Виттена.

Другой характерный пример — матричные модели, возникающие в результате суперсимметричной локализации функциональных интегралов [34–37]. Так, при наличии в теории достаточной симметрии, для чего обычно требуется расширенная суперсимметрия, средние от специальных суперсимметричных наблюдаемых можно вычислить точно. Если в теории присутствуют калибровочные степени свободы, локализация приводит к остаточному интегрированию по матричным степеням свободы. В зависимости от рассматриваемой теории могут получаться различные матричные потенциалы, и разные деформации матричной меры интегрирования, см. например [38–40], а так же [41–44]. Набор этих примеров можно суммировать в некоторое единое наблюдение. Часто, если в теории есть достаточно большая симметрия, то динамические степени свободы из неё полностью или практически полностью можно исключить. Таким образом функциональное интегрирование должно превратиться в конечномерное. В таких случаях теория часто сводится к матричной модели непосредственно. Это позволяет, в частности, пронаблюдать явно вышеописанные общие свойства эффективных действий и функциональных интегралов.

В теории матричных моделей мы имеем дело с интегралами вида:

$$Z = \int DX e^{-\text{Tr} V(X)} \quad (1)$$

Здесь интеграл производится по пространству матриц, обычно фиксированного типа: эрмитовых, ортогональных, унитарных, нормальных и т. д. Множество переменных интегрирования определяет меру интегрирования, которая символически обозначается DX . Часто на пространстве матриц можно ввести групповую структуру, и в качестве меры выбирается стандартная мера Хаара. Потенциал $V(X)$ также зависит от изучаемой модели. Кроме того, важной составляющей определения является контур интегрирования. Он должен быть согласован с потенциалом так, чтобы интеграл сходился. Бывают случаи, когда существует несколько подходящих контуров интегрирования. В данной работе мы будем изучать интеграл по эрмитовым матрицам, и поэтому мы будем фокусироваться на этом случае, опуская детали и отличия, которые могут быть важны в других случаях. Кроме того, мы лишь поверхностно затронем вопрос о возможности выбора разных контуров интегрирования.

Тождествами Уорда (Уорда-Такахаша-Славнова-Тейлора) в квантовой теории поля принято называть соотношения на корреляторы или вершины в эффективном действии, следующие из калибровочной и БРСТ симметрии классического действия. С другой стороны, полезно так же изучать произвольные преобразования в пространстве полей. При должных уточнениях функциональный интеграл не зависит от подобных преобразований, из чего следует гораздо больше соотношений на корреляционные функции и эффективные действия. Иначе говоря, из инвариантности интеграла в пространстве полевых переменных следуют свойства ковариантности и в пространстве констант связи. Необходимо отметить, что в квантовой теории поля общего вида записать соотношения в общем виде и их решение является достаточно тяжелой задачей. Однако в матричных моделях метод получения тождеств Уорда упрощается, что позволяет раскрыть более детальные математические структуры, стоящие за ними. В следующем разделе мы рассмотрим метод получения тождеств Уорда для матричных интегралов, которые в данном контексте известны как условия Вирасоро [45; 46], и простейшие примеры их решения.

Изучение алгебры преобразований в пространстве модулей является естественной задачей в квантовой теории поля [1; 47]. Одним из примеров является ренормгруппа, которая, однако, выделяет во всей алгебре диффеоморфизмов лишь однопараметрические семейства [48]. Изучение полной алгебры диффеоморфизмов ожидаемо приводит к структурам вроде интегрируемых [2]. Напри-

мер, алгебра Хопфа на диаграммах пертурбативного ряда изучается в контексте ренормгруппы [49; 50]. Получающиеся в этом случае соотношения квадратичного типа [51] характерны для интегрируемых систем. Другая идея, которая возникает при таком рассмотрении, состоит в возможности получать разные теории поля друг из друга, действуя операторами эволюции вдоль различных направлений в пространстве модулей. Как и во многих других ситуациях, оказывается, что подобная конструкция может быть явно реализована в контексте матричных моделей, и называется в этом случае W -представлением [52]. Символически оно имеет вид:

$$Z = e^{\hat{W}} \cdot Z_0, \quad (2)$$

где Z_0 - начальная теория, а Z получается из неё действием оператора \hat{W} . Это означает, что в качестве Z_0 можно рассмотреть, например, тривиальную теорию, которой будет отвечать $Z_0 = 1$. В работе будет систематически изучено это явление в теории матричных моделей. Мы явно покажем, как оно связано с системой тождеств Уорда и другие, более тонкие его свойства.

Другим аспектом матричных интегралов является интегрируемость. Статсуммы многих матричных моделей являются τ -функциями интегрируемых иерархий [53]. Как уже было сказано, представляется, что похожими свойствами должны обладать эффективные действия в целом. В настоящий момент наиболее изученные классы τ -функций связаны с иерархиями Кадомцева-Петвиашвили (КП) и Тоды, и именно с ними связаны статсуммы матричных моделей. Более конкретно, для матричной модели интегрируемость означает наличие некоторых квадратичных уравнений на статсуммы. В последнее время было также обнаружено более тонкое свойство — суперинтегрируемость. Для некоторых матричных моделей оказывается возможным предъявить явные формулы для корреляционных функций специального базиса в пространства наблюдаемых. Этот специальный базис выделен и другим образом — он дается характеристиками некоторой группы или их специальными деформациями. Некоторые примеры особенных свойств средних от характеров были известны давно, однако, систематичность обсуждаемого явления была замечена недавно.

В данной работе мы ставим перед собой цель описать взаимосвязь между различными аспектами матричных моделей, включая условия Вирасоро и W -представления, интегрируемость и суперинтегрируемость. На данный момент полное понимание этой связи отсутствует, но изучение данного вопроса

необходимо для построения всеобъемлющей теории матричных моделей. В исследовании мы рассматриваем ситуации, когда можно записать систему тождеств Уорда — условий Вирасоро, и, возможно, старших W -условий. Для таких моделей мы показываем, что бесконечную систему уравнений можно решить, и решением будет в точности W -представление. Это является значительным результатом, демонстрирующим важность связи между тождествами Уорда и W -представлениями. Важным аспектом анализа является использование разложения по характерам, что связано с теорией интегрируемых систем. Переформулировка условий Вирасоро в алгебро-комбинаторной форме представляется эффективным способом проверки единственности решения условий Вирасоро. Более того, такая формулировка подходит для получения ответов для средних от характеров, известных как свойство суперинтегрируемости. Перспективным результатом исследований становится общность построенного метода, дающего возможность решать не только тождества Уорда в форме W -представления, но и явно получать разложение по характерам. Ключевая идея заключается в том, что построенные операторы имеют специальное представление в базисе характеров. Более того, мы отмечаем, что аналогичные структуры существуют даже в моделях, в которых используются деформации характеров. Особенностью этих случаев является то, что групповой смысл деформации характеров зачастую скрыт. Развитые в работе алгебраические методы позволяют увидеть некоторые групповые свойства. Более того, для случая деформации построенные методы являются на наш взгляд единственным методом доказательства свойства суперинтегрируемости. Таким образом, данный подход применим к самым разным моделям, в том числе с более экзотической структурой тождеств Уорда. Результаты исследований являются значительным вкладом в развитие теории матричных моделей и сопутствующей алгебраической теории.

Идея изучения деформаций также приходит из общей струнной парадигмы. Актуальным для работы является двухпараметрическое семейство (q, t) -деформации [54; 55], связанное с квантовыми тороидальными алгебрами. В работе достигается прогресс в изучении матричных моделей в некоторых точках этого семейства. Одной из рассматриваемых деформаций является β -деформация, связанная со специальным пределом $t = q^\beta, q \rightarrow 1$. Полученные в результате такой деформации интегралы уже не выражаются в терминах матричного интегрирования, однако они естественны в терминах собственных

значений и появляются в статистической физике под названием бета-ансамблей. При специальных фиксированных значениях β они связаны с интегралами по симметрическим, эрмитовым и симплектическим матрицам. Такая деформация оказывается важной для разных задач, сводящихся к матричным моделям, и представляет собой первый нетривиальный шаг в исследовании матричных моделей, связанных с квантовыми тороидальными алгебрами. Для случая эрмитовых моделей $\beta = 2$ определитель Вандермонда обеспечивает интегрируемые свойства статсуммы. Однако на данный момент неизвестно, как модифицировать формализм теории интегрируемых систем, чтобы включить случай произвольного β . Результаты, изложенные в диссертации, позволяют продвинуться в понимании этой проблемы.

Мы также провели исследование матричных моделей в другой специальной точке в семействе (q, t) , а именно при $q = 1$, $t = -1$. В результате этого исследования мы показали, что наш метод построения W -операторов работает и в этой точке. Более того, мы показали, что для этого случая существует свой аналог характеров, и W -оператор имеет согласованную структуру с ними. Мы изучили различные проявления свойства суперинтегрируемости для этих новых характеров, включая их реализацию в виде суперматричного интеграла с грассмановыми степенями свободы. Таким образом, построенные нами методы изучения матричных моделей и их интегрируемых свойств согласованы с такой деформацией. Это особенно важно, учитывая, что обобщения других привычных техник либо отсутствуют, либо не систематичны.

В данной работе мы рассматриваем один из феноменов, возникающих при пересечении тождеств Уорда и интегрируемости. В теории интегрируемых систем этот феномен известен как тест Пенлеве-Ковалевской [56; 57]. Он применяется для оценки интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений. Для этого мы рассматриваем анзац, в котором искомая функция зависит от одной функциональной комбинации исходных переменных (такие решения иногда называются автомодельными). После этого мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и анализируем подвижные особые точки. Если полученное уравнение второго порядка, то известен список уравнений, для которых подвижными точками являются только полюса — такие уравнения называются уравнениями Пенлеве $PI - PVI$. Если уравнение сводится к

уравнению Пенлеве, то мы можем предположить, что оно интегрируемо. Наоборот, если уравнение является интегрируемым, то после редукции оно сводится к уравнению Пенлеве или аналогичным уравнениям более высокого порядка.

Естественно рассмотреть этот феномен с точки зрения матричных моделей. Мы знаем, что статсуммы являются τ -функциями интегрируемых иерархий. С другой стороны, в теории матричных моделей есть естественные условия редукции — условия Вирасоро. Таким образом, мы можем ожидать, что при учете некоторых тождеств Уорда в теории матричных моделей будут получаться решения уравнений Пенлеве. Такие утверждения встречаются в разных задачах от двумерной квантовой гравитацией [58] до статистической физики [59].

Мы рассмотрим один из таких примеров, для которых матрично-модельная интерпретация не была известна. Известно, что, с одной стороны, в конформной теории поля можно построить τ -функцию шестого уравнения Пенлеве [60], а с другой стороны, это можно сделать в двойственной ей по соответствию Алдаи-Гайотто-Тачикавы (АГТ) суперсимметричной калибровочной теории [61]. Мы посмотрим на это явления с точки зрения матрично-модельного представления соответствующих объектов. Оказывается, что появление в этом контексте уравнения Пенлеве также соответствует общей парадигме, описанной выше.

Результаты, выносимые на защиту

- Показано, что в эрмитовой гауссовой матричной модели система условий Вирасоро в базисе характеров переписывается в форме алгебро-комбинаторных соотношений. Построено решение этой системы и таким образом показано свойство суперинтегрируемости.
- Связь интегрируемости и условий Вирасоро в эрмитовой гауссовой матричной модели изучена в терминах коэффициентов разложения по характерам. Показано, что совместный учет струнного уравнения и только одного условия Вирасоро приводит к ответу.
- Показано для многих матричных моделей, что система тождеств Уорда эквивалентна единственному уравнению на статсумму. Предъявлен метод построения этого уравнения и его решения в форме W -представления.

- Разработан метод доказательства суперинтегрируемости для моделей, для которых известно W -представление.
- Построено неабелево W -представление обобщенной модели Концевича. Предъявлен метод построения W -операторов из скрученных бозонных полей.
- Построена деформация W -оператора в гауссовой эрмитовой модели и с его помощью доказана суперинтегрируемость для средних от полиномов Джека.
- Рассмотрены матричные модели связанные с Q -функциями Шура. Показано, что метод доказательства суперинтегрируемости работает в модели Брезана-Гросса-Виттена (БГВ).
- Построена фермионная версия суперинтегрируемости в модели Натансона-Орлова
- Рассмотрены последовательные пределы от разностных уравнений на q -деформированную матричную модель для конформного блока q -Вирасоро к их дифференциальному аналогу, а также предел чистой калибровочной теории. Показано, что в пределах сохраняется соотношение между тождествами Уорда уравнениями Хироты и уравнением Пенлеве VI.

Апробация работы

Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 оригинальных статьях, которые изданы в журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых в Web of Science и Scopus. Результаты работы докладывались на семинарах институтов: ОТФ ФИАН, МИАН, ИТФ им. Ландау, ИТЭФ, МФТИ - и на конференциях:

- Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (МКТЭФ-2019), ИТЭФ, 25-28 ноября 2019 г., Москва, Россия.
- Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (МКТЭФ-2021), ИТЭФ, 15–18 ноября 2021 г., Москва, Россия.
- "Supersymmetry in Integrable Systems (SIS'23) ЛТФ ОИЯИ, 20–22 февр. 2023 г., Дубна, Россия.
- "Geometry and integrability 18-22 сентября 2023 г. Москва, Россия.

Публикации автора по теме диссертации

1. Virasoro Versus Superintegrability. Gaussian Hermitian Model / A. Mironov [и др.] // JETP Lett. — 2021. — т. 113, № 11. — с. 728—732. — DOI: [10.1134/S0021364021120018](https://doi.org/10.1134/S0021364021120018). — arXiv: [2104.11550 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2104.11550).
2. Matrix model partition function by a single constraint / A. Mironov [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2021. — т. 81, № 12. — с. 1140. — DOI: [10.1140/epjc/s10052-021-09912-0](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09912-0). — arXiv: [2105.09920 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2105.09920).
3. *Mironov A., Mishnyakov V., Morozov A.* Non-Abelian W-representation for GKM // Phys. Lett. B. — 2021. — т. 823. — с. 136721. — DOI: [10.1016/j.physletb.2021.136721](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136721). — arXiv: [2107.02210 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2107.02210).
4. Natanzon-Orlov model and refined superintegrability / A. Mironov [и др.] // Phys. Lett. B. — 2022. — т. 829. — с. 137041. — DOI: [10.1016/j.physletb.2022.137041](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137041). — arXiv: [2112.11371 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2112.11371).
5. *Mishnyakov V., Oreshina A.* Superintegrability in β -deformed Gaussian Hermitian matrix model from W-operators // Eur. Phys. J. C. — 2022. — т. 82, № 6. — с. 548. — DOI: [10.1140/epjc/s10052-022-10466-y](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10466-y). — arXiv: [2203.15675 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2203.15675).
6. AGT correspondence, (q-)Painlevé equations and matrix models / A. Mironov [и др.] // Nucl. Phys. B. — 2022. — т. 985. — с. 116022. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2022.116022](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2022.116022). — arXiv: [2209.06150 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2209.06150).

Объем и структура диссертации. В главе 1 содержится краткий обзор основных аспектов теории матричных моделей, актуальных для данной работы. Сначала обсуждаются тождества Уорда и их происхождение. Затем приводится краткий обзор теории интегрируемых иерархий в формализме свободных фермионов. В частности, обсуждаются матрично-модельные τ -функции и разложение по характерам. Затем кратко приводится иллюстрация свойства суперинтегрируемости.

В главе 2 приводится связь между условиями Вирасоро, интегрируемостью и суперинтегрируемостью в гауссовой эрмитовой матричной модели.

Предъявляется способ решения тождеств Уорда с помощью характеров, а также с использованием детерминантного представления.

В главе 3 приводятся результаты работы, посвященные W -представлениям. Показывается эквивалентность системы условий Вирасоро единственному уравнению и его решение в терминах W -оператора. Описан метод доказательства суперинтегрируемости. Подробно рассматривается случай обобщенной модели Концевича.

В главе 4 рассматриваются деформации матричных моделей. Сначала рассмотрена β -деформация и отвечающая ей деформация суперинтегрируемости. Затем рассматриваются модели, связанные с Q -функциями, и фермионная модель Натансона-Орлова.

В главе 5 изучается уравнение Пенлеве в логарифмической матричной модели. В начале предъявлены общие свойства матричных моделей в переменных Мивы. Основное утверждение сформулировано в q -деформированном случае, а затем рассмотрены различные последовательные пределы.

Полученные результаты обсуждаются в заключении.

Полный объём диссертации составляет 151 страницу с 2 рисунками. Список литературы содержит 150 наименований.

Благодарности. Я бы хотел поблагодарить моего научного руководителя А.Д. Миронова за постановку интересных задач и обсуждения научных вопросов, а также за помощь и внимание к моей работе. Я выражаю признательность А.В. Слепцову и А.Ю. Морозову за помощь и наставления в начале моего научного пути и далее. Я так же благодарен своим коллегам и соавторам Н. Целоусову, Р. Рашкову, А. Жабину, В. Алексееву, Н. Терзиеву, М.Забзину, Г. Фестучча, А. Горскому, Ф. Левковичу-Маслюку, В. Казакову, А. Пополитову, А. Орешинной и П.Супруну за плодотворную и интересную совместную работу. Я бы также хотел поблагодарить Е.Суслову за поддержку и помощь.

Глава 1. Аспекты теории матричных моделей

Мы начнем с изложения нескольких сюжетов в теории матричных моделей, лежащих в основе поставленных в диссертации задач. Эти сюжеты далеко не исчерпывают все методы, применяющиеся при анализе матричных моделей, однако, именно они будут важны нам в дальнейшем. Мы также не будем придерживаться какого-либо хронологического порядка при их изложении.

1.1 Тождества Уорда

1.1.1 Инвариантность на пространстве переменных интегрирования

Рассмотрим интеграл по пространству эрмитовых матриц вида:

$$Z_N(p_k) = \int DX \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \text{Tr} X^k \right), \quad (1.1)$$

где мера интегрирования по эрмитовым матрицам дается:

$$DX = \prod_{i>j=1}^N d \text{Re}(X_{ij}) \text{Im}(X_{ij}) \prod_{i=1}^N \text{Re}(X_{ii}), \quad (1.2)$$

а в качестве потенциала выбрана производящая функция следов матрицы X . Параметры p_k в зависимости от контекста могут называться константами связи, имея в виду аналогию с квантовой теорией поля, или временами, в контексте теории интегрируемых иерархий. Стандартным приемом является переход к интегралу по собственным значениям. Так как потенциал зависит только от собственных значений, интеграл по угловым переменным дает объем унитарной группы. Учет якобиана приводит к появлению определителя Вандермонда, в

конце концов имеем:

$$Z_n(p_k) = \text{Vol}(U(N)) \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N dx_i \Delta^2(x) \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_{i=1}^N x_i^k \right), \quad (1.3)$$

где $\Delta(x) = \prod_{i>j=1}^N (x_i - x_j)$ - определитель Вандермонда. В дальнейшем мы будем опускать множитель, связанный с объемом унитарной группы, имея в виду, что он учтен в нормировку меры интегрирования. Не будем пока заботиться о контуре (пределах) интегрирования и сходимости, а рассмотрим формальную замену переменных интегрирования:

$$\delta_n : X \rightarrow \tilde{X} = X + \epsilon X^{n-1}, \quad n \geq -1. \quad (1.4)$$

Рассмотрим условие неизменности интеграла (1.1) при таком преобразовании в первом порядке по ϵ . Для подынтегрального выражения получим:

$$\begin{aligned} \delta_n : \text{Tr } X^k &\rightarrow \text{Tr } X^k + \epsilon \text{Tr } X^{k+n} \\ &\Downarrow \\ \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \text{Tr } \tilde{X}^k \right) &= \\ = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \text{Tr } X^k \right) &+ \epsilon \sum_k (n+k) p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+n}} \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \text{Tr } \tilde{X}^k \right) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Преобразования меры интегрирования дается:

$$D\tilde{X} = DX \left(1 + \epsilon \left(\sum_{k=1}^{n-1} \text{Tr } X^k \text{Tr } X^{n-k} \right) \right). \quad (1.6)$$

Собирая вместе и учитывая независимость интеграла от замен переменной интегрирования получим:

$$0 = \delta_n Z_N(p_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (n+k) p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+n}} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) k \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_{n-k}} \right) Z_N(p_k) = 0. \quad (1.7)$$

Получившиеся дифференциальные уравнения называются условиями Вирасоро [45]. Это название отражает тот факт, что коммутационные соотношения для этих операторов совпадают с борелевской подалгеброй алгебры Вирасоро:

$$[l_n, l_m] = (n - m)l_{n+m}, \quad n \geq -1, \quad (1.8)$$

где

$$l_n = \sum_{k=1}^{\infty} (n+k)p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+n}} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_{n-k}}. \quad (1.9)$$

Заметим, что первый член в операторах Вирасоро l_n отвечает преобразованию действия, т.е., фактически, уравнениям движения. Эта часть уравнения напоминает аналогичный член в уравнениях Дайсона-Швингера. Второй вклад в операторы Вирасоро связан с преобразованием меры интегрирования, т.е. в квантово-полевых терминах отвечает за чисто квантовые вклады в уравнения.

Аналогичные условия можно получить и для других матричных интегралов. Заметим, что в данном вычислении мы игнорировали вопрос сходимости интеграла. В частности, в зависимости от выбора фазы, то есть выбора значений p_k , контур интегрирования, отвечающий сходящемуся интегралу, может отличаться. Доопределить интеграл можно в каждой конкретной модели, что можно проиллюстрировать на примере гауссовой модели.

1.1.2 Гауссова эрмитова модель

Гауссова эрмитова модель - это один из главных примеров матричного интеграла, на котором можно продемонстрировать многие явления. Одновременно, именно гауссова матричная модель часто оказывается актуальной в приложениях. Модель определяется выбором квадратичного потенциала $V(X) = X^2$, в соответствии с которым определяются средние операторов:

$$\langle \dots \rangle_{\text{Гаусс}} = \int DX e^{-\text{Tr} X^2} \dots \quad (1.10)$$

Статсумма модели определяется, как производящая функция инвариантных операторов:

$$Z_N^{\text{Гauss}}(p_k) = \int DX \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \text{Tr} X^k \right). \quad (1.11)$$

В данном случае интеграл, показанный выше, мы будем понимать следующим образом. Все интегралы с гауссовым весом берутся по вещественной прямой, в то время как по параметрам p_k интеграл раскладывается в формальный степенной ряд. Свойства сходимости можно исследовать, отталкиваясь от нужд конкретной задачи. Иначе говоря, в интеграле (1.1) выбрана фаза, в которой константы связи переопределены, как:

$$p_k \rightarrow p_k - \frac{1}{2} \delta_{k,2} \quad (1.12)$$

Таким образом, мы выделили из параметров конечную и пертурбативную составляющую. Заметим, что в данной задаче нет неопределенности, связанной с выбором контура. За счёт гауссовой формы потенциала все матричные элементы интегрируются по вещественной прямой. Любые корреляторы в гауссовой модели можно легко вычислить, используя теорему Вика и парные корреляторы:

$$\langle X_{ij} X_{kl} \rangle = \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (1.13)$$

к чему мы вернемся в дальнейшем при обсуждении общих формул для средних. Теперь рассмотрим условия Вирасоро в этой модели. Их можно вывести заново или воспользоваться заменой (1.12). Так или иначе, получим:

$$\begin{aligned} \hat{L}_n Z_N^{\text{Гauss}} &= 0, \quad n \geq -1 \\ \hat{L}_n &= -(n+2) \frac{\partial}{\partial p_{n+2}} + 2Nn \frac{\partial}{\partial p_n} + \sum_{k=1}^{\infty} (k+n) p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+n}} + \sum_{r=1}^{n-1} r(n-r) \frac{\partial^2}{\partial p_r \partial p_{n-r}} + \\ &\quad + N^2 \delta_{n,0} + p_1 N \delta_{n,-1}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Заметим, что первый член связан с гауссовой мерой и сдвижкой (1.12). В случае гауссовой матричной модели, система (1.14) полностью фиксирует зависимость статсуммы от времен p_k . Поскольку в интегральном определении мы не ожида-

ем произвола в выборе контура, то можно так же ожидать, что решение в форме формального ряда по p_k так же единственно. Чтобы продемонстрировать это, положим

$$Z_N^{\text{Гаусс}} = \sum_{\Delta} a_{\Delta} p_{\Delta} = 1 + a_{[1]} p_1 + a_{[2]} p_2 + a_{[1,1]} p_1^2 + \dots, \quad (1.15)$$

где за Δ мы обозначили упорядоченные разбиения $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \dots]$ (см. приложение А) и выбрали нормировку так, что при $p_k = 0$ статсумма равна единице. Тогда в первых порядках имеем:

$$\begin{cases} L_{-1}Z = a_{[1]} + (N - 2a_{[1,1]}) + \dots = 0 \\ L_0Z = -a_2 + N^2 + \dots = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{[1]} = 0 \\ a_{[1,1]} = \frac{N}{2} \\ a_{[2]} = N^2 \end{cases}. \quad (1.16)$$

1.1.3 Кубическая модель

Теперь рассмотрим более сложный пример модели, в которой конечная часть потенциала выбрана так, что в интеграле появляется неопределенность в выборе контура интегрирования. Поскольку в работе мы будем затрагивать это явление в меньшей степени, ограничимся, для простоты, примером кубической модели:

$$Z_N^{\text{Кубич}}(p_k) \sim \int DX \exp \left(-\frac{1}{3} \text{Tr} X^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \text{Tr} X^k \right). \quad (1.17)$$

Чтобы проанализировать сходимость интеграла, перейдем к собственным значениям:

$$Z_N^{\text{Кубич}}(p_k) \sim \int \prod_{i=1}^N dx_i \Delta^2(x) \exp \left(-\frac{1}{3} \sum_{i=1}^N x_i^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_{i=1}^N x_i^k \right). \quad (1.18)$$

Теперь для каждого собственного значения имеем два класса контуров, на которых интеграл сходится, определяемых поведением на бесконечности. А именно, для нашего выбора коэффициента перед кубическим членом один

контур C_1 начинается в области $-\pi/6 \leq \text{Arg}(x) \leq \pi/6$ и заканчивается в области $\pi/2 \leq \text{Arg}(x) \leq 5\pi/6$, а второй контур можно выбрать выходящим из области $\pi \leq \text{Arg}(x) \leq 5\pi/6$ и направленным в область $7\pi/6 \leq \text{Arg}(x) \leq 3\pi/2$.

Таким образом, полный матричный интеграл представляет собой смешанную фазу, выраженную линейной комбинацией интегралов отвечающих чистым фазам:

$$Z_N^{\text{Кубич}}(p_k) = \sum_{N_1+N_2=N} \alpha_{N_1, N_2} Z_{N_1, N_2}^{\text{Кубич}}(p_k) \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{N_1, N_2}^{\text{Кубич}}(p_k) &= \\ &= \frac{1}{N_1! N_2!} \int_{C_1} \prod_{i=1}^{N_1} dx_i \int_{C_2} \prod_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} dx_i \Delta^2(x) \exp \left(-\frac{1}{3} \sum_{i=1}^N x_i^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_{i=1}^N x_i^k \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.1.4 Модель Концевича

Другим важным примером матричной модели, характеризуемой своими условиями Вирасоро, и важным примером матричной модели вообще является обобщенная модель Концевича (ОМК). Эта матричная модель описывает взаимодействие эрмитовой модели с внешней матрицей:

$$Z^{\text{ОМК}}(\Lambda) \sim \int DX \exp(-\text{tr} V(X) + \text{tr} \Lambda X). \quad (1.21)$$

Явное выражение для коэффициента пропорциональности мы учтем в соответствующей главе 3.3. Самой моделью Концевича называется случай $V(X) = \frac{1}{3}X^3$. У такого интеграла также существует несколько режимов. Если Λ - малая матрица, то интеграл следует понимать пертурбативно по этому параметру. Тогда в случае, если $V(X)$ отличен от гауссового, мы получим те же сложности, что и для кубической модели в прошлом разделе. Однако в режиме "сильной связи", малой величиной является Λ^{-1} и интеграл можно взять, раскладываясь

около седловой точки:

$$V'(X) = \Lambda. \quad (1.22)$$

В результате интеграл сводится к пертурбативному ряду по переменным $p_k = \text{Tr } \Lambda^{-k}$. Заметим, что полный ответ не зависит от размера интегрируемых матриц N , из-за чего можно считать, что взят предел $N \rightarrow \infty$ и все p_k — независимы.

Тождества Уорда в обобщенных моделях Концевича следуют из одного матричного уравнения, называемого уравнением Гросса-Ньюмана:

$$\left(V' \left(\frac{\partial}{\partial \Lambda^T} \right) - \Lambda \right) Z^{\text{ОМК}} = 0. \quad (1.23)$$

Приведем здесь пример для $V(X) = \frac{1}{3}X^3$ и вернемся к тождествам Уорда для ОМК в разделе [3.3](#)

$$\begin{aligned} {}_2\hat{L}_n := & \frac{1}{2} \sum_{k \in \text{odd}} (k + 2n) p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+2n}} + \frac{1}{4} \sum_{a,b \in \text{odd}}^{a+b=2n} ab \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \frac{p_1^2}{4} \delta_{n,-1} + \frac{1}{16} \delta_{n,0} - \\ & - (2n + 3) \frac{\partial}{\partial p_{2n+3}}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Заметим, что в этом случае статсумма модели зависит только от нечетных времен, что следует из правил отбора для гауссового интегрирования вокруг седловой точки:

$$Z_2^{\text{ОМК}}(p_k) \sim \int DX \exp \left(-\text{Tr } M X^2 - \frac{1}{3} \text{Tr } X^3 \right), \quad (1.25)$$

где $M^2 = \Lambda$.

1.2 Интегрируемость в матричных моделях

Современная теория интегрируемых иерархий может быть сформулирована в достаточно общих терминах на языке теории групп и свободных полей [62]. Нам не понадобится здесь большая часть этого формализма. В этом разделе мы

введем понятие τ -функции. Начав с достаточно общего определения, мы перейдем к тем аспектам теории τ -функций, которые релевантны для обсуждаемых задач, а именно детерминантное представление, разложение по характеристам для τ -функций и явная дифференциальная реализация уравнений иерархии Тоды. Затем мы увидим, что все эти явления реализуются для обсуждаемых матричных моделей.

1.2.1 τ -функции

Общую теорию τ -функций можно охарактеризовать с чисто теоретико-групповой точки зрения. Мы изложим только ту часть теории τ -функций, которая относится к описанию иерархии двумеризованной решетки Тоды (2РТ). Именно про τ -функции такого типа пойдет речь при обсуждении статсумм матричных моделей. Стоит отметить, что иерархия 2РТ является достаточно общей полевой классической интегрируемой моделью. Редукциями из 2РТ получаются сама иерархия Тоды, иерархия КП и её дальнейшие редукции типа иерархии Кортвега-де-Вриза (КдВ).

В алгебраическом подходе τ -функцией иерархии 2РТ называется следующий групповой элемент:

$$\tau_N(t, \bar{t} | G) = \frac{\langle N | e^{H(t)} G e^{\bar{H}(\bar{t})} | N \rangle}{\langle N | G | N \rangle} \quad (1.26)$$

группы $GL(\infty)$ в её представлении на полубесконечном грассманиане, то есть фермионном пространстве Фока. Начнём с определения компонент формулы (1.26). Определим алгебру (двумерных) свободных фермионов:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k z^k, \\ \bar{\psi}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_k z^{-k-1} \end{aligned} \quad (1.27)$$

с коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} \{\psi_n, \bar{\psi}_m\} &= \delta_{nm}, \\ \{\psi_n, \psi_m\} &= \{\bar{\psi}_n, \bar{\psi}_m\} = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Операторы, составленные из фермионов $\psi, \bar{\psi}$, действуют в пространстве Фока, которое определяется выбором вакуумного вектора $|N\rangle$:

$$\begin{aligned} \psi_m |N\rangle &= 0, m < N, \\ \bar{\psi}_m |N\rangle &= 0, m \geq N. \end{aligned} \quad (1.29)$$

В построенном фермионном пространстве Фока можно реализовать представление группы $GL(\infty)$, сопоставив каждому элементу алгебры $A \in gl(\infty)$, который можно представлять как бесконечную матрицу с элементами A_{mn} , фермионный оператор:

$$G =: \exp \left(\sum_{nm} A_{nm} \psi_n \bar{\psi}_m \right) :. \quad (1.30)$$

Генераторы алгебры $gl(\infty)$ отвечающие матрицам с единственным единичным элементом в этом представлении даются фермионными операторами:

$$E_{nm} = \bar{\psi}_n \psi_m, \quad (1.31)$$

которые реализуют соответствующее коммутационное соотношение:

$$[E_{mn}, E_{kl}] = \delta_{ml} E_{kn} + \delta_{nk} E_{ml}. \quad (1.32)$$

Операторы $H(t)$ и $\bar{H}(\bar{t})$ отвечают понижающим и повышающим элементам алгебры $gl(\infty)$:

$$H(t) = \sum_{k>0} t_k J_{-k}, \quad \bar{H}(\bar{t}) = \sum_{k>0} \bar{t}_k J_k, \quad (1.33)$$

где J_k - это компоненты тока:

$$J(z) =: \bar{\psi}(z) \psi(z) :. \quad (1.34)$$

Таким образом, построенное выражение (1.26) является производящей функцией всевозможных матричных элементов данного оператора G в соответствующем представлении.

Получим теперь самую важную формулу данного раздела — детерминантное представление. Вообще (1.26) — это просто гауссов фермионный коррелятор, который можно вычислять пользуясь теоремой Вика. Для того, чтобы применить её, нам потребуется ввести ещё несколько определений.

Во-первых, определим псевдовакуумный вектор, отвечающий наивным операторам частиц ψ :

$$\bar{\psi}_m |-\infty\rangle = 0. \quad (1.35)$$

В этом случае вакуумный вектор $|N\rangle$, определенный в (1.29), отвечает ”морю Дирака”, заполненному до уровня N :

$$|N\rangle = \prod_{i=-\infty}^{N-1} \psi_i |-\infty\rangle. \quad (1.36)$$

Описанная конструкция отвечает стандартному построению фермионного гильбертова пространства. Псевдовакуумный вектор не отвечает истинному основному состоянию системы. Вместо этого, обычно рассматривают заполненное море Дирака с $N = 0$. Тогда операторы ψ_m с $m > 0$ отвечают рождению частиц, а операторы $\bar{\psi}_m$ с $m < 0$ отвечают рождению античастиц. Здесь мы построили обобщение, в котором основным состоянием системы может являться состояние с N заполненными частицами уровнями. Поэтому число N также иногда называют зарядом, а вакуум $|N\rangle$ — заряженным.

Во-вторых, выясним, как сопряжение операторами H, \bar{H} действует на фермионы. Из формы операторов и коммутационных соотношений очевидно, что это действие сводится к линейному преобразованию. В данном случае имеем:

$$\begin{aligned} \psi(\bar{t}, z) &= e^{\bar{H}(\bar{t})} \psi(z) e^{-\bar{H}(\bar{t})} = e^{\xi(\bar{t}, z^{-1})} \psi(z), \\ \bar{\psi}(t, z) &= e^{H(t)} \bar{\psi}(z) e^{-H(t)} = e^{-\xi(t, z)} \bar{\psi}(z), \\ \xi(t, z) &= \sum_{k>0} t_k z^k. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Пользуясь этим соотношением получим представление для (1.26):

$$\begin{aligned} \tau_N(t, \bar{t}|G) &= \langle -\infty | \prod_{i=-\infty}^{N-1} \bar{\psi}_i(t) G \prod_{i=-\infty}^{N-1} \psi_i(\bar{t}) | -\infty \rangle = \\ &= \det_{1 \leq i, j \leq N-1} \langle -\infty | \bar{\psi}_i(t) G \psi_j(\bar{t}) G^{-1} | -\infty \rangle . \end{aligned} \quad (1.38)$$

Во втором равенстве мы воспользовались теоремой Вика для вычисления фермионного среднего. Формула (1.38) выражает собой детерминантное представление для τ -функции 2РТ. Заметим, что для его вывода мы воспользовались в сущности только наличием свободно-фермионной реализации алгебры $GL(\infty)$. Теперь преобразуем фермионный матричный элемент к более явной форме. Для этого воспользуемся определением полиномов Шура (A.5):

$$e^{\sum_{k>0} t_k z^k} = \sum_k z^k s_k(t), \quad (1.39)$$

где $s_k(t)$ — симметрические полиномы Шура (см. Приложение A). Также заметим, что преобразование сопряжения элементом G - линейное преобразование (вращение) в алгебре фермионов:

$$G \psi_j G^{-1} = \sum_i R_{ji} \psi_i. \quad (1.40)$$

Подставляя в (1.38) получим:

$$\tau_N(t, \bar{t}|G) = \det_{1 \leq i, j \leq N-1} C_{ij}(t, \bar{t}), \quad (1.41)$$

где:

$$C_{ij}(t, \bar{t}) = \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} R_{km} s_{k+n-i}(t) s_{m+n-j}(\bar{t}). \quad (1.42)$$

В сумме выживает только часть слагаемых, в связи с тем, что $s_{k<0} = 0$.

Мы обсудили основные свойства фермионного матричного элемента, получим теперь сами уравнения иерархии 2РТ, которым удовлетворяет τ -функция. Мы снова воспользуемся в первую очередь теоретико-групповыми соображениями. Мы ожидаем получить стандартные квадратичные дифференциальные

уравнения Хироты по временам t, \bar{t} . Для этого заметим, что оператор

$$\Gamma = \sum_i \psi_i \otimes \bar{\psi}_i \quad (1.43)$$

является сплетающим оператором для рассматриваемых представлений $GL(\infty)$, то есть его действие перестановочно с групповым действием на тензорном произведении представлений:

$$\Gamma (G \otimes G) = (G \otimes G) \Gamma. \quad (1.44)$$

Чтобы получить квадратичные соотношения на τ -функции, нужно взять матричный элемент соотношения (1.44), для специально подобранных состояний. А именно, для этого рассматривается матричный элемент вида:

$$0 = \langle n+1 | e^{H(t)} \otimes \langle m-1 | e^{H(t')} (\Gamma (G \otimes G) - (G \otimes G) \Gamma) e^{\bar{H}(\bar{t})} |n\rangle \otimes e^{\bar{H}(\bar{t}')} |m\rangle \quad (1.45)$$

при $t' \neq t$. Фермионные операторы из (1.43) в этом соотношении дифференциального оператора на τ -функцию (1.26). Таким образом получаем билинейные тождества Хироты в известной форме:

$$\oint_{z=0} dz \exp \left(\sum_k z^k \left(\bar{t}_k + \frac{1}{k} \partial_{\bar{t}_k} \right) \right) \tau_{n+1}(t, \bar{t}) \times \quad (1.46)$$

$$\times \exp \left(\sum_k z^k \left(\bar{t}'_k + \frac{1}{k} \partial_{\bar{t}'_k} \right) \right) \tau_{m-1}(t', \bar{t}') = 0.$$

Поскольку в них входят два набора времен, полученное соотношения можно разложить по $(t - t'), (\bar{t} - \bar{t}')$, после чего, взяв вычет в нуле по z , получаются дифференциальные уравнения, выраженные через производные Хироты.

Из иерархии 2РТ можно получить другие известные интегрируемые иерархии, которые, в частности, понадобятся нам для описания матричных моделей. Переход к *иерархии Тоды* заключается в рассмотрении элементов $GL(\infty)$, удовлетворяющих дополнительному условию:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_k} - \frac{\partial}{\partial \bar{t}_k} \right) C_{ij}(t, \bar{t}) = 0. \quad (1.47)$$

При таком условии τ -функция зависит только от суммы времен $t_k + \bar{t}_k$, и соответствующая матрица в детерминанте упрощается:

$$C_{ij} = C_{i+j}(t + \bar{t}). \quad (1.48)$$

Можно так же рассмотреть дополнительную редукцию непосредственно отвечающую матричным моделям - так называемую *форсированную иерархию Тоды*. Для этого надо положить:

$$\tau_N = 0, \quad N < N_0, \quad \tau_0 = 1. \quad (1.49)$$

Тогда в детерминантном представлении мы автоматически получаем:

$$\tau_N^\Phi(t + \bar{t}|G) = \det_{N_0 \leq i, j \leq N} C_{i+j}(t + \bar{t}). \quad (1.50)$$

С точки зрения матричных моделей обычно удобно выбрать $N_0 = 0$, тогда N в индексе τ -функции будет отвечать непосредственно размеру интегрируемой матрицы, как мы увидим далее.

Другая важная система — *иерархия КП* получается, если считать времена \bar{t} фиксированными параметрами и рассматривать уравнения только относительно переменных t . Тогда для одного и того же выбора элемента грассманиана G мы получаем целое семейство функций, параметризованных набором \bar{t} , эффективно отвечающих групповому элементу $G[t] = Ge^{\bar{H}(\bar{t})}$:

$$\tau^{\text{КП}}(t, G[\bar{t}]) = \tau^{2\text{PT}}(t, \bar{t}|G). \quad (1.51)$$

Накладывая дополнительные условия можно получить также иерархии КдВ, Буссинеска. Для другой редукции иерархии Тоды, получим, например, иерархию КП для алгебр серии B_n .

1.2.2 Детерминантное представление одноматричной эрмитовой модели

Покажем, теперь, что статсуммы некоторых матричных интегралов являются τ -функциями интегрируемых иерархий. Рассмотрим унитарно инвариантную эрмитову одноматричную модель:

$$Z_N^{(\mu)}(p) = \int DX \mu(X) \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \text{tr} X^k \right), \quad (1.52)$$

где $\mu(X)$ - некоторая мера интегрирования, такая, что средние от инвариантных многочленов конечны. Предположим, что мера выбрана таким образом, чтобы отсутствовала неоднозначность в выборе контура интегрирования. В качестве показательного примера следует иметь в виду, конечно, гауссову матричную модель или её простые модификации, достигнутые, например, путем умножения её меры на инвариантные полиномы. Переходя к собственным значениям имеем:

$$Z_N^{(\mu)}(p) = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N dx_i \mu(x_i) \Delta(x)^2 \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_{i=1}^N x_i^k \right). \quad (1.53)$$

Один из способов получить детерминантное представление - это использовать свойства определителя Вандермонда и симметрии интеграла относительно перестановки индексов i . Подставляя:

$$\Delta(x) = \det_{1 \leq i, j \leq N} x_i^{j-1} \quad (1.54)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N dx_i \mu(x_i) \Delta^2(x) \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_i x_i^k \right) &= \\ &= \det_{0 \leq i, j \leq N} \int dx x^{i+j-2} \mu(x) \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} x^k \right). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Таким образом мы свели многократный интеграл к определителю матрицы составленному из однократных интегралов. Эти интегралы просто моменты рас-

смаатриваемого распределения. В конце концов для статсуммы получаем:

$$Z_N^{(\mu)}(p) = \det_{1 \leq i, j \leq N} C_{i+j-2}(p),$$

$$C_k(p) = \int dx x^k \mu(x) \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} x^k \right). \quad (1.56)$$

Заметим, что матрица: $C_{i,j} = C_{i+j-2}$ обладает свойством:

$$C_i = \frac{\partial^i C_0}{\partial p_1^i}, \quad (1.57)$$

которое гарантирует, что полученная статсумма является τ -функцией, форсированной иерархией Тоды (1.50).

Закончим важным наблюдением. Для того чтобы статсумма была τ -функцией Тоды, мы требовали от меры интегрирования только условий сходимости. Таким образом, интегрируемость статсуммы эрмитовой модели почти не зависит от меры матричного интеграла, но и не отличает модели с разными мерами. Чтобы выделить в пространстве матрично-модельных τ -функций, к примеру, эрмитову матричную модель нужны дополнительные уравнения, которые будут накладывать больше условий на точку грассманиана. Ниже мы увидим, как роль таких условий играют условия Вирасоро.

С другой стороны, в моделях типа эрмитовой модели с кубическим потенциалом существует неопределенность в выборе контура интегрирования для каждого собственного значения. Известно, что в этом случае свойство интегрируемости модифицируется. В частности, для кубической модели статсумма общего вида (1.19) не имеет детерминантного представления и не удовлетворяет уравнениям Тоды. Более того, нельзя фиксировать $N_1, N_2 \neq 0$. Оказывается, что интегрируемость в моделях типа (1.19) восстанавливается при специальном выборе параметров:

$$\alpha_{N_1, N_2} = \xi_1^{N_1} \xi_2^{N_2}. \quad (1.58)$$

Таким образом, функция, обладающая свойством интегрируемости, является Фурье преобразованием статсуммы кубической модели общего положения:

$$Z_N(\xi|p) = \sum_{N_1+N_2=N} \xi_1^{N_1} \xi_2^{N_2} Z_{N_1, N_2} \sim \sum e^{i\eta(N_1-N_2)} Z_{N_1, N_2}, \quad (1.59)$$

где $e^{i\eta} = \frac{\xi_1}{\xi_2}$.

1.2.3 Разложение по характерам

При рассмотрении детерминантных формул мы уже получали функции Шура (см. Приложение А) - характеры группы $GL(N)$. На самом деле возникновение характеров естественно ожидать уже при постановке задачи, которую мы сформулировали в групповых терминах. Важное свойства функций Шура это то, что они являются базисом в пространстве функций от переменных p_k . Естественно ожидать, что любая τ -функция может быть разложена по этому базису

$$\tau(p, \bar{p}|G) = \sum c_{R, \bar{R}}(G) S_R(p) S_{\bar{R}}(\bar{p}), \quad (1.60)$$

где $C_{R, \bar{R}}$ отвечает средним вида

$$\langle N | S_R(J_{-k}) G S_{\bar{R}}(J_k) | N \rangle. \quad (1.61)$$

Рассмотрим отдельно случай иерархии КП. Тогда разложение по характерам следует понимать только относительно переменной p , и, соответственно, получим разложение вида

$$\tau(p|G) = \sum_R c_R(G) S_R(p). \quad (1.62)$$

Коэффициенты c_R в этом случае параметризуют точку грассманиана G . Поскольку функции Шура S_R в свою очередь от выбора G не зависят, все уравнения иерархии КП должны переписываться как соотношения на коэффициенты разложения по характерам. Такие соотношения следуют из билинейного тождества Хироты и называются соотношениями Плюккера, а c_R в свою очередь на-

зывают координатами Плюккера [63]. Соотношения Плюккера есть ничто иное как полубесконечномерный аналог классических соотношений Плюккера, описывающих вложение конечных грассманианов в \mathbb{R}^n .

Разложение по характерам так же естественно возникает и при рассмотрении матричных интегралов. Рассмотрим снова эрмитову одноматричную модель (1.52). Для вычислений пертурбативную часть потенциала естественно разложить в ряд по переменным p_k . Если воспользоваться для этого формулой Коши (A.26), получим:

$$Z_N^{(\mu)}(p_k) = \sum_R \langle S_R(\text{Tr } X^k) \rangle_\mu S_R(p), \quad (1.63)$$

где мы обозначили $\langle \dots \rangle_\mu$ усреднение с мерой $\mu(X)$:

$$\langle S_R(\text{Tr } X^k) \rangle_\mu = \int DX \mu(X) S_R(\text{tr } X^k). \quad (1.64)$$

При этом оказывается, что в ряде известных моделей, в том числе рассматриваемых в данной работе, средние (1.64) имеют вид:

$$c_R = \langle S_R(\text{Tr } X^k) \rangle_\mu = \left(\prod_{(i,j) \in R} f(j-i) \right) S_R(\bar{p}), \quad (1.65)$$

где \bar{p}_k в данном случае понимается, как набор дополнительных параметров, а их значения и функция $f(x)$ нетривиально зависят от меры $\mu(X)$. Известно, что такие коэффициенты разложения по характерам решают уравнения Плюккера. Соответствующие τ -функции называются гипергеометрическими. Таким образом, статсуммы типа (1.52) в таких случаях являются τ -функциями иерархии КП. Метод разложения по характерам может быть эффективно применен в самых разных задачах матричных моделей, в том числе отличных от обсуждаемых в данной работе, см. например [18].

1.3 Суперинтегрируемость

Значение тождеств Уорда и интегрируемости в матричных моделях и смежных областях квантовой теории поля известно достаточно давно. В последние годы активно изучается свойство, названное суперинтегрируемостью. На данный момент оно не имеет строгого определения, а является скорее набором эмпирических наблюдений. В данной работе суперинтегрируемостью в матричных моделях мы будем называть наличие явных формул для некоторых специальных средних, обычно являющихся характеристиками некоторых групп или деформациями характеров. Помимо этого, сами значения этих средних выражаются через такие же характеры, но вычисленные в специальных точках. В этой главе мы приведем несколько простых примеров. В настоящий момент суперинтегрируемость в матричных моделях не имеет исчерпывающего объяснения. Однако понятно, в том числе по итогам данной работы, что оно происходит из взаимодействия тождеств Уорда и интегрируемости. Отсюда также происходит название, поскольку в классической механике суперинтегрируемость обычно связана с сочетанием уравнений движения (аналога тождеств Уорда) с достаточным числом законов сохранения (интегрируемостью).

1.3.1 Суперинтегрируемость в классической механике

Напомним кратко, в чем состоит явление суперинтегрируемости в классической механике. В классической механике интегрируемость понимается в смысле Лиувилля. При наличии большого количества законов сохранения динамика системы оказывается сильно ограничена, и часто это приводит к тому, что уравнения движения можно в том или ином смысле решить. Гамильтонова система называется интегрируемой, если на её $2n$ -мерном фазовом пространстве существуют n законов сохранения в инволюции. При этом обычно можно в лучшем случае ожидать, что задача сведется к ответу в квадратурах. В некоторых системах, количество интегралов движения превышает n , что часто приводит к тому, что уравнения движения из дифференциальных, можно превратить в

функциональные соотношения между фазовыми переменными — такие системы называются суперинтегрируемыми.

Это явление можно легко увидеть, например, в одномерных системах и задаче Кеплера. В любой автономной одномерной системе, гамильтониан $H(p, q)$ сохраняется. Это приводит к тому, что любая одномерная система решается в квадратурах. Если в системе присутствует дополнительная симметрия с интегралом движения $I(p, q)$, то механическая задача сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} H(p, q) = E \\ I(p, q) = I_0. \end{cases} \quad (1.66)$$

Решение этой системы уже не требует интегрирования. Аналогично происходит в задаче Кеплера, в которой за счет сохранения вектора Лапласа-Рунге-Ленца удается явно найти орбиты. Этот дополнительный закон сохранения возникает только для специального потенциала вида $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ и отсутствует для потенциалов, например, с другой степенной зависимостью от радиуса.

1.3.2 Суперинтегрируемость в гауссовой матричной модели

Рассмотрим снова гауссову матричную модель (1.11). Как мы уже показывали, статсумма естественным образом раскладывается по функциям Шура с коэффициентами, которые даются средними от функций Шура,

$$\langle S_R(\text{tr } X^k) \rangle = \int DX \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr } X^2\right) S_R(\text{tr } X^k). \quad (1.67)$$

Оказывается, что для данных средних можно получить явную формулу:

$$\begin{aligned} \langle S_R(\text{tr } X^k) \rangle &= \frac{S_R(p_k = N)}{S_R(p_k = \delta_{k,1})} S_R(p_k = \delta_{k,2}) = \\ &= S_R(\delta_{k,2}) \left(\prod_{(i,j) \in R} (N + j - i) \right). \end{aligned} \quad (1.68)$$

У этой формулы имеется несколько важных свойств. Она дает явную зависимость средних от диаграммы Юнга R , а зависимость от N входит, также в явную, и факторизованном виде. Отдельно можно отметить, что формула оказывается достаточно простой, в то время как формулы для произвольных средних гомоморфизма и не имеют общего вида. В конце концов, важное наблюдение состоит в том, что средние от характера выражаются снова через характеры. Мы увидим, что эти свойства, особенно последнее, успешно обобщаются на другие модели.

Обратим также внимание, что такая форма средних позволяет показать, что статсумма является гипергеометрической τ -функцией с функцией:

$$f(j - i) = N + j - i. \quad (1.69)$$

Рассмотрим основную схему двух способов получить формулы (1.68). Оба этих метода будут основаны на свойствах эрмитовой матричной модели и из-за этого будут не применимы после деформации. Это одна из причин, по которой существование обобщений формулы (1.68) вызывает интерес, а новые способы доказательства и получения таких формул требуют развития.

Один метод доказательства этой формулы состоит в применении теоремы Вика [64]. Ключевая идея состоит в том, чтобы представить структуру спариваний в терминах симметрической группы. Так, формула для среднего от произведения матричных элементов имеет вид

$$\left\langle \prod_{i=1}^{2m} X_{a_i}^{\alpha_i} \right\rangle = \sum_{\substack{\gamma \in S_{2m} \\ [\gamma] = [2^m]}} \prod_{i=1}^m \delta_{a_i}^{\alpha_{\gamma(i)}}, \quad (1.70)$$

где сумма идет по перестановкам γ из смежного класса перестановки с циклической записью $[2^m]$, что позволяет затем представить коррелятор мономов в терминах характеров симметрической группы:

$$\left\langle \prod_{p=1}^l \text{Tr} X^{m_p} \right\rangle = \sum_{R \vdash m} \varphi_R([2^m]) \cdot D_R(N) \cdot \psi_R(\sigma). \quad (1.71)$$

Суммирование ведется по всем представлениям, задаваемым разбиениями R с $|R| = m$. Здесь $\psi_R(\sigma)$ и $\varphi_R(\sigma)$ — по-разному нормированные характеры симметрической группы для представления R и класса смежности σ . Разбиение, отве-

чающие классу смежности σ имеет вид $[m_1, m_2, \dots, m_l]$ и $m = m_1 + m_2 + \dots + m_l$. Множитель $D_R(N)$ — размерность соответствующих представлений $GL(N)$ равная $S_R\{N\}$. Данная формула уже имеет достаточно общий вид, однако её можно упростить, избавившись от характеров симметрической группы. Как описано в [64], можно использовать ортогональность характеров для дальнейшего построения средних значений Шура и явного получения формулы (1.68)

В другом подходе можно просто выполнить явное угловое интегрирование по унитарной группе [18]. Рассмотрим интеграл:

$$\begin{aligned} Z(Y) &= \int dX \exp\left(-\frac{1}{2}\text{Tr} X^2 + \text{Tr} XY\right) = \\ &= \int dX \exp\left(-\frac{1}{2}\text{Tr} X^2\right) \int_{U \in U(N)} dU \exp(\text{Tr} UXU^\dagger Y) = \\ &= \sum_{|R| \leq N} \frac{S_R\{\delta_{k,1}\} S_R(Y)}{S_R(N)} \int dX \exp\left(-\frac{1}{2}\text{Tr} X^2\right) S_R(X) = \\ &= \sum_{|R| \leq N} \frac{S_R\{\delta_{k,1}\} S_R(Y)}{S_R(N)} \langle S_R(X) \rangle. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Здесь переход между второй и третьей строкой является разложение по характерам интеграла Ициксона-Зюбера [65]. С другой стороны, можно просто взять интеграл Гаусса и применить формулу Коши:

$$\begin{aligned} Z(Y) &= \int dX \exp\left(-\frac{1}{2}\text{Tr} X^2 + \text{Tr} XY\right) = e^{\frac{1}{2}\text{Tr} Y^2} = \\ &= \sum_R S_R(Y) S_R\{\delta_{k,2}\} \end{aligned} \quad (1.73)$$

Сравнивая два выражения, мы сразу получаем (1.68). Достаточно полные обзоры о суперинтегрируемости имеются в [66]. Дальнейшие главы этой работы будут посвящены более подробному обсуждению нескольких важных примеров свойства суперинтегрируемости, поэтому мы рассмотрим их в соответствующих главах. Обратим внимание, однако, что оно может быть символически выражено следующей формулой:

$$\langle \text{Характер} \rangle \sim \text{Характер}. \quad (1.74)$$

Здесь слово *характер* следует понимать в обобщенном смысле. Мы увидим, что в некоторых случаях их роль играют функции, групповую структуру которых идентифицировать не удастся, а в тех случаях, когда это оказывается возможным, соответствующие группы не всегда очевидным образом можно увидеть в матричной модели непосредственно.

Для иллюстрации приведем здесь пример суперинтегрируемости для потенциала, отличного от квадратичного [66],

$$\langle S_R \rangle := \int_0^1 \prod_{i=1}^N dx_i x_i^u (1 - x_i)^v S_R(x) \Delta(x)^2 = \frac{S_R\{N\} \cdot S_R\{u + N\}}{S_R\{u + v + 2N\}}. \quad (1.75)$$

Здесь u, v - параметры, выбранные так, чтобы интеграл сходился. Можно заметить, что ответ можно аналитически продолжить на почти произвольные значения. Чтобы понять, какому потенциалу матричной модели отвечает данный интеграл, следует заметить, что он переписывается в форме $\int DX e^{-\text{Tr} V(X)} S_R(X)$, где $V(X) = u \log(X) + v \log(1 - X)$. Мы будем обсуждать подобные матричные модели в одной из последующих глав.

Глава 2. Связь условий Вирасоро, интегрируемости и суперинтегрируемости в эрмитовой матричной модели

Начнем изложение результатов работы с рассмотрения связи условий Вирасоро, интегрируемости и суперинтегрируемости в простейшем примере - гауссовой эрмитовой модели. Различные сведения о симметрических функциях, использованные в этой главе и далее, собраны в приложении [А](#).

2.1 Условия Вирасоро и суперинтегрируемость

Мы покажем, что ответ (1.68) можно получить, сформулировав систему условий Вирасоро, как алгебраическую систему уравнений на коэффициенты разложения по характерам. Решение этой системы потребует только знаний комбинаторных свойств характеров. Коротко этот метод можно сформулировать в следующих пунктах:

- 1) Начнём с разложения по характерам (1.62) и покажем, что при такой подстановке, набор условий Вирасоро для гауссовой эрмитовой модели (1.14) сводится к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \sum_{R+\square} c_{R+\square}(N) &= \sum_{R-\square} (N + j_{\square} - i_{\square}) \cdot c_{R-\square}(N), \\ \sum_{R+\square} (j_{\square} - i_{\square}) \cdot c_{R+\square}(N) &= \sum_{R-\square} (N + j_{\square} - i_{\square})^2 \cdot c_{R-\square}(N), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $(i_{\square}, j_{\square})$ - это координаты клетки, удалённой или прибавленной к диаграмме Юнга.

- 2) Покажем, что система двух уравнений вида:

$$\sum_{R+\square} \alpha_m(\square) \cdot c_{R+\square}(N) = \sum_{R-\square} \beta_m(\square) \cdot c_{R-\square}(N), \quad m = 1, 2 \quad (2.2)$$

в случае невырожденных коэффициентов α_m, β_m всегда имеет единственное решение.

- 3) Отделим зависимость от N с помощью (1.68) и сведем систему уравнений (2.1) к новой системе, фиксирующей независящие от N коэффициенты \tilde{c}_R ,

$$\begin{aligned} \sum_{R+\square} \tilde{c}_{R+\square} &= 0, \\ \sum_{R+\square} (j_{\square} - i_{\square}) \cdot \tilde{c}_{R+\square} &= \sum_{R-\square} \tilde{c}_{R-\square}, \\ \sum_{R+\square} (j_{\square} - i_{\square})^2 \cdot \tilde{c}_{R+\square} &= \sum_{R-\square} (j_{\square} - i_{\square}) \cdot \tilde{c}_{R-\square}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Любые два из этих уравнений уже имеют единственное решение в соответствии с п. 2.

Следовательно, система переопределена, и, находя её решение, мы дополнительно проверяем, что разложение (2.36) в действительности верно.

- 4) В конце концов, мы показываем, что \tilde{c}_R как в (1.68) решают все три этих уравнения и, следовательно, решают условия Вирасоро.

Наше рассуждение основано на наборе комбинаторных тождеств, которые могут быть получены либо из фермионного представления для функций Шура [67], либо из прямого вычисления, используя коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона. Последний подход кратко объяснен в Приложении А. Замечательно простая форма уравнений (2.1) и (2.3) всё же требует альтернативного объяснения, которое могло бы, не затрагивая теорию представлений, сделать связь между суперинтегрируемостью и тождествами Уорда более явной и функториальной. Мы предложим такое объяснение в следующей главе.

Итак, начнем с того, что разобьем систему условий Вирасоро (1.14) на две части

$$\begin{aligned} \hat{L}_{-1} Z_N^{\text{Gaycc}}(p) &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) p_k \hat{L}_{k-1} Z_N^{\text{Gaycc}}(p) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Второе уравнение выполнено, т.к. выполнено каждое из слагаемых. Более того, можно заметить, что второе уравнение включает в себя операторы \hat{L}_k с $k > -1$, то есть оно не затрагивает оператор из первого уравнения. Рассмотрим сначала действие \hat{L}_{-1} условия. Используя частные случаи формул (A.23), (A.24), получим:

$$\hat{L}_{-1}S_R = \sum_{\square} (N + j_{\square} - i_{\square})S_{R+\square} - \sum_{\square} S_{R-\square}. \quad (2.5)$$

Подставляя в разложение по характерам (1.62), в итоге получаем

$$\sum_{R+\square} c_{R+\square}(N) = \sum_{R-\square} (N + j_{\square} - i_{\square})c_{R-\square}(N) \quad (2.6)$$

Теперь, используя обозначение для "классической" части W -оператора

$$\hat{w}_n := \sum p_k \hat{l}_{n+k}, \quad \hat{l}_n := \sum (k+n)p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+n}} + \sum_{a=1}^{n-1} a(n-a) \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_{n-a}}, \quad (2.7)$$

можно переписать второе уравнение из (2.4) в виде

$$\left(\hat{w}_n + 2N \sum (k+n)p_k \frac{\partial}{\partial p_{n+k}} + N^2 p_{-n} - \sum (n+2+k)p_k \frac{\partial}{\partial p_{n+2+k}} \right) Z_N^{\text{Гайсс}}(p) = 0. \quad (2.8)$$

В действительности достаточно рассмотреть только младшее уравнение бесконечной системы (2.8) при $n = -1$, чтобы однозначно зафиксировать $Z_N^{\text{Гайсс}}(p)$.

Таким образом, используя

$$\hat{w}_{-1}S_R = \sum_{R+\square} (j_{\square} - i_{\square})^2 S_{R+\square}, \quad (2.9)$$

немедленно получаем уравнение для коэффициентов по характерам (1.62):

$$\sum_{R+\square} (j_{\square} - i_{\square})c_{R+\square}(N) = \sum_{R-\square} (N + j_{\square} - i_{\square})^2 c_{R-\square}(N). \quad (2.10)$$

На следующем шаге объясним, почему наша процедура с заменой всей Борелевской части алгебры Вирасоро на L_{-1} и w_{-1} условия ведёт к единствен-

ному решению, которое может быть построено, рекурсивно решая уравнения (2.1). Более того, верно более сильное утверждение: любые два уравнения вида

$$\sum_{R+\square} \alpha_m(\square) c_{R+\square} = \sum_{R-\square} \beta_m(\square) c_{R-\square}, \quad m = 1, 2 \quad (2.11)$$

могут быть решены рекурсивно единственным образом, если коэффициенты α_m, β_m невырождены.

Действительно, для любого R заданной длины $l(R)$ эти уравнения включают только одну диаграмму, длины не меньше или равной $l(R)$, а именно $[R_1, \dots, R_{l(R)}, 1]$. Благодаря тому, что мы имеем два уравнения, мы можем исключить этот коэффициент и получить рекурсию, включающую только диаграммы фиксированной длины. Одновременно, эти уравнения определяют и сам $c_{[R_1, \dots, R_{l(R)}, 1]}$, что служит начальным условием на следующем уровне.

Например, на уровне $l(R) = 2$, если мы хотим перейти от $c_{[r, 4]}$ к $c_{[r, 5]}$, уравнения будут включать следующие разбиения:

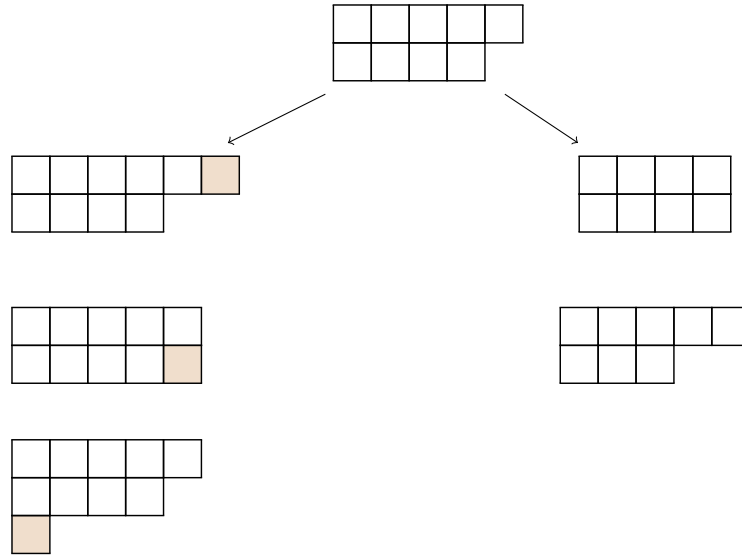


Рисунок 2.1 — Диаграммы Юнга, появляющиеся в уравнении (2.11) при $R = [5, 4]$. Цветом обозначены добавленные к диаграмме клетки, отвечающие слагаемым в левой части уравнения.

Покажем, как это работает порядок за порядком, и начнем с симметрических представлений, то есть рассмотрим уравнения (2.1) и (2.8) для $R = [r]$:

$$\begin{cases} c_{[r+1]} + c_{[r,1]} = (N + r - 1)c_{[r-1]} \\ rc_{[r+1]} - c_{[r,1]} = (N + r - 1)^2 c_{[r-1]} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\Downarrow$$

$$(r + 1)c_{[r+1]} = (N + r - 1)(N + r)c_{[r-1]}.$$

Это уравнение рекурсивно определяет все коэффициенты для симметрических представлений. Чтобы зафиксировать начальные условия, выберем $R = \emptyset$, что даёт

$$c_{[1]} = 0 \quad (2.13)$$

и нормируем $c_{\emptyset} = 1$. Таким образом, получаем,

$$c_{[r]} = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^{r-1} (N + r - i)}{r!!} & , \quad r = 2k, \\ 0 & , \quad r = 2k + 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Из того же уравнения получаем

$$c_{[r,1]} = \begin{cases} \frac{(N - 1) \prod_{k=0}^{r-1} (N + k)}{(r + 1)!!} & , \quad r = 2k - 1, \\ 0 & , \quad r = 2k. \end{cases} \quad (2.15)$$

Для разбиений длины $l(R) = 2$ рекурсия начинается с $[r, 2]$:

$$\begin{cases} c_{[r,1]} + c_{[r-1,2]} + c_{[r-1,1,1]} = (N + r - 2)c_{[r-2,1]} + (N - 1)c_{[r-1]} \\ (r - 1)c_{[r,1]} + 0 - 2c_{[r-1,1,1]} = (N + r - 2)^2 c_{[r-2,1]} + (N - 1)^2 c_{[r-1]} \end{cases} \Rightarrow \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (r + 1)c_{[r,1]} + 2c_{[r-1,2]} = \\ &= (N + r - 2)(N + r)c_{[r-2,1]} + (N - 1)(N + 1)c_{[r-1]}. \end{aligned}$$

Теперь коэффициент уже двухстрочечной диаграммы $[r,2]$ выражается через коэффициент $c_{[r,1]}$, который был подсчитан на прошлом шаге. Следовательно,

$$c_{[r,2]} = \frac{N(N-1) \prod_{k=0}^{r-1} (N+k)}{2(r!!)}, \quad (2.17)$$

$$c_{[r,1,1]} = \frac{r}{2((r+2)!!)} \cdot (N-2)(N-1) \prod_{k=0}^{r-1} (N+k)$$

для разбиений с четным r , тогда как с нечетным r коэффициенты равны нулю. Для $[r,3]$:

$$(r+2)c_{[r+1,2]} + 3c_{[r,3]} = (N+r-2)(N+2)c_{[r-1,2]} + N^2c_{[r-1]} \quad (2.18)$$

и так далее.

Далее мы должны были бы показать, что решение имеет вид (1.68), решая рекурсию в предыдущем параграфе. Вместо этого проверим явно, что ответ дается этой формулой. Начнем с вида (1.68). Тогда

$$c_{R+\square}(N) = \tilde{c}_{R+\square} \cdot (N + j_{\square} - i_{\square}) \cdot \frac{c_R(N)}{\tilde{c}_R}, \quad (2.19)$$

$$(N + j_{\square} - i_{\square}) \cdot c_{R-\square}(N) = \tilde{c}_{R-\square} \cdot \frac{c_R(N)}{\tilde{c}_R}.$$

Теперь подставим эти формулы в уравнения (2.1),

$$\sum_{\square} (N + j_{\square} - i_{\square}) \cdot \tilde{c}_{R+\square} = \sum_{\square} \tilde{c}_{R-\square}, \quad (2.20)$$

$$\sum_{\square} (j_{\square} - i_{\square}) \cdot \tilde{c}_{R+\square} = \sum_{\square} (N + j_{\square} - i_{\square}) \cdot \tilde{c}_{R-\square}$$

и рассмотрим каждый порядок по N . Это выдаст *три* уравнения (2.3).

Как мы объяснили в предыдущем параграфе, любые два из этих трех уравнений фиксируют единственное решение, таким образом, система переопределена. В следующем параграфе мы проверим, что решением является (1.68), и оно удовлетворяет всем трем уравнениям одновременно.

Чтобы доказать, что (2.3) выполнены для

$$\tilde{c}_R = S_R\{\delta_{k,2}\}, \quad (2.21)$$

мы используем свойства функций Шура из приложения А, такие, как (A.23),(A.24),(A.25), а также аналогичную формулу (2.9). Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} p_1 S_R &= \sum_{R+\square} S_{R+\square}, \\ \hat{l}_{-1} S_R &= \sum_{R+\square} (j_\square - i_\square) S_{R+\square}, & \frac{\partial S_R}{\partial p_1} &= \sum_{R-\square} S_{R-\square}, \\ \hat{w}_{-1} S_R &= \sum_{R+\square} (j_\square - i_\square)^2 S_{R+\square}, & \hat{l}_1 S_R &= \sum_{R-\square} (j_\square - i_\square) S_{R-\square}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

в которые мы подставляем $p_k = \delta_{k,2}$:

$$\begin{aligned} p_1 S_R|_{p_k=\delta_{k,2}} &= 0, \\ \hat{l}_{-1} S_R|_{p_k=\delta_{k,2}} &= \sum_k (k-1) p_k \frac{\partial S_R}{\partial p_{k-1}} \Big|_{p_k=\delta_{k,2}} = \frac{\partial S_R}{\partial p_1} \Big|_{p_k=\delta_{k,2}}, \\ \hat{w}_{-1} S_R|_{p_k=\delta_{k,2}} &= \sum p_k \hat{l}_{k-1} S_R|_{p_k=\delta_{k,2}} = \hat{l}_1 S_R|_{p_k=\delta_{k,2}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Подставляя сюда (2.22) получаем в точности (2.3) для $\tilde{c}_R = S_R\{\delta_{k,2}\}$.

2.2 Условия Вирасоро и интегрируемость

Покажем теперь, что использование дополнительной детерминантной структуры, следующей из интегрируемости матричной модели, упрощает вычисление. Вспомним, что для статистической суммы (2.24) с произвольной (необязательно гауссовой) мерой $\mu(x)$ [5; 19; 20], которая дает общее решение форсированной цепочкой Тоды [9; 68], существует детерминантное представле-

ние:

$$\begin{aligned} Z_N^{(\mu)}(p) &= \int \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k \operatorname{tr} X^k}{k}\right) \cdot \mu(X) dX = \det_{1 \leq i, j \leq N} C_{i+j-2}(p_k) = \\ &= \det_{1 \leq i, j \leq N} C_{N-i+j-1}(p_k) \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $C_n(p_k)$ — моменты

$$C_n(p_k) := \int \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k x^k}{k}\right) \cdot x^n \mu(x) dx. \quad (2.25)$$

Это решение параметризуется произвольной функцией $\mu(x)$, которую можно зафиксировать младшим условием Вирасоро, также называемым струнным уравнением. Разлагая теперь экспоненту в этой формуле, получаем

$$\begin{aligned} Z_N^{(\mu)}(p) &= \det_{1 \leq i, j \leq N} \sum_k h_k(p_k) C_{N-i+j+k-1}\{0\} = \\ &= \sum_{R: l_R \leq N} \det_{1 \leq i, j \leq N} C_{N-i+j+R_i-1}\{0\} \cdot S_R(p_k), \end{aligned} \quad (2.26)$$

а нормированные корреляторы равны

$$c_R = \frac{\det_{1 \leq i, j \leq N} C_{N-i+j+R_i-1}\{0\}}{\det_{1 \leq i, j \leq N} C_{N-i+j-1}\{0\}}. \quad (2.27)$$

Теперь его можно найти с помощью струнного уравнения, т.е. условия Вирасоро \hat{L}_{-1} . В терминах коэффициентов разложения c_R струнное уравнение имеет вид (2.6)

$$\sum_{R+\square} c_{R+\square} = \sum_{R-\square\square} (N - i_{\square} + j_{\square}) c_{R-\square}. \quad (2.28)$$

Подставляя $N = 1$ и используя детерминантную формулу (2.27) получим, что струнное уравнение дает

$$C_{r+1} = r C_{r-1} \quad (2.29)$$

и $C_1 = 0$. Это сразу дает

$$C_{2r} = (2r - 1)!! \cdot C_0, \quad C_{2r-1} = 0, \quad (2.30)$$

что совпадает с моментами гауссовой меры и показывает, что струнное уравнение действительно однозначно фиксирует решение интегрируемой иерархии. Детерминантное представление в данном случае уменьшило количество независимых переменных. Мы имели c_R в количестве, равном числу диаграмм Юнга при фиксированном $|R|$, в то время как коэффициент C_i на данном уровне всего один.

Более того, теперь можно вычислить c_R для произвольных N , исходя из тождества для определителей:

$$\begin{aligned} & \det_{1 \leq i, j \leq N} \delta_{N-1+R_i-i+j}^{(2)} \cdot (N - 1 + R_i - i + j)!! = \\ & = \prod_{i, j \in R} (N - i + j) \cdot \prod_{i=1}^{N-1} i! \cdot \det_{1 \leq i, j \leq N} \frac{\delta_{R_i-i+j}^{(2)}}{(R_i - i + j)!!}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $\delta_k^{(2)} := (1 + (-1)^k)/2$. Теперь, используя несколько комбинаторных свойств

$$\frac{S_R\{N\}}{S_R\{\delta_{k,1}\}} = \prod_{i, j \in R} (N - i + j), \quad (2.32)$$

$$S_R\{\delta_{k,2}\} = \det_{1 \leq i, j \leq N} \frac{\delta_{R_i-i+j}^{(2)}}{(R_i - i + j)!!}, \quad (2.33)$$

$$\det_{1 \leq i, j \leq N} \delta_{N-1-i+j}^{(2)} \cdot (N - 1 - i + j)!! = \prod_{i=1}^{N-1} i!, \quad (2.34)$$

где мы использовали первое тождество Якоби-Труди

$$S_R(p_k) = \det_{i, j} h_{R_i-i+j}(p_k), \quad (2.35)$$

окончательно получаем из формулы (2.27)

$$c_R = \frac{S_R\{N\} \cdot S_R\{\delta_{k,2}\}}{S_R\{\delta_{k,1}\}}. \quad (2.36)$$

Вычисление, проведенное выше, показывает выполнение известного правила, что для фиксации матрично-модельного решения в пространстве всех τ -функций достаточно учесть только небольшое число (в данном случае одно) условий Вирасоро. В этом разделе мы продемонстрировали это явление с точки зрения коэффициентов разложения по характерам. Учет интегрируемости и струнного уравнения сводит задачу к простому алгебраическому уравнению. Далее алгебраические и комбинаторные тождества приводят нас к явному ответу для средних от характеров.

С точки зрения комбинаторики гауссовых моментов появления именно характеров в правой части формулы (1.68) есть следствие детерминантных соотношений. С другой стороны, с точки зрения рекурсивных соотношений (2.11) в предшествующем разделе — появление характеров связано с особыми свойствами операторов \hat{l}_{-1} и \hat{w}_{-1} и тем, как они реализуются при действии на характеры (2.22), (2.23).

Глава 3. W -представление матричных моделей

В этой главе мы перейдем к изложению результатов, посвященных W -представлению в матричных моделях. Основная формула этого раздела имеет символический вид:

$$Z = e^{\hat{W}} \cdot Z_0, \quad (3.1)$$

в которой статсумма матричной модели, или, возможно, статсумма более общего вида представлена, как экспоненциальное действие некоторого оператора на функцию Z_0 . Оператор \hat{W} действует в пространстве констант связи p_k , то есть представляет собой некоторый аналог оператора эволюции в пространстве теорий. В то же время Z_0 представляет собой некоторый аналог начального состояния — статсумму простого вида, из которого порождается статсумма Z . В большинстве примеров это состояние тривиально, то есть $Z_0 = 1$. Таким образом W -представление реализует идею, что различные теории можно получить друг из друга с помощью эволюции (диффеоморфизмов) в пространстве теорий. Результаты этой главы посвящены связи этого вопроса с описанными в прошлой главе свойствами матричных моделей.

В первом разделе этой главы мы обсудим построенный нами способ решения тождеств Уорда с помощью W -представления типа (3.1) и доказательства суперинтегрируемости. В последнем разделе мы продемонстрируем нетривиальный случай применения метода, для построения неабелева W -представления для обобщенной модели Концевича (1.21).

3.1 Единственное уравнение вместо тождеств Уорда

В этой секции мы начнем с простого примера прямоугольной комплексной матричной модели и рассмотрим дополнительные примеры в следующем разделе. Наш основной вывод заключается в том, что для каждой модели **существует одно уравнение, которое эквивалентно всей системе условий Вирасоро.**

3.1.1 Единственное уравнение для комплексной модели

Статистическая сумма прямоугольной комплексной матричной модели задается интегралом по $N_1 \times N_2$ прямоугольной матрице X , [69; 70]:

$$Z_{N_1, N_2}(p_k) := \int \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k \operatorname{tr} (X \bar{X})^k}{k} \right) \cdot \exp (-\operatorname{Tr} X \bar{X}) d^2 X, \quad (3.2)$$

а \bar{X} - эрмитово сопряженная матрица. Эта статистическая сумма удовлетворяет набору условий Вирасоро:

$$\hat{L}_n^C \cdot Z_{N_1, N_2}(p_k) = 0, \quad n \geq 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_n^C := & \sum_{k=1}^{\infty} (k+n)p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+n}} + \sum_{a=1}^{n-1} a(n-a) \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_{n-a}} + \\ & + (N_1 + N_2)n \frac{\partial}{\partial p_n} + N_1 N_2 \delta_{n,0} - \underline{(n+1) \frac{\partial}{\partial p_{n+1}}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Главное утверждение этого раздела состоит в том, что бесконечный набор условий имеет единственное решение и эквивалентен одному уравнению

$$\sum_{k \geq 1} p_k \hat{L}_{k-1}^C Z_{N_1, N_2}(p_k) = 0. \quad (3.5)$$

В самом деле, (3.5) является очевидным следствием (3.3), и, как мы покажем далее, (3.5) имеет единственное решение в формальных рядах по p_k , аналогично (3.3). Следовательно, они эквивалентны.

Чтобы показать, что решение уравнений (3.5) действительно единственно, мы перепишем его в следующей форме:

$$\left(\hat{w}_{-1} + (N_1 + N_2)\hat{l}_{-1} + N_1 N_2 p_1 - \hat{l}_0 \right) Z_{N_1, N_2}(p_k) = 0, \quad (3.6)$$

где мы ввели обозначения:

$$\hat{l}_n := \sum_{k=1}^{\infty} (k+n)p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+n}} + \sum_{a=1}^{n-1} a(n-a) \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_{n-a}} \quad (3.7)$$

и

$$\hat{w}_m = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \hat{l}_{n+m}. \quad (3.8)$$

Ключевое наблюдение, ради которого из условий Вирасоро была составлена сумма (3.5) состоит в том, что подчеркнутый оператор \hat{l}_0 является оператором измеряющим градуировку:

$$\hat{l}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \frac{\partial}{\partial p_k}. \quad (3.9)$$

Здесь имеется в виду, что у переменной p_k градуировка k , что также значит, что у $\frac{\partial}{\partial p_k}$ градуировка $-k$. Оператор \hat{l}_0 коммутирует с любым оператором $\hat{O}^{(k)}$ градуировки k как

$$[\hat{l}_0, \hat{O}^{(k)}] = k \hat{O}^{(k)}. \quad (3.10)$$

Иначе говоря, это означает наличие соотношения:

$$\hat{l}_0 e^{\hat{O}^{(k)}} = e^{\hat{O}^{(k)}} (\hat{l}_0 + k \hat{O}^{(k)}). \quad (3.11)$$

В этом случае, любое уравнение вида:

$$(\hat{l}_0 - k \hat{O}^{(k)}) \cdot Z = 0 \quad (3.12)$$

решается как

$$Z = e^{\hat{O}^{(k)}} \cdot 1. \quad (3.13)$$

Такую форму решения обычно называют W -представлением. В частности, поскольку первые три слагаемых в левой части (3.6) имеют одинаковую градуировку 1 относительно этого оператора, это означает, что уравнение (3.6) имеет решение

$$Z_{N_1, N_2}(p_k) = \exp \left(\hat{w}_{-1} + (N_1 + N_2) \hat{l}_{-1} + N_1 N_2 p_1 \right) \cdot 1. \quad (3.14)$$

Таким образом, мы получили, что у уравнения (3.5) действительно единственное решение. Мы можем показать это и по-другому. Уравнение (3.6) также может быть решено итеративно. Обозначим, снова, коэффициенты разложения по характерам, как c_R , и посмотрим на разложение статсуммы матричной модели:

$$Z_{N_1, N_2}(p) = \sum_R c_R \cdot S_R(p). \quad (3.15)$$

Затем можно использовать уравнения для действия построенных операторов на характеры:

$$\begin{aligned} \hat{l}_{-1} S_R &= \sum_{R+\square} (j_\square - i_\square) S_{R+\square}, \\ \hat{l}_0 S_R &= |R| \cdot S_R, \\ \hat{w}_{-1} S_R &= \sum_{R+\square} (j_\square - i_\square)^2 S_{R+\square}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

чтобы получить из (3.6), уравнение на коэффициенты разложения по характерам:

$$|R| c_R = \sum_{R-\square} (N_1 + j_\square - i_\square)(N_2 + j_\square - i_\square) c_{R-\square}. \quad (3.17)$$

Покажем, что решение (3.17) действительно единственно. Начнем с симметричных представлений $R = [r]$,

$$r c_{[r]} = (N_1 - r - 1)(N_2 - r_1) c_{[r-1]}. \quad (3.18)$$

В данном случае сразу получается замкнутая рекурсия, которая легко решается. Точно также двухстрочечные разбиения дают

$$(r+1) c_{[r,1]} = (N_1 + r - 1)(N_2 + r - 1) c_{[r-1,1]} + (N_1 - 1)(N_2 - 1) c_{[r]}, \quad (3.19)$$

что снова определяет простую рекурсию, которую можно решить:

$$c_{[r,1]} = \frac{S_{[r,1]}(N_1) S_{[r,1]}(N_2)}{S_{[r,1]}\{\delta_{k,1}\}^2}. \quad (3.20)$$

Дальнейшая рекурсия

$$(r + 2)c_{[r,2]} = (N + r - 1)(N + 2 - 1)c_{[r-1,2]} + (N_1 N_2)c_{[r,1]} \quad (3.21)$$

определяет аналогичную рекурсию с другими коэффициентами и т. д.

Для любого R можно рекурсивно использовать уравнение до тех пор, пока от диаграммы R ничего не останется, а последнее соотношение рекурсии будет иметь вид $c_{[1]} = N_1 N_2 c_{[]} = N_1 N_2$. Следовательно, рекурсия однозначно определяет c_R для любого R .

3.1.2 Правило составления уравнения

Обсудим, как можно угадать уравнение типа (3.5), которое дает необходимое единственное уравнение. Обратим внимание, что в алгебре Вирасоро (3.4) все члены, кроме последнего, имеют одинаковую градуировку $-n$ и только последний имеет градуировку $-n - 1$. В уравнении мы (3.5) преобразуем этот последний член в ограничение \hat{l}_0 (см. (3.6)) нулевой градуировки, что дает в рекурсивных соотношениях (3.17) левую часть, т.е. член $|R|c_R$, а все остальные члены становятся градуировки 1 (так что можно использовать формулы (3.12)-(3.13)). На самом деле это общее эмпирическое правило: из членов нестандартной градуировки (можно сказать, из членов с размерными коэффициентами) надо сделать оператор \hat{l}_0 . Это создает рекурсивные отношения, которые выражают c_R через $c_{R'}$ только с $|R'| < |R|$. В примерах следующего раздела мы увидим, что этот рецепт работает всегда и приводит к W -представлениям типа (3.13).

3.1.3 Больше примеров. Гауссова эрмитова модель

Теперь рассмотрим другие примеры получения экспоненциального решения тождеств Уорда. Начнем с гауссовой эрмитовой модели (1.11). Единствен-

ное уравнение для неё имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \hat{L}_{n-2} Z_N^{\text{Гайсс}}(p_k) = 0. \quad (3.22)$$

Действительно, мы можем использовать наш общий рецепт раздела 3.1.2: сумма должна быть разбита на кусок определенной градуировки 2 и дополнительный оператор \hat{l}_0 :

$$\left(\hat{w}_{-2} + 2N \sum_{k=3}^{\infty} (k-2)p_k \frac{\partial}{\partial p_{k-2}} + Np_1^2 + N^2p_2 - \hat{l}_0 \right) Z_N^{\text{Гайсс}}(p_k) = 0. \quad (3.23)$$

Тогда, как следует из (3.13),

$$Z_N^{\text{Гайсс}}(p_k) = \exp \left(\frac{1}{2} \hat{w}_{-2} + N \sum_{k=3}^{\infty} (k-2)p_k \frac{\partial}{\partial p_{k-2}} + \frac{Np_1^2}{2} + \frac{N^2p_2}{2} \right) \cdot 1 \quad (3.24)$$

является решением (3.23), см. также [65]. Формула (3.22) снова тривиально следует из условий Вирасоро (1.14), однако, теперь можно заметить, что в сумме градуировка сдвинута на 2. Это связано, конечно, со слагаемым $\frac{\partial}{\partial p_{n+2}}$ в условиях Вирасоро. С другой стороны, это связано с тем, что в статсумме гауссовой модели присутствуют только слагаемые четной градуировки, что связано с правилами отбора для гауссовых средних. Для проверки единственности решения можно использовать формулу

$$\hat{w}_{-2} S_R = \sum_{R+[2]} (j_{\square} - i_{\square})(j_{\square} - i_{\square} + 1) S_{R+[2]} - \sum_{R+[1,1]} (j_{\square} - i_{\square})(j_{\square} - i_{\square} - 1) S_{R+[1,1]}, \quad (3.25)$$

где мы обозначили $S_{R+[2]}$ и $S_{R+[1,1]}$ диаграммы Юнга полученные добавлением к R блока из двух клеток имеющего форму $[2]$ и $[1,1]$. Как и в случае добавления одной клетки сумма ведется по всем способам добавить данные блоки так, чтобы в конечном итоге снова получалась диаграмма Юнга. Таким образом,

получаем рекурсию для коэффициентов c_R в (1.62)

$$\begin{aligned} |R|c_R &= \sum_{R-[2]} (j_{\square} - i_{\square} + N)(j_{\square} - i_{\square} + 1 + N)c_{R-[2]} - \\ &- \sum_{R-[1,1]} (j_{\square} - i_{\square} + N)(j_{\square} - i_{\square} - 1 + N)c_{R-[1,1]}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Уравнение выражает коэффициент c_R через коэффициенты отвечающие меньшим диаграммам. Сразу можно проверить, что эта рекурсия снова имеет единственное решение.

3.1.4 Модель Брезана-Гросса-Виттена

Наш следующий пример — унитарная матричная модель, зависящая от внешней матрицы, которую обычно называют моделью Брезана-Гросса-Виттена (БГВ) [71; 72] и которая описывает производящую функцию средних Вильсона в решеточной реализации $2d$ калибровочной теории с действием Вильсона. Эта производящая функция задается унитарным матричным интегралом

$$Z^{\text{БГВ}}(J, J^{\dagger}) = \int_{N \times N} dU \exp(\text{tr } J^{\dagger} U + \text{tr } J U^{\dagger}) \quad (3.27)$$

где dU — мера Хаара на унитарных матрицах, т.е. со свойством $d(UV) = dU$ для постоянной матрицы V , а J — внешняя матрица. Из унитарной инвариантности меры сразу следует, что интеграл фактически зависит только от собственных значений эрмитовой матрицы $M := J J^{\dagger}$, т.е. от переменных вида $\text{Tr}(J J^{\dagger})^k$. Мы имеем дело с этим интегралом при больших собственных значениях M и нормализуем меру так, что $\lim_{M \rightarrow \infty} Z^{\text{БГВ}}(M) = 1$. Тогда этот интеграл можно рассматривать как степенной ряд по временным переменным

$$p_k = \text{tr } M^{-k/2} \quad (3.28)$$

и прямым (весьма громоздким) вычислением [73] можно проверить, что $Z^{\text{БГВ}}(p_k)$ зависит только от нечетных переменных времени p_{2k+1} .

Это свойство очень похоже на свойство модели Концевича, которую мы рассмотрим далее, а статистическая сумма (3.27) удовлетворяет условиям Вирасоро [74; 75]

$$\hat{L}_n^U Z^{\text{БГВ}}(p_k) = 0, \quad n \geq 0, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_n^U = & \frac{1}{2} \sum_k (k + 2n) p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+2n}} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{a,b \\ a+b=2n}} ab \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \frac{\delta_{n,0}}{16} - \\ & - \frac{(2n+1)}{\partial p_{2n+1}}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где суммы пробегают нечетные k , a и b . Следовательно, различия с ограничениями модели Концевича заключаются только в градуировочном сдвиге и в нижнем условии Вирасоро, что очень похоже на различия между ограничениями Вирасоро в случаях сложных и эрмитовых матричных моделей. Это означает, что единственное уравнение должно быть таким же, как в комплексной матричной модели (3.5), но с условиями Вирасоро, как в (3.30)

$$\sum_{n \geq 0} p_{2n+1} \hat{L}_n^U Z^{\text{БГВ}}(p_k) = 0. \quad (3.31)$$

Поскольку градуировка соответствующего W -оператора теперь равна 1, решение дается [76]

$$\begin{aligned} Z^{\text{БГВ}}(p_k) &= \exp \left(\hat{W}_{-1}^{\text{БГВ}} \right) \cdot = \\ &= \exp \left(\sum_{a,b \geq 1} (a+b-1) p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b-1}} + \frac{1}{4} \sum_{a,b \geq 1} ab p_{a+b+1} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \frac{p_1}{16} \right) \cdot 1. \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.2 Доказательство суперинтегрируемости из W -представления

Как мы показали, в различных матричных моделях можно предъявить решение тождеств Уорда в компактной форме W -представления. Это означает, что мы имеем явную реализацию некоторого оператора W на функциях от

времен p_k . Одновременно с этим мы использовали разложение по характерам, чтобы переписать уравнение

$$(\hat{l}_0 - \hat{W})\Psi(p) = 0 \quad (3.33)$$

как рекурсию на коэффициенты c_R . При этом рекурсия имела очень специальный вид, согласованный с формулами типа (2.22,3.16). Мы воспользуемся этими соображениями, чтобы сделать следующий шаг, а именно, получить из W -представления явное разложение по характерам. Изученные выше соотношения подсказывают, что правильным подходом к этой задаче, является изучение действия операторов на функции Шура.

Предъявим общий метод доказательства и построения формул типа (1.68) для моделей заданных своим W -представлением. Не будем конкретизировать его вид, вместо этого постулируем правило, по которому он действует в базисе характеров.

Для этого рассмотрим сначала случай операторов градуировки 1, тогда имеем

$$\hat{W}[f]_{-1}S_R := \sum_{Q:|Q|=|R|+1} \frac{\prod_{(i,j) \in Q} f(j-i)}{\prod_{(i,j) \in R} f(j-i)} \langle p_1 S_R | S_Q \rangle S_Q, \quad (3.34)$$

где (i,j) - координаты соответствующей клетки в диаграмме Юнга. Коэффициент $\langle p_1 S_R | S_Q \rangle$ дается скалярным произведением (см. Приложение А) и фактически означает, что за исключением префакторов, связанных с функцией f , оператор $\hat{W}[f]_{-1}$ действует на характеры также, как и оператор умножения на p_1 . В этом случае утверждение сводится к тому, что ненулевые вклады в сумму дают то разбиение Q , которые отличаются от R на добавление к нему одной клетки, как, например, в (2.22). То есть (3.34) можно переписать как:

$$\begin{aligned} p_1 S_R &= \sum_{R+\square} S_{R+\square}, \\ \hat{W}[f]_{-1} S_R &= \sum_{R+\square} f(j_{\square} - i_{\square}) S_{R+\square}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где $(i_{\square}, j_{\square})$, как и ранее, - координаты добавленной клетки, а действие умножения на p_1 приведено для наглядности. Статсумма модели, отвечающей такому

оператору, дается формулой:

$$Z[f](p) = \exp\left(\hat{W}[f]_{-1}\right) \cdot 1 = \sum_R \left(\prod_{(i,j) \in R} f(j-i) \right) S_R\{\delta_{k,1}\} S_R(p). \quad (3.36)$$

Здесь специальная точка $p_k = \delta_{k,1}$ в первой функции Шура связана с градуировкой оператора. Прежде, чем рассматривать общее доказательство, опишем комбинаторную интерпретацию, стоящую за формулой (3.34). Раскрывая экспоненту получаем градуированный ряд, в котором степень экспоненты оператора (3.35) равна градуировке получившегося многочлена от p_k . Рассмотрим выражение:

$$\hat{W}[f]_{-1}^n \cdot 1 = \sum_{\square_1, \square_2, \dots, \square_n} \prod_k f(j_{\square_k} - i_{\square_k}) S_{\emptyset + \square_1 + \square_2 + \dots + \square_n}(p_k), \quad (3.37)$$

где суммирование ведется по всем способам добавить последовательно n -клеток к пустой диаграмме Юнга. Теперь рассмотрим коэффициент в этой формуле перед фиксированной диаграммой Юнга R , содержащей n клеток, :

$$\hat{W}[f]_{-1}^n \cdot 1 = \sum_{R:|R|=n} S_R(p_k) \left(\sum_{\square_1, \square_2, \dots, \square_n} \prod_k f(j_{\square_k} - i_{\square_k}) \delta_{R, \emptyset + \square_1 + \square_2 + \dots + \square_n} \right), \quad (3.38)$$

где $\delta_{R, \emptyset + \square_1 + \square_2 + \dots + \square_n}$ означает просто, что диаграмма $\emptyset + \square_1 + \square_2 + \dots + \square_n$, получившаяся добавлением n клеток к пустой диаграмме, равна R . Заметим, во-первых, что множитель составленный $f(j-i)$, не зависит от того, в какой последовательности добавленные клетки дали диаграмму R . Таким образом, остается только коэффициент, равный числу способов, которыми можно получить диаграмму R , для которого в комбинаторике характеров известно:

$$\sum_{\square_1, \square_2, \dots, \square_n} \delta_{R, \emptyset + \square_1 + \square_2 + \dots + \square_n} = \phi_{R, [1^n]} = |R|! S_R\{\delta_{k,1}\}. \quad (3.39)$$

К примеру, рассмотрим диаграмму Юнга $[2,1]$. Есть два пути получить эту диаграмму последовательным добавлением клеток:

$$\begin{aligned} [1] &\rightarrow [2] \rightarrow [2,1], \\ [1] &\rightarrow [1,1] \rightarrow [2,1] \end{aligned} \quad (3.40)$$

что отвечает $(3!S_{[2,1]}(p_k = \delta_{k,1})) = 2$. Итак, собирая вместе формулы выше получим ответ (3.36).

Данное комбинаторное рассуждение можно обобщить на общий случай. Рассмотрим семейство операторов градуировки n :

$$\hat{W}[f]_{-n}S_R := \sum_{Q:|Q|=|R|+n} \frac{\prod_{(i,j) \in Q} f(j-i)}{\prod_{(i,j) \in R} f(j-i)} \langle p_n S_R | S_Q \rangle S_Q. \quad (3.41)$$

Коэффициенты $\langle p_n S_R | S_Q \rangle$ могут быть не равны нулю только, если определена косая диаграмма Q/R , благодаря чему можно написать:

$$\hat{W}[f]_{-n}S_R = \sum_{Q:|Q|=|R|+n} \prod_{(i,j) \in Q/R} f(j-i) \langle p_n S_R | S_Q \rangle S_Q. \quad (3.42)$$

Несложно убедиться из их определения в форме (3.41), что все эти операторы коммутируют, таким образом корректно определена экспоненциальная формула:

$$Z[f](\bar{p}, p) := \exp \left(\sum_k \frac{\bar{p}_n \hat{W}_{-n}[f]}{k} \right) \cdot 1 = \sum_R \left(\prod_{(i,j) \in R} f(j-i) \right) S_R(\bar{p}) S_R(p), \quad (3.43)$$

где \bar{p}_k в данном случае следует понимать, как вспомогательный набор параметров, а операторы $\hat{W}[f]_{-n}$ по-прежнему действуют на функции от переменных p_k .

Рассмотренные нами примеры попадают в эту общую схему. В частности, выбирая $\bar{p}_n = \delta_{n,1}$, а

$$f^{\text{K.M.}} = (j-i+N_1)(j-i+N_2), \quad (3.44)$$

получаем комплексную модель. И действительно, несложно показать, что так определенный оператор совпадает с построенным в разделе 3.1.1. С другой стороны, выбирая

$$f^{\text{Гаусс.}} = (j-i+N), \quad (3.45)$$

но $\bar{p}_n = \delta_{k,2}$, получаем гауссову эрмитову модель.

3.3 Неабелево W -представление обобщенной модели Концевича

Рассмотрим теперь применение построенной техники решения тождеств Уорда к нетривиальному случаю обобщенной модели Концевича (1.21). Прямые вычисления в ОМК достаточно трудоемки даже в фазе Концевича из-за нетривиальной структуры пропагаторов. Также известно, что структура тождеств Уорда в ней существенно богаче. А именно, при рассмотрении старших степеней в потенциале, помимо условий Вирасоро возникают также старшие W -условия. Мы построим W -представление для ОМК и увидим её особенность - появление упорядоченной P -экспоненты от некокоммутирующих операторов разных градуировок.

Напомним, что статистическая сумма мономиальной ОМК задается матричным интегралом по $N \times N$ эрмитовой матрице X ,

$$Z_r^{\text{ОМК}}(M) := \mathcal{N}_r \cdot \int dX e^{-\frac{\text{Tr} X^{r+1}}{r+1} + \text{Tr} M^r X}, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{N}_r = \frac{e^{-\frac{r}{r+1} \text{Tr} M^{r+1}}}{\int dX e^{-\frac{1}{r} \sum_{a+b=r-1} \text{Tr} M^a X M^b X}}$$

и зависит от внешней матрицы M . При больших M (фаза Концевича [73]) эта статистическая сумма понимается как степенной ряд от переменных времени $p_k := \text{Tr} M^{-k}$, причем коэффициенты этого степенного ряда не зависят от размера матрицы N . Поэтому мы обозначаем $Z_r(M) = Z_r(p)$ и не указываем зависимость от N , мы также опустим в этом разделе обозначение, обозначающее статсумму ОМК, так как речь будет идти только о ней. Эта статистическая сумма не зависит от p_{rk} -переменных и нормирована так, что $\lim_{M \rightarrow \infty} Z_r(M) = Z_r\{0\} = 1$.

Тождества Уорда этой матричной модели описываются операторами из $W^{(r)}$ -алгебры и становятся весьма сложными при больших r . В следующем разделе мы рассмотрим простейший случай $r = 2$, когда они образуют борелевскую подалгебру алгебры Вирасоро. В разделе 3.3.2 мы рассматриваем первый нетривиальный случай $r = 3$, когда впервые в дополнение к условиям Вирасоро появляются старшие W -условия, а в разделе 3.3.3 мы рассматриваем общий случай r .

3.3.1 W -представление в кубическом случае

Начнем со статистической суммы (3.46) с $r = 2$ [21]. В этом случае статистическая сумма удовлетворяет условиям Вирасоро [14; 22],

$${}_2\hat{L}_n Z_2(p) = 0, \quad n \geq -1, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} {}_2\hat{L}_n := & \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k-\text{нечет.}}}^{\infty} (k+2n)p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+2n}} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{a,b \geq 1 \\ a+b=2n \\ a,b-\text{нечет}}} ab \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \frac{p_1^2}{4} \delta_{n,-1} + \frac{1}{16} \delta_{n,0} - \\ & - \underline{(2n+3) \frac{\partial}{\partial p_{2n+3}}}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Заметим, что суммирование по k и a ведется только по нечетным числам, в соответствии с рассуждениями выше. Эти условия можно записать в одном уравнении, имеющем единственное решение, как в разделе 3.1.1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n-1} \cdot {}_2\hat{L}_{n-2} Z_2(p) = 0. \quad (3.49)$$

Это уравнение содержит члены градуировки 0 и 3. Член нулевой градуировки происходит от последнего (подчеркнутого) слагаемого в (5.10) и является оператором измеряющим градуировку, как и ранее:

$$\hat{l}_0 = \sum_{\substack{k=1 \\ k-\text{нечет.}}}^{\infty} k p_k \frac{\partial}{\partial p_k}, \quad (3.50)$$

так что (3.49) принимает вид

$$\left(\hat{l}_0 - 3\hat{O}_3 \right) Z_2(p) = 0 \quad (3.51)$$

с операторами градуировки 3

$$\begin{aligned} \hat{O}_3 := & \frac{1}{6} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k,l-\text{нечет.}}}^{\infty} (k+l-3)p_k p_l \frac{\partial}{\partial p_{k+l-3}} + \frac{1}{12} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k,l-\text{нечет.}}}^{\infty} (k-l-3)l p_k \frac{\partial^2}{\partial p_{k-l-3} \partial p_l} + \\ & + \frac{1}{48} p_3 + \frac{1}{12} p_1^3. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Коммутационное соотношение имеет вид:

$$[\hat{l}_0, \hat{O}_3] = 3\hat{O}_3. \quad (3.53)$$

Выведем теперь экспоненциальное представление чуть более подробно. Вводя параметр градуировки x через перемасштабирование $p_k \rightarrow x^k p_k$, приходим к уравнению

$$\left(-x \frac{d}{dx} + 3x^3 \hat{O}_3 \right) Z_2(p) = 0. \quad (3.54)$$

Его решение экспоненциально,

$$Z_2(p) = \exp\left(x^3 \hat{O}_3\right) \cdot 1, \quad (3.55)$$

что есть не что иное, как известное W -представление [77].

3.3.2 W -представление для малых r

Теперь рассмотрим случай $r = 3$. Это первый по-настоящему нетривиальный случай. Теперь у нас есть комбинация ограничений Вирасоро и W -условий [78–81]

$${}_3\hat{L}_n Z_3(p) = 0, \quad n \geq -1,$$

$${}_3\hat{W}_n^{(3)} Z_3(p) = 0, \quad n \geq -2,$$

$$\begin{aligned}
{}_3\hat{L}_n &:= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} (k+3n) p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+3n}} + \frac{1}{6} \sum_{\substack{a,b \geq 1 \\ a+b=3n}} ab \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \\
&\quad + \frac{p_1 p_2}{3} \delta_{n,-1} + \frac{1}{9} \delta_{n,0} - (3n+4) \frac{\partial}{\partial p_{3n+4}}, \\
{}_3\hat{W}_n^{(3)} &:= \frac{1}{9} \sum_{k,l=1}^{\infty} (k+l+3n) P_k P_l \frac{\partial}{\partial p_{k+l+3n}} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{a,b \geq 1 \\ a+b=k+3n}} ab P_k \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \\
&\quad + \frac{1}{27} \sum_{\substack{a,b,c \geq 1 \\ a+b+c=3n}} abc \frac{\partial^3}{\partial p_a \partial p_b \partial p_c} + \frac{1}{27} \sum_{\substack{a,b,c \geq 1 \\ a+b+c=-3n}} P_a P_b P_c,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

где $P_k := p_k - 3 \cdot \delta_{k,4}$, а a, b, c, k, l в суммах не делятся на 3. Их можно объединить в одно уравнение, однозначно определяющее статистическую сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{3n-1} \cdot {}_3\hat{W}_{n-3}^{(3)} Z_3(p) + c \sum_{n=1}^{\infty} p_{3n-2} \cdot {}_3\hat{L}_{n-2} Z_3(p) = 0, \tag{3.57}$$

где параметр c может быть выбран достаточно произвольно (только неотрицательное рациональное значение c может привести к дополнительным избыточным решениям этого уравнения). На левой стороне этого уравнения существуют операторы градуировки 0, 4 и 8.

Для специального выбора $c = -1$ коэффициенты перед суммой $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-1) p_{3n-1} \frac{\partial}{\partial p_{3n-1}}$, происходящей из первого члена в (3.57), и перед суммой $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-2) p_{3n-2} \frac{\partial}{\partial p_{3n-2}}$, вытекающей из второго члена, равны друг другу, так что нулевой оператор градуировки есть не что иное, как \hat{l}_0

$$\hat{l}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \frac{\partial}{\partial p_k}, \tag{3.58}$$

где k не делится на 3. При таком выборе (3.57) выглядит как

$$\left(\hat{l}_0 - 4\hat{O}_4 - 8\hat{O}_8 \right) Z_3(p) = 0, \tag{3.59}$$

где операторы градуировок 4 и 8 равны

$$\begin{aligned} \hat{O}_4 := & \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{\infty} p_{3n-1} \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} (k+3n-5) p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+3n-5}} + \sum_{\substack{a,b \geq 1 \\ a+b=3n-5}} ab \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right) + \\ & + \frac{1}{24} \sum_{n=1}^{\infty} p_{3n-2} \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} (k+3n-6) p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+3n-6}} + \sum_{\substack{a,b \geq 1 \\ a+b=3n-6}} ab \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right) + \frac{p_4}{36} + \frac{p_1^2 p_2}{6} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{O}_8 := & -\frac{1}{8 \cdot 27} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} p_{3n-1} \left(3 \sum_{k,l=1}^{\infty} (k+l+3n-9) p_k p_l \frac{\partial}{\partial p_{k+l+3n-9}} + \right. \right. \\ & + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{a,b \geq 1 \\ a+b=k+3n-9}} ab p_k \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \\ & \left. \left. + \sum_{\substack{a,b,c \geq 1 \\ a+b+c=3n-9}} abc \frac{\partial^3}{\partial p_a \partial p_b \partial p_c} \right) + p_1^3 p_5 + p_2^4 + 3p_1^2 p_2 p_4 \right\}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

а суммы по k, l, a, b, c пробегают положительные целые числа, не делящиеся на 3. Коммутационные соотношения для них очевидны:

$$[\hat{l}_0, \hat{O}_4] = 4\hat{O}_4, \quad [\hat{l}_0, \hat{O}_8] = 8\hat{O}_8. \quad (3.61)$$

Однако теперь важно, что операторы разных степеней не коммутируют

$$[\hat{O}_4, \hat{O}_8] \neq 0. \quad (3.62)$$

Вводя снова параметр x через перемасштабирование $p_k \rightarrow x^k p_k$, приходим к уравнению¹

$$\left(-x \frac{d}{dx} + 4x^4 \hat{O}_4 + 8x^8 \hat{O}_8\right) Z_3(p) = 0 \quad (3.64)$$

. Решение такого уравнения уже не будет обычной экспонентой. Однако, общее решение таких уравнений с некоммутирующими коэффициентами известно. Решение может быть построено с помощью *упорядоченной* экспоненты

$$\begin{aligned} Z_3(p) &= \text{Pexp} \left(\int^x \left(4x'^4 \hat{O}_4 + 8x'^8 \hat{O}_8 \right) \frac{dx'}{x'} \right) \cdot 1 = \\ &= 1 + \int^x \left(4x'^4 \hat{O}_4 + 8x'^8 \hat{O}_8 \right) \frac{dx'}{x'} \cdot 1 + \\ &+ \int^x \left(4x'^4 \hat{O}_4 + 8x'^8 \hat{O}_8 \right) \frac{dx'}{x'} \int^{x'} \left(4x''^4 \hat{O}_4 + 8x''^8 \hat{O}_8 \right) \frac{dx''}{x''} \cdot 1 + \dots = \\ &= \left(1 + x^4 \hat{O}_4 + x^8 \left(\frac{1}{2} \hat{O}_4^2 + \hat{O}_8 \right) + x^{12} \left(\frac{1}{6} \hat{O}_4^3 + \frac{1}{3} \hat{O}_4 \hat{O}_8 + \frac{2}{3} \hat{O}_8 \hat{O}_4 \right) + \dots \right) \cdot 1. \end{aligned}$$

Самый простой способ сгенерировать это разложение состоит в следующем. Будем искать решение в виде $Z_4(p) = \sum_k x^{4k} \hat{\Psi}_k \cdot 1$. Тогда (4.7) эквивалентно рекурсивному соотношению

$$\hat{\Psi}_k = \frac{1}{k} \hat{O}_4 \hat{\Psi}_{k-1} + \frac{2}{k} \hat{O}_8 \hat{\Psi}_{k-2} \quad (3.65)$$

с начальными условиями $\hat{\Psi}_0 = 1$, $\hat{\Psi}_1 = \hat{O}_4$.

¹В случае произвольного c в (3.57) необходимо рассмотреть две различные градуировки, $p_{3k-1} \rightarrow x^{3k-1} p_{3k-1}$ и $p_{3k-2} \rightarrow (x\alpha)^{3k-2} p_{3k-2}$, что приводит к уравнению

$$\left(-x \frac{d}{dx} + (1+c)\alpha \frac{d}{d\alpha} + 4x^4 \hat{O}_4(\alpha, c) + 8x^8 \hat{O}_8(\alpha)\right) Z_3(p) = 0$$

с операторами $\hat{O}_{4,8}$, зависящими от α и \hat{O}_4 , от константы c . Другая возможность состоит в том, чтобы определить еще один оператор нулевой градуировки, $\hat{O}_0 := \sum_k (3k-2) p_{3k-2} \frac{\partial}{\partial p_{3k-2}}$ и иметь дело с уравнением

$$\left(-x \frac{d}{dx} + (1+c)\hat{O}_0 + 4x^4 \hat{O}_4(c) + 8x^8 \hat{O}_8\right) Z_3(p) = 0.$$

Это делает все рассмотрение даже более интересным. В частности, при некоторых особых рациональных значениях c происходит вырождение, которое порождает дополнительные лишние решения уравнения (3.57). Например, при $c = +2$ получается

$$Z_3(p) = 1 + \alpha \cdot p_1 p_2 + \frac{1}{6} p_1^2 p_2 + \frac{1}{36} p_4 + \dots \quad (3.63)$$

и коэффициент α не определяется из уравнения (3.57).

Обратим внимание, что соотношение рекурсии согласуется с аналогичными соотношениями, полученными в работе [82], хотя мы выводим их в другой форме и из других соображений. Однако операторы \hat{O}_4 и \hat{O}_8 не коммутируют и, следовательно, не приводят к простой экспоненциальной W -форме представления (3.65) (что было ошибочно пропущено в [82]):

$$P \exp \left(x^4 \hat{O}_4 + x^8 \hat{O}_8 \right) = \exp \left(x^4 \hat{O}_4 + x^8 \hat{O}_8 - \frac{x^{12}}{6} [\hat{O}_4, \hat{O}_8] - \frac{x^{20}}{60} [\hat{O}_8, [\hat{O}_4, \hat{O}_8]] - \frac{x^{20}}{360} [\hat{O}_4, [\hat{O}_4, [\hat{O}_4, \hat{O}_8]]] + \dots \right). \quad (3.66)$$

Ряд (3.65) является одним из наиболее эффективных технических способов генерировать статистическую сумму $Z_3(p)$ как разложение по степеням p_k (см. Приложение Б, где в качестве иллюстрации мы приводим $Z_3(p)$ до x^{16}).

Случай $r = 4$. Кратко опишем следующий случай $r = 4$. На этот раз мы должны использовать следующие тождества Уорда:

$$\begin{aligned} {}_4\hat{L}_n Z_4(p) &= 0, n \geq -1, \\ {}_4\hat{W}_n^{(3)} Z_4(p) &= 0, n \geq -2, \\ {}_4\hat{W}_n^{(4)} Z_4(p) &= 0, n \geq -3. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Соответствующая $W^{(4)}$ -алгебра может быть выражена в терминах бозонных токов:

$${}_4\hat{L}_n = \frac{1}{8} \sum_{n_1+n_2=4n} : J_{n_1} J_{n_2} : + \frac{5}{32} \delta_{n,0}, \quad (3.68)$$

$${}_4\hat{W}_n^{(3)} = \frac{1}{48} \sum_{n_1+n_2+n_3=4n} : J_{n_1} J_{n_2} J_{n_3} :, \quad (3.69)$$

$${}_4\hat{W}_n^{(4)} = \frac{1}{256} \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=4n} : J_{n_1} J_{n_2} J_{n_3} J_{n_4} : - \frac{1}{128} \sum_{\substack{p+q=n \\ n_1+n_2=4p \\ n_3+n_4=4q}} : J_{n_1} J_{n_2} J_{n_3} J_{n_4} : +$$

$$+ \frac{5}{512} \sum_{n_1+n_2=4n} : J_{n_1} J_{n_2} : - \frac{1}{256} \sum_{n_1+n_2=4n} (n_1)_r (n_2)_r : J_{n_1} J_{n_2} : - \frac{9}{4096} \delta_{n,0},$$

где $(n)_r$ обозначает n по модулю r . Выражение токов в терминах времен дается

$$\begin{cases} J_{-n} = p_n - 4\delta_{n,5} \\ J_n = n \frac{\partial}{\partial p_n} \end{cases}, n > 0 \quad (3.70)$$

и нормальное упорядочение подразумевает, что все производные сдвинуты вправо. Суммы в этих выражениях берутся по целым числам, не кратными 4. Последний член в ${}_4\hat{W}_n^{(4)}$ происходит от аномалии. В ${}_4\hat{W}_n^{(4)}$ из [83, Appendix C] имеется опечатка.

Как обычно мы рассматриваем специальную линейную комбинацию этих уравнений:

$$\begin{aligned} c_3 \sum_{n=1}^{\infty} p_{4n-1} \cdot {}_4\hat{W}_{n-4}^{(4)} Z_4(p) + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} p_{4n-2} \cdot {}_4\hat{W}_{n-3}^{(3)} Z_4(p) + \\ + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_{4n-3} \cdot {}_4\hat{L}_{n-2} Z_4(p) = 0, \end{aligned} \quad (3.71)$$

и, согласно рассуждениям в прошлых разделах это уравнение имеет единственное решение для почти произвольных констант c_i . Для наших целей они могут быть выбраны так, что операторы нулевой степени объединяются в \hat{l}_0 . Этот выбор

$$c_i = (-1)^i. \quad (3.72)$$

Стоит сделать небольшое замечание по поводу градуировок операторов, входящих в это выражение. Если пренебречь сдвигом при $n = 5$ в (3.70), то все члены, приходящие из ${}_4\hat{W}_{n-4}^{(4)}$, имеют градуировку 15. Третий член в (3.70) содержит максимум один сдвиг, а значит есть также член с градуировку 10. Второй член содержит члены с одним или двумя сдвигами, что означает наличие членов градуировки 5 и 10. Следовательно, нулевые члены градации исходят только от ведущего члена в (3.70) и, аналогично, в (3.68) и (3.69). Это сразу дает (3.72). При таком выборе уравнение для статсуммы приобретает вид

$$\left(\hat{l}_0 - 5\hat{O}_5 - 10\hat{O}_{10} - 15\hat{O}_{15} \right) Z_4(p) = 0. \quad (3.73)$$

Тогда W -представление дается следующим образом:

$$Z_4(p) = P \exp \left(x^5 \hat{O}_5 + x^{10} \hat{O}_{10} + x^{15} \hat{O}_{15} \right) \cdot 1. \quad (3.74)$$

Для иллюстрации мы приводим $Z_4(p)$ в приложении В до 15 порядка по p_k . В 5-м и 10-м порядке результаты, полученные в [84], совпадают с ответом в этой работе.

3.3.3 Случай произвольного r

Статистическая сумма Z_r в ОМК (3.46) с потенциалом X^{r+1} не зависит от p_{nr} и удовлетворяет всему набору W -условий разных "спинов" от 2 (Вирасоро) до r [68],

$${}_r \hat{W}_n^{(k)} Z_r(p) = 0, \quad k = 2, \dots, r, \quad n \geq 1 - k, \quad (3.75)$$

а W -генераторы определены в [83], причем первые два

$${}_r \hat{L}_n = \frac{1}{2r} \sum_{n_1+n_2=rn} : J_{n_1} J_{n_2} : + \frac{r^2 - 1}{24r} \delta_{n,0}, \quad (3.76)$$

$${}_r \hat{W}_n^{(3)} = \frac{1}{3r^2} \sum_{n_1+n_2+n_3=rn} : J_{n_1} J_{n_2} J_{n_3} : . \quad (3.77)$$

Их можно выразить через Z_r -скрученные скалярные поля [83], однако старшие W -условия довольно сложны, например, уже на уровне $k = 4$, но для произ-

ВОЛЬНОГО r :

$$\begin{aligned}
{}_r\hat{W}_n^{(4)} = & \frac{1}{4r^3} \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=rn} : J_{n_1} J_{n_2} J_{n_3} J_{n_4} : - \frac{1}{8r^2} \sum_{\substack{p+q=n \\ n_1+n_2=rp \\ n_3+n_4=rq}} : J_{n_1} J_{n_2} J_{n_3} J_{n_4} : + \\
& + \frac{(r^2-1)(r-6)}{48r^2} \sum_{n_1+n_2=rn} : J_{n_1} J_{n_2} : - \\
& - \frac{1}{8r^3} \sum_{n_1+n_2=rn} \left(\langle n_1 \rangle_r + \langle n_2 \rangle_r \right) : J_{n_1} J_{n_2} : - \\
& - \frac{(r^2-1)(r-2)(r-3)(5r+7)}{5760r^3} \delta_{n,0},
\end{aligned} \tag{3.78}$$

а на уровне 5:

$$\begin{aligned}
{}_r\hat{W}_n^{(5)} = & \frac{1}{5r^4} \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=rn} : J_{n_1} J_{n_2} J_{n_3} J_{n_4} J_{n_5} : - \\
& - \frac{1}{6r^3} \sum_{\substack{p+q=n \\ n_1+n_2+n_3=rp \\ n_4+n_5=rq}} : J_{n_1} J_{n_2} J_{n_3} J_{n_4} J_{n_5} : + \\
& + \frac{(r^2-1)(r-12)}{72r^3} \sum_{n_1+n_2+n_3=rn} : J_{n_1} J_{n_2} J_{n_3} : - \\
& - \frac{1}{6r^4} \sum_{n_1+n_2+n_3=rn} \left(\langle n_1 \rangle_r + \langle n_2 \rangle_r + \langle n_3 \rangle_r \right) : J_{n_1} J_{n_2} J_{n_3} :
\end{aligned}$$

В этих формулах

$$\begin{cases} J_{-n} = p_n - r\mu\delta_{n,r+1} \\ J_n = n \frac{\partial}{\partial p_n} \end{cases} \quad n > 0 \tag{3.79}$$

и суммирование ведется по целым числам, не кратным r , а также введено обозначение $\langle n \rangle_r := (n)_r (r - (n)_r)$, где, как и прежде, $(n)_r$ — значение n по модулю r . Мы ввели параметр μ в член, нарушающий градуировку, чтобы легче следить за членами с разной градуировкой. В конечном итоге мы положим $\mu = 1$.

Старший член W -генератора равен

$${}_r\hat{W}_n^{(k)} := \frac{1}{r^{k-1}} \sum_{k_i=1, k_i \notin r\mathbb{Z}} \left(\sum_j k_j + rn \right) \cdot \prod_{i=1}^{r-1} \left(p_{k_i} - r \cdot \delta_{k_i, r+1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p_{\sum_j k_j + rn}} + \dots \quad (3.80)$$

Эти W -условия можно объединить в одно уравнение

$$\sum_{i=1}^{r-1} c_i \sum_n p_{nr-r+i} \cdot {}_r\hat{W}_{n-i-1}^{(i+1)} \cdot Z_r(p) = 0, \quad (3.81)$$

снова с почти произвольными константами c_i . Это уравнение представляет собой сумму операторов градуировок $\{(r+1)i\}$, $i = 0..r-1$, которая задается разложением операторов

$${}_r\hat{W}_n^{(i+1)} = \sum_{j=0}^i \mu^j \cdot {}_r\hat{W}_{n,j}^{(i+1)} \quad (3.82)$$

на операторы определенных градуировок: ${}_r\hat{W}_{n,j}^{(k)}$ имеет градуировку $rn - j(r+1)$. Константы c_i можно выбрать так, чтобы все операторы нулевой степени, т.е. все члены в

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{nr-i} \frac{\partial}{\partial p_{nr-i}}$$

со всеми $i = 1, \dots, r$, входили с единичными коэффициентами и объединялись в оператор градуировки

$$\hat{l}_0 = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} p_{nr-i} \frac{\partial}{\partial p_{nr-i}}. \quad (3.83)$$

Это выбор отвечает $c_i = (-1)^i$. Тогда, вводя параметр градуировки x через перемасштабирование $p_k \rightarrow x^k p_k$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^i \sum_n p_{nr-r+i} \cdot {}_r \hat{W}_{n-i-1}^{(i+1)} \cdot Z_r(p) = \\ & = \sum_{j=0}^{r-1} \left(x^{r+1} \mu \right)^j \underbrace{\sum_{i=j}^{r-1} (-1)^i \sum_{n>0, n \notin r\mathbb{Z}} p_{nr-r+i} \cdot {}_r \hat{W}_{n-i-1, j}^{(i+1)} \cdot Z_r(p)}_{(r+1)j \mathcal{O}_{(r+1)j}} = 0. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Как мы объяснили, член с $j = 0$ в этой сумме воспроизводит оператор \hat{l}_0 , и, наконец, мы приходим к уравнению (здесь мы ставим $\mu = 1$)

$$\begin{aligned} & \left(-x \frac{d}{dx} + \sum_{i=1}^{r-1} (r+1)i x^{(r+1)i} \cdot \hat{\mathcal{O}}_{(r+1)i} \right) Z_r(p) = 0, \\ & \left[\hat{l}_0, \hat{\mathcal{O}}_{(r+1)i} \right] = (r+1)i \cdot \hat{\mathcal{O}}_{(r+1)i}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Решением этого уравнения является кратный интеграл

$$\begin{aligned} Z_r(p) = & 1 + \int^1 \hat{A}(t) \frac{dt}{t} + \int^1 \hat{A}(t) \frac{dt}{t} \int^t \hat{A}(t') \frac{dt'}{t'} + \\ & + \int^1 \hat{A}(t) \frac{dt}{t} \int^t \hat{A}(t') \frac{dt'}{t'} \int^{t'} \hat{A}(t'') \frac{dt''}{t''} + \dots \end{aligned} \quad (3.86)$$

с $\hat{A}(t) := \sum_{k=2}^r k t^k \hat{\mathcal{O}}_{(r+1)k}$, $t := x^{r+1}$, то есть ряд

$$Z_r(p) = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^{r-1} \frac{i_1 \dots i_s \cdot \hat{\mathcal{O}}_{(r+1)i_1} \dots \hat{\mathcal{O}}_{(r+1)i_s}}{(i_1 + \dots + i_s) \dots (i_{s-1} + i_s) i_s}, \quad (3.87)$$

где некоторые i_k могут быть одинаковыми. Коэффициент представляет собой повторный интеграл

$$\int_0^1 t^{i_1} \frac{dt}{t} \int^t t'^{i_2} \frac{dt'}{t'} \int^{t'} t''^{i_3} \frac{dt''}{t''} \dots \quad (3.88)$$

В коммутирующем случае коэффициенты будут суммироваться как раз в

$$\sum_{\{k_a\}} \prod_{a=1}^{r-1} \frac{1}{k_a!} \hat{O}_{(r+1)i_a}^{k_a} = \exp \left(\sum_{a=1}^{r-1} \hat{O}_{(r+1)i_a} \right), \quad (3.89)$$

но в обобщенной модели Концевича \hat{O}_i не коммутируют. Тем не менее (3.87) — очень явное и практичное выражение, мы приводим несколько примеров его применения в Приложении Б.

3.3.4 О выводе W -представления из матричного тождества Уорда для ОМК

Мы построили решение тождеств Уорда в ОМК в форме (3.56). Однако W -условия нетривиально связаны с базовым уравнением (1.23). Интересно было бы начать сразу с тождества (1.23) [68; 74; 79; 85]

$$\left\{ V' \left(\frac{\partial}{\partial \Lambda^{tr}} \right) - \Lambda \right\} \mathcal{Z}_V = 0 \quad (3.90)$$

для матричного интеграла

$$\mathcal{Z}_V = \int dX e^{\text{tr}(V(X) - V'(M)X)} = \frac{e^{\text{tr} MV'(M) - V(M)}}{\det V''(M)} \cdot Z_V(p_k), \quad (3.91)$$

из которого мы извлекаем статистическую сумму ОМК Z_V зависящую только от отрицательных степеней матричной переменной M , $p_k = \text{tr} M^{-k}$. Для мономиальных потенциалов $V_r(X) = \frac{X^{r+1}}{r+1}$ это означает, что $M^r = \Lambda$, и $Z_V = Z_r$ оказывается независимым от всех p_{rn} , подробности см. в [68; 85]. В этом случае,

$$Z_r = \frac{e^{\frac{r}{r+1} \text{tr} M^{r+1}}}{\det \left(\sum_{i=0}^{r-1} M^i \otimes M^{r-1-i} \right)} \cdot Z_r(p_k), \quad (3.92)$$

и подстановка в (3.90) дает сумму членов с $r + 1$ разными градуировками, связанных с r производными экспоненты. Если умножить уравнение на M и взять след, то в уравнении возникнут вклады с градуировками (степенями M^{-1})

$n(r+1)$ с $n = -1, 0, \dots, (r-1)$. При этом младшее условие с $n = -1$ не получается в такой форме, потому что

$$M \cdot \left(\frac{e^{-\frac{r}{r+1} \text{tr } M^{r+1}} \partial e^{\frac{r}{r+1} \text{tr } M^{r+1}}}{\partial (M^{\text{tr}})^r} \right)^r - M^{r+1} = 0. \quad (3.93)$$

Самое интересное — градуировка 0, где мы получаем оператор \hat{l}_0 . Действительно,

$$\begin{aligned} r \cdot \text{tr} \left\{ M \cdot \left(\frac{e^{-\frac{r}{r+1} \text{tr } M^{r+1}} \partial e^{\frac{r}{r+1} \text{tr } M^{r+1}}}{\partial (M^{\text{tr}})^r} \right)^{r-1} \frac{\partial Z_r}{\partial (M^{\text{tr}})^r} \right\} &= \\ = r \cdot \sum_k \text{tr} \left(M^r \frac{\partial p_k}{\partial (M^{\text{tr}})^r} \right) \cdot \frac{\partial Z_r}{\partial p_k} &= \sum_k k \cdot \text{tr } M^{-k} \cdot \frac{\partial Z_r}{\partial p_k} = \\ = \sum_k k p_k \frac{\partial Z_r}{\partial p_k} &= \hat{l}_0 Z_r. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Есть еще два вклада в эту градуировку, которые не содержат p -производных от Z_r : один появляется, когда производная по Λ действует на $\det V''(\Lambda)$ вместо Z_r , другой, когда две производные по Λ дважды действуют на одну и ту же экспоненту. Анализ в других градуировках становится более сложным и не рассматривается в диссертации.

В этой главе мы рассмотрели W -представления для мономиальных обобщенных моделей Концевича вне кубического случая. Как обычно, отклонение от стандартной ситуации оказалось простым, но неожиданным и подразумевает далеко идущие последствия. Оказалось, что W -представление является не обычной экспонентой, а *упорядоченной* P -экспонентой линейной комбинации *некоммутирующих* W -подобных операторов *разной* градуировки. Напомним, что, как и многие другие матричные модели, статистическая сумма ОМК является КП τ -функцией, таким образом, мы наблюдаем поразительное появление P -экспонент в области *интегрируемых* систем. Это приводит, казалось бы, простые матричные модели в непосредственный контакт с теориями Янга-Миллса, где центральную роль играют P -экспоненты: как давно предсказывалось, неабелевость не противоречит интегрируемости.

В самой области матричных моделей *per se* W -представления предоставляют действительно эффективный метод для большого количества членов в

статсумме ОМК Это открывает новые возможности для изучения этих очень интересных и архетипических моделей и может быть полезно в комбинаторных и геометрических приложениях, таких как [86].

Глава 4. Деформации матричных моделей

4.1 β -деформация

Свойство суперинтегрируемости имеет наиболее простой вид в таких моделях, как гауссова эрмитова и комплексная матричная модели, но оно примечательно тем, что позволяет догадываться об обобщениях на другие случаи. Нужно просто угадать подходящую замену многочленов. Одним из таких интересных обобщений является β -деформация [87]. Соответствующая матричная модель также называется β -ансамблем. Такие β -деформированные интегралы интересны в двух отношениях. Во-первых, сами по себе они представляют собой модель собственных значений, в которой деформируется квантовая мера и разрушается множество привычных структур. Её изучение должно в перспективе позволить выйти за рамки интегрируемости, связанной со свободными фермионами и алгеброй $gl(\infty)$. Во-вторых, это представляется важным направлением деформации, поскольку такие модели находят применение в различных задачах, таких как суперсимметричная локализация [42; 44], категорификация инвариантов узлов [88–91], АГТ соответствии [92]. В конце концов, полное понимание β -деформации необходимо для перехода к более общим случаям таких случаев, как (q,t) и эллиптические (q,t) -матричные модели [93].

4.1.1 Доказательство суперинтегрируемости β -деформированной эрмитовой гауссовой матричной модели

Чтобы понять, как вводится β -деформация, будем рассматривать интегралы по собственным значениям. Везде в этой работе мы рассматривали интегралы по собственным значениям эрмитовых матриц. В общем, можно рассматривать интегралы не только эрмитовых матриц, но и, например, симметрических или симплектических. Интеграл по собственным значениям для обеих этих мо-

делей будет отличаться от эрмитовой степенью определителя Вандермонда:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dx_i \Delta^{2\beta}(x) \exp \left(- \sum_i V(x_i) \right), \quad (4.1)$$

а именно $\beta = 1$ для эрмитовой модели (1.52), $\beta = 1/2$ для интеграла по вещественным симметрическим матрицам и $\beta = 2$ для симплектических соответственно. Поэтому естественно изучать интегралы такого же типа, где степень определителя является параметром, принимающим теперь любое значение. Таким образом, определим β -деформированную статистическую сумму гауссовой модели:

$$Z_N^{\text{Гаусс}}(\beta|p_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dx_i \Delta^{2\beta}(x) \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \beta p_k \sum_{i=1}^N x_i^k \right]. \quad (4.2)$$

Для произвольного β такой интеграл не получается наивным интегрированием по углам в привычной гауссовой модели. Отметим, однако, что матричное интегральное представление этой модели известно в несколько экзотической форме трехдиагональных матриц [94; 95], хотя мы его не будем здесь использовать.

Естественно изучать статсумму с точки зрения разложения по характеристам. Известно, что в этом случае правильными базисными функциями в такой модели являются так называемые многочлены Джека. Они представляют собой симметричные многочлены, ортогональные относительно некоторого скалярного произведения, и сводятся к функциям Шура при $\beta = 1$ [96]. Приведем для иллюстрации несколько примеров простейших многочленов Джека:

$$\begin{aligned} J_{[1]} &= p_1, & J_{[3]} &= \frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)}(\beta^2 p_1^3 + 3\beta p_1 p_2 + 2p_3), \\ J_{[2]} &= \frac{1}{\beta+1}(\beta p_1^2 + p_2), & J_{[2,1]} &= \frac{1}{2\beta+1}(\beta p_1^3 + (1-\beta)p_1 p_2 - p_3), \\ J_{[1,1]} &= \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2), & J_{[1,1,1]} &= \frac{1}{6}(p_1^3 - 3p_1 p_2 + 2p_3). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тождество Коши для полиномов Шура также имеет β -деформацию, поэтому для многочленов Джека имеем:

$$\sum_R \frac{x^{|R|}}{\|J_R\|^2} J_R(p) J_R(\bar{p}) = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \beta x^k \frac{p_k \bar{p}_k}{k} \right], \quad (4.4)$$

где $\|J_R\|^2$ — норма полинома Джека. Под "правильными" функциями мы понимаем, что их среднее представляет собой прямую β -деформацию средних от многочленов Шура в недеформированном случае (??). Среднее значение полиномов Джека в β -деформированной гауссовой модели дается выражением

$$\langle J_R \rangle = \frac{J_R \{N\}}{J_R \{\delta_{k,1}\}} \frac{J_R \{\delta_{k,2}\}}{\|J_R\|^2} \beta^{|R|}. \quad (4.5)$$

Здесь использованы обозначения для функций Джека, вычисленных в специальных точках. Зависимость от N снова имеет факторизованную форму [96]:

$$J_R \{N\} = \prod_{(j,i) \in R} (j + \beta(N - i)). \quad (4.6)$$

Ключевое отличие состоит в том, что, как мы уже упоминали, доказать эту формулу кажется труднее. Ясно, что мы не можем эффективно использовать теорему Вика. Стандартная интегрируемость КП/Тоды нарушается, т. е. для статистической суммы неизвестно детерминантное представление. Однако мы все еще можем решить модель, используя условия Вирасоро. Операторы Вирасоро и W получаются таким же способом, как и в недеформированном случае. Например, используя инвариантность интеграла получаем

$$\begin{aligned} \hat{L}_n^{(\beta)} = & ((n+1)(1-\beta) + 2N\beta) \frac{\partial}{\partial p_n} + \beta \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+n}} + \beta^2 \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial p_r \partial p_{n-r}} + \\ & + ((1-\beta) + N\beta) \beta N \delta_{n,0} + p_1 \beta^2 N \delta_{n,-1} - \frac{\partial}{\partial p_{n+2}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Заметим, что структура тождеств Уорда получилась аналогичной (1.14): мы имеем слагаемые градуировки $-n$ и один член градуировки $-n-2$. Также при $\beta = 1$ полученные операторы сводятся к (1.14). Как и ранее, суммируя,

получаем

$$\sum_{n \geq 1} p_n \hat{L}_{n-2}^{(\beta)} Z_N^{\text{Gaycc}}(\beta|p_k) = 0 \quad (4.8)$$

и

$$(\hat{l}_0 - 2\hat{W}_{-2}^{(\beta)}) Z_N^{\text{Gaycc}}(\beta|p_k) = 0. \quad (4.9)$$

В градуировке 2 получается β -деформированный W -оператор:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{-2}^{(\beta)} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n+1)(1-\beta)}{2} + N\beta \right) p_{n+2} \frac{\partial}{\partial p_n} + \frac{\beta}{2} \sum_{k,n=1}^{\infty} (n+k-2) k p_n p_k \frac{\partial}{\partial p_{k+n-2}} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k,n=1}^{\infty} n k p_{k+n+2} \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_n} + \frac{((1-\beta) + N\beta)}{2} \beta N p_2 + \frac{1}{2} \beta^2 p_1^2 N. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Таким образом мы имеем:

$$Z_N^{\text{Gaycc}}(\beta|p_k) = \exp\left(\hat{W}_{-2}^{(\beta)}\right) \cdot 1. \quad (4.11)$$

При $\beta = 1$ формулы суперинтегрируемости получались при рассмотрении действия W -оператора в базисе характеров. В данном случае не сложно убедиться, что при действии на функции Шура S_R отсутствует аналог формулы (3.41). А именно, соответствующие коэффициенты не факторизуются на $f(j-i)$ и $\langle p_2 S_R | S_Q \rangle$. Однако из постановки задачи мы знаем, что является "естественной" деформацией полиномов Шура в данном контексте. Оказывается, полиномы Джека являются "естественными" функциями и для β -деформированного W -оператора:

$$\hat{W}_{-2}^{(\beta)} J_R = \frac{1}{2} \sum_{R'=R+\square_1+\square_2} (j_{\square_1} + \beta(N - i_{\square_1}))(j_{\square_2} + \beta(N - i_{\square_2})) C_{RR'} J_{R'}, \quad (4.12)$$

где $C_{RR'}$ — коэффициенты разложения $p_2 J_R$ по полиномам Джека:

$$p_2 J_R = \sum_{R'=R+\square+\square} C_{RR'} J_{R'}, \quad (4.13)$$

а соответствующая функция от координат клетки диаграммы Юнга соответствующим образом деформирована:

$$j - i + N \longrightarrow f^\beta(i, j)j + \beta(N - i). \quad (4.14)$$

Как и в недеформированном случае, важным свойством является то, что действие W -оператора отличается только коэффициентом, зависящем от координат клетки в диаграмме Юнга. Например:

$$\begin{aligned} p_2 J_{[2]} &= \\ &= J_{[4]} - \frac{2(\beta - 1)\beta}{(\beta + 1)(\beta + 3)} J_{[3,1]} + \frac{4(1 + 2\beta)}{(1 + \beta)^2(2 + \beta)} J_{[2,2]} - \frac{2\beta(1 + 3\beta)}{(1 + \beta)^3} J_{[2,1,1]}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

тогда как

$$\begin{aligned} \hat{W}_{-2}^{(\beta)} J_{[2]} &= \\ &= \frac{1}{2} [(2 + N\beta)(3 + N\beta) J_{[4]} - \beta(N - 1)(N\beta + 2) \frac{2(\beta - 1)\beta}{(\beta + 1)(\beta + 3)} J_{[3,1]} + \\ &\quad + \beta(N - 1)((N - 1)\beta + 1) \frac{4(1 + 2\beta)}{(1 + \beta)^2(2 + \beta)} J_{[2,2]} - \\ &\quad - \beta(N - 2)\beta(N - 1) \frac{2\beta(1 + 3\beta)}{(1 + \beta)^3} J_{[2,1,1]}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Как можно заметить, комбинаторная структура уравнения (4.15) уже не так очевидна. В частности, можно заметить, что появляется слагаемое с диаграммой $[3,1]$, отсутствующее при $\beta = 1$ и не отвечающее добавке прямоугольной фигуры из двух клеток. Однако как мы видели в 3.2, комбинаторная структура не так важна, так как действие W -оператора имеет вид:

$$\hat{W}_{-2}^{(\beta)} J_R = \sum_Q \left(\frac{\prod_{(i,j) \in Q} f^{(\beta)}(i, j)}{\prod_{(i,j) \in R} f^{(\beta)}(i, j)} \right) \langle p_2 J_R | J_Q \rangle J_Q \quad (4.17)$$

для $f^{(\beta)}(i, j) = j + \beta(N - i)$. Теперь можно применить рассуждения в разделе 3.2 с заменой функций Шура на функции Джека и получить искомое разложение для статсуммы.

4.1.2 Построение W -операторов из гамильтонианов

Формула (4.17) является ключом к нашей конструкции, однако мы не предоставили явного доказательства. Здесь мы собираемся набросать общее представление о том, откуда берутся такие операторы и как доказать, что они действуют на символы указанным образом. Конструкция очень похожа на рассмотренную в [97] и [98]. Мы отложим полный анализ, который также включал бы (q, t) -деформированный случай, и не будем рассматривать его в этой работе.

Предположим, что вместо $W_{-2}^{(\beta)}$ (4.17) мы получили более простой оператор $W_{-1}^{(\beta)}$, который действует на многочлены Джека как

$$\hat{W}_{-1}^{(\beta)} J_R = \sum_{R'=R+\square} (\beta(N - i_{\square}) + j_{\square}) C_{RR'} J_{R'}. \quad (4.18)$$

Здесь $C_{RR'}$ — коэффициенты разложения $p_1 J_R$ по полиномам Джека:

$$p_1 J_R = \sum_{R'=R+\square} C_{RR'} J_{R'}. \quad (4.19)$$

Для доказательства (4.18) заметим, что его можно построить, коммутируя оператор умножения p_1 с диагональным оператором:

$$\hat{H}_1^{(\beta)} J_R = \sum_{(i_{\square}, j_{\square}) \in R} (\beta(N - i_{\square}) + j_{\square}) J_R. \quad (4.20)$$

Такие операторы, диагональные в полиномиальном базисе Джека, есть не что иное, как гамильтонианы Калоджеро-Рейсенарса. Нам нужно их выражение через временные переменные. В [98–100] есть описание этих операторов, но для нашей текущей цели нужен только один из них. В нашей нормировке он

имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1^{(\beta)} = \frac{1}{2} \sum_{n,m \geq 1} \left(nmp_{n+m} \frac{\partial^2}{\partial p_n \partial p_m} + \beta(n+m)p_n p_m \frac{\partial}{\partial p_{n+m}} \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} ((n+1)(1-\beta) - 2\beta N) n p_n \frac{\partial}{\partial p_n}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Наконец, мы можем найти выражение для $\hat{W}_{-1}^{(\beta)}$ в терминах переменных времени:

$$\hat{W}_{-1}^{(\beta)} = [\hat{H}_1^{(\beta)}, p_1] = \sum_{n=1}^{\infty} n p_{n+1} \frac{\partial}{\partial p_n} + p_1(1 - \beta - \beta N). \quad (4.22)$$

Эту процедуру можно обобщить и применить для доказательства соотношений, подобных (4.18). В частности, для доказательства (4.17) нужно построить \hat{W}_2 из \hat{H}_2 и p_2 в дополнение к \hat{H}_1 и p_1 .

4.2 Модель Брезана-Гросса-Виттена и Q -функции Шура.

В задаче о β -деформации можно заметить следующее явление. Вместо полиномов Шура роль характеров играют полиномы Джека. И, несмотря на то, что до сих пор не известно, можно ли построить алгебру, характерами для которой будут являться полиномы Джека, большинство структур, связанных с суперинтегрируемостью сохраняются. По-прежнему имеется разложение по этим функциям, с коэффициентами, имеющими факторизованную форму и выражающимися через полиномы Джека. Значение средних согласовано с тождествами Уорда и соответствующим W -представлением: W -оператор имеет простое действие в базисе полиномов Джека. Оказывается, подобные явления происходят и в других моделях. В этом разделе мы рассмотрим аналог суперинтегрируемости для модели БГВ. Мы увидим, что для их описания также требуется заменить функции Шура на другие подходящие симметрические функции - Q -функции Шура. Более того, мы увидим, что в отличие от β -деформированной модели, Q -функции Шура связаны с некоторой интегрируемой иерархией. Таковой является иерархия B -КП, связанная алгеброй серии B_n . При этом, с другой сто-

роны, мы увидим, что W -операторы, полученные в предыдущих разделах, не всегда имеют понятное действие в терминах этих симметрических функций. В конце концов, в следующем разделе мы изучим Q -функции как характеры. Мы увидим, что по непонятным до конца причинам, несмотря на то, что за интегрируемой системой стоит алгебра $so(n)$, Q -функции являются характерами супералгебры $q(n)$.

4.2.1 Q -функции Шура и иерархия B -КП

Рассмотрим сначала кратко основные свойства Q -функций Шура. Q -функции Шура можно определить с помощью производящей функции, аналогично функциям S_R . А именно, рассмотрим полиномы от нечетных времен $P_{n_1, n_2}(p_k)$ заданные производящей функцией:

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} P_{n_1, n_2}(p_k) z_1^{n_1} z_2^{n_2} := \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \left(\exp \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{2k+1}}{2k+1} (z_1^{2k+1} + z_2^{2k-1}) \right) - 1 \right). \quad (4.23)$$

Для заданной диаграммы Юнга R построим матрицу размера $l(R) \times l(R)$:

$$(\mathbf{M}_R)_{ij} = P_{R_i, R_j}(p_k). \quad (4.24)$$

Из вида (4.23) понятно, что матрица \mathbf{M}_R — антисимметрична. Естественным инвариантом для антисимметричных матриц является пфаффиан. Таким образом строим:

$$Q_R(p) = 2^{-l(R)} \text{Pf}(\mathbf{M}_R) \quad (4.25)$$

Из определения понятно, что Q_R не равны нулю только для диаграмм Юнга, не имеющих совпадающих строк. Такие диаграммы Юнга, или разбиения, называются строгими. Более того, по построению, имеем, что Q -функции зависят только от нечетных времен p_{2k+1} . Соответствующие мономы p_{Δ} отвечают нечетным разбиениям. Таким образом, применяя комбинаторное утверждение о равенстве числа нечетных и строгих разбиений, получаем, что Q -функции образуют базис в пространстве полиномов от нечетных времен.

Важно отметить, что Q -функции Шура на самом деле связаны со стандартными функциями Шура однопараметрической деформацией. Мы уже обсуждали β -деформацию, которая затрагивает выделенное направление в пространстве параметров (q, t) . Другое интересное семейство симметрических полиномов связано с выбором $q = 0$ и зависит теперь от параметра t . Такие полиномы называются функциями Холла-Литтлвуда $HL_R(t)$. Стандартные функции Шура S_R отвечают, конечно, выбору $t = 1$, в то время как Q -функции Шура появляются в специальной точке $t = -1$.

Интересно, что Q -функции играют для некоторой интегрируемой иерархии ту же роль, что и функции Шура S_R для иерархии КП. Она называется иерархией B -КП, поскольку связана с алгеброй $so(\infty)$, то есть алгеброй из серии B_n . Её формулировка почти аналогична соответствующему фермионному формализму, который мы описали в главе 1.2 с заменой заряженных фермионов ψ на так называемые нейтральные фермионы. Мы не будем здесь излагать эту формулировку, отметим, однако, важную для нас формулу для B -КП аналога гипергеометрической τ -функции. Для этого рассмотрим функцию $r(n)$, обладающую свойством $r(n) = r(1 - n)$. Тогда функция вида:

$$\tau_B(r|\bar{p}, p) = \sum_R \left(\prod_{(i,j) \in R} r(j) \right) Q_R(\bar{p}) Q_R(p) \quad (4.26)$$

является τ -функцией иерархии B -КП. Заметим, что помимо замены функций S_R на Q_R , функция $r(n)$ теперь связана с горизонтальной координатой в диаграмме Юнга, отвечающей длине строки.

4.3 Суперинтегрируемость и W -операторы для матричных моделей, связанных с Q -функциями.

Известно несколько примеров матричных моделей, которые оказываются связаны с Q -функциями Шура. В этих моделях они являются правильным базисом в пространстве корреляторов, для которого выполняется свойство суперинтегрируемости. В этом разделе мы рассмотрим модель Брезана-

Гросса-Виттена (БГВ). Мы применим для неё технику W -представления и действия W -оператора в базисе характеров. Мы покажем, что, как в случае β -деформации, алгебраическая структура по крайней мере для более простой модели БГВ сохраняется.

Напомним, что модель БГВ дается интегралом (3.27):

$$Z^{\text{БГВ}}(J, J^\dagger) = \int_{U \in U(N)} DU \exp(\text{tr } J^\dagger U + \text{tr } JU^\dagger) \quad (4.27)$$

где интеграл берется по пространству унитарных матриц $N \times N$ с мерой Хаара, и $N \rightarrow \infty$. Как и в модели Концевича имеет смысл обсуждать два пертурбативных разложения, связанных с разложением по J - фаза характеров, и J^{-1} - фаза Концевича.

В фазе характеров имеется разложение по функциям Шура:

$$Z^{\text{БГВ}}(p_k = \text{tr } (JJ^\dagger)^k) = \sum_R \frac{S_R(\delta_{k,1})}{S_R\{N\}} S_R(\delta_{k,1}) S_R(p), \quad (4.28)$$

с другой стороны, в фазе Концевича имеем разложение вида:

$$\begin{aligned} Z^{\text{БГВ}}(p_k = \text{tr } (JJ^\dagger)^{-k+1/2}) &= \sum_R \prod_{(j,i) \in R} \frac{(2j-1)^2}{16} Q_R(\delta_{k,1}) Q_R(p) = \\ &= \sum_R \left(\frac{Q_R\{\delta_{k,1}\}}{Q_{2R}\{\delta_{k,1}\}} \right)^2 Q_R\{\delta_{k,1}\} Q_R\{p_k\}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где во втором равенстве были использованы специальные свойства Q -функций [101]. W -представление для модели БГВ можно получить прямым способом суммируя условия Вирасоро [76]. Соответствующий W -оператор имеет вид (3.32). Воспользуемся техникой раздела 3.2, чтобы привести простое доказательство формулы (4.29).

Поскольку релевантным для задачи аналогом характеров являются Q -функции, рассмотрим действие W -оператора в этом базисе. Получаем:

$$\hat{W}_{-1}^{\text{БГВ}} Q_R = \sum_{R+\square} (2R_{i_\square} - 1)^2 Q_{R+\square} = \sum_{R+\square} (2j_\square - 1)^2 Q_{R+\square}, \quad (4.30)$$

где при этом:

$$p_1 Q_R = \sum_{R+\square} Q_{R+\square}. \quad (4.31)$$

Такое действие комбинаторно согласовано со структурой разложения по характеристам. Действуя, как в (3.34) или (3.37) получим, действительно:

$$e^{\hat{W}_{-1}^{\text{BGB}}} \cdot 1 = \sum_R \left(\frac{Q_R\{\delta_{k,1}\}}{Q_{2R}\{\delta_{k,1}\}} \right)^2 Q_R\{\delta_{k,1}\} Q_R\{p_k\}. \quad (4.32)$$

4.4 Фермионная модель Натансона-Орлова

4.4.1 Q-функции как характеры супералгебры

В рассмотренных моделях БГВ, а также в модели Концевича свойство суперинтегрируемости было выполнено для средних от Q-функций Шура. В соответствии с общей логикой (1.74), мы можем спросить, для какой алгебры они являются характерами. Если в случае функций Джека ответ не известен, то для Q-функций на этот вопрос можно ответить, хотя ответ не предскажем с точки зрения рассмотренных моделей. Оказывается, что они являются характерами так называемой "странной" супералгебры $\mathfrak{q}(n)$ [102]. Эта алгебра состоит из матриц вида:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

где $A, B \in \mathfrak{gl}(n)$. Элементы с $B = 0$ являются в данном случае четными, а $A = 0$ – нечетными. Теория представлений такой супералгебры до некоторой степени похожа на теорию представлений $GL(n)$, однако, отличается тем, как различные представления отвечают диаграммам Юнга. В частности, можно показать, что все возникающие представления отвечают строгим разбиениям. Это удачно согласуется с определением Q-функций Шура. Действительно, можно показать, что характеры такой алгебры будут даваться этими симметрическими

функциями:

$$Q_R(x_i) = \text{Tr}_{R\rho_R} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Однако, при этом возникают различные тонкости. В частности, при построении представлений явно присутствует вклад нечетных элементов. Это можно увидеть, построив представление этой алгебры с помощью дифференциальных операторов. Элементы алгебры тогда реализуются в виде операторов явно содержащих фермионные переменные, вида:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(X_{a,i} \frac{\partial}{\partial X_{b,j}} + \Psi_{a,i} \frac{\partial}{\partial \Psi_{b,j}} \right), \\ & \frac{1}{2} \left(X_{a,i} \frac{\partial}{\partial \Psi_{b,j}} - \Psi_{a,i} \frac{\partial}{\partial X_{b,j}} \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Следствия такого представления, важные для матричных моделей, были рассмотрены в [103]. Из данной работы следует, что Q -функции Шура должны естественным образом возникать в матричных моделях с суперинтегрированием по пространству суперматриц. Мотивируясь вышесказанным, в следующих разделах мы представим одну из попыток построить такую модель на основе модели Натанзона-Орлова.

4.4.2 Модель Натанзона-Орлова

В простейшем случае комплексной матричной модели [69], где интегрирование идет по $N_1 \times N_2$ матрицам Z , мы имели утверждение [104]

$$\begin{aligned} \langle S_R \{ \text{Tr} (ZZ^\dagger)^k \} \rangle & := \int S_R \{ \text{Tr} (ZZ^\dagger)^k \} \cdot \exp(-\text{Tr} ZZ^\dagger) d^2 Z = \\ & = \frac{S_R \{ N_1 \} S_R \{ N_2 \}}{d_R}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Естественно искать дальнейшее обобщение (уточнение) этой формулы, где N_1, N_2 заменены произвольными квадратными матрицами, и, действительно,

такую формулу можно найти [105; 106]:

$$\boxed{\langle S_R[AZBZ^\dagger] \rangle = \frac{S_R[A]S_R[B]}{d_R}}, \quad (4.37)$$

что приводит к матрично-модельному представлению чисел Гурвица, полученному в работе С.Натазона и А.Орлова [105; 107]. Здесь A и B — произвольные квадратные матрицы размеров $N_1 \times N_1$ и $N_2 \times N_2$ соответственно. На наш взгляд, это максимально общая форма соотношения суперинтегрируемости для комплексной матричной модели, и следует искать ее обобщение на другие матричные модели, включая эрмитову модель и ее фермионный аналог, отвечающий спиновым числам Гурвица.

В этом разделе мы рассмотрим применение (4.37) к числам Гурвица в [105] и предоставим комбинаторное доказательство этого соотношения как в бозонном, так и в фермионном случаях в духе [106].

Производящая функция чисел Гурвица - это формальный степенной ряд из полиномов Шура:

$$\mathcal{Z}_m(p^{(1)}, \dots, p^{(m)}) = \sum_R d_R^{2-m} \cdot S_R(p^{(1)}) \dots S_R(p^{(m)}), \quad (4.38)$$

обобщающий типичные разложения по характерам для матричных моделей и τ -функций. Здесь $p_k^{(i)}$ - различные набор переменных. В [105] была предложена реализация этой производящей функции в виде матричной модели (4.38),

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_m(p^{(1)}, \dots, p^{(m)}) &= \prod_{i=1}^m \int d^2 Z_i e^{-\text{tr} Z_i Z_i^\dagger} \exp\left(\text{tr} \prod_{i=1}^m Z_i A_i\right) \exp\left(\text{tr} \prod_{i=1}^m Z_i^\dagger\right) = \\ &= \prod_{i=1}^m \int d^2 Z_i e^{-\text{tr} Z_i Z_i^\dagger} \exp\left(\text{tr} A_1 Z_2 A_2 Z_3 A_3 \dots Z_3^\dagger Z_2^\dagger\right) \end{aligned}$$

с $p_k^{(i)} = \text{Tr } A_i^k$. Эта формула основана на элементарном свойстве

$$\begin{aligned}
& \int e^{\text{tr } A_1 Z_2 \mathcal{A}_2 Z_2^\dagger} e^{-\text{tr } Z_2 Z_2^\dagger} d^2 Z_2 = \\
& = \frac{1}{\text{Det}(I \otimes I - A_1 \otimes \mathcal{A}_2)} = \exp\left(\sum_k \frac{\text{tr } A_1^k \text{tr } \mathcal{A}_2^k}{k}\right) = \\
& = \sum_R \underbrace{\text{Schur}_R\{\overbrace{p_k^{(1)}}^{\text{tr } A_1^k}\}}_{\text{Schur}_R[A_1]} \cdot \underbrace{\text{Schur}_R\{\overbrace{p_k^{(2)}}^{\text{tr } \mathcal{A}_2^k}\}}_{\text{Schur}_R[\mathcal{A}_2]}, \tag{4.39}
\end{aligned}$$

которое дополняется многократным применением следующего обобщения интеграла Ициксона-Зубера:

$$\int \underbrace{\text{Schur}_R\left\{\text{tr}(A_2 Z_3 \mathcal{A}_3 Z_3^\dagger)^k\right\}}_{\text{Schur}_R[A_2 Z_3 \mathcal{A}_3 Z_3^\dagger]} e^{-\text{tr } Z_3 Z_3^\dagger} d^2 Z_3 = \frac{\underbrace{\text{Schur}_R\{\overbrace{p_k^{(2)}}^{\text{tr } A_2^k}\}}_{\text{Schur}_R[\delta_{k,1}]} \cdot \underbrace{\text{Schur}_R\{\overbrace{p_k^{(3)}}^{\text{tr } \mathcal{A}_3^k}\}}_{d_R}}{\text{Schur}_R[\delta_{k,1}]}, \tag{4.40}$$

что и является отношением (4.37). Чтобы получить (4.38), мы применяем эти формулы индуктивно, полагая:

$$\mathcal{A}_k = A_k Z_{k+1} \mathcal{A}_{k+1} Z_{k+1}^\dagger. \tag{4.41}$$

4.4.3 К Q-функциям Шура

Важной задачей является нахождение обобщения моделей Натансона-Орлова для производящих функций спиновых чисел Гурвица. Соответствующая производящая функция вместо (4.38) дается формулой [101]:

$$\mathfrak{Z}_m^p(p^{(1)}, \dots, p^{(m)}) = \sum_{R \in SP} (-1)^{p \cdot l_R} \cdot \mathfrak{d}_R^{2-m} \cdot Q_R(p^{(1)}) \dots Q_R(p^{(m)}), \tag{4.42}$$

где производящая функция дополнительно зависит от параметра $p = 0, 1$, кодирующего спиновую структуру, сумма идет по строгим разбиениям с l_R частями,

а $\mathfrak{d}_R = \frac{1}{2}Q_R\{\delta_{k,1}\}$. Другими словами, чтобы иметь дело со спиновыми числами Гурвица, нужно найти обобщение формулы (4.37) с S_R на Q -функции Шура Q_R . Для этого нужно добавить фермионы уже на самом первом шаге. Чтобы увидеть это, обратим внимание, что аналогом (4.37) является формула

$$\langle S_R(A\Psi B\Psi^\dagger) \rangle = (-1)^{|R|} \frac{S_R(-A)S_R(B)}{d_R}. \quad (4.43)$$

Получаемая с помощью фермионного интеграла

$$\begin{aligned} \int d^2\Psi e^{-\text{tr}\Psi\Psi^\dagger + \text{tr}A\Psi B\Psi^\dagger} &= \sum_R (-1)^{|R|} S_R(-A)S_R(B) = \\ &= \exp\left(-\sum_k \frac{(-1)^k \text{tr}A^k \text{tr}B^k}{k}\right) = \det(1 + A \otimes B). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Здесь Ψ - грассмановы матрицы. При этом для суперинтеграла, то есть при налии и бозонных и фермионных переменных, легко получаем

$$\begin{aligned} \int e^{\text{tr}A_1 Z A_2 Z^\dagger + \text{tr}A_1 \Psi A_2 \Psi^\dagger} e^{-\text{tr}Z Z^\dagger + \text{tr}\Psi \Psi^\dagger} d^2 Z d^2 \Psi &= \frac{\text{Det}(I \otimes I + A_1 \otimes A_2)}{\text{Det}(I \otimes I - A_1 \otimes A_2)} = \\ &= \exp\left(\sum_{k-\text{нечетные}} \frac{\text{tr}A_1^k \text{tr}A_2^k}{k}\right) = \sum_R 2^{-|R|} Q_R\{\text{tr}A_1^k\} Q_R\{\text{tr}A_2^k\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Таким образом, при полностью суперсимметричном интегрировании действительно возникают Q -функции Шура. Это согласуется с тем, что в странной супералгебре одинаковое число четных и нечетных переменных. Техническое доказательство формулы (4.37) и (4.43) мы приводим в приложении В.

В заключение этого раздела заметим, что Q -аналог (4.37) следует, по всей видимости, искать другим способом, поскольку теория Q -функций обобщает эрмитову вместо комплексной матричной модели. Это согласуется с тем, что Q -функции характеры [103] представлений супергруппы, ассоциированной со специальной редукцией $gl(n|n)$, "странной" супералгебры $\mathfrak{q}(n)$ [102], а характеры, связанные с $gl(n|m)$, представляют собой суперсимметричные функции Шура [108], которые в терминах степенных сумм p_k сводятся к обычным Функции Шура.

Глава 5. Уравнение Пенлеве VI в логарифмической матричной модели

5.1 Введение

В одной из формулировок АГТ соответствие [109; 110] состоит в равенстве инстантонных статсумм суперсимметричных калибровочных теорий, известных как функции Некрасова [111–114], и $2d$ конформных блоков [115]. При некоторых условиях целочисленности на конформные размерности, АГТ соответствие можно понимать [116; 117] как двойственность Хаббарда-Стратановича в матричной модели Доценко-Фатеева (ДФ) [118; 119] (относится к классу моделей типа Пеннера с логарифмическим потенциалом). Интересное наблюдение [60; 120] (см. также более позднее развитие в [121–124]) состоит в том, что своеобразная линейная комбинация конформных блоков удовлетворяет уравнению Пенлеве VI [125], который *a priori*, кажется, не имеет ничего общего ни с теорией функций Некрасова, ни с матричными моделями. Оказывается, однако, что уравнению Пенлеве VI, естественно возникает и в теории функций Некрасова [61; 126], и в теории матричных моделей является следствием общей парадигмы, согласно которой следует ожидать уравнения Пенлеве для статсумм матричных моделей, что мы покажем ниже.

Возникновение уравнения Пенлеве оказывается результатом двух дополняющих друг друга свойств матричных моделей [5], которые мы обсуждали на протяжении этой работы: интегрируемость и тождества Уорда. Как мы уже показали в разделе 2, они объединяются в свойство *суперинтегрируемости* этих моделей, что, по всей видимости, является источником исчисления Некрасова [127]. Это может подразумевать более прямую связь между суперинтегрируемостью и уравнениями Пенлеве, что, однако, нуждается в более тщательном изучении и остается за рамками настоящей работы.

Матричная модель ДФ не является гауссовой, поэтому он имеет многочисленные фазы Дейкграафа-Вафа, различающиеся выбором контуров интегрирования. Проблема в том, что при конкретном выборе фазы (если только все контуры не совпадают) статистическая сумма не обладает детерминантным

представлением и не является τ -функцией КП, как мы обсуждали в 1.2.2. Вместо этого τ -функции возникают как простая линейная комбинация интегралов ДФ [128], и частные интегралы ДФ появляются как её обратное преобразование Фурье.

Оказывается, наиболее удобный язык для изучения интегрируемости в моделях ДФ — это уравнения Хироты в *переменных Мицви*, являющиеся в этом случае конечно-разностными. Эти уравнения фактически описывают особый вид τ -функций, известных как τ -функция (q) -Пенлеве VI. Их можно переписать в терминах восьми различных τ -функций, которые на самом деле отвечают восьми различным сдвигам исходной КП τ -функции. В этой системе можно заметить, что уравнения ровно для половины этих функций на самом деле связаны с *линейными* уравнениями, хотя и очень сложным образом. Неудивительно, что это означает, что система разделена на две части: квадратичные уравнения интегрируемой системы и (имеющее линейное происхождение) тождества Уорда. На самом деле получается, что они делятся на равные части: четыре и четыре.

В моделях ДФ можно выбрать центральный заряд $c = 1$. Это исключает β -деформацию и гарантирует отсутствие внутреннего нарушения интегрируемости. Тем не менее тогда существует целое семейство деформаций с параметром $t = q$ (тогда как в общем случае $t = q^\beta$). Если посмотреть на калибровочную сторону АГТ соответствия, $q \neq 1$ относится к $5d$ калибровочным теориям [129], а q кодирует радиус пятого измерения. Предел $q \rightarrow 1$ соответствует обращению радиуса к нулю, когда калибровочная теория $5d$ сводится к $4d$. Этот предел выглядит «непрерывным» на уровне Вирасоро-подобных тождеств Уорда, когда разностные операторы при $q \neq 1$ становятся дифференциальными при $q = 1$.

В настоящей главе мы преследуем две цели. В первую очередь даем обзор перечисленных тем и собираем различные идеи, рассеянные по [47; 128; 130], в единое замкнутое изложение. Во-вторых, мы объясняем, как различные части конструкции ведут себя в неавтономном пределе от $5d$ до $4d$ калибровочной теории. Мы демонстрируем, что наиболее важные структуры выживают после взятия предела. В частности, мы тщательно следим за неформальным соотношением «интегрируемость + струнное уравнение = Пенлеве» и показываем, что оно согласуется с непрерывным пределом. Таким образом мы делаем шаг в прояснении связи между τ -функцией q -уравнений Пенлеве VI, отвечающей

пятимерной функции Некрасова, и τ -функцией непрерывных уравнений Пенлеве VI, соответствующей четырехмерному пределу. Обратим внимание, что непрерывный предел довольно прост с точки зрения матричной модели ДФ, но довольно сложен с точки зрения билинейных уравнений. Мы изучаем предельный переход и описываем, как ведут себя такие структуры, как условия q -Вирасоро, билинейные уравнения и q -уравнения Пенлеве. В качестве дополнительного результата перехода к пределу мы получаем другое представление τ -функции дифференциального уравнения Пенлеве в терминах конформных блоков.

Разделы этой главы имеют следующую структуру. Сначала мы рассмотрим пример того, как появляются уравнения Пенлеве в матричных моделях. Затем опишем общие свойства матричных моделей в переменных Мивы. Затем мы начнем непосредственно со случая q -деформации и после перейдем к описанию непрерывного предела. В последнем разделе в мы обсуждаем важный частный случай, когда конформные блоки вырождены, который связан с АГТ пределом чистой калибровочной теории. В этом случае модель ДФ заменяется матричной моделью Брезина-Гросса-Виттена (БГВ) [131], и его связь с уравнением Пенлеве становится особенно простой и прозрачной. Этот шаг приводит к уравнению Пенлеве III.

5.1.1 Уравнения Пенлеве из интегрируемости и условий Вирасоро

Напомним, что одной из основных особенностей матричной модели (1.52) является существование бесконечного множества условий Вирасоро, которым она удовлетворяет как функция времен $t_k = \frac{p_k}{k}$. Если выбрать меру в общем виде

$$\mu(x) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} T_k x^k \right), \quad (5.1)$$

тогда условия Вирасоро имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{L}_n Z_N^{(\mu)}(t_k) &= 0, \quad n \geq -1 \\ \hat{L}_n &= \sum_k k(T_k + t_k) \frac{\partial}{\partial t_{k+n}} + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_{n-a}} + \\ &+ 2N \frac{\partial}{\partial t_n} + N^2 \delta_{n,0} + N(T_1 + t_1) \delta_{n+1,0}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Эти уравнения отражают инвариантность интеграла при любой аналитической замене переменных интегрирования с учетом граничных условий. Известно, что редукция условий Вирасоро к небольшому набору переменных времени часто приводит к уравнениям Пенлеве, что дополняет хорошо известную задачу о свойстве Пенлеве редукции интегрируемых систем к обыкновенным дифференциальным уравнениям [56; 57; 132]. Покажем, как можно свести бесконечную систему условий Вирасоро для статистической суммы, являющейся τ -функцией интегрируемой иерархии, к обыкновенному дифференциальному уравнению. Когда это уравнение второго порядка, оно содержится в списке Пенлеве [125].

Для начала, снова рассмотрим гауссову модель с мерой (1.11), т.е. с $T_k = -\frac{1}{2}\delta_{k,2}$. Тогда низшее условие Вирасоро $\hat{L}_{-1} Z_N^{\text{Gaycc}}(t_k) = 0$, называемое струнным уравнением, вместе со свойством интегрируемости гарантирует выполнение всех условий Вирасоро [5; 133]. Следовательно, струнное уравнение - это единственное дополнительное условие на τ -функцию:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)t_{k+1} \frac{\partial}{\partial t_k} - \frac{\partial}{\partial t_1} + Nt_1 \right) Z_N^{\text{Gaycc}}(t_k) = 0. \quad (5.3)$$

Продифференцируем это уравнение по t_1 и положим все времена равными нулю, кроме первых трех: $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = t$. Тогда из струнного уравнения получается

$$2yu_x + 3tu_y - u_x = 0, \quad u = \partial_x^2 \log Z_N^{\text{Gaycc}}(x, y, t). \quad (5.4)$$

Дифференцируя это уравнение по x и y и подставляя результаты в уравнение КП

$$-4u_{xt} + 3u_{yy} + 6(u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0, \quad (5.5)$$

получаем при $y = 0$:

$$-12t^2 u_t + u_x - 6tu + 18t^2(u^2)_x + 3t^2 u_{xxx} = 0. \quad (5.6)$$

Чтобы убрать член u_t , нужно использовать второе условие Вирасоро, $\hat{L}_0 Z_N^{\text{Гайсс}}(t_k) = 0$:

$$\left(\sum_k kt_k \frac{\partial}{\partial t_k} - \frac{\partial}{\partial t_2} + N^2 \right) Z_N^{\text{Гайсс}}(t_k) = 0. \quad (5.7)$$

Продифференцируем его дважды по x и используем (5.4), чтобы исключить u_y . В результате получим

$$3tu_t + 2u + xu_x - \frac{u_x}{3t} = 0. \quad (5.8)$$

Выражая u_t из этого выражения, окончательно получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно x , где t является просто параметром:

$$2tu + \left(4xt - \frac{1}{3} \right) u_x + 18t^2(u^2)_x + 3t^2 u_{xxx} = 0 \quad (5.9)$$

Это ОДУ третьего порядка и, следовательно, не содержится в списке Пенлеве [125]. Однако не сложно проверить, что оно удовлетворяет свойству Пенлеве.

Чтобы получить более простой пример, можно посмотреть на модель Концевича (3.46) ($Z^K = Z_2^{\text{ОМК}}$). Статистическая сумма этой модели удовлетворяет условиям Вирасоро (3.47)

$$\begin{aligned} \hat{L}_n^K Z^K(t) &= 0, \quad n \geq -1 \\ \hat{L}_n^K &:= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} kt_k \frac{\partial}{\partial t_{k+2n}} + \frac{1}{4} \sum_{a=1}^{2n-1} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_{2n-a}} + \frac{t_1^2}{4} \delta_{n,-1} + \frac{1}{16} \delta_{n,0} - \frac{\partial}{\partial t_{2n+3}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

где суммы по k и a пробегает нечетные числа, так как $Z^K(t)$ не зависит от t_{2k} . Как и в случае гауссовой эрмитовой модели, можно рассмотреть случай, когда только t_1 и t_5 не равны нулю. Однако получаемое ОДУ проще, поскольку $Z_K(t)$ удовлетворяет более простой иерархии Кортвега-де-Вриза (КдВ), которая является одномерной иерархией. Действительно, из струнного уравнения

$\hat{L}_n^K Z_K(t) = 0$ получаем при $t_3 = 0$

$$5t_5 u_t + 1 = 2u_x, \quad u = \partial_x^2 \log Z^K, \quad (5.11)$$

где мы снова обозначаем $t_1 = x$, $t_3 = t$. Теперь, используя уравнение КдВ, которое является y -независимой редукцией уравнения КП (5.5),

$$-4u_t + 6(u^2)_x + u_{xxx} = 0 \quad (5.12)$$

сводится (5.11) к

$$5t_5 u_{xx} + 30t_5 u^2 + 4x - 8u = \text{const}. \quad (5.13)$$

Это второе уравнение Пенлеве [125] (после сдвига на u и масштабирования).

5.2 Матричные модели в переменных Мивы: уравнения Хироты

Далее мы собираемся изучить матричные модели в другой параметризации, заданной так называемым преобразованием Мивы

$$t_k = \frac{1}{k} \sum_{a=1}^{\infty} 2\alpha_a z_a^{-k} \quad (5.14)$$

к переменным Мивы z_a с кратностями α_a , которые имеют интерпретацию собственных значений внешней матрицы: $t_k = \frac{1}{k} \text{Tr} M^{-k}$ и их кратности. После такого преобразования эрмитов матричный интеграл (1.11) принимает вид

$$Z_N(z_a; \alpha_a) := \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N dx_i \mu(x_i) \Delta^2(x) \prod_{i=1}^N \prod_{a=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_i}{z_a}\right)^{2\alpha_a}. \quad (5.15)$$

Мивовский множитель в этом интеграле

$$\prod_{a=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_i}{z_a}\right)^{2\alpha_a} = \exp \left(2 \sum_{a=1}^{\infty} \alpha_a \log \left(1 - \frac{x_i}{z_a}\right) \right) \quad (5.16)$$

можно с таким же успехом интерпретировать, как логарифмические слагаемые в потенциале матричной модели, добавляющие больше фаз ДВ. Это означает, что можно выбирать фазы ДВ, оставляя только конечное число переменных Мивы. Любой конкретный выбор сам по себе является редукцией бесконечного набора переменных.

В этой постановке мы собираемся изучить условия Вирасоро и уравнения Хироты. Даже в сокращенном пространстве переменных Мивы можно записать замкнутое выражение для (некоторых) условий Вирасоро. Что касается интегрируемости, то в этом случае можно записать уравнения Хироты в переменных Мивы [68; 134; 135]. Они становятся билинейными разностными уравнениями, например,

$$\begin{aligned} & (z_a - z_b) \cdot Z_N(\alpha_c + 1/2) \cdot Z_N(\alpha_a + 1/2, \alpha_b + 1/2) + \\ & + (z_b - z_c) \cdot Z_N(\alpha_a + 1/2) \cdot Z_N(\alpha_b + 1/2, \alpha_c + 1/2) + \\ & + (z_c - z_a) \cdot Z_N(\alpha_b + 1/2) \cdot Z_N(\alpha_a + 1/2, \alpha_c + 1/2) = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Другой интересующий нас пример билинейных соотношений Хироты включает статистические суммы со сдвигами в направлении нулевого дискретного времени Тоды N и при $z_a = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} & z_b \cdot Z_N(\alpha_c - 1/2) \cdot Z_{N-1}(\alpha_a + 1/2, \alpha_b + 1/2) - \\ & - Z_N(\alpha_a + 1/2, \alpha_c - 1/2) \cdot Z_{N-1}(\alpha_b + 1/2) - \\ & - z_b \cdot Z_N(\alpha_b + 1/2, \alpha_c - 1/2) \cdot Z_{N-1}(\alpha_a + 1/2) = 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} & z_c \cdot Z_{N-1} \cdot Z_N(\alpha_a - 1/2, \alpha_b - 1/2, \alpha_c - 1/2) - \\ & - Z_{N-1}(\alpha_a - 1/2) \cdot Z_N(\alpha_b - 1/2, \alpha_c - 1/2) - \\ & - z_c \cdot Z_{N-1}(\alpha_c - 1/2) \cdot Z_N(\alpha_a - 1/2, \alpha_b - 1/2) = 0 \end{aligned}$$

5.3 Матричные модели в переменных Мивы: условия Вирасоро

Условия Вирасоро в переменных Мивы изучены гораздо меньше, и практически неизвестно, как их систематически строить. Мы излагаем наше текущее понимание проблемы.

Наше наблюдение состоит в том, что условия Вирасоро в параметризации Мивы также могут быть записаны в билинейной форме. Поскольку нас интересует фаза ДВ, рассмотрим простейший пример - игрушечный пример модели бета-функции

$$B_N(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 \prod_{i=1}^N dx_i \Delta^2(x) \prod_{i=1}^N x_i^{2\alpha_1} (1-x_i)^{2\alpha_2}. \quad (5.19)$$

Начнем с простейшего случая $N = 1$. Подставим под интеграл полную производную и получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 dx \frac{\partial}{\partial x} [x^n x^{2\alpha_1} (1-x)^{2\alpha_2}] = \\ &= (2\alpha_1 + n) B_1(\alpha_1 + n/2 - 1/2, \alpha_2) - 2\alpha_2 B_1(\alpha_1, \alpha_2 - 1/2). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Это уравнение определенно зависит от выбора меры, которая здесь тривиальна $\mu(x) = 1$. Есть также уравнение, которое является лишь первым из уравнений Хироты (5.18), и для $N = 1$, $z_b = 1$ и $Z_0 = 1$ оно выглядит так:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 dx [x + (1-x) - 1] x^{2\alpha_1} (1-x)^{2\alpha_2} = \\ &= B_1(\alpha_1 + 1/2, \alpha_2) + B_1(\alpha_1, \alpha_2 + 1/2) - B_1(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (5.21)$$

и не меняется при добавлении нетривиальной меры $\mu(x)$, так как основано на тождественном обращении в нуль подынтегральной функции. Это простейшая реализация различия между интегрируемостью и уравнениями Вирасоро.

Уравнения, зависящие от меры $N = 1$ (5.20), являются линейными, что, по-видимому, является особенностью этого простого случая, как и в случае с уравнением Хироты. Теперь проиллюстрируем явление, возникающее при переходе к $N = 2$. Рассмотрим низшее условие Вирасоро, которое будет соответ-

ствовать следующей вставке:

$$0 = \int dx_1 dx_2 (\partial_{x_1} + \partial_{x_2}) \left[(x_1 - x_2)^2 \prod_{i=1}^2 x_i^{2\alpha_1} (1 - x_i)^{2\alpha_2} \right] = \Phi(\alpha_1, \alpha_2). \quad (5.22)$$

Правая часть формулы выражается через корреляторы, однако не может быть представлена как действие некоторого разностного оператора, действующего на α . Его можно сделать билинейным и переставить члены в подынтегральном выражении, переименовав переменные, чтобы получить

$$0 = \Phi(\alpha_1, \alpha_2) \cdot B_1(\alpha_1, \alpha_2) = (2\alpha_1)B_2(\alpha_1 - 1/2, \alpha_2) B_1(\alpha_1 + 1/2, \alpha_2) - \quad (5.23) \\ - 2\alpha_2 B_2(\alpha_1, \alpha_2 - 1/2) B_1(\alpha_1, \alpha_2 + 1/2).$$

Следовательно, чтобы реализовать условия Вирасоро как оператор в координатах Мивы, действующий на статистическую сумму, необходимо сделать их билинейными и использовать некоторые тождества в подынтегральном выражении. В связи с этим возникает вопрос, можно ли в этом случае действительно распутать уравнения Вирасоро и уравнения интегрируемости. На данный момент у нас нет четкого ответа. Однако как мы увидим далее, билинейная форма вполне естественна для "зависимых от меры" соотношений в матричной модели Доценко-Фатеев.

Аналог уравнения Хироты для модели бета-функции $N = 2$ определяется выражением:

$$B_2(\alpha_1, \alpha_2) B_1\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \alpha_2 + \frac{1}{2}\right) - B_2\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \alpha_2\right) B_1\left(\alpha_1, \alpha_2 + \frac{1}{2}\right) - \quad (5.24) \\ - B_2\left(\alpha_1, \alpha_2 + \frac{1}{2}\right) B_1\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \alpha_2\right) = 0.$$

Уравнения Вирасоро для модели с тремя ненулевыми кратностями представлены в [130], здесь мы разъяснили их происхождение на более простом примере.

q-деформация. Квантовая деформация матричной модели сводится к замене интегралов интегралами Джексона,

$$\int_0^a d_q x f(x) = (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n a), \quad (5.25)$$

и замены

$$\left(1 - \frac{x_i}{z_a}\right)^{2\alpha_a} \longrightarrow (z_a^{-1}x_i; q)_{2\alpha_a}, \quad (5.26)$$

где $(x, q)_n$ — символ q -Похгаммера:

$$(x, q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - q^i x). \quad (5.27)$$

Следовательно, интеграл (5.15) принимает вид

$$Z_N(z_a; \alpha_a) := \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N d_q x_i \mu(x_i) \Delta^2(x) \prod_{i=1}^N \prod_{a=1}^{\infty} (z_a^{-1} x_i; q)_{2\alpha_a}. \quad (5.28)$$

Вывод условий q -Вирасоро очень похож на недеформированный случай. Вместо обычных производных следует использовать q -разностные операторы

$$D_q^x f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{q - 1} \quad (5.29)$$

и свойство интегралов Джексона

$$\int d_q x D_q^x f(x) = f(0). \quad (5.30)$$

Разберемся на примере модели q -деформированной бета-функции:

$$B_N^{(q)}(\alpha_1, \alpha_2) = \int d_q x_i \Delta^2(x) x_i^{2\alpha_1} (x, q)_{2\alpha_2}. \quad (5.31)$$

Мы используем свойство

$$\int d_q x_i \sum_{i=1}^N D_q^{x_i} (\Delta^2(x) x_i^{2\alpha_1} (x, q)_{2\alpha_2}) = 0 \quad (5.32)$$

и, манипулируя им аналогично недеформированному случаю, получаем билинейную форму условия q -Вирасоро

$$\begin{aligned} & [2\alpha_1]_q B_N^{(q)}(\alpha_1 - 1/2, \alpha_2) B_{N-1}^{(q)}(\alpha_1 + 1/2, \alpha_2) - \\ & - [2\alpha_2]_q B_N^{(q)}(\alpha_1, \alpha_2 - 1/2) B_{N_1}^{(q)}(\alpha_1, \alpha_2 + 1/2) = 0, \end{aligned} \quad (5.33)$$

где мы использовали стандартную запись для квантовых чисел:

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (5.34)$$

Как видим, условия q -Вирасоро в переменных Мивы мало чем отличаются от недеформированного случая.

5.4 q -деформированная матричная модель и q -уравнения Пенлеве

5.4.1 Представление Доценко-Фатеева для конформных блоков

Интегральное представление $c = 1$ конформного блока алгебры Вирасоро, соответствующее $4d$ -калибровочной теории при АГТ-соответствии, дается представлением ДФ [118],

$$B(\Delta_i, \Delta, z) = \mathfrak{Z} \cdot Z_N^{(4d)}, \quad (5.35)$$

$$Z_N^{(4d)} = z^{2\alpha_1\alpha_2} (1 - z)^{2\alpha_2\alpha_3} \cdot \frac{1}{N!} \int \prod_i dx_i \Delta^2(x) \prod x_i^{2\alpha_1} (1 - x_i)^{2\alpha_2} (z - x_i)^{2\alpha_3}, \quad (5.36)$$

где четыре внешних размерности параметризуются импульсами: $\Delta_i = \alpha_i^2$, α_4 определяется из соотношения $N + \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 0$, а сложный, но чисто комбинаторный коэффициент \mathfrak{Z} , выражается через отношение G -функций Барнса, см. в [136].

Статсумма (5.36) — типичный интеграл типа ДВ, аналогичный (1.19), но потенциал теперь не кубический, а представляет собой сумму трех логарифмов [118], так что он также имеет две точки экстремума и два независимых контура интегрирования: $C_1 = [0, z]$ и $C_2 = [1, \infty]$. Как и прежде, собственные значения N_1 интегрируются по C_1 , а собственные значения N_2 — по C_2 . Внутренняя размерность в конформном блоке (5.36) $\Delta = \alpha^2$ определяется из соотношения

$$N_1 = \alpha - \alpha_1 - \alpha_2, \quad N_2 = -\alpha - \alpha_3 - \alpha_4. \quad (5.37)$$

Это означает, что, строго говоря, представления в виде матричной модели существуют только тогда, когда эти два условия целочисленности наложены на конформные импульсы, а конформный блок при общих значениях внешних размерностей получается аналитическим продолжением. Это аналитическое продолжение можно сделать в терминах различных разложений конформного блока [137]. Аналитическое продолжение сложно сформулировать для детерминантного представления, которым обладает статистическая сумма матричной модели, поскольку мы получили бы определитель матрицы нецелого размера. Одна из возможностей справиться с этой ситуацией состоит в том, чтобы заменить определитель матрицы на бесконечномерный определитель функционального оператора. Эта идея была реализована с конформной стороны АГТ-соотношения [121–124]. Однако в этой работе подход был фактически применим только для случая, когда конформные импульсы удовлетворяют

$$\begin{aligned} \alpha_1 \pm \alpha_2 + \alpha &\notin \mathbb{Z}, & \alpha_1 \pm \alpha_2 - \alpha &\notin \mathbb{Z}, \\ \alpha_3 \pm \alpha_4 + \alpha &\notin \mathbb{Z}, & \alpha_3 \pm \alpha_4 - \alpha &\notin \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

то есть условие дополнительное, к ограничению в матричной модели на конформные импульсы (5.37). Сложные функциональные детерминанты в работах, посвященных доказательству [121–124] являются не чем иным, как обобщениями из *конечных*, составленных из очень простых гипергеометрических функций, которые возникают в ”целочисленном” локусе (5.37).

Как обычно в фазе ДВ, для получения τ -функции интегрируемой иерархии необходимо произвести преобразование Фурье по параметрам N_i , см. раздел 1.2.2, которое также можно понимать как суммирование по внутренней размерности конформного блока:

$$Z_N^{(4d)}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{N_1, N_2: N_1 + N_2 = N} \xi_1^{N_1} \xi_2^{N_2} \cdot Z_{N_1, N_2}^{(4d)}. \quad (5.39)$$

После преобразования Фурье от $N_{1,2}$ к $\xi_{1,2}$ контур интегрирования формально задается выражением

$$\int_C = \xi_1 \int_{C_1} + \xi_2 \int_{C_2}. \quad (5.40)$$

Эти интегралы соответствуют общей матричной модели (5.15) в фазе, где три переменных Мивы отличны от нуля.

Заметим, что при замене переменных $x_i \rightarrow zx_i$ интегралы по $C_1 = [0, z]$ преобразуются в интегралы по $C = [0, 1]$. Аналогично, при замене $x_i \rightarrow x_i^{-1}$, интегралы по $C_2 = [1, \infty]$ преобразуются в интегралы по C . Это позволяет переписать интеграл (5.36) в виде

$$\begin{aligned}
Z_{N_1, N_2}^{(4d)} &= z^{2\alpha_1\alpha_2}(1-z)^{2\alpha_2\alpha_3} \times \\
&\times \frac{1}{N_1!N_2!} \int_0^1 \prod_{i=1}^{N_1} \left(du_i u_i^{2\alpha_1} (1-zu_i)^{2\alpha_2} (1-u_i)^{2\alpha_3} \right) \Delta^2(u) \times \\
&\times \int_0^1 \prod_{j=1}^{N_2} \left(dv_j v_j^{-2\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3-2N_1-2} (1-v_j)^{2\alpha_2} (1-zv_j)^{2\alpha_3} \right) \Delta^2(v) \times \\
&\times \prod_{i=1}^{N_1} \prod_{j=1}^{N_2} (1-zu_i v_j)^2.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Аналогично, в случае $5d$ -калибровочной теории отправной точкой является q -конформный блок Вирасоро, АГТ двойственный $5d$ -калибровочной теории. Его реализация в терминах интегралов по собственным значениям (интегралов q -Сельберга) имеет вид [117]

$$\begin{aligned}
Z_{N_1, N_2}^{(5d)} &= z^{2\alpha_1\alpha_2}(z; q)_{2\alpha_2\alpha_3} \times \\
&\times \frac{1}{N_1!N_2!} \int \prod_{i=1}^{N_1} \left(z^{2\alpha_1+2\alpha_2+N_1} d_q u_i u_i^{2\alpha_1} (u_i; q)_{2\alpha_2} (zu_i; q)_{2\alpha_3} \right) \Delta^2(u) \times \\
&\times \int \prod_{j=1}^{N_2} \left(d_q v_j v_j^{-2\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3-2N_1-2} (zv_j; q)_{2\alpha_2} (v_j; q)_{2\alpha_3} \right) \Delta^2(v) \times \\
&\times \prod_{i=1}^{N_1} \prod_{j=1}^{N_2} (1-zu_i v_j)^2.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Для получения τ -функции интегрируемой иерархии снова требуется преобразование Фурье по параметрам N_i , которое также можно понимать как суммирование по внутренней размерности конформных блоков:

$$Z_N^{(5d)}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{N_1, N_2: N_1+N_2=N} \xi_1^{N_1} \xi_2^{N_2} \cdot Z_{N_1, N_2}^{(5d)} \tag{5.43}$$

5.4.2 Детерминантное представление для конформного блока q -Вирасоро

Теперь мы изучим q -деформированный случай, так как, хотя формулы в этом случае более сложны, при этом удастся сформулировать утверждение более наглядно. Можно записать детерминантное представление для преобразования Фурье статистических сумм (что обеспечивает интегрируемость):

$$Z_N^{(5d)}(\xi_1, \xi_2) = z^{2\alpha_1\alpha_2}(z; q)_{2\alpha_2\alpha_3} \cdot \det_{1 \leq i, j \leq N} M_{i+j-2}, \quad (5.44)$$

где моменты M_k в данном случае равны:

$$\begin{aligned} M_k &= \xi_1 z^{2\alpha_{12}+k+1} \int d_q u u^{2\alpha_1+k}(u; q)_{2\alpha_2} (q^{-1}zu; q)_{-2\alpha_3}^{-1} + \\ &\quad + \xi_2 q^{-(2\alpha_1+1)(2\alpha_{23}+1)} \int d_q v v^{-2\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3-2-k} (q^{-1}zv; q)_{-2\alpha_2}^{-1} (v; q)_{2\alpha_3} = \\ &= \xi_1 \cdot z^{2\alpha_{12}+k+1} \cdot \mathfrak{B}_q(2\alpha_1 + k + 1, 2\alpha_2 + 1) \times \\ &\quad \times {}_2\phi_1(q^{-2\alpha_3}, q^{2\alpha_1+k+1}; q^{2\alpha_{12}+k+2}; q, z) + \\ &\quad + \xi_2 \cdot q^{-(2\alpha_1+1)(2\alpha_{23}+1)} \cdot \mathfrak{B}_q(-2\alpha_{123} - k - 1, 2\alpha_3 + 1) \times \\ &\quad \times {}_2\phi_1(q^{-2\alpha_2}, q^{-2\alpha_{123}-k-1}; q^{-2\alpha_{12}-k}; q, z). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Здесь q -бета-функции задаются следующим образом:

$$\mathfrak{B}_q(\alpha, \beta) = \int_0^1 d_q x x^{\alpha-1} (x; q)_{\beta-1} = \frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha + \beta)}, \quad (5.46)$$

где $\Gamma_q(\alpha)$ является q - Γ -функцией, а ${}_2\phi_1$ — q -гипергеометрический ряд Гейне:

$${}_2\phi_1(a, b; c; q, z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n (b; q)_n}{(c; q)_n (q; q)_n} z^n. \quad (5.47)$$

Для простоты некоторые формулы ниже будут представлены для случая $\xi_2 = 0$.

5.5 q -деформированное уравнение Пенлеве VI

Уравнения q -Пенлеве VI задаются [138]:

$$\frac{w_1(z)w_1(qz)}{a_3a_4} = \frac{(w_2(qz) - b_1z)(w_2(qz) - b_2z)}{(w_2(qz) - b_3)(w_2(qz) - b_4)}, \quad (5.48)$$

$$\frac{w_2(z)w_2(qz)}{b_3b_4} = \frac{(w_1(z) - a_1z)(w_1(z) - a_2z)}{(w_1(z) - a_3)(w_1(z) - a_4)}. \quad (5.49)$$

Условие совместности этих уравнений требует соотношения

$$\frac{b_1b_2}{b_3b_4} = q \frac{a_1a_2}{a_3a_4}. \quad (5.50)$$

Масштабируя переменные z , w_1 и w_2 и используя условие согласованности, можно уменьшить количество независимых параметров до четырех. На протяжении всей работы мы используем параметризацию, продиктованную параметрами в конформном блоке:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + N = 0, \quad a_1 = q, \quad a_2 = q^{1-N-2\alpha_3}, \quad a_3 = q^{2-N}, \quad a_4 = q^{2\alpha_2+1}, \\ b_1 = q^{-2\alpha_2+1}, \quad b_2 = q^{2\alpha_1+2\alpha_3+N+1}, \quad b_3 = q^{2\alpha_3+1}, \quad b_4 = q^{2\alpha_1+2\alpha_3+N+1}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Обратим внимание, что свободных параметров q^{α_i} , $i = 1, \dots, 4$ ровно четыре.

Из уравнения (5.48) можно найти $w_2(qz)$ как функцию $w_1(z)w_1(qz)$, решая квадратное уравнение. После масштабирования переменной $z \rightarrow q^{-1}z$ имеем:

$$\frac{w_1(q^{-1}z)w_1(z)}{a_3a_4} = \frac{(w_2(z) - b_1q^{-1}z)(w_2(z) - b_2q^{-1}z)}{(w_2(z) - b_3)(w_2(z) - b_4)}. \quad (5.52)$$

Аналогичным образом можно найти $w_2(z)$ как функцию $w_1(q^{-1}z)w_1(z)$. Подставляя эти $w_2(z)$ и $w_2(qz)$ в уравнение (5.49), можно получить уравнение, выражающее $w_1(qz)$ как двузначную функцию от $w_1(z)$ и $w_1(q^{-1}z)$, которое представляет собой разностный аналог дифференциального уравнения второго порядка. Разностное уравнение Пенлеве разделяет различные свойства с непрерывными уравнениями, такие как некоторый аналог свойства Пенлеве и богатая группа преобразований Бэклунда.

5.5.1 Восемь уравнений

Система q -деформированных уравнений Пенлеве может быть представлена в виде восьми билинейных уравнений относительно τ -функций. Одним из способов получения этих уравнений является изучение дискретного аналога свойства Пенлеве, т.е. движений особенностей уравнений. Аналог свойства Пенлеве называется критерием конфайнмента сингулярности [139]. Дискретная эволюция начинается с некоторого начального условия $w_1(z)$. Предположим, что $w_1(z)$ в процессе эволюции достигает полюса a_3 , так что $w(q^{-1}z)$ еще не находится в полюсе. Мы предполагаем общие начальные данные, что означает, что все нули и полюса достигаются при различных значениях z . Теперь в полюсе значение $w_1(z) = a_3 w_2(z)$ конечно: иначе уравнение (5.52) приводит к $w_1(q^{-1}z) = a_4$, то есть к полюсному значению. Поскольку $w_2(z)$ конечно при $w_1(z) = a_3$, $w_2(qz) = \infty$ и, как следует из (5.48), $w_1(qz) = a_4$. Это означает, что на следующем шаге эволюции w_1 снова окажется на полюсе. Однако на следующем шаге нельзя определить результат эволюции: уравнениям удовлетворяет общий $w_2(q^2z)$. Это и есть сингулярность, называемая скрытой. Обратный паттерн возникновения и скрытия сингулярности получается, если вместо этого начать с $w_1(z) = a_4$. Более того, аналогичное рассмотрение применимо к нулям этих уравнений. Всего таких паттернов восемь, четыре из которых связаны с сингулярностями, а четыре — с нулями. Из этих закономерностей движения особенностей можно вывести билинейное представление системы q -Пенлеве [140].

Для его описания мы определяем восемь функций $\tau_i(z)$, неявно зависящих от параметров q -уравнения Пенлеве. Эти τ -функции являются функциями на решетке весов $D_5^{(1)}$ с симметриями относительно аффинной группы Вейля [140] (см. также [141]), и они связаны с функциями $w_{1,2}(z)$ соотношениями

$$\begin{aligned} w_1(z) &= z \frac{\tau_1(qz)\tau_2(z)}{\tau_3(qz)\tau_4(z)}, \\ w_2(z) &= z \frac{b_1 a_4}{a_2 a_3} \cdot \frac{\tau_5(z)\tau_6(z)}{\tau_7(z)\tau_8(z)}. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Описанные движения особенностей закодированы в квадратичных соотношениях между τ -функциями, эквивалентными системе q -Пенлеве [140; 142;

143]. В параметризации (5.51) они принимают вид:

$$\begin{aligned}
zq^{2N-2}\tau_1\tau_2 - q^{2\alpha_2}\tau_3\tau_4 - \tau_7\tau_8 &= 0, \\
\tau_1\tau_2 - q^{1-2\alpha_3-2N}\tau_3\tau_4 - \tau_5\tau_6 &= 0, \\
\bar{\tau}_1\tau_2 - q^{1-N}\bar{\tau}_3\tau_4 - q^{2N-2\alpha_{12}-2}\tau_5\bar{\tau}_6 &= 0, \\
zq^{N-1}\bar{\tau}_1\tau_2 - q^{2\alpha_2}\bar{\tau}_3\tau_4 - \bar{\tau}_7\tau_8 &= 0,
\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}
z\bar{\tau}_1\tau_2 - q^{2-2N}\bar{\tau}_3\tau_4 - q^{-2\alpha_2}\tau_7\bar{\tau}_8 &= 0, \\
\bar{\tau}_1\tau_2 - q^{1-2N-2\alpha_3}\bar{\tau}_3\tau_4 - \bar{\tau}_5\tau_6 &= 0, \\
\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2 - q^{1-N}\bar{\tau}_3\bar{\tau}_4 - q^{2N-2-2\alpha_{12}}\tau_5\tau_6 &= 0, \\
z\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2 - q^{2-N}\bar{\tau}_3\bar{\tau}_4 - q^{N-2\alpha_2}\tau_7\tau_8 &= 0
\end{aligned} \tag{5.55}$$

где мы обозначили $\bar{\tau} = \tau(qz)$ и $\underline{\tau} = \tau(q^{-1}z)$. На самом деле эти восемь τ -функций могут быть выражены через одну τ -функцию $\tau(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z)$, которая является функцией z и четырех параметров $\alpha_i, i = 1 \dots 4$ с разными τ -функциями, соответствующими некоторым сдвигам в пространстве параметров:

$$\begin{aligned}
\tau_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z) &= \tau\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \alpha_2, \alpha_3 + \frac{1}{2}, \alpha_4; z\right) \\
\tau_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z) &= \tau\left(\alpha_1, \alpha_2 - \frac{1}{2}, \alpha_3, \alpha_4 + \frac{1}{2}; z\right), \\
\tau_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z) &= \tau\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \frac{1}{2}, \alpha_4 + \frac{1}{2}; z\right) \\
\tau_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z) &= \tau\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \alpha_2 - \frac{1}{2}, \alpha_3, \alpha_4; z\right), \\
\tau_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z) &= \tau\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \frac{1}{2}; z\right) \\
\tau_6(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z) &= \tau\left(\alpha_1, \alpha_2 - \frac{1}{2}, \alpha_3 + \frac{1}{2}, \alpha_4; z\right), \\
\tau_7(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z) &= \tau\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \alpha_2 - \frac{1}{2}, \alpha_3 + \frac{1}{2}, \alpha_4 + \frac{1}{2}; z\right), \\
\tau_8(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z) &= \tau(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z).
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Параметры снова выбраны для облегчения дальнейшего представления τ -функций в терминах конформных блоков и логарифмической модели. Урав-

нения (5.54,5.55) превращаются в билинейные разностные уравнения для функции $\tau(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z)$. Эти уравнения напоминают билинейные разностные уравнения, рассмотренные нами в разделе 5.2. Мы обсудим их с этой точки зрения далее в этом разделе, а позже изучим их непрерывный предел.

Из вышеизложенного следует ожидать, что, поскольку функцию $w_2(z)$ можно исключить, четыре τ -функции $\tau_{5,6,7,8}$ в некотором смысле также являются вспомогательными. Более того, $w_2(z)$ можно выразить из первых четырех τ -функций аналогично $w_1(z)$: для этого достаточно использовать для этого первые два уравнения (5.54) или два последних уравнения (5.55). Однако исключение последних четырех τ -функций сделало бы структуру оставшихся четырех уравнений гораздо более сложной и непрозрачной.

Конформный блок решает уравнение q -Пенлеве. Описав билинейную форму уравнения q -Пенлеве, мы теперь готовы описать, как статистическая сумма логарифмической q -деформированной матричной модели становится τ -функцией уравнения q -Пенлеве. Напомним связь между конформными параметрами и числом собственных значений:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -N. \quad (5.57)$$

Тогда мы можем идентифицировать две функции следующим образом:

$$\tau(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; z) = z^{-2\alpha_1\alpha_2} (z; q)_{2\alpha_2\alpha_3}^{-1} Z_N^{(5d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (5.58)$$

Это утверждение было впервые исследовано с точки зрения конформной теории поля в [143; 144]. С точки зрения матричной модели утверждение сводится к статистической сумме, которая удовлетворяет соотношениям (5.54,5.55) При связи между α_4 и N левый столбец τ -функций с нечетными индексами соответствует сдвигу $N \rightarrow N - 1$, поэтому отношения выражены квадратичными комбинациями форма $Z_N Z_{N-1}$. Другими словами, решения уравнений q -Пенлеве VI даются

следующими соотношениями статистических сумм:

$$\begin{aligned} w_1(z) &= q^N z \frac{Z_N^{(5d)}(\alpha_1 + \frac{1}{2}, qz) Z_{N-1}^{(5d)}(\alpha_2 - \frac{1}{2}, z)}{Z_N^{(5d)}(\alpha_3 + \frac{1}{2}, qz) Z_{N-1}^{(5d)}(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \alpha_2 - \frac{1}{2}, z)}, \\ w_2(z) &= q^{2\alpha_3 + 2N-1} z \frac{Z_N^{(5d)}(\alpha_1 + \frac{1}{2}, z) Z_{N-1}^{(5d)}(\alpha_2 - \frac{1}{2}, \alpha_3 + \frac{1}{2}, z)}{Z_N^{(5d)}(\alpha_1 + \frac{1}{2}, \alpha_2 - \frac{1}{2}, \alpha_3 + \frac{1}{2}, z) Z_{N-1}^{(5d)}(z)}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

где мы перечислили только те переменные, которые сдвигаются нетривиально.

Билинейные уравнения (5.55, 5.54) являются нашим основным объектом исследования. Мы рассматриваем их с точки зрения матрично-модельного представления конформных блоков. С точки зрения матричной модели эти уравнения имеют специальный смысл. А именно, они распадаются на два набора уравнений. Явной проверкой можно заметить, что уравнения (5.55) не зависят от меры матричной модели, а значит, представляют собой уравнения Хироты, отвечающие за интегрируемость статистических сумм.

Чтобы увидеть это, мы посмотрим на представление собственных значений (5.28) и заметим, что его можно рассматривать как частный случай интеграла (5.15) со специальным выбором переменных Мивы:

$$(0, 2\alpha_1), \quad (zq^{-i}, 1), \quad i = 0, \dots, 2\alpha_2 - 1, \quad (q^{-i}, 1), \quad i = 0, \dots, 2\alpha_3 - 1, \quad (5.60)$$

и интеграл заменен интегралом Джексона. Отличие обычного интегрирования от интегрирования Джексона для уравнений Хироты несущественно, поскольку, как мы видели, их происхождение есть тождество подынтегральной функции. Другими словами, интеграл Джексона можно рассматривать как особый контурный интеграл функции с простыми полюсами в точках (5.60), при этом выбор контура интегрирования не влияет на уравнения Хироты.

Другие уравнения (5.55) зависят от меры. Например, легко проверить, что изменение меры интегрирования в (5.42) на $\prod_i d_q x_i \rightarrow \prod_i x_i d_q x_i$ просто сдвигает $\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + 1/2$ в τ -функциях. При этом мы сохраняем параметр α_1 в коэффициентах уравнений (5.55), (5.54) без изменений. Тогда уравнение (5.54) по-прежнему выполняется, а (5.55) - нет.

Если бы мы начали с уравнений Хироты, то могли бы заключить, что τ -функция может быть представлена интегралом по собственным значениям с произвольной мерой. Это означало бы, что пространство τ -функций столь

же велико, как и пространство решений всей (форсированной) иерархии Тоды. Роль остальных четырех уравнений (5.55) состоит в том, чтобы зафиксировать конкретную логарифмическую меру. Они являются редукцией иерархии Тоды, в частности, к уравнениям q -Пенлеве.

В этом смысле они не что иное, как условия Вирасоро. Как мы обсуждали выше, билинейная форма условий Вирасоро является особенностью параметризации Мивы. Таким образом, система (5.55)+(5.54) играет роль обычной пары "интегрируемость+струнное уравнение" в матричных моделях. Мы видим, что в этом случае структура не так прозрачна, как обычно, поскольку редукция требует довольно сложных комбинаций условий Вирасоро. Как мы увидим ниже, по всей видимой, что это усложнение не связано с q -деформацией, а напротив, случай с q -деформацией оказывается более прозрачным. Скорее всего, ограниченное понимание условий Вирасоро в параметризации Мивы является источником текущих проблем.

Покажем, как это работает в случае $N = 1$, когда уравнения являются линейными. В этом случае уравнения, зависящие от меры, упрощаются, и некоторые из них также становятся следствием интегрируемости, и только первое уравнение (5.55) остается независимым. Отсюда берем первые уравнения из (5.54) и (5.55):

$$\begin{aligned} z\tau_2 - q^{2\alpha_2}\tau_4 - \tau_8 &= 0, \\ z\tau_2 - \tau_4 - q^{-2\alpha_2}\bar{\tau}_8 &= 0. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Несмотря на поразительное сходство, мы легко можем увидеть разную природу этих уравнений. Действительно, перепишем их в терминах статистической суммы и для удобства сделаем общий сдвиг $\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + 1/2$:

$$\begin{aligned} zZ_1^{(5d)}(z) - q^{2\alpha_2+1}Z_1^{(5d)}(\alpha_1 + 1/2, z) - Z_1^{(5d)}(\alpha_2 + 1/2, z) &= 0, \\ zZ_1^{(5d)}(\alpha_2, z) - Z_1^{(5d)}(\alpha_1 + 1/2, \alpha_2, z) - q^{-2\alpha_2-1}Z_1^{(5d)}(\alpha_2 + 1/2, qz) &= 0, \end{aligned} \quad (5.62)$$

где мы явно написали только сдвинутые кратности. Представим эти уравнения через корреляторы в интеграле с исходными параметрами:

$$\begin{aligned} \langle z - q^{2\alpha_2+1}zx - z(1 - q^{2\alpha_2+1}x) \rangle_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} &= 0, \\ \langle z - zx \rangle_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} - \langle z(q^{2\alpha_1}(1 - zq^{-1}x)) \rangle_{\alpha_1, \alpha_2+1/2, \alpha_3-1/2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Первое тождество является тривиальным, оно выполняется без какого-либо интегрирования, поэтому не требует фиксации какой-либо конкретной меры. Второе тождество, однако, является следствием вставки полной q -производной:

$$0 = \int d_q x D_q \left(x^{2\alpha_1} (x; q)_{2\alpha_2+1} (zx; q)_{-2\alpha_3}^{-1} \right). \quad (5.64)$$

Поэтому оно чувствительно к изменениям меры. В этом простом случае легко идентифицировать, какую полную производную нужно вставить под интеграл, и явно показать, как она связана с «базисными» условиями Вирасоро. Для общего N уравнения (5.55) являются аналогами уравнений Вирасоро (5.33) для обобщенной q -бета-функции, но теперь с тремя ненулевыми кратностями.

Обратим внимание, что в этом случае условия Вирасоро представляют собой разностные уравнения в α , но также и в z , что ставит их в более равное положение. Это естественное свойство q -гипергеометрических функций, являющихся компонентами конформного блока. Вспомним, например, симметрию Гейне q -гипергеометрической функции:

$${}_2\phi_1(a, b; c; q, z) = \frac{(b; q)_\infty (az; q)_\infty}{(c; q)_\infty (z; q)_\infty} {}_2\phi_1(c/b, z; az; q, b), \quad (5.65)$$

который смешивает a, b, c и z .

5.6 Предел от q -Пенлеве до Пенлеве VI (от $5d$ до $4d$)

Описав различные компоненты в теории q -Пенлеве, мы переходим к описанию их непрерывного предела.

5.6.1 Конформный блок

Предел от q -Вирасоро до Вирасоро для самих конформных блоков очень прост. Как следует из (5.41), конформный блок имеет детерминантное представ-

ление

$$Z_N(\xi_1, \xi_2) = z^{2\alpha_1\alpha_2}(1-z)^{2\alpha_2\alpha_3} \cdot \det_{1 \leq i, j \leq N} M_{i+j-2}, \quad (5.66)$$

где

$$\begin{aligned} M_k &= \xi_1 \int_0^z x^{2\alpha_1+k}(1-x)^{2\alpha_2}(z-x)^{2\alpha_3} dx + \xi_2 \int_1^\infty x^{2\alpha_1+k}(1-x)^{2\alpha_2}(z-x)^{2\alpha_3} dx = \\ &= \xi_1 z^{2\alpha_{12}+k+1} \mathfrak{B}(2\alpha_1+k+1, 2\alpha_2+1) {}_2F_1(-2\alpha_3, 2\alpha_1+k+1; 2\alpha_{12}+k+2; z) + \\ &\quad + \xi_2 \mathfrak{B}(-2\alpha_{123}-k-1, 2\alpha_3+1) {}_2F_1(-2\alpha_{123}-k-1, -2\alpha_2; -2\alpha_{12}-k; z) \end{aligned} \quad (5.67)$$

а \mathfrak{B} , ${}_2F_1$ — обычная бета-функция и гипергеометрическая функция соответственно.

Условия Вирасоро (5.23) изменяются соответственно, см., например, [130]. Они связаны с дополнительными зависимыми от z членами и сдвигами переменной α_3 . В непрерывном пределе кратности α_i и переменная z теперь менее симметричны. В частности, теперь условия Вирасоро — разностные уравнения по α и дифференциальные уравнения по z .

5.6.2 Уравнение Пенлеве VI

Известный результат [120] гласит, что конформный блок решает уравнение Пенлеве VI. В отличие от q -деформированного случая, в обсуждении фигурируют различные, но эквивалентные формы уравнения. Начнем с того, что соберем различные формы уравнения, имеющие отношение к нашему случаю.

Стандартной формой для уравнений Пенлеве является уравнение второго порядка для функции $w(z)$, имеющее вид уравнения Ньютона, поэтому мы называем её ньютоновской:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z} \right) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z} \right) \frac{dw}{dz} + \\ &+ \frac{2w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2} \left(\left(\theta_\infty + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\theta_0^2 z}{w^2} + \frac{\theta_1^2 (z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} - \theta_z^2 \right) z(z-1)}{(w-z)^2} \right). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Известно также, что для этого уравнения можно ввести гамильтониан H_{VI} и импульс $p(z)$ и получить гамильтонову форму:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{w(w-1)(w-z)}{z(z-1)} \left(2p - \frac{2\theta_0}{w} - 2\frac{2\theta_1}{w-1} - \frac{2\theta_z - 1}{w-z} \right) = \frac{\partial H_{VI}}{\partial p}. \quad (5.69)$$

Наконец, если исходить из задачи об изомонодромных деформациях систем Шлезингера, то получается уравнение Пенлеве в так называемой σ -форме:

$$-\frac{(z(z-1)\sigma'')^2}{2} = \det \begin{pmatrix} 2\theta_1^2 & z\sigma' - \sigma & \sigma' + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - \theta_4^2 \\ z\sigma' - \sigma & 2\theta_2^2 & (z-1)\sigma' - \sigma \\ \sigma' + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - \theta_4^2 & (z-1)\sigma' - \sigma & 2\theta_3^2 \end{pmatrix}. \quad (5.70)$$

Связь между этими представлениями гомоздка, но известна и задается следующими соотношениями [120]. Переменная σ связана с гамильтоновыми переменными соотношением

$$\sigma = z(z-1)H_{VI} - w(w-1)p + (\theta_0 + \theta_z + \theta_1 + \theta_\infty)w - (\theta_0 + \theta_1)^2 z + \frac{\theta_1^2 + \theta_\infty^2 - \theta_0^2 - \theta_z^2 - 4\theta_0\theta_z}{2} \quad (5.71)$$

и с ньютоновским видом:

$$\frac{1}{w-z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right) = \frac{2\theta_\infty z(z-1)\sigma'' + (\sigma' + \theta_z^2 - \theta_\infty^2) ((2z-1)\sigma' - 2\sigma + \theta_0^2 - \theta_1^2) + 4\theta_\infty^2 (\theta_0^2 - \theta_1^2)}{2z(z-1) (\sigma' + (\theta_t - \theta_\infty)^2) (\sigma' + (\theta_t + \theta_\infty)^2)}. \quad (5.72)$$

Конформный блок решает уравнение Пенлеве VI. Существует и другая, билинейная форма уравнения Пенлеве: если сделать замену переменных и ввести τ -функцию Пенлеве,

$$\sigma(z) = z(z-1) \frac{d \log \tau_P}{dz}. \quad (5.73)$$

Уравнение Пенлеве VI может быть записано в виде [145]:

$$D^{VI} \tau_P \cdot \tau_P = 0, \quad (5.74)$$

$$D^{VI} = -\frac{1}{2}(1-z)^3 D_{\log z}^4 + \dots \quad (5.75)$$

где D — стандартный оператор производной Хироты, определенный как

$$D_h^k f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{\partial^k}{\partial h^k} f(x+h)g(x-h) \right) \Big|_{h=0}. \quad (5.76)$$

В таком виде оно представляет собой довольно громоздкое уравнение четвертого порядка относительно операторов Хироты.

Теперь мы можем сформулировать связь между статистической суммой матричной модели $4d$ (5.36) и уравнением Пенлеве VI: статистическая сумма есть просто τ -функция Пенлеве:

$$Z_N^{(4d)} = \tau_P \quad (5.77)$$

или

$$\sigma(z) = z(z-1) \frac{d \log \log Z_N^{(4d)}}{dz} \quad (5.78)$$

с параметрами уравнения, связанными с операторными размерностями соотношением

$$\theta_0 = \alpha_1, \theta_z = \alpha_2, \theta_1 = \alpha_4, \theta_\infty = \alpha_4. \quad (5.79)$$

Есть разные способы убедиться, что (5.78) удовлетворяет (5.70). Установив $N = 0$, можно проверить, что префактор $Z_0 = z^{2\alpha_1\alpha_2}(1-z)^{2\alpha_2\alpha_3}$ удовлетворяет уравнению. Для ненулевого N статистическая сумма задается произведением непертурбативного префактора на степенной ряд в z , и порядок за порядком проверяется, чтобы коэффициенты z -разложения Z_N удовлетворяли уравнению.

Глядя на билинейное уравнение (5.75) с точки зрения матричной модели, мы видим, что это уравнение действительно зависит от изменения меры, поэтому мы должны рассматривать его как некоторую комбинацию условий Вирасоро. В такой формулировке может показаться, что это одно билинейное уравнение, эквивалентное уравнению Пенлеве. Оказывается, что это не совсем так,

поскольку в этом уравнении уже содержатся билинейные уравнения Хироты. Чтобы установить связь со следующим разделом, отметим, что вообще уравнения Пенлеве могут быть записаны как билинейные уравнения многими различными способами. Описанный выше использует одну единственную τ -функцию. Можно было бы ввести несколько τ -функций, связанных преобразованием Бэклунда [146], как и в q -деформированном случае.

В качестве иллюстрации рассмотрим более простое уравнение Пенлеве III, которые мы встретим далее. Билинейная форма уравнения с использованием одной τ -функции задается оператором

$$D^{III} = \frac{1}{2}D_{\log z}^4 - z \frac{d}{dz} D_{\log z}^2 + \frac{1}{2}D_{\log z}^2 + 2zD_{\log z}^0, \quad D^{III}\tau \cdot \tau = 0. \quad (5.80)$$

Теперь, если ввести $\tau_1(z)$, связанный с $\tau(z)$ преобразованием Бэклунда, получится следующий вид уравнения:

$$\begin{aligned} D_{\log z}^2 \tau \cdot \tau &= -2z^{1/2} \tau_1^2, \\ D_{\log z}^2 \tau_1 \cdot \tau_1 &= -2z^{1/2} \tau^2. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Соответствующая переменная $w(z)$, которая является решением уравнения Пенлеве III в ньютоновской форме, есть

$$w(z) = \sqrt{z} \frac{\tau^2}{\tau_1^2}. \quad (5.82)$$

Ниже мы обсуждаем аналогичное представление уравнения Пенлеве VI, которое использует восемь τ -функций и является непрерывным пределом (5.54)-(5.55).

Непрерывный предел уравнения q -Пенлеве VI. Поскольку предел конформного блока q -Вирасоро является прямым, мы ожидаем, что этот предел будет выполняться для всех структур: решения и определяющих восемь уравнений. Мы увидим, что предельный переход не совсем очевиден и его связь с решением (5.78) не столь явна.

Выше мы описали, как решаются q -уравнения Пенлеве VI с помощью отношений сдвинутых τ -функций, и следует ожидать, что переход к непрерыв-

ному пределу даст решение уравнения Пенлеве VI. Предел самих q -уравнений Пенлеве (5.48)-(5.49) довольно сложен [138]. Процедура перехода к пределу требует, во-первых, определения гамильтоновых переменных $w(z)$, $p(z)$ следующей предельной процедурой:

$$w(z) = w_1(z), \quad \frac{(w_1 - a_1 z)(w_1 - a_2 z)}{(w_1 - z)(w_1 - 1)} \frac{1}{qw_2} = 1 - \epsilon w_1 p(z). \quad (5.83)$$

а затем разложения параметров $a_1 = 1 + \epsilon \mathbf{a}_1$, $b_1 = 1 + \epsilon \mathbf{b}_1$, $q \rightarrow 1 + \epsilon$. Эта репараметризация позволяет исключить $w_2(z)$ и, следовательно, переписать систему q -Пенлеве в терминах $w(z), p(z)$. В первом порядке по ϵ получается гамильтонова форма уравнения Пенлеве VI:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial H_{VI}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H_{VI}}{\partial w} \quad (5.84)$$

Связь переменных q -Пенлеве с гамильтоновыми переменными непрерывного уравнения не слишком прозрачна, поскольку функция $p(z)$ довольно сложно выражается через пределы $w_1(z), w_2(z)$. При этом нам достаточно рассмотреть функцию $w(z)$, поскольку мы ожидаем, что она будет решать уравнение в ньютоновской форме.

Мы можем рассмотреть непрерывный предел решения, данного формулой (5.53). Переходя к пределу в τ -функциях, получаем функцию

$$w(z) := \lim_{q \rightarrow 1} w_1(z) = z \frac{\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2}{\hat{\tau}_3 \hat{\tau}_4}, \quad (5.85)$$

где $\hat{\tau}_i(z) = \lim_{q \rightarrow 1} \tau_i(q, z)$, что должно быть решением уравнения Пенлеве VI в ньютоновской форме.

Параметры полученного уравнения, разумеется, связаны с кратностями α_i . Интересно, что мы получаем уравнение Пенлеве с параметрами, отличными от параметров (5.79). Для решения, полученного в пределе, имеем:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1 - N - 2\alpha_2}{2}, & \theta_t &= \frac{-N - 2\alpha_3}{2}, \\ \theta_0 &= \frac{-2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - N}{2}, & \theta_\infty + \frac{1}{2} &= \frac{N + 2\alpha_1}{2}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Эти соотношения между параметрами решений отличаются от (5.79). Поэтому, чтобы установить связь между двумя представлениями, следует взять форму τ -функции с параметрами, преобразованными в соответствии с преобразованием Бэклунда:

$$\tilde{\sigma}(z) = z(z-1) \frac{d \log Z \left(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - N/2, -N/2 - \alpha_3, \frac{1-N}{2} - \alpha_2 \right)}{dz}. \quad (5.87)$$

Затем [147]:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(z) = & \frac{z^2(z-1)^2}{4w(w-1)(w-z)} \left(w' - \frac{w(w-1)}{z(z-1)} \right)^2 - \frac{\theta_0^2 z}{w} + \\ & + \frac{\theta_1^2(z-1)}{(w-1)} - \frac{\theta_z^2 z(z-1)}{(w-z)} - \theta_\infty^2(w-1+z), \end{aligned} \quad (5.88)$$

где $w(z)$ задается формулой (5.85), а параметры задаются (5.86). Эквивалентно, можно использовать формулу (5.72), чтобы инвертировать преобразование.

5.6.3 Непрерывный предел восьми билинейных уравнений

Можно также задаться вопросом, что является непрерывным пределом билинейного представления системы q -Пенлеве. Один рецепт предъявлен в [148]. Мы рассмотрим его здесь более подробно в применении к нашей задаче. Как и предел (5.48)-(5.49), он требует специального предельного перехода с учетом всех параметров. Заметим, что параметр q появляется в τ -функциях в двух видах: как параметр функции и как разностный сдвиг z -переменной. Возьмем грубый непрерывный предел в параметрах τ -функций, отслеживая при этом q -зависимость сдвигов:

$$\tau(q, q^a z) \rightarrow \hat{\tau}(e^{a\epsilon} z) = \lim_{q \rightarrow 1} \tau(q, e^{a\epsilon} z) \quad \text{для} \quad q \rightarrow \exp(\epsilon) \quad (5.89)$$

В качестве примера рассмотрим случай $N = 1$. Естественный предел $q \rightarrow 1$ будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}
Z_1^{(5d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z) &= Z_1^{(4d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z) + \\
&+ \epsilon \left((\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2) Z_1^{(4d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z) - \right. \\
&- (\alpha_2 + \alpha_3 + 1) 2\alpha_3 Z_1^{(4d)}(\alpha_1 + 1/2, \alpha_2, \alpha_3 - 1/2, z) \left. \right), \\
Z_1^{(5d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, qz) &= Z_1^{(4d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z) + \\
&+ \epsilon \left((\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2) Z_1^{(4d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z) - \right. \\
&- (\alpha_2 + \alpha_3 + 1) 2\alpha_3 Z_1^{(4d)}(\alpha_1 + 1/2, \alpha_2, \alpha_3 - 1/2, z) + \\
&+ \left. z \frac{d}{dz} Z_1^{(4d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z) \right)
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Вместо этого мы делаем следующие замены:

$$\begin{aligned}
Z_1^{(5d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z) &\longrightarrow Z_1^{(4d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z), \\
Z_1^{(5d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, qz) &\longrightarrow Z_1^{(4d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z) + \epsilon z \frac{d}{dz} Z_1^{(4d)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z).
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Предел в [148] также предполагает разложение коэффициентов a_i, b_i только до определенного порядка в ϵ , тогда как неясно, как поступить с этим методом в нашем случае, когда коэффициенты являются явными функциями от q .

Таким образом, теперь мы подставляем (5.89, 5.91) в билинейные уравнения (5.54, 5.55) и разлагаем их по ϵ до второго порядка. Однако только восемь из получившихся 8×3 уравнений согласованы с пределом самих функций, и мы просто оставляем только их. Наконец, мы получаем систему уравнений,

аналогичную приведенной в [148]:

$$\epsilon^0 : \quad z\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 - z\hat{\tau}_5\hat{\tau}_6 - z\hat{\tau}_3\hat{\tau}_4 = 0, \quad (5.92)$$

$$\hat{\tau}_3\hat{\tau}_4 + \hat{\tau}_7\hat{\tau}_8 - z\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 = 0, \quad (5.93)$$

$$\epsilon^1 : \quad (n - 1 + 2\alpha_2)\hat{\tau}_3\hat{\tau}_4 + (1 - n + 2\alpha_2 + D_{\log z})\hat{\tau}_7\hat{\tau}_8 = 0, \quad (5.94)$$

$$(n + 2\alpha_3)\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 + (-2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + n - 2 - D_{\log z})\hat{\tau}_5\hat{\tau}_6 = 0, \quad (5.95)$$

$$(2\alpha_1 + n)\tau_7\tau_8 + (-2\alpha_2 - 2\alpha_3 + (1 - z)(2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - n) + \\ + (1 - z)D_{\log z})\hat{\tau}_3\hat{\tau}_4 = 0, \quad (5.96)$$

$$(-2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - n)\hat{\tau}_5\hat{\tau}_6 + \\ + (2\alpha_3 + 3n - 2 + z(2 + 2\alpha_2 - 3n) - z(1 - z)D_{\log z})\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 = 0, \quad (5.97)$$

$$\epsilon^2 : \quad \hat{\tau}_1\hat{\tau}_2\psi_{12}(\vec{\alpha}, N, z) + \hat{\tau}_7\hat{\tau}_8\psi_{78}(\vec{\alpha}, N, z) = \\ = -(1 - z)^2 D_{\log z}^2 \hat{\tau}_3\hat{\tau}_4 - (1 - z)z D_{\log z}^2 \hat{\tau}_5\hat{\tau}_6 + (1 - z)D_{\log z}^2 \hat{\tau}_7\hat{\tau}_8, \quad (5.98)$$

$$\hat{\tau}_3\hat{\tau}_4\psi_{34}(\vec{\alpha}, N, z) + \hat{\tau}_5\hat{\tau}_6\psi_{56}(\vec{\alpha}, N, z) = \\ = -(1 - z)^2 D_{\log z}^2 \hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 - (1 - z)z D_{\log z}^2 \hat{\tau}_5\hat{\tau}_6 + (1 - z)D_{\log z}^2 \hat{\tau}_7\hat{\tau}_8. \quad (5.99)$$

Здесь $\psi_{ij}(\vec{\alpha}, N, z)$ — квадратичные многочлены от всех переменных. Они достаточно сложны и определяются неоднозначно из-за соотношений (5.92, 5.93), поэтому мы их здесь не приводим для краткости. Эти билинейные уравнения представляют собой другую билинейную форму уравнения Пенлеве VI. Вместо одного уравнения 4-го порядка получается система уравнений низшего порядка для восьми τ -функций.

Эти билинейные уравнения эквивалентны ньютонской форме уравнения Пенлеве VI для функции

$$w(z) = z \frac{\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2}{\hat{\tau}_3\hat{\tau}_4}. \quad (5.100)$$

Теперь, рассматривая эти уравнения с точки зрения интеграла собственных значений, можно снова отличить те уравнения, которые зависят от меры $\mu(dx)$, и те, которые не зависят от меры $\mu(dx)$. Первые два уравнения (5.92)-(5.93), безусловно, не что иное, как уравнения Хироты (5.17).

Как и в q -деформированном случае, мы ожидаем, что всего мы имеем четыре уравнения, которые относятся к интегрируемости. Недостающие два строятся как линейные комбинации, и мы получаем:

$$\begin{aligned}
z\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 - z\hat{\tau}_5\hat{\tau}_6 - z\hat{\tau}_3\hat{\tau}_4 &= 0, \\
\hat{\tau}_3\hat{\tau}_4 + \hat{\tau}_7\hat{\tau}_8 - z\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 &= 0, \\
(5.94) + (5.95) - (5.97) &= \\
= (2n - 1)\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 + (1 - z)D_{\log z}\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 - zD_{\log z}\hat{\tau}_5\hat{\tau}_6 - D_{\log z}\hat{\tau}_7\hat{\tau}_8 &= 0, \\
(5.94) + z(5.95) - (5.96) &= \\
= -z\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 + (1 - z)D_{\log z}\hat{\tau}_3\hat{\tau}_4 - zD_{\log z}\hat{\tau}_5\hat{\tau}_6 + D_{\log z}\hat{\tau}_7\hat{\tau}_8 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.101}$$

Остальные четыре уравнения являются следствием условий типа Вирасоро. Непонятно, как идентифицировать вставки полных производных, которые соответствуют этим уравнениям в общем случае. Это можно сделать в частных случаях, например, при $N = 2$. Однако эти явные выражения не слишком информативны, и мы не будем их здесь приводить.

В целом мы видим, что структура связи между уравнением Пенлеве, уравнениями интегрируемости и условиями Вирасоро сохраняется в непрерывном пределе. Теперь она усложняется различными формами уравнений Пенлеве VI и особенностями непрерывного предела. На самом деле существует несколько иная интерпретация уравнений (5.54)-(5.55) как условия согласованности между представлением (5.100) и (5.78). Тогда формула (5.72) эквивалентна (с точностью до преобразований Бэклунда) системе из восьми билинейных уравнений.

Наконец, заметим, что наивная подстановка $q = 1$ в уравнения q -Пенлеве приводит к:

$$\begin{aligned}
w_1^2 &= \left(\frac{w_2 - z}{w_2 - 1} \right)^2, \\
w_2^2 &= \left(\frac{w_1 - z}{w_1 - 1} \right)^2,
\end{aligned} \tag{5.102}$$

которые согласуются с уравнениями (5.92,5.93), например, второе из них переписывается как:

$$w_2 = \frac{w_1 - z}{w_1 - 1} \implies z \frac{\hat{\tau}_5\hat{\tau}_6}{\hat{\tau}_7\hat{\tau}_8} = \frac{\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 - z\hat{\tau}_3\hat{\tau}_4}{\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_3\hat{\tau}_4}. \tag{5.103}$$

5.7 Предел чистой калибровочной теории

5.7.1 Уравнение Пенлеве III

По-видимому, описанные свойства сохраняются и в чисто калибровочном пределе АГТ-соответствия в $4d$. В этом пределе статистические суммы Некрасова и конформные блоки описываются матричной моделью Брезина-Гросса-Виттена (БГВ). Что касается калибровочной теории, то имеется $\mathcal{N} = 2$ чистая калибровочная теория, которая больше не является конформной. Массы гипермультиплетов устремлены к бесконечности и введен масштабный параметр Λ , возникающий за счет перенормировок. С точки зрения параметров конформного блока (который в этом пределе [149; 150] называется иррегулярным конформным блоком) этот предел задается выражением

$$\begin{aligned} \alpha_i &\rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty \\ (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\alpha_3^2 - \alpha_4^2)z &= \text{const.} \end{aligned} \quad (5.104)$$

Чисто калибровочный предел соответствует редукции уравнения Пенлеве VI к уравнению Пенлеве III'. Ясно, что после взятия предела в уравнении не остается параметров. Как и уравнение Пенлеве VI, оно имеет несколько форм. В частности, ньютоновская форма задается выражением

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \frac{2w^2}{z^2} - \frac{2}{z}, \quad (5.105)$$

а σ -форма

$$(z\sigma'')^2 = 4(\sigma')^2(\sigma - z\sigma') - 4\sigma'. \quad (5.106)$$

Мы уже приводили билинейные формы уравнения (5.80) и (5.81), вторая использует две τ -функции, связанные преобразованием Бэклунда:

$$D_{\log z}^2 \tau^2 = -2z^{1/2} \tau_1^2. \quad (5.107)$$

Преобразования между различными представлениями в этом случае довольно просты:

$$w^{\text{III}} = -\frac{1}{(\sigma^{\text{III}})', \quad w = z^{1/2} \frac{\tau^2}{\tau_1^2}, \quad \sigma^{\text{III}} = z \frac{d \log \tau}{z}. \quad (5.108)$$

На самом деле довольно легко увидеть соответствие между уравнениями Пенлеве и формулами преобразования (5.108). Например, подставив выражения для σ и w в первое тождество в (5.108), сразу получим билинейное уравнение (5.107).

Различные объекты теории Пенлеве VI обладают специфическими скейлинговыми свойствами в чисто калибровочном пределе. Поэтому предел переменных Пенлеве VI до переменных Пенлеве III, согласованный с масштабными свойствами переменных, определяется следующим образом:

– Ньютоновская переменная:

$$w^{\text{III}}(z) = \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left[\frac{z(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{(\alpha_3 + \alpha_4)} \cdot w^{\text{VI}} \left(\frac{z}{(\alpha_1^2 - \alpha^2)(\alpha_3^4 - \alpha_4^2)} \right) \right]; \quad (5.109)$$

– τ -функция:

$$\tau^{\text{III}} = \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \left[\left(\frac{z}{(\alpha_3 + \alpha_4)} \right)^{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \tau^{\text{VI}} \left(\frac{z}{(\alpha_1^2 - \alpha^2)(\alpha_3^4 - \alpha_4^2)} \right) \right]. \quad (5.110)$$

Масштабные свойства восьми τ -функций не очевидны из-за структуры сдвигов. Мы предлагаем ответ на основе анализа представления матричной модели в следующем подразделе.

5.7.2 Конформный блок в калибровочном пределе как матричная модель БГВ

В чисто калибровочном пределе конформный блок задается интегралами БГВ следующим образом. Рассмотрим модифицированный интеграл БГВ, заданный интегралом по унитарной $N \times N$ -матрице U и зависящую от внешней матрицы Ψ :

$$Z(N | \Psi) = \frac{1}{\text{Vol}_N} \int [dU] e^{(\text{Tr } U^\dagger + \text{Tr } \Psi U)} \quad (5.111)$$

и определим статистическую сумму, которая является реализацией матричной модели нерегулярного конформного блока, соответствующего функциям Некрасова в чистой калибровочной теории (с размерным параметром $z = \Lambda^4$, поскольку калибровочная теория больше не является конформной)[131; 136]:

$$\begin{aligned} Z_*^{(1)}(N, z) &= \int [dU] \int [dV] Z^{\text{BFB}}(m_+ | U) Z^{\text{BFB}}(m_- | V) \det(1 - zU^\dagger \otimes V^\dagger)^2 = \\ &= \sum_{R, Q} (-\Lambda^4)^{|R|} \delta_{|R|, |Q|} \cdot K^{RQ} \cdot \frac{d_R^2 d_Q^2}{D_R(m_+) D_Q(m_-)}, \end{aligned} \quad (5.112)$$

где

$$K^{RQ} = \sum_{X, Y} \mathcal{N}_{X, Y}^R \mathcal{N}_{X^{tr}, Y^{tr}}^Q \quad (5.113)$$

и \mathcal{N}_{PQ}^R — коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона, $D_R(m)$, d_R — размерности представлений, определены в Приложении А. Статистическая сумма (5.112) зависит от размеров матриц U и V , которые выбраны равными $m_+ = N$ и (аналитическое продолжение) $m_- = -N$.

Как и в предыдущих случаях, свойства интегрируемости и связь с уравнением Пенлеве выявляются после преобразования Фурье:

$$Z_{PGL}(a, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{Z}(a + k, z) e^{ik\eta}, \quad \mathfrak{Z}(a, z) = \frac{z^{a^2} Z_*^{(1)}(2a, z)}{\mathfrak{G}(1 + 2a) \mathfrak{G}(1 - 2a)}, \quad (5.114)$$

где $\mathfrak{G}(x)$ — G -функция Барнса. Мы выбрали нормировку так, чтобы $Z_{PGL}(a, z)$ была равна τ -функциям уравнения Пенлеве III относительно переменной z , а τ -функция, преобразованная с помощью Бэклунда в (5.107), дается сдвигом параметра a :

$$\tau^{\text{III}} = Z_{PGL}(a, z), \quad \tau_1^{\text{III}} = Z_{PGL}\left(a + \frac{1}{2}, z\right) \quad (5.115)$$

Этот сдвиг можно понимать как остаток от τ -функций Пенлеве VI следующим образом. Параметр a является внутренней размерностью в конформном блоке, т.е. является остатком α в чисто калибровочном пределе, для которого напомним соотношение: $N_1 = \alpha + \alpha_1 + \alpha_2$ $N_2 = -\alpha + \alpha_3 + \alpha_4$. Сдвиги параметров α_i

в восьми функциях $\hat{\tau}_i$ подходят таким образом, что при $i = 1, 2, 7, 8$ их можно рассматривать как эффективный сдвиг $\alpha \rightarrow \alpha + \frac{1}{2}$.

Как следует из этих формул, предел от восьми τ -функций Пенлеве VI к τ -функциям Пенлеве III дается:

$$\hat{\tau}_i \longrightarrow \begin{cases} \tau^{\text{III}}, & i = 3, 4, 5, 6 \\ \tau_1^{\text{III}}, & i = 1, 2, 7, 8 \end{cases}. \quad (5.116)$$

Как и в предыдущем случае, существуют различные формы уравнения Пенлеве III в терминах конформных блоков в калибровочном пределе:

$$\sigma^{\text{III}}(z) = z \frac{d}{dz} Z_{PGL}(a, z), \quad w^{\text{III}}(z) = z^{1/2} \frac{Z_{PGL}(a, z)^2}{Z_{PGL}\left(a + \frac{1}{2}, z\right)^2}. \quad (5.117)$$

Пенлеве III как редукция уравнения Тоды. Описание конформного блока в калибровочном пределе в терминах модели БГВ подразумевает, что он удовлетворяет системе Тоды, как статсумма матричной модели:

$$D_{\log z}^2 Z_{PGL}(a, z) \cdot Z_{PGL}(a, z) = -2z^{1/2} Z_{PGL}(a - 1/2, z) Z_{PGL}(a + 1/2, z), \quad (5.118)$$

где $n = 2a$ играет роль дискретного времени Тоды. Помимо этого, из-за структуры (5.114) он подчиняется условию периодичности

$$Z_{PGL}(a + 1, z) = Z_{PGL}(a, z). \quad (5.119)$$

Это условие играет роль редукционного условия, сводящего уравнения Тоды к уравнению Пенлеве III, которое приобретает билинейный вид (5.107):

$$D_{\log z}^2 Z_{PGL}(a, z) = -2z^{1/2} Z_{PGL}(a + 1/2, z)^2. \quad (5.120)$$

Заключение

В данной работе мы изучили связь нескольких важных свойств матричных моделей: интегрируемости, суперинтегрируемости, тождеств Уорда и W -представления. Мы рассмотрели эрмитовы унитарно-инвариантные модели, в которых мы показали, что рассмотрение матричных моделей в базисе характеров оказывается плодотворным. Во-первых, мы показали, что в таком базисе условия Вирасоро переписываются как алгебро-комбинаторные соотношения, которые можно эффективно решать. Во-вторых, в этом базисе удается учесть свойства интегрируемости явно в самих уравнениях. Таким образом, известное утверждения о роли тождеств Уорда в выборе точки грассманиана, отвечающей матричной модели, удалось продемонстрировать новым, более явным способом. Было показано, что возможно построить явное решение условий Вирасоро, если взять некоторую специальную бесконечную комбинацию этих уравнений. Это решение предъявлено в форме экспоненциального оператора. Показано, что этот метод позволяет решать разные модели, что в некоторых случаях приводит к известным ответам полученным другими способами. Особенно важным примером оказалась обобщенная модель Концевича, для которой W -представление не было известно ранее. Были изучены особенности соответствующей системы тождеств Уорда. Характерной чертой полученного ответа оказалась неабелевость соответствующего W -представления.

Описанный метод оказывается полезен не только для, например, более удобного вычисления большего количества членов в разложении статсуммы. Мы показали, что он так же позволяет лучше понять алгебраические структуры стоящие за матричными моделями. В частности, изучая представления W -операторов на характеры, можно получить соответствующие формулы суперинтегрируемости. Эти методы позволяют выходить за рамки эрмитовых унитарно инвариантных интегралов — мы показали, что все алгебраические структуры сохраняются на уровне β -деформации, и для моделей, связанных с Q -функциями. Полученные результаты открывают возможности для дальнейшего исследования в новом направлении. А именно, как оказалось, свойства матричных моделей можно эффективно изучать на языке соответствующих

W -операторов. Таким образом, представляется осмысленной общая задача классификации таких операторов: постановка предъявляемых к ним свойств, изучение вопроса об однозначности соответствия между операторами и матричными моделями, постановка обратной задачи восстановления матричной модели по оператору и прочие.

С другой стороны, мы продвинулись в понимании связи между уравнениями Пенлеве и матричными моделями. Основным вопросом, который нас интересовал, было исследование этого феномена, когда постановкой задачи продиктована параметризация Мивы. Как оказалось, это не препятствует появлению уравнения Пенлеве для матричной модели, но несет в себе новые технические трудности, которые нам удалось частично разрешить. Остается открытым вопрос о том, являются ли эти технические трудности проявлением некоторого концептуального свойства параметризации Мивы. Выбор конкретной модели был продиктован известными работами о соответствии между конформным блоком и τ -функцией Пенлеве, и АГТ дуальным утверждением про инстантонные статсуммы. Интересно, что данное утверждение справедливо при единичном центральном заряде. При этом известно, что матрично-модельное представление конформных блоков имеется и при произвольных центральных зарядах. В связи с этим возникает интересный дальнейший вопрос об β -деформации соответствующего утверждения про уравнение Пенлеве. На возможность такой деформации указывает также и то, что как мы показали, несмотря на то, что деформация интегрируемости до сих пор не построена, многие алгебраические структуры, связанные с взаимодействием условий Вирасоро и уравнений Хироты, по-прежнему существуют. С другой стороны со стороны, АГТ соответствия наличие нетривиальных соотношений на инстантонную статсумму также известны при произвольных β [61; 126].

Суммируя сказанное, перечислим еще раз конкретные результаты, полученные в этой диссертации:

- Показано, что в эрмитовой гауссовой матричной модели система условий Вирасоро в базисе характеров переписывается в форме алгебро-комбинаторных соотношений. Построено решение этой системы и таким образом показано свойство суперинтегрируемости.

- Связь интегрируемости и условий Вирасоро в эрмитовой гауссовой матричной модели изучена в терминах коэффициентов разложения по характеристам. Показано, что совместный учет струнного уравнения и только одного условия Вирасоро приводит к ответу.
- Показано для многих матричных моделей, что система тождеств Уорда эквивалентна единственному уравнению на статсумму. Предъявлен метод построения этого уравнения и его решения в форме W -представления.
- Разработан метод доказательства суперинтегрируемости для моделей, для которых известно W -представление.
- Построено неабелево W -представление обобщенной модели Концевича. Предъявлен метод построения W -операторов из скрученных бозонных полей.
- Построена деформация W -оператора в гауссовой эрмитовой модели и с его помощью доказана суперинтегрируемость для средних от полиномов Джека.
- Рассмотрены матричные модели связанные с Q -функциями Шура. Показано, что метод доказательства суперинтегрируемости работает в модели Брезана-Гросса-Виттена (БГВ).
- Построена фермионная версия суперинтегрируемости в модели Натансона-Орлова
- Рассмотрены последовательные пределы от разностных уравнений на q -деформированную матричную модель для конформного блока q -Вирасоро к их дифференциальному аналогу, а также предел чистой калибровочной теории. Показано, что в пределах сохраняется соотношение между тождествами Уорда уравнениями Хироты и уравнением Пенлеве VI.

Список литературы

1. *Морозов А. Ю.* Теория струн — что это такое? // Усп. физ. наук. — 1992. — т. 162, № 8. — с. 83—175. — DOI: [10.3367/UFNr.0162.199208c.0083](https://doi.org/10.3367/UFNr.0162.199208c.0083). — URL: <https://ufn.ru/ru/articles/1992/8/c/>.
2. *Mironov A.* Integrability in string / field theories and Hamiltonian flows in the space of physical systems // Theor. Math. Phys. — 2003. — т. 135. — с. 814—827. — DOI: [10.1023/A:1024031020707](https://doi.org/10.1023/A:1024031020707). — arXiv: [hep-th/0205202](https://arxiv.org/abs/hep-th/0205202).
3. *Morozov A.* Identities between quantum field theories in different dimensions // RFBR-INTAS Summer School on Advances in Quantum Field Theory, Statistical Mechanics and Dynamical Systems. — 09.1998. — arXiv: [hep-th/9810031](https://arxiv.org/abs/hep-th/9810031).
4. Integrability and Seiberg-Witten exact solution / A. Gorsky [и др.] // Phys. Lett. B. — 1995. — т. 355. — с. 466—474. — DOI: [10.1016/0370-2693\(95\)00723-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)00723-X). — arXiv: [hep-th/9505035](https://arxiv.org/abs/hep-th/9505035).
5. *Morozov A.* Integrability and matrix models // Phys. Usp. — 1994. — т. 37. — с. 1—55. — DOI: [10.1070/PU1994v037n01ABEH000001](https://doi.org/10.1070/PU1994v037n01ABEH000001). — arXiv: [hep-th/9303139](https://arxiv.org/abs/hep-th/9303139).
6. *Morozov A.* Faces of matrix models // JETP Lett. — 2012. — т. 95. — с. 586—593. — DOI: [10.1134/S0021364012110069](https://doi.org/10.1134/S0021364012110069). — arXiv: [1204.3953 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1204.3953).
7. *Alexandrov A. S., Mironov A., Morozov A.* Partition functions of matrix models as the first special functions of string theory. 1. Finite size Hermitean one matrix model // Int. J. Mod. Phys. A. — 2004. — т. 19. — с. 4127—4165. — DOI: [10.1142/S0217751X04018245](https://doi.org/10.1142/S0217751X04018245). — arXiv: [hep-th/0310113](https://arxiv.org/abs/hep-th/0310113).
8. Matrix models as integrable systems: From universality to geometrodynamical principle of string theory / A. Gerasimov [и др.] // Mod. Phys. Lett. A. — 1991. — т. 6. — с. 3079—3090. — DOI: [10.1142/S0217732391003572](https://doi.org/10.1142/S0217732391003572).
9. Matrix models among integrable theories: Forced hierarchies and operator formalism / S. Kharchev [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1991. — т. 366. — с. 569—601. — DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90030-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90030-2).

10. *Brezin E., Kazakov V. A.* Exactly Solvable Field Theories of Closed Strings // Phys. Lett. B. — 1990. — т. 236. — с. 144—150. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)90818-Q](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90818-Q).
11. *Kazakov V. A.* Exactly solvable models of 2-D quantum gravity on the lattice // Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Fields, Strings, Critical Phenomena. — 1988.
12. *Krichever I. M.* The tau function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories // Commun. Pure Appl. Math. / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1994. — т. 47. — с. 437. — arXiv: [hep-th/9205110](https://arxiv.org/abs/hep-th/9205110).
13. *Чехов Л. О.* Решения матричных моделей в $1/N$ -разложении // Успехи математических наук. — 2006. — т. 61, 3 (369). — с. 93—156.
14. Partition Functions of Matrix Models as the First Special Functions of String Theory. II. Kontsevich Model / A. S. Alexandrov [и др.] // Int. J. Mod. Phys. A. — 2009. — т. 24. — с. 4939—4998. — DOI: [10.1142/S0217751X09046278](https://doi.org/10.1142/S0217751X09046278). — arXiv: [0811.2825](https://arxiv.org/abs/0811.2825) [[hep-th](#)].
15. *Alexandrov A., Zabrodin A.* Free fermions and tau-functions // J. Geom. Phys. — 2013. — т. 67. — с. 37—80. — DOI: [10.1016/j.geomphys.2013.01.007](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2013.01.007). — arXiv: [1212.6049](https://arxiv.org/abs/1212.6049) [[math-ph](#)].
16. Application of random matrices in physics. Proceedings, NATO Advanced Study Institute, Les Houches, France, June 6-25, 2004 / под ред. E. Brezin [и др.]. — 2006.
17. Exact vs. semiclassical target space of the minimal string / J. M. Maldacena [и др.] // JHEP. — 2004. — т. 10. — с. 020. — DOI: [10.1088/1126-6708/2004/10/020](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/10/020). — arXiv: [hep-th/0408039](https://arxiv.org/abs/hep-th/0408039).
18. *Kazakov V. A., Staudacher M., Wynter T.* Character expansion methods for matrix models of dually weighted graphs // Commun. Math. Phys. — 1996. — т. 177. — с. 451—468. — DOI: [10.1007/BF02101902](https://doi.org/10.1007/BF02101902). — arXiv: [hep-th/9502132](https://arxiv.org/abs/hep-th/9502132).
19. *Mironov A.* 2-d gravity and matrix models. 1. 2-d gravity // Int. J. Mod. Phys. A. — 1994. — т. 9. — с. 4355—4406. — DOI: [10.1142/S0217751X94001746](https://doi.org/10.1142/S0217751X94001746). — arXiv: [hep-th/9312212](https://arxiv.org/abs/hep-th/9312212).

20. *Mironov A.* Matrix models of two-dimensional gravity // Phys. Part. Nucl. — 2002. — т. 33. — с. 537—582.
21. *Kontsevich M.* Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // Commun. Math. Phys. — 1992. — т. 147. — с. 1—23. — DOI: [10.1007/BF02099526](https://doi.org/10.1007/BF02099526).
22. *Witten E.* On the Kontsevich model and other models of two-dimensional gravity // International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics. — 06.1991. — с. 176—216.
23. *Kazakov V. A., Migdal A. A., Kostov I. K.* Critical Properties of Randomly Triangulated Planar Random Surfaces // Phys. Lett. B. — 1985. — т. 157. — с. 295—300. — DOI: [10.1016/0370-2693\(85\)90669-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)90669-0).
24. *Dijkgraaf R.* Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theory // NATO Sci. Ser. B / под ред. J. Froehlich [и др.]. — 1992. — т. 295. — с. 95—158. — arXiv: [hep-th/9201003](https://arxiv.org/abs/hep-th/9201003).
25. *Kazakov V., Levkovich-Maslyuk F.* Disc partition function of 2d R^2 gravity from DWG matrix model // JHEP. — 2022. — т. 01. — с. 190. — DOI: [10.1007/JHEP01\(2022\)190](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2022)190). — arXiv: [2110.10104](https://arxiv.org/abs/2110.10104) [[hep-th](#)].
26. *Stanford D., Witten E.* JT gravity and the ensembles of random matrix theory // Adv. Theor. Math. Phys. — 2020. — т. 24, № 6. — с. 1475—1680. — DOI: [10.4310/ATMP.2020.v24.n6.a4](https://doi.org/10.4310/ATMP.2020.v24.n6.a4). — arXiv: [1907.03363](https://arxiv.org/abs/1907.03363) [[hep-th](#)].
27. *Kazakov V. A., Migdal A. A.* Induced QCD at large N // Nucl. Phys. B. — 1993. — т. 397. — с. 214—238. — DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90342-M](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90342-M). — arXiv: [hep-th/9206015](https://arxiv.org/abs/hep-th/9206015).
28. *Distler J.* 2-D Quantum Gravity, Topological Field Theory and the Multicritical Matrix Models // Nucl. Phys. B. — 1990. — т. 342. — с. 523—538. — DOI: [10.1016/0550-3213\(90\)90325-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90325-8).
29. *Mironov A., Morozov A., Natanzon S.* Algebra of differential operators associated with Young diagrams // J. Geom. Phys. — 2012. — т. 62. — с. 148—155. — DOI: [10.1016/j.geomphys.2011.09.001](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2011.09.001). — arXiv: [1012.0433](https://arxiv.org/abs/1012.0433) [[math.GT](#)].
30. Topological strings and integrable hierarchies / M. Aganagic [и др.] // Commun. Math. Phys. — 2006. — т. 261. — с. 451—516. — DOI: [10.1007/s00220-005-1448-9](https://doi.org/10.1007/s00220-005-1448-9). — arXiv: [hep-th/0312085](https://arxiv.org/abs/hep-th/0312085).

31. *Alexandrov A.* Matrix Models for Random Partitions // Nucl. Phys. B. — 2011. — т. 851. — с. 620—650. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2011.06.007](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2011.06.007). — arXiv: [1005.5715](https://arxiv.org/abs/1005.5715) [hep-th].
32. *Dijkgraaf R., Vafa C.* On geometry and matrix models // Nucl. Phys. B. — 2002. — т. 644. — с. 21—39. — DOI: [10.1016/S0550-3213\(02\)00764-2](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(02)00764-2). — arXiv: [hep-th/0207106](https://arxiv.org/abs/hep-th/0207106).
33. *Чехов Л. О.* Матричные модели: Геометрия пространств модулей и точные решения // Теоретическая и математическая физика. — 2001. — т. 127, № 2. — с. 179—252.
34. Geometry of $N=1/2$ supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem / A. Hietamaki [и др.] // Phys. Lett. B. — 1991. — т. 263. — с. 417—424. — DOI: [10.1016/0370-2693\(91\)90481-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90481-5).
35. *Atiyah M. F., Bott R.* The Moment map and equivariant cohomology // Topology. — 1984. — т. 23. — с. 1—28. — DOI: [10.1016/0040-9383\(84\)90021-1](https://doi.org/10.1016/0040-9383(84)90021-1).
36. *Blau M., Thompson G.* Localization and diagonalization: A review of functional integral techniques for low dimensional gauge theories and topological field theories // J. Math. Phys. — 1995. — т. 36. — с. 2192—2236. — DOI: [10.1063/1.531038](https://doi.org/10.1063/1.531038). — arXiv: [hep-th/9501075](https://arxiv.org/abs/hep-th/9501075).
37. Localization techniques in quantum field theories / V. Pestun [и др.] // J. Phys. A. — 2017. — т. 50, № 44. — с. 440301. — DOI: [10.1088/1751-8121/aa63c1](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa63c1). — arXiv: [1608.02952](https://arxiv.org/abs/1608.02952) [hep-th].
38. *Minahan J. A.* Matrix models for 5d super Yang–Mills // J. Phys. A. — 2017. — т. 50, № 44. — с. 443015. — DOI: [10.1088/1751-8121/aa5cbe](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa5cbe). — arXiv: [1608.02967](https://arxiv.org/abs/1608.02967) [hep-th].
39. *Marino M.* Localization at large N in Chern–Simons-matter theories // J. Phys. A. — 2017. — т. 50, № 44. — с. 443007. — DOI: [10.1088/1751-8121/aa5f69](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa5f69). — arXiv: [1608.02959](https://arxiv.org/abs/1608.02959) [hep-th].
40. *Zarembo K.* Localization and AdS/CFT Correspondence // J. Phys. A. — 2017. — т. 50, № 44. — с. 443011. — DOI: [10.1088/1751-8121/aa585b](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa585b). — arXiv: [1608.02963](https://arxiv.org/abs/1608.02963) [hep-th].

41. *Kapustin A., Willett B., Yaakov I.* Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern-Simons Theories with Matter // JHEP. — 2010. — т. 03. — с. 089. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2010\)089](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2010)089). — arXiv: [0909.4559](https://arxiv.org/abs/0909.4559) [[hep-th](#)].
42. *Cassia L., Lodin R., Zabzine M.* On matrix models and their q -deformations // JHEP. — 2020. — т. 10. — с. 126. — DOI: [10.1007/JHEP10\(2020\)126](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2020)126). — arXiv: [2007.10354](https://arxiv.org/abs/2007.10354) [[hep-th](#)].
43. *Cassia L., Lodin R., Zabzine M.* Virasoro Constraints Revisited // Commun. Math. Phys. — 2021. — т. 387, № 3. — с. 1729—1755. — DOI: [10.1007/s00220-021-04138-3](https://doi.org/10.1007/s00220-021-04138-3). — arXiv: [2102.05682](https://arxiv.org/abs/2102.05682) [[hep-th](#)].
44. Exact SUSY Wilson loops on S^3 from q -Virasoro constraints / L. Cassia [и др.] // JHEP. — 2019. — т. 12. — с. 121. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2019\)121](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2019)121). — arXiv: [1909.10352](https://arxiv.org/abs/1909.10352) [[hep-th](#)].
45. *Mironov A., Morozov A.* On the origin of Virasoro constraints in matrix models: Lagrangian approach // Phys. Lett. B. — 1990. — т. 252. — с. 47—52. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)91078-P](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)91078-P).
46. *Semikhatov A. M.* Virasoro algebra action on integrable hierarchies and Virasoro constraints in matrix models: Matrix models from the viewpoint of integrable hierarchies // Nucl. Phys. B. — 1991. — т. 366. — с. 347—400. — DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90006-J](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90006-J).
47. *Mironov A., Morozov A., Zakirova Z.* Discrete Painlevé equation, Miwa variables and string equation in 5d matrix models // JHEP. — 2019. — т. 10. — с. 227. — DOI: [10.1007/JHEP10\(2019\)227](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2019)227). — arXiv: [1908.01278](https://arxiv.org/abs/1908.01278) [[hep-th](#)].
48. *Polchinski J.* Renormalization and Effective Lagrangians // Nucl. Phys. B. — 1984. — т. 231. — с. 269—295. — DOI: [10.1016/0550-3213\(84\)90287-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90287-6).
49. *Connes A., Kreimer D.* Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. 1. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem // Commun. Math. Phys. — 2000. — т. 210. — с. 249—273. — DOI: [10.1007/s002200050779](https://doi.org/10.1007/s002200050779). — arXiv: [hep-th/9912092](https://arxiv.org/abs/hep-th/9912092).

50. *Connes A., Kreimer D.* Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. 2. The beta function, diffeomorphisms and the renormalization group // Commun. Math. Phys. — 2001. — т. 216. — с. 215—241. — DOI: [10.1007/PL00005547](https://doi.org/10.1007/PL00005547). — arXiv: [hep-th/0003188](https://arxiv.org/abs/hep-th/0003188).
51. *Gerasimov A., Morozov A., Selivanov K.* Bogolyubov's recursion and integrability of effective actions // Int. J. Mod. Phys. A. — 2001. — т. 16. — с. 1531—1558. — DOI: [10.1142/S0217751X01003378](https://doi.org/10.1142/S0217751X01003378). — arXiv: [hep-th/0005053](https://arxiv.org/abs/hep-th/0005053).
52. *Morozov A., Shakirov S.* Generation of Matrix Models by W-operators // JHEP. — 2009. — т. 04. — с. 064. — DOI: [10.1088/1126-6708/2009/04/064](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/04/064). — arXiv: [0902.2627 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0902.2627).
53. *Kazakov V. A.* A Matrix model solution of Hirota equation // NATO Advanced Research Workshop on Theoretical Physics: New Developments in Quantum Field Theory. — 10.1997. — с. 97—112. — arXiv: [hep-th/9711019](https://arxiv.org/abs/hep-th/9711019).
54. *Morozov A., Popolitov A., Shakirov S.* On (q,t) -deformation of Gaussian matrix model // Phys. Lett. B. — 2018. — т. 784. — с. 342—344. — DOI: [10.1016/j.physletb.2018.08.006](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.08.006). — arXiv: [1803.11401 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1803.11401).
55. *Etingof P. I., Kirillov Jr A. A.* On the affine analogue of Jack and Macdonald polynomials. — 1995.
56. *Pogrebkov A.* On the formulation of the Painleve test as a criterion of complete integrability of partial differential equations // Inverse problems. — 1989. — т. 5, № 1. — с. L7.
57. *Ablowitz M., Clarkson P.* Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. — Cambridge University Press, 1991. — (Cambridge books online). — ISBN 9781107366527. — URL: <https://books.google.ru/books?id=BKq2oAEACAAJ>.
58. *David F.* Loop Equations and Nonperturbative Effects in Two-dimensional Quantum Gravity // Mod. Phys. Lett. A / под ред. E. Brezin, S. R. Wadia. — 1990. — т. 5. — с. 1019—1030. — DOI: [10.1142/S0217732390001141](https://doi.org/10.1142/S0217732390001141).
59. *Forrester P.* Log-Gases and Random Matrices (LMS-34) // Log-Gases and Random Matrices (LMS-34). — 2010. — июль. — DOI: [10.1515/9781400835416](https://doi.org/10.1515/9781400835416).

60. *Gamayun O., Iorgov N., Lisovsky O.* Conformal field theory of Painlevé VI // JHEP. — 2012. — т. 10. — с. 038. — DOI: [10.1007/JHEP10\(2012\)038](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2012)038). — arXiv: [1207.0787 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1207.0787). — [Erratum: JHEP 10, 183 (2012)].
61. *Jeong S., Nekrasov N.* Riemann-Hilbert correspondence and blown up surface defects // JHEP. — 2020. — т. 12. — с. 006. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2020\)006](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2020)006). — arXiv: [2007.03660 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2007.03660).
62. *Mironov A. D.* Group theory approach to the tau-function and its quantization // Theor. Math. Phys. — 1998. — т. 114. — с. 127–183. — DOI: [10.1007/BF02557115](https://doi.org/10.1007/BF02557115).
63. RIMS Symp. Non-Linear Integrable Systems—Classical Theory and Quantum Theory / E. Date [и др.]. — 1983.
64. *Mironov A., Morozov A.* Correlators in tensor models from character calculus // Phys. Lett. B. — 2017. — т. 774. — с. 210–216. — DOI: [10.1016/j.physletb.2017.09.063](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.09.063). — arXiv: [1706.03667 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1706.03667).
65. *Morozov A. Y.* Unitary Integrals and Related Matrix Models // Theor. Math. Phys. — 2010. — т. 162. — с. 1–33. — DOI: [10.1007/s11232-010-0001-y](https://doi.org/10.1007/s11232-010-0001-y). — arXiv: [0906.3518 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0906.3518).
66. *Mironov A., Morozov A.* Superintegrability summary. — 2022. — янв. — arXiv: [2201.12917 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2201.12917).
67. TRANSFORMATION GROUPS FOR SOLITON EQUATIONS. 3. OPERATOR APPROACH TO THE KADOMTSEV-PETVIASHVILI EQUATION / E. Date [и др.] // J. Phys. Soc. Jap. — 1981. — т. 50. — с. 3806–3812. — DOI: [10.1143/JPSJ.50.3806](https://doi.org/10.1143/JPSJ.50.3806).
68. Generalized Kontsevich model versus Toda hierarchy and discrete matrix models / S. Kharchev [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1993. — т. 397. — с. 339–378. — DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90347-R](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90347-R). — arXiv: [hep-th/9203043](https://arxiv.org/abs/hep-th/9203043).
69. Continuum versus discrete Virasoro in one matrix models / Y. Makeenko [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1991. — т. 356. — с. 574–628. — DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90379-C](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90379-C).
70. *Alexandrov A., Mironov A., Morozov A.* BGWM as Second Constituent of Complex Matrix Model // JHEP. — 2009. — т. 12. — с. 053. — DOI: [10.1088/1126-6708/2009/12/053](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/12/053). — arXiv: [0906.3305 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0906.3305).

71. *Brezin E., Gross D. J.* The External Field Problem in the Large N Limit of QCD // *Phys. Lett. B.* — 1980. — т. 97. — с. 120—124. — DOI: [10.1016/0370-2693\(80\)90562-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90562-6).
72. *Gross D. J., Witten E.* Possible Third Order Phase Transition in the Large N Lattice Gauge Theory // *Phys. Rev. D.* — 1980. — т. 21. — с. 446—453. — DOI: [10.1103/PhysRevD.21.446](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.21.446).
73. *Mironov A., Morozov A., Semenoff G. W.* Unitary matrix integrals in the framework of generalized Kontsevich model. 1. Brezin-Gross-Witten model // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 1996. — т. 11. — с. 5031—5080. — DOI: [10.1142/S0217751X96002339](https://doi.org/10.1142/S0217751X96002339). — arXiv: [hep-th/9404005](https://arxiv.org/abs/hep-th/9404005).
74. *Gross D. J., Newman M. J.* Unitary and Hermitian matrices in an external field. 2: The Kontsevich model and continuum Virasoro constraints // *Nucl. Phys. B.* — 1992. — т. 380. — с. 168—180. — DOI: [10.1016/0550-3213\(92\)90520-L](https://doi.org/10.1016/0550-3213(92)90520-L). — arXiv: [hep-th/9112069](https://arxiv.org/abs/hep-th/9112069).
75. *Mironov A., Morozov A., Semenoff G. W.* Unitary matrix integrals in the framework of generalized Kontsevich model. 1. Brezin-Gross-Witten model // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 1996. — т. 11. — с. 5031—5080. — DOI: [10.1142/S0217751X96002339](https://doi.org/10.1142/S0217751X96002339). — arXiv: [hep-th/9404005](https://arxiv.org/abs/hep-th/9404005).
76. *Alexandrov A.* Cut-and-join description of generalized Brezin–Gross–Witten model // *Adv. Theor. Math. Phys.* — 2018. — т. 22. — с. 1347—1399. — DOI: [10.4310/ATMP.2018.v22.n6.a1](https://doi.org/10.4310/ATMP.2018.v22.n6.a1). — arXiv: [1608.01627](https://arxiv.org/abs/1608.01627) [[math-ph](#)].
77. *Alexandrov A.* Cut-and-Join operator representation for Kontsevich-Witten tau-function // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2011. — т. 26. — с. 2193—2199. — DOI: [10.1142/S0217732311036607](https://doi.org/10.1142/S0217732311036607). — arXiv: [1009.4887](https://arxiv.org/abs/1009.4887) [[hep-th](#)].
78. *Fukuma M., Kawai H., Nakayama R.* Continuum Schwinger-dyson Equations and Universal Structures in Two-dimensional Quantum Gravity // *Int. J. Mod. Phys. A* / под ред. E. Brezin, S. R. Wadia. — 1991. — т. 6. — с. 1385—1406. — DOI: [10.1142/S0217751X91000733](https://doi.org/10.1142/S0217751X91000733).
79. *Mikhailov A.* Ward identities and W constraints in generalized Kontsevich model // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 1994. — т. 9. — с. 873—890. — DOI: [10.1142/S0217751X9400039X](https://doi.org/10.1142/S0217751X9400039X). — arXiv: [hep-th/9303129](https://arxiv.org/abs/hep-th/9303129).

80. *Mironov A., Pakulyak S.* On the continuum limit of the conformal matrix models // Theor. Math. Phys. — 1993. — т. 95. — с. 604–625. — DOI: [10.1007/BF01017146](https://doi.org/10.1007/BF01017146). — arXiv: [hep-th/9209100](https://arxiv.org/abs/hep-th/9209100).
81. Conformal matrix models as an alternative to conventional multimatrix models / S. Kharchev [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1993. — т. 404. — с. 717–750. — DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90595-G](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90595-G). — arXiv: [hep-th/9208044](https://arxiv.org/abs/hep-th/9208044).
82. *Zhou J.* Solution of W-Constraints for R-Spin Intersection Numbers. — 2013. — май. — arXiv: [1305.6991](https://arxiv.org/abs/1305.6991) [[math-ph](#)].
83. *Fukuma M., Kawai H., Nakayama R.* Infinite dimensional Grassmannian structure of two-dimensional quantum gravity // Commun. Math. Phys. — 1992. — т. 143. — с. 371–404. — DOI: [10.1007/BF02099014](https://doi.org/10.1007/BF02099014).
84. *Mironov A. D., Morozov A.* Generalized Q-functions for GKM // Phys. Lett. B. — 2021. — т. 819. — с. 136474. — DOI: [10.1016/j.physletb.2021.136474](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136474). — arXiv: [2101.08759](https://arxiv.org/abs/2101.08759) [[hep-th](#)].
85. Unification of all string models with $C < 1$ / S. Kharchev [и др.] // Phys. Lett. B. — 1992. — т. 275. — с. 311–314. — DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)91595-Z](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)91595-Z). — arXiv: [hep-th/9111037](https://arxiv.org/abs/hep-th/9111037).
86. *Brezin E., Hikami S.* Random Matrix, Singularities and Open/Close Intersection Numbers // J. Phys. A. — 2015. — т. 48, № 47. — с. 475201. — DOI: [10.1088/1751-8113/48/47/475201](https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/47/475201). — arXiv: [1502.01416](https://arxiv.org/abs/1502.01416) [[math-ph](#)].
87. *Morozov A.* Challenges of beta-deformation // Theor. Math. Phys. — 2012. — т. 173. — с. 1417–1437. — DOI: [10.1007/s11232-012-0123-5](https://doi.org/10.1007/s11232-012-0123-5). — arXiv: [1201.4595](https://arxiv.org/abs/1201.4595) [[hep-th](#)].
88. Superpolynomials for toric knots from evolution induced by cut-and-join operators / P. Dunin-Barkowski [и др.] // JHEP. — 2013. — т. 03. — с. 021. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2013\)021](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2013)021). — arXiv: [1106.4305](https://arxiv.org/abs/1106.4305) [[hep-th](#)].
89. *Aganagic M., Shakirov S.* Knot Homology and Refined Chern-Simons Index // Commun. Math. Phys. — 2015. — т. 333, № 1. — с. 187–228. — DOI: [10.1007/s00220-014-2197-4](https://doi.org/10.1007/s00220-014-2197-4). — arXiv: [1105.5117](https://arxiv.org/abs/1105.5117) [[hep-th](#)].
90. *Gorsky E., Negut A.* Refined knot invariants and Hilbert schemes // J. Math. Pure. Appl. — 2015. — т. 104. — с. 403–435. — arXiv: [1304.3328](https://arxiv.org/abs/1304.3328) [[math.RT](#)].

91. *Cherednik I.* Jones Polynomials of Torus Knots via DAHA // International Mathematics Research Notices. — 2012. — сент. — т. 2013, № 23. — с. 5366—5425. — arXiv: [1111.6195](https://arxiv.org/abs/1111.6195) [[math.QA](#)].
92. *Awata H., Yamada Y.* Five-dimensional AGT Relation and the Deformed beta-ensemble // Prog. Theor. Phys. — 2010. — т. 124. — с. 227—262. — DOI: [10.1143/PTP.124.227](https://doi.org/10.1143/PTP.124.227). — arXiv: [1004.5122](https://arxiv.org/abs/1004.5122) [[hep-th](#)].
93. *Mironov A., Morozov A.* Towards elliptic deformation of q,t -matrix models // Phys. Lett. B. — 2021. — т. 816. — с. 136221. — DOI: [10.1016/j.physletb.2021.136221](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136221). — arXiv: [2011.02855](https://arxiv.org/abs/2011.02855) [[hep-th](#)].
94. *Dumitriu I., Edelman A.* Matrix models for beta ensembles // Journal of Mathematical Physics. — 2002. — нояб. — т. 43, № 11. — с. 5830—5847. — DOI: [10.1063/1.1507823](https://doi.org/10.1063/1.1507823). — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1507823>.
95. *Mironov A., Morozov A., Popolitov A.* From superintegrability to tridiagonal representation of β -ensembles. — 2021. — окт. — arXiv: [2110.14005](https://arxiv.org/abs/2110.14005) [[hep-th](#)].
96. *Macdonald I. G.* Symmetric functions and Hall polynomials. — Oxford university press, 1998.
97. *Lassalle M.* Jack polynomials and free cumulants // Advances in Mathematics. — 2009. — т. 222, № 6. — с. 2227—2269. — DOI: [10.1016/j.aim.2009.07.007](https://doi.org/10.1016/j.aim.2009.07.007).
98. *Awata H.* Hidden Algebraic Structure of the Calogero—Sutherland Model, Integral Formula for Jack Polynomial and Their Relativistic Analog // Calogero—Moser— Sutherland Models / под ред. J. F. van Diejen, L. Vinet. — New York, NY : Springer New York, 2000. — с. 23—35. — ISBN 978-1-4612-1206-5. — DOI: [10.1007/978-1-4612-1206-5_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1206-5_2). — URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1206-5_2.
99. *Nazarov M.* Integrable Hierarchy of the Quantum Benjamin-Ono Equation // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2013. — дек. — DOI: [10.3842/sigma.2013.078](https://doi.org/10.3842/sigma.2013.078). — URL: <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2013.078>.

100. *Zenkevich Y.* Generalized Macdonald polynomials, spectral duality for conformal blocks and AGT correspondence in five dimensions // JHEP. — 2015. — т. 05. — с. 131. — DOI: [10.1007/JHEP05\(2015\)131](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2015)131). — arXiv: [1412.8592](https://arxiv.org/abs/1412.8592) [[hep-th](#)].
101. *Mironov A., Morozov A., Natanzon S.* Cut-and-join structure and integrability for spin Hurwitz numbers // Eur. Phys. J. C. — 2020. — т. 80, № 2. — с. 97. — DOI: [10.1140/epjc/s10052-020-7650-2](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-7650-2). — arXiv: [1904.11458](https://arxiv.org/abs/1904.11458) [[hep-th](#)].
102. *Cheng S.-J., Wang W.* Dualities and representations of Lie superalgebras. — American Mathematical Soc., 2012.
103. *Mironov A., Morozov A., Zhabin A.* Spin Hurwitz theory and Miwa transform for the Schur Q-functions // Phys. Lett. B. — 2022. — т. 829. — с. 137131. — DOI: [10.1016/j.physletb.2022.137131](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137131). — arXiv: [2111.05776](https://arxiv.org/abs/2111.05776) [[hep-th](#)].
104. *Mironov A., Morozov A.* On the complete perturbative solution of one-matrix models // Phys. Lett. B. — 2017. — т. 771. — с. 503–507. — DOI: [10.1016/j.physletb.2017.05.094](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.05.094). — arXiv: [1705.00976](https://arxiv.org/abs/1705.00976) [[hep-th](#)].
105. *Natanzon S. M., Orlov A. Y.* Hurwitz numbers from Feynman diagrams // Teor. Mat. Fiz. — 2020. — т. 204, № 3. — с. 396–429. — DOI: [10.1134/S0040577920090068](https://doi.org/10.1134/S0040577920090068). — arXiv: [2006.07396](https://arxiv.org/abs/2006.07396) [[math-ph](#)]. — [Erratum: Theor.Math.Phys. 205, 1546 (2020)].
106. *Mironov A., Morozov A.* Superintegrability of Kontsevich matrix model // Eur. Phys. J. C. — 2021. — т. 81, № 3. — с. 270. — DOI: [10.1140/epjc/s10052-021-09030-x](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09030-x). — arXiv: [2011.12917](https://arxiv.org/abs/2011.12917) [[hep-th](#)].
107. *Mello Koch R. de, Ramgoolam S.* From Matrix Models and Quantum Fields to Hurwitz Space and the absolute Galois Group. — 2010. — февр. — arXiv: [1002.1634](https://arxiv.org/abs/1002.1634) [[hep-th](#)].
108. *Berele A., Regev A.* Hook Young-Diagrams With Applications To Combinatorics And To Representations Of Lie-Superalgebras // Adv. Math. — 1987. — т. 64. — с. 118–175. — DOI: [10.1016/0001-8708\(87\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0001-8708(87)90007-7).

109. *Alday L. F., Gaiotto D., Tachikawa Y.* Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories // *Lett. Math. Phys.* — 2010. — т. 91. — с. 167—197. — DOI: [10.1007/s11005-010-0369-5](https://doi.org/10.1007/s11005-010-0369-5). — arXiv: [0906.3219](https://arxiv.org/abs/0906.3219) [[hep-th](#)].
110. *Alday L. F., Tachikawa Y.* Affine $SL(2)$ conformal blocks from 4d gauge theories // *Lett. Math. Phys.* — 2010. — т. 94. — с. 87—114. — DOI: [10.1007/s11005-010-0422-4](https://doi.org/10.1007/s11005-010-0422-4). — arXiv: [1005.4469](https://arxiv.org/abs/1005.4469) [[hep-th](#)].
111. *Losev A., Nekrasov N., Shatashvili S. L.* Issues in topological gauge theory // *Nucl. Phys. B.* — 1998. — т. 534. — с. 549—611. — DOI: [10.1016/S0550-3213\(98\)00628-2](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00628-2). — arXiv: [hep-th/9711108](https://arxiv.org/abs/hep-th/9711108).
112. *Lossev A., Nekrasov N., Shatashvili S. L.* Testing Seiberg-Witten solution // *NATO Sci. Ser. C / под ред. L. Baulieu [и др.]*. — 1999. — т. 520. — с. 359—372. — arXiv: [hep-th/9801061](https://arxiv.org/abs/hep-th/9801061).
113. *Moore G. W., Nekrasov N., Shatashvili S.* D particle bound states and generalized instantons // *Commun. Math. Phys.* — 2000. — т. 209. — с. 77—95. — DOI: [10.1007/s002200050016](https://doi.org/10.1007/s002200050016). — arXiv: [hep-th/9803265](https://arxiv.org/abs/hep-th/9803265).
114. *Moore G. W., Nekrasov N., Shatashvili S.* Integrating over Higgs branches // *Commun. Math. Phys.* — 2000. — т. 209. — с. 97—121. — DOI: [10.1007/PL00005525](https://doi.org/10.1007/PL00005525). — arXiv: [hep-th/9712241](https://arxiv.org/abs/hep-th/9712241).
115. *Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B.* Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // *Nucl. Phys. B / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev.* — 1984. — т. 241. — с. 333—380. — DOI: [10.1016/0550-3213\(84\)90052-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90052-X).
116. *Mironov A., Morozov A., Shakirov S.* A direct proof of AGT conjecture at $\beta = 1$ // *JHEP.* — 2011. — т. 02. — с. 067. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2011\)067](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2011)067). — arXiv: [1012.3137](https://arxiv.org/abs/1012.3137) [[hep-th](#)].
117. Proving AGT conjecture as HS duality: extension to five dimensions / *A. Mironov [и др.]* // *Nucl. Phys. B.* — 2012. — т. 855. — с. 128—151. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2011.09.021](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2011.09.021). — arXiv: [1105.0948](https://arxiv.org/abs/1105.0948) [[hep-th](#)].
118. *Mironov A., Morozov A., Shakirov S.* Conformal blocks as Dotsenko-Fateev Integral Discriminants // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 2010. — т. 25. — с. 3173—3207. — DOI: [10.1142/S0217751X10049141](https://doi.org/10.1142/S0217751X10049141). — arXiv: [1001.0563](https://arxiv.org/abs/1001.0563) [[hep-th](#)].

119. *Dotsenko V. S., Fateev V. A.* Conformal Algebra and Multipoint Correlation Functions in Two-Dimensional Statistical Models // Nucl. Phys. B / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1984. — т. 240. — с. 312. — DOI: [10.1016/0550-3213\(84\)90269-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90269-4).
120. *Gamayun O., Iorgov N., Lisovsky O.* How instanton combinatorics solves Painlevé VI, V and IIIs // J. Phys. A. — 2013. — т. 46. — с. 335203. — DOI: [10.1088/1751-8113/46/33/335203](https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/33/335203). — arXiv: [1302.1832](https://arxiv.org/abs/1302.1832) [[hep-th](#)].
121. *Iorgov N., Lisovsky O., Tykhyi Y.* Painlevé VI connection problem and monodromy of $c = 1$ conformal blocks // JHEP. — 2013. — т. 12. — с. 029. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2013\)029](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2013)029). — arXiv: [1308.4092](https://arxiv.org/abs/1308.4092) [[hep-th](#)].
122. *Iorgov N., Lisovsky O., Teschner J.* Isomonodromic tau-functions from Liouville conformal blocks // Commun. Math. Phys. — 2015. — т. 336, № 2. — с. 671—694. — DOI: [10.1007/s00220-014-2245-0](https://doi.org/10.1007/s00220-014-2245-0). — arXiv: [1401.6104](https://arxiv.org/abs/1401.6104) [[hep-th](#)].
123. *Gavrylenko P., Lisovsky O.* Fredholm Determinant and Nekrasov Sum Representations of Isomonodromic Tau Functions // Commun. Math. Phys. — 2018. — т. 363. — с. 1—58. — DOI: [10.1007/s00220-018-3224-7](https://doi.org/10.1007/s00220-018-3224-7). — arXiv: [1608.00958](https://arxiv.org/abs/1608.00958) [[math-ph](#)].
124. $\mathcal{N} = 2^*$ Gauge Theory, Free Fermions on the Torus and Painlevé VI / G. Bonelli [и др.] // Commun. Math. Phys. — 2020. — т. 377, № 2. — с. 1381—1419. — DOI: [10.1007/s00220-020-03743-y](https://doi.org/10.1007/s00220-020-03743-y). — arXiv: [1901.10497](https://arxiv.org/abs/1901.10497) [[hep-th](#)].
125. *Painlevé P.* Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme // Acta Mathematica. — 1902. — т. 25, none. — с. 1—85. — DOI: [10.1007/BF02419020](https://doi.org/10.1007/BF02419020). — URL: <https://doi.org/10.1007/BF02419020>.
126. *Nekrasov N.* Blowups in BPS/CFT correspondence, and Painlevé VI. — 2020. — июль. — arXiv: [2007.03646](https://arxiv.org/abs/2007.03646) [[hep-th](#)].
127. *Mironov A., Morozov A.* Superintegrability as the hidden origin of the Nekrasov calculus // Phys. Rev. D. — 2022. — т. 106, № 12. — с. 126004. — DOI: [10.1103/PhysRevD.106.126004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.126004). — arXiv: [2207.08242](https://arxiv.org/abs/2207.08242) [[hep-th](#)].

128. *Mironov A., Morozov A.* On determinant representation and integrability of Nekrasov functions // Phys. Lett. B. — 2017. — т. 773. — с. 34–46. — DOI: [10.1016/j.physletb.2017.08.004](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.08.004). — arXiv: [1707.02443](https://arxiv.org/abs/1707.02443) [[hep-th](#)].
129. *Nekrasov N.* Five dimensional gauge theories and relativistic integrable systems // Nucl. Phys. B. — 1998. — т. 531. — с. 323–344. — DOI: [10.1016/S0550-3213\(98\)00436-2](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00436-2). — arXiv: [hep-th/9609219](https://arxiv.org/abs/hep-th/9609219).
130. *Mironov A., Morozov A.* q-Painlevé equation from Virasoro constraints // Phys. Lett. B. — 2018. — т. 785. — с. 207–210. — DOI: [10.1016/j.physletb.2018.08.046](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.08.046). — arXiv: [1708.07479](https://arxiv.org/abs/1708.07479) [[hep-th](#)].
131. *Mironov A., Morozov A., Shakirov S.* Brezin-Gross-Witten model as 'pure gauge' limit of Selberg integrals // JHEP. — 2011. — т. 03. — с. 102. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2011\)102](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2011)102). — arXiv: [1011.3481](https://arxiv.org/abs/1011.3481) [[hep-th](#)].
132. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painlevé property for partial differential equations // Journal of Mathematical Physics. — 1983. — т. 24, № 3. — с. 522–526.
133. *Cassia L., Lodin R., Zabzine M.* Virasoro Constraints Revisited // Commun. Math. Phys. — 2021. — т. 387, № 3. — с. 1729–1755. — DOI: [10.1007/s00220-021-04138-3](https://doi.org/10.1007/s00220-021-04138-3). — arXiv: [2102.05682](https://arxiv.org/abs/2102.05682) [[hep-th](#)].
134. *Miwa T.* On Hirota's difference equations // Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences. — 1982. — т. 58, № 1. — с. 9–12. — DOI: [10.3792/pjaa.58.9](https://doi.org/10.3792/pjaa.58.9). — URL: <https://doi.org/10.3792/pjaa.58.9>.
135. Towards unified theory of 2-d gravity / S. Kharchev [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1992. — т. 380. — с. 181–240. — DOI: [10.1016/0550-3213\(92\)90521-C](https://doi.org/10.1016/0550-3213(92)90521-C). — arXiv: [hep-th/9201013](https://arxiv.org/abs/hep-th/9201013).
136. *Mironov A., Morozov A.* On determinant representation and integrability of Nekrasov functions // Phys. Lett. B. — 2017. — т. 773. — с. 34–46. — DOI: [10.1016/j.physletb.2017.08.004](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.08.004). — arXiv: [1707.02443](https://arxiv.org/abs/1707.02443) [[hep-th](#)].
137. *Mironov A., Morozov A., Morozov A.* Conformal blocks and generalized Selberg integrals // Nucl. Phys. B. — 2011. — т. 843. — с. 534–557. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2010.10.016](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2010.10.016). — arXiv: [1003.5752](https://arxiv.org/abs/1003.5752) [[hep-th](#)].
138. *Jimbo M., Sakai H.* A q-analog of the sixth Painlevé equation // Letters in Mathematical Physics. — 1996. — т. 38, № 2. — с. 145–154.

139. *Grammaticos B., Ramani A., Papageorgiou V.* Do integrable mappings have the Painlevé property? // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — т. 67. — с. 1825—1828. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.67.1825](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.1825).
140. *Tsuda T., Masuda T.* q-Painlevé VI equation arising from q-UC hierarchy // *Communications in mathematical physics.* — 2006. — т. 262. — с. 595—609.
141. *Takenawa T.* The extended Weyl group $\widetilde{W}(D_5^{(1)})$ as an extension of KNY's birational representation of $\widetilde{W}(A_1^{(1)} \times A_3^{(1)})$. — 2002. — arXiv: [nlin/0203029](https://arxiv.org/abs/nlin/0203029) [[nlin.SI](https://arxiv.org/abs/nlin/0203029)].
142. *Sakai H.* Casorati determinant solutions for the q-difference sixth Painlevé equation // *Nonlinearity.* — 1998. — июль. — т. 11, № 4. — с. 823. — DOI: [10.1088/0951-7715/11/4/004](https://doi.org/10.1088/0951-7715/11/4/004). — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/11/4/004>.
143. *Jimbo M., Nagoya H., Sakai H.* CFT approach to the q-Painlevé VI equation // *Journal of Integrable Systems.* — 2017. — т. 2, № 1.
144. *Bershtein M. A., Shchekkin A. I.* q-deformed Painlevé τ function and q-deformed conformal blocks // *J. Phys. A.* — 2017. — т. 50, № 8. — с. 085202. — DOI: [10.1088/1751-8121/aa5572](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa5572). — arXiv: [1608.02566](https://arxiv.org/abs/1608.02566) [[math-ph](https://arxiv.org/abs/1608.02566)].
145. *Bershtein M. A., Shchekkin A. I.* Bilinear equations on Painlevé τ functions from CFT // *Commun. Math. Phys.* — 2015. — т. 339, № 3. — с. 1021—1061. — DOI: [10.1007/s00220-015-2427-4](https://doi.org/10.1007/s00220-015-2427-4). — arXiv: [1406.3008](https://arxiv.org/abs/1406.3008) [[math-ph](https://arxiv.org/abs/1406.3008)].
146. *Bershtein M. A., Shchekkin A. I.* Backlund transformation of Painlevé III(D_8) tau function // *J. Phys. A.* — 2017. — т. 50, № 11. — с. 115205. — DOI: [10.1088/1751-8121/aa59c9](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa59c9). — arXiv: [1608.02568](https://arxiv.org/abs/1608.02568) [[math-ph](https://arxiv.org/abs/1608.02568)].
147. *Lisovyy O.* Dyson's constant for the hypergeometric kernel // *New Trends in Quantum Integrable Systems.* — World Scientific, 2011. — с. 243—267.
148. *Grammaticos B., Ramani A.* Discrete Painlevé Equations: A Review // под ред. B. Grammaticos, T. Tamizhmani, Y. Kosmann-Schwarzbach. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2004. — с. 245—321. — ISBN 978-3-540-40357-9. — DOI: [10.1007/978-3-540-40357-9_7](https://doi.org/10.1007/978-3-540-40357-9_7). — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-40357-9_7.

149. *Gaiotto D.* Asymptotically free $\mathcal{N} = 2$ theories and irregular conformal blocks // J. Phys. Conf. Ser. / под ред. S. R. Das, A. D. Shapere. — 2013. — т. 462, № 1. — с. 012014. — DOI: [10.1088/1742-6596/462/1/012014](https://doi.org/10.1088/1742-6596/462/1/012014). — arXiv: [0908.0307](https://arxiv.org/abs/0908.0307) [[hep-th](#)].
150. *Marshakov A., Mironov A., Morozov A.* On non-conformal limit of the AGT relations // Phys. Lett. B. — 2009. — т. 682. — с. 125—129. — DOI: [10.1016/j.physletb.2009.10.077](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2009.10.077). — arXiv: [0909.2052](https://arxiv.org/abs/0909.2052) [[hep-th](#)].

Приложение А

Симметрические функции

Приведем для справки основные факты из теории симметрических функций и характеров, которые мы используем в этой работе [65; 96].

Определим симметрические функции от переменных x_1, \dots, x_n , называемые степенными суммами:

$$p_k = \sum_{i=1}^n x_i^k. \quad (\text{A.1})$$

В ходе работы мы также иногда используем обозначение:

$$t_k = \frac{p_k}{k}. \quad (\text{A.2})$$

Мономы степенных сумм будем записывать как:

$$p_\Delta = \prod_{i=1}^{l(\Delta)} p_{\Delta_i}, \quad (\text{A.3})$$

где $\Delta = [\Delta_1, \dots, \Delta_l]$ - разбиение некоторого целого числа m , то есть упорядоченный набор, такой что:

$$|\Delta| := \sum_{i=1}^l \Delta_i = m, \quad (\text{A.4})$$

де $l(\Delta) = l$ называется длиной разбиения. Мономы степенных сумм являются базисом в пространстве симметрических полиномов от x_i . Теперь определим многочлены Шура следующим образом. Рассмотрим производящую функцию:

$$\exp\left(\sum_k \frac{p_k}{k} z^k\right) = \sum_n s_n z^n, \quad (\text{A.5})$$

которая определяет функции s_n от p_k . Функции Шура определяются как:

$$S_R(p) = \det_{i,j} s_{R_i - i + j}, \quad (\text{A.6})$$

где R так же некоторое разбиение. Таким образом, для разбиений из одного элемента $S_{[n]} = s_n$. Разбиения удобно изображать диаграммами Юнга, в которых строки отвечают компонентам разбиения. Например, диаграмма Юнга, отвечающая разбиению $[6,4,2,1]$, имеет вид:

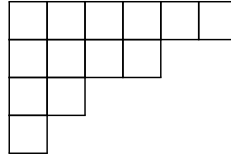


Рисунок А.1 — Диаграмма Юнга, отвечающая разбиению $[6,4,2,1]$

Поэтому можно считать, что функции Шура задаются диаграммами Юнга. По построению функции Шура являются симметрическими многочленами от переменных x_i . В этих переменных данные многочлены задаются детерминантными формулами Вейля:

$$S_R(p(x_i)) = \frac{\det_{ij} x_i^{\lambda_j - j}}{\det_{ij} x_i^{-j}}. \quad (\text{A.7})$$

Полиномы Шура играют особую роль в теории представлений, поскольку отвечают характерам группы $GL(N)$. Действительно, рассмотрим представление ρ_R группы $GL(N)$, заданное диаграммой Юнга R и групповой элемент X . Тогда характер представления, вычисленный на элементе X , будет симметрическим многочленом его собственных значений, равным полиному Шура:

$$S_R(p_k = \text{Tr } X^k) = \text{Tr}_R(\rho_R(X)). \quad (\text{A.8})$$

Детерминантные формулы Вейля выражают это равенство в общем виде. Поскольку представления и симметрические функции однозначно заданы своими диаграммами Юнга, мы будем использовать эти термины синонимично. Двойственность Шура-Вейля подразумевает соответствие между теорией представлений $GL(N)$ и симметрической группы S_n . С точки зрения рассматриваемых симметрических многочленов этот факт находит отражение в формуле для перехода между функциями Шура и степенными суммами, называемой формулой Фробениуса:

$$S_R = \sum_{\Delta} \frac{\psi_R(\Delta)}{z_{\Delta}} p_{\Delta}, \quad (\text{A.9})$$

где $\psi_R(\Delta)$ - характер представления R симметрической группы S_n , где $n = |R|$, вычисленный на классе сопряженности Δ . Комбинаторный фактор

$$z_\Delta = \prod_j m_j! j^{m_j}, \quad (\text{A.10})$$

где m_j - кратность вхождения числа j в Δ , отвечает порядку группы симметрией разбиения. Будучи характерами многочлены Шура так же образуют базис в пространстве как симметрических многочленов, так и функций от p_k . Это согласуется с тем, что замена (A.9) невырожденная.

В пространстве симметрических функций можно ввести скалярное произведение по формуле:

$$\langle p_\Delta | p'_\Delta \rangle = z_\Delta \delta_{\Delta, \Delta}. \quad (\text{A.11})$$

В силу соотношений полноты на характеры симметрической группы $\psi_R(\Delta)$ это означает, что функции Шура также ортогональны относительно этого скалярного произведения:

$$\langle S_R | S_Q \rangle = \delta_{R, Q}. \quad (\text{A.12})$$

В ходе работы мы используем функции Шура, вычисленные в специальных точках. Так, например:

$$S_R(p_k = \delta_{k, s}) = \frac{1}{(|R|/s)! s^{|R|/s}} \cdot \psi_R(\underbrace{[s, \dots, s]}_{|R|/s}). \quad (\text{A.13})$$

Функция Шура, вычисленная в такой точке равна нулю если $|R|$ не делится на s . Частное значение при $s = 1$ отвечает размерности представления симметрической группы:

$$d_R = S_R(p_k = \delta_{k, 1}). \quad (\text{A.14})$$

Другое специальное значения возникает, если все степенные суммы положить равными константе:

$$S_R(p_k = u) = S_R(p_k = \delta_{k, 1}) \prod_{(i, j) \in R} (N + j - i). \quad (\text{A.15})$$

Если выбрать $u = N$, как в большей части соответствующих формул в работе, то получим размерность представления группы $GL(N)$:

$$S_R(p_k = N) = D_R(N). \quad (\text{A.16})$$

В этой формуле (i, j) обозначают координаты клетки в диаграмме Юнга. Так индекс j пробегает значения $1, \dots, l(R)$, а индекс $i - 1, \dots, R_i$. На протяжении работы мы иногда опускаем часть обозначений и пишем просто

$$S_R \{ \delta_{k,s} \} := S_R(p_k = \delta_{k,s}) \quad (\text{A.17})$$

или

$$S_R \{ u \} := S_R(p_k = u). \quad (\text{A.18})$$

Как и характеры в целом, функции Шура образуют кольцо, структурные константа которого называются коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона:

$$S_R S_Q = \sum_P \mathcal{N}_{R,Q}^P S_P. \quad (\text{A.19})$$

Они отвечают кратности появления представления P в тензорном произведении представлений R и Q . Среди прочих, особый интерес представляет так называемое правило Пьери для $Q = \square$, то есть разбиения $\square \equiv [1]$. При этом $S_{[1]} = p_1$

$$p_1 S_R = \sum_{R+\square} S_{R+\square}. \quad (\text{A.20})$$

Мы будем использовать обозначение $R+\square$ для диаграммы Юнга, образованной добавлением одной клетки к диаграмме Юнга R . При этом учитывается, что клетка может быть добавлена только так, чтобы получалась снова диаграмма Юнга. Таким образом, сумма ведется по всем возможным способам добавления клетки. Используя обратную формулу Фробениуса

$$p_k = \sum_Q \psi_Q([k]) S_Q, \quad (\text{A.21})$$

где характер симметрической группы $\psi_Q([k]) = (-1)^a$ для $Q = [a, 1^{k-a}]$, и $\psi_Q([k]) = 0$ в других случаях, и формулу

$$S_Q \left\{ k \frac{\partial}{\partial p_k} \right\} \cdot S_R \{ p_k \} = S_{R/Q} \{ p_k \}, \quad (\text{A.22})$$

где $S_{R/Q}$ называется косо́й функцией Шура, имеем

$$k \frac{\partial S_R}{\partial p_k} = \sum_Q \psi_Q([k]) S_{R/Q} = \sum_{a,P} (-1)^a \mathcal{N}_{P,[a,1^{k-a}]}^R S_P. \quad (\text{A.23})$$

Тогда из правила Литтлвуда-Ричардсона (A.19) следует:

$$\sum_k k p_{k+n} \frac{\partial S_R}{\partial p_k} = \sum_S {}_n B_R^S S_S. \quad (\text{A.24})$$

В частности, можно получить следующее соотношение:

$$\pm 1 B_R^S := \sum_{k,a,b,P} (-1)^{a+b} \mathcal{N}_{P,[a,1^{k-a}]}^R \mathcal{N}_{P,[b,1^{k-b+1}]}^S = (j_{\square} - i_{\square}) \delta_{S,R \pm \square}. \quad (\text{A.25})$$

Отметим ещё одну важную формулу из теории симметрических функций - формулу Коши:

$$\exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k \bar{p}_k}{k} \right) = \sum_R S_R(p_k) S_R(\bar{p}_k) \quad (\text{A.26})$$

В правой части суммирование ведётся по всем диаграммам Юнга. В данном виде она представляет собой равенство двух формальных рядов. Её аналог для параметризации (A.1) имеет вид:

$$\prod_{i,j=1}^N \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{R: l(R) < N} S_R(x_i) S_R(y_j) \quad (\text{A.27})$$

Простейший случай которой для $N = 1$:

$$\frac{1}{1 - xy} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n y^n \quad (\text{A.28})$$

Приложение Б

Статсуммы ОМК

В этом приложении представлены первые порядки разложения статистических сумм $Z_2\{p\}$, $Z_3\{p\}$ и $Z_4\{p\}$, полученных методом, описанным в работе. Они часто нужны в приложениях. Построенным методом легко сгенерировать гораздо больше членов: количество здесь ограничено длиной, приемлемой в печатной версии.

$$\begin{aligned}
 Z_2\{p\} = & 1 + x^3 \left(\frac{p_3}{48} + \frac{p_1^3}{12} \right) + x^6 \left(\frac{25p_1^3p_3}{576} + \frac{25p_3^2}{4608} + \frac{p_1p_5}{32} + \frac{p_1^6}{288} \right) + \\
 & + x^9 \left(\frac{1225}{55296}p_1^3p_3^2 + \frac{49}{13824}p_1^6p_3 + \frac{7}{384}p_1^4p_5 + \frac{5}{128}p_1^2p_7 + \frac{49}{1536}p_1p_3p_5 + \frac{35}{3072}p_9 + \frac{p_1^9}{10368} + \frac{1225p_3^3}{663552} \right) + \\
 & + x^{12} \left(\frac{89425}{7962624}p_3^3p_1^3 + \frac{3577}{1327104}p_3^2p_1^6 + \frac{73}{497664}p_3p_1^9 + \frac{13}{9216}p_1^7p_5 + \frac{17}{1536}p_1^5p_7 + \frac{49}{2048}p_5^2p_1^2 + \frac{29}{2048}p_7p_5 + \frac{1715}{36864}p_9p_1^3 + \right. \\
 & \left. + \frac{2555}{147456}p_9p_3 + \frac{105}{2048}p_{11}p_1 + \frac{365}{6144}p_7p_3p_1^2 + \frac{p_1^{12}}{497664} + \frac{89425}{127401984}p_4^3 + \frac{3577}{147456}p_3^2p_1p_5 + \frac{511}{18432}p_3p_1^4p_5 \right) + \\
 & + x^{15} \left(\frac{7427}{884736}p_9p_1^6 + \frac{1169}{122880}p_1^5p_5^2 + \frac{19p_5p_1^{10}}{331776} + \frac{247835}{14155776}p_9p_3^2 + \frac{8674225}{1528823808}p_3^4p_1^3 + \frac{346969}{191102976}p_3^3p_1^6 + \frac{7081}{47775744}p_3^2p_1^9 + \right. \\
 & \left. + \frac{455}{8192}p_{11}p_1^4 + \frac{29}{36864}p_7p_1^8 + \frac{97p_1^{12}p_3}{23887872} + \frac{3395}{32768}p_{11}p_3p_1 + \frac{7427}{98304}p_9p_5p_1 + \frac{35405}{589824}p_7p_3^2p_1^2 + \frac{1649}{73728}p_7p_3p_1^5 + \right. \\
 & \left. + \frac{2813}{98304}p_7p_3p_5 + \frac{166355}{1769472}p_9p_1^3p_3 + \frac{49567}{1769472}p_5p_3^2p_1^4 + \frac{21}{5120}p_5^3 + \frac{1261}{442368}p_5p_3p_1^7 + \frac{4753}{98304}p_3p_1^2p_5^2 + \frac{1739}{24576}p_5p_1^3p_7 + \right. \\
 & \left. + \frac{346969}{21233664}p_5p_3^3p_1 + \frac{1155}{8192}p_{13}p_1^2 + \frac{145}{4096}p_7^2p_1 + \frac{5005}{98304}p_{15} + \frac{1734845}{6115295232}p_5^3 + \frac{p_1^{15}}{29859840} \right) + O(x^{18}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_3\{p\} = & 1 + x^4 \left(\frac{1}{36}p_4 + \frac{1}{6}p_1^2p_2 \right) + x^8 \left(\frac{13}{216}p_1^2p_2p_4 + \frac{13}{2592}p_4^2 - \frac{1}{216}p_2^4 + \frac{1}{72}p_1^4p_2^2 + \frac{1}{27}p_1^3p_5 + \frac{1}{27}p_1p_7 \right) + \\
 & + x^{12} \left(\frac{325}{279936}p_4^3 - \frac{5}{324}p_2^2p_8 - \frac{1}{81}p_1p_2^3p_5 + \frac{1}{162}p_1^5p_5p_2 - \frac{1}{1296}p_1^2p_2^5 + \frac{25}{972}p_4p_1^3p_5 - \frac{1}{162}p_2p_2^5 + \frac{25}{972}p_4p_1p_7 - \right. \\
 & \left. - \frac{25}{7776}p_2^4p_4 + \frac{5}{324}p_8p_1^4 + \frac{7}{162}p_1^2p_{10} + \frac{5}{162}p_1^3p_2p_7 + \frac{325}{15552}p_1^2p_2p_4^2 + \frac{25}{2592}p_1^4p_2p_4 + \frac{1}{1296}p_1^6p_3^2 \right) + \\
 & + x^{16} \left(\frac{12025}{40310784}p_4^4 + \frac{25}{1458}p_1^2p_7^2 + \frac{35}{729}p_1^3p_{13} - \frac{925}{559872}p_2^4p_4^2 - \frac{55}{1458}p_2p_{14} + \frac{7}{324}p_1^4p_2p_{10} + \frac{925}{69984}p_4^2p_1p_7 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{81}p_2^2p_5p_7 - \frac{185}{11664}p_2^2p_4p_8 + \frac{925}{69984}p_1^3p_4^2p_5 - \frac{13}{972}p_1^2p_2^2p_5^2 - \frac{25}{5832}p_1p_2^4p_7 - \frac{25}{1944}p_1^2p_3^2p_8 + \frac{259}{5832}p_4p_1^2p_{10} - \right. \\
 & \left. - \frac{10}{243}p_1p_2^2p_{11} + \frac{1}{216}p_1^5p_2^2p_7 + \frac{12025}{1679616}p_1^2p_2p_4^3 + \frac{37}{5832}p_1^5p_2p_4p_5 - \frac{37}{2916}p_1p_3^3p_4p_5 + \frac{185}{5832}p_1^3p_2p_4p_7 - \right. \\
 & \left. - \frac{10}{243}p_1p_2p_5p_8 - \frac{1}{243}p_1p_5^3 + \frac{2}{243}p_{11}p_1^5 + \frac{5}{1944}p_8p_1^6p_2 + \frac{10}{729}p_1^4p_5p_7 - \frac{13}{5832}p_1^3p_5p_4^2 + \frac{1}{1944}p_1^7p_5p_2^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{185}{11664}p_4p_8p_1^4 + \frac{1}{1458}p_1^6p_5^2 + \frac{1}{31104}p_1^8p_4^2 - \frac{7}{729}p_2^3p_{10} - \frac{11}{729}p_{11}p_5 - \frac{1}{15552}p_1^4p_2^6 - \frac{37}{5832}p_2p_4p_5^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{37}{46656}p_1^6p_2^3p_4 - \frac{37}{46656}p_1^2p_5^2p_4 + \frac{925}{186624}p_1^4p_2^2p_4^2 + \frac{1}{93312}p_2^8 - \frac{85}{11664}p_2^8 \right) + O(x^{20}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_4\{p\} = & 1 + x^5 \left(\frac{p_5}{32} + \frac{1}{8}p_3p_1^2 + \frac{1}{8}p_2^2p_1 \right) + \\
& + x^{10} \left(\frac{1}{128}p_3^2p_1^4 + \frac{1}{64}p_2^2p_3p_1^3 + \frac{1}{32}p_7p_1^3 + \frac{1}{128}p_2^4p_1^2 + \frac{9}{256}p_3p_5p_1^2 + \frac{1}{16}p_2p_6p_1^2 + \frac{9}{256}p_2^2p_5p_1 + \frac{5p_9p_1}{128} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{64}p_2^2p_3^2 + \frac{9p_5^2}{2048} - \frac{p_3p_7}{128} \right) + \\
& + x^{15} \left(\frac{p_3^3p_1^6}{3072} + \frac{p_2^2p_3^2p_1^5}{1024} + \frac{1}{256}p_3p_7p_1^5 + \frac{p_2^4p_3p_1^4}{1024} + \frac{17p_3^2p_5p_1^4}{4096} + \frac{1}{128}p_2p_3p_6p_1^4 + \frac{1}{256}p_2^2p_7p_1^4 + \right. \\
& + \frac{7}{512}p_{11}p_1^4 + \frac{p_2^6p_1^3}{3072} + \frac{1}{96}p_6^2p_1^3 + \\
& + \frac{17p_2^2p_3p_5p_1^3}{2048} + \frac{1}{128}p_2^3p_6p_1^3 + \frac{17p_5p_7p_1^3}{1024} + \frac{55p_3p_9p_1^3}{3072} + \frac{1}{32}p_2p_{10}p_1^3 - \frac{1}{512}p_2^2p_3^2p_1^2 + \frac{153p_3p_5^2p_1^2}{16384} + \\
& + \frac{17p_2^4p_5p_1^2}{4096} + \frac{17}{512}p_2p_5p_6p_1^2 - \\
& - \frac{p_3^2p_7p_1^2}{1024} + \frac{25p_2^2p_9p_1^2}{1024} + \frac{45p_{13}p_1^2}{1024} - \frac{1}{512}p_2^4p_3^2p_1 + \frac{153p_2^2p_5^2p_1}{16384} - \frac{3}{512}p_7^2p_1 - \\
& - \frac{1}{64}p_2p_3^2p_6p_1 - \frac{25p_2^2p_3p_7p_1}{1024} + \frac{85p_5p_9p_1}{4096} - \\
& - \frac{7}{512}p_3p_{11}p_1 + \frac{p_3^5}{3840} + \frac{51p_5^3}{65536} - \frac{19p_3p_6^2}{3840} - \\
& - \frac{17p_2^2p_3^2p_5}{2048} - \frac{1}{96}p_2^3p_3p_6 - \frac{1}{512}p_2^4p_7 - \frac{17p_3p_5p_7}{4096} - \frac{29p_2p_6p_7}{1920} - \frac{5p_3^2p_9}{1536} - \\
& \left. - \frac{59p_2p_3p_{10}}{1920} - \frac{311p_2^2p_{11}}{15360} - \frac{693p_{15}}{40960} \right) + O(x^{20}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_5\{p\} = & 1 + x^6 \left(\frac{p_2^3}{30} + \frac{1}{5}p_1p_3p_2 + \frac{1}{10}p_1^2p_4 + \frac{p_6}{30} \right) + \\
& + x^{12} \left(\frac{p_2^6}{1800} + \frac{1}{150}p_1p_3p_2^4 + \frac{1}{300}p_1^2p_4p_2^3 + \frac{7}{900}p_6p_2^3 + \frac{1}{50}p_1^2p_3^2p_2^2 - \frac{1}{100}p_2^2p_2^2 + \frac{1}{25}p_1p_7p_2^2 - \frac{1}{50}p_3^2p_4p_2 + \right. \\
& + \frac{1}{50}p_1^3p_3p_4p_2 + \frac{7}{150}p_1p_3p_6p_2 + \frac{3}{50}p_1^2p_8p_2 - \frac{p_3^4}{300} + \frac{1}{200}p_1^4p_4^2 + \frac{7p_6^2}{1800} + \frac{7}{300}p_1^2p_4p_6 + \\
& \left. + \frac{1}{25}p_1^2p_3p_7 - \frac{p_4p_8}{100} + \frac{2}{75}p_1^3p_9 - \frac{p_3p_9}{75} + \frac{p_1p_{11}}{25} \right) + \\
& + O(x^{18}).
\end{aligned}$$

$$Z_6\{p\} = 1 + x^7 \left(\frac{5}{144}p_7 + \frac{1}{12}p_1^2p_5 + \frac{1}{6}p_1p_2p_4 + \frac{1}{12}p_1p_3^2 + \frac{1}{12}p_2^2p_3 \right) + O(x^{14}).$$

В общем случае первые члены имеют вид

$$\begin{aligned}
Z_r\{p\} = & 1 + x^{r+1} \left(\frac{r-1}{24r}p_{r+1} + \frac{3^{-\delta_{r,2}}}{2r}p_1^2p_{r-1} + \frac{2^{-\delta_{r,4}} \cdot \theta_{r>3}}{r}p_1p_2p_{r-2} + \dots \right) + \\
& + x^{2r+2} \left(\frac{r^2-1}{24r^2}p_1p_2p_{r+1} + \frac{(r-1)(r+23)}{9 \cdot 128 \cdot r^2}p_{r+1}^2 + \frac{(r-1)\theta_{r>2}}{6r^2}p_1^3p_{2r-1} + \right. \\
& \left. + \frac{3^{-\delta_{r,2}} \cdot (r+23)}{12 \cdot (2r)^2}p_1^2p_{r-1}p_{r+1} + \frac{3^{-2\delta_{r,2}}}{2 \cdot (2r)^2}p_1^4p_{r-1}^2 + \dots \right) + \\
& + O(x^{3r+3}).
\end{aligned}$$

Приложение В

Доказательство интегрируемости в модели Натансона-Орлова

Здесь мы приводим формальное доказательство (4.37) и (4.43). Оно основано на теореме Вика [64, ф.(7)]

$$\left\langle \prod_{i=1}^n Z_{a_i \alpha_i} \bar{Z}_{b_i \beta_i} \right\rangle = \sum_{\gamma \in S_n} \prod_{i=1}^n \delta_{a_i}^{b_{\gamma(i)}} \delta_{\alpha_i}^{\beta_{\gamma(i)}}. \quad (\text{B.1})$$

Пусть $|R| = |\Delta| = n$, тогда

$$\langle S_R(AZBZ^\dagger) \rangle = \sum_{\Delta \vdash n} \frac{\psi_R(\Delta)}{z_\Delta} \cdot \langle p_\Delta \rangle, \quad (\text{B.2})$$

где

$$\langle p_\Delta \rangle = \left\langle \prod_{i=1}^{l(\Delta)} \text{tr} (AZBZ^\dagger)^{\Delta_i} \right\rangle = \prod_{i=1}^n A_{a_i k_i} B_{\alpha_i m_i} \cdot \left\langle \prod_{i=1}^n Z_{k_i \alpha_i} \bar{Z}_{a_{\sigma(i)} m_i} \right\rangle. \quad (\text{B.3})$$

Здесь σ — любой элемент из класса сопряженности Δ . Затем

$$\begin{aligned} \langle p_\Delta \rangle &= \prod_{i=1}^n A_{a_i k_i} B_{\alpha_i m_i} \sum_{\gamma \in S_n} \prod_{i=1}^n \delta_{k_i}^{a_{\gamma(\sigma(i))}} \delta_{\alpha_i}^{m_{\gamma(i)}} = \\ &= \sum_{\gamma \in S_n} \prod_{i=1}^n A_{a_i a_{\gamma(\sigma(i))}} B_{m_{\gamma(i)} m_i} = \sum_{\gamma \in S_n} A_{\gamma \circ \sigma} B_\gamma, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

где последнее равенство означает, что если $\gamma \circ \sigma$ и γ принадлежат классам сопряженности λ и μ , соответственно, тогда

$$A_{\gamma \circ \sigma} = A_\lambda = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \text{tr} A^{\lambda_i}, \quad B_\gamma = B_\mu = \prod_{i=1}^{l(\mu)} \text{tr} B^{\mu_i} \quad (\text{B.5})$$

и (B.2) имеет вид

$$\langle S_R(AZBZ^\dagger) \rangle = \sum_{\Delta \vdash n} \frac{\psi_R(\Delta)}{z_\Delta} \cdot \sum_{\gamma \in S_n} A_{\gamma \circ \sigma} B_\gamma. \quad (\text{B.6})$$

Теперь воспользуемся формулой

$$p_\Delta = \sum_{R \vdash n} \psi_R(\Delta) S_R(p), \quad (\text{B.7})$$

чтобы переписать (B.6):

$$\begin{aligned} \langle S_R(AZBZ^\dagger) \rangle &= \sum_{\Delta \vdash n} \frac{\psi_R(\Delta)}{z_\Delta} \times \\ &\times \sum_{\gamma \in S_n} \left(\sum_{R_1 \vdash n} \psi_{R_1}(\gamma \circ \sigma) S_{R_1}(A) \right) \left(\sum_{R_2 \vdash n} \psi_{R_2}(\gamma) S_{R_2}(B) \right) = \\ &= \sum_{\Delta, R_1, R_2} \frac{\psi_R(\Delta)}{z_\Delta} S_{R_1}(A) S_{R_2}(B) \left(\sum_{\gamma \in S_n} \psi_{R_1}(\gamma \circ \sigma) \psi_{R_2}(\gamma) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Обобщенные соотношения ортогональности [64, Eq.(9)]

$$\sum_{\gamma \in S_n} \psi_{R_1}(\gamma \circ \sigma) \psi_{R_2}(\gamma) = \frac{\psi_{R_1}(\sigma)}{d_{R_1}} \delta_{R_1, R_2} \quad (\text{B.9})$$

и $\psi_R(\sigma) = \psi_R(\Delta)$ дают, что

$$\begin{aligned} \langle S_R(AZBZ^\dagger) \rangle &= \sum_{R_1} \frac{S_{R_1}(A) S_{R_1}(B)}{d_{R_1}} \underbrace{\left(\sum_{\Delta} \frac{\psi_R(\Delta) \psi_{R_1}(\Delta)}{z_\Delta} \right)}_{\delta_{R, R_1}} = \\ &= \frac{S_R(A) S_R(B)}{d_R}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Это завершает доказательство (4.37).

Простое, но полезное следствие формул выше, состоит в равенстве

$$\langle p_{[1^n]} \rangle = \langle (\text{tr } AZBZ^\dagger)^n \rangle = \sum_{\gamma \in S_n} A_{\gamma \circ \text{id}} B_\gamma = \sum_{\Delta \vdash n} [\Delta] A_\Delta B_\Delta, \quad (\text{B.11})$$

где $[\Delta] = \frac{n!}{z_\Delta}$ — количество элементов в классе сопряженности Δ . При этом

$$\begin{aligned}
\sum_{R \vdash n} S_R(A) S_R(B) &= \sum_{R \vdash n} \sum_{\Delta_1} \frac{\psi_R(\Delta_1)}{z_{\Delta_1}} A_{\Delta_1} \sum_{\Delta_2} \frac{\psi_R(\Delta_2)}{z_{\Delta_2}} B_{\Delta_2} = \\
&= \sum_{\Delta_1 \Delta_2} \frac{A_{\Delta_1} B_{\Delta_2}}{z_{\Delta_1}} \underbrace{\left(\sum_{R \vdash n} \frac{\psi_R(\Delta_1) \psi_R(\Delta_2)}{z_{\Delta_2}} \right)}_{\delta_{\Delta_1, \Delta_2}} = \\
&= \sum_{\Delta} \frac{1}{z_\Delta} A_\Delta B_\Delta = \frac{1}{n!} \sum_{\Delta} [\Delta] A_\Delta B_\Delta.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Таким образом, мы можем переписать (B.11) как

$$\langle p_{[1^n]} \rangle = \langle (\text{tr} AZBZ^\dagger)^n \rangle = \sum_{\Delta \vdash n} [\Delta] A_\Delta B_\Delta = n! \sum_R S_R(A) S_R(B). \tag{B.13}$$

Теперь, чтобы получить (4.43), фермионный аналог (4.37), нужна фермионная теорема Вика:

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \Psi_{a_i \alpha_i} \bar{\Psi}_{b_i \beta_i} \right\rangle = \sum_{\gamma \in S_n} \text{sgn}(\gamma) \prod_{i=1}^n \delta_{a_i}^{b_{\gamma(i)}} \delta_{\alpha_i}^{\beta_{\gamma(i)}}, \tag{B.14}$$

где $\text{sgn}(\gamma) = \pm 1$ зависит от четности перестановки:

γ	$\text{sgn}(\gamma)$
[1]	1
[2]	-1
[1,1]	1
[3]	1
[2,1]	-1
[1,1,1]	1
[4]	-1
[3,1]	1
[2,2]	1
[2,1,1]	-1
[1,1,1,1]	1

(B.15)

Явная формула для $\text{sgn}(\gamma)$:

$$\text{sgn}(\gamma) = (-1)^{\sum_i(\gamma_i-1)} = (-1)^{|\gamma|-l(\gamma)} = (-1)^{|\gamma|+l(\gamma)}. \quad (\text{B.16})$$

Теперь, буквально повторяя вывод (4.37), мы приходим к (4.43). Самая простая проверка полученных формул:

$$\begin{aligned} \langle p_{[1^n]} \rangle &= \langle (\text{tr } A\Psi B\Psi^\dagger)^n \rangle = \\ &= \sum_{\gamma \in S_n} \text{sgn}(\gamma) A_{\gamma \text{oid}} B_\gamma = \sum_{\Delta \vdash n} (-1)^{|\Delta|+l(\Delta)} [\Delta] A_\Delta B_\Delta = (-1)^n \sum_{\Delta} (-A)_\Delta B_\Delta = \\ &= n! (-1)^n \sum_{R \vdash n} S_R(-A) S_R(B) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$