

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Бишлер Людмила Владимировна

**Вычисление средних значений петель Вильсона в теории  
Черна–Саймонса и изучение их свойств**

Специальность 1.3.3 —  
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Миронов Андрей Дмитриевич

Москва — 2023

## Оглавление

|  | Стр.      |
|--|-----------|
| <b>Введение</b> . . . . .  | <b>6</b>  |
| <b>Глава 1. Блочная структура квантовых <math>\mathcal{R}</math>-матриц</b> . . . . .  | <b>18</b> |
| 1.1 Инварианты узлов . . . . .   | 18        |
| 1.1.1 Элементы теории узлов . . . . .  | 18        |
| 1.1.2 Полиномы ХОМФЛИ-ПТ . . . . .   | 20        |
| 1.2 Метод Решетихина-Тураева . . . . .   | 22        |
| 1.2.1 Элементы диаграммы узла . . . . .  | 23        |
| 1.2.2 Движения Рейдемейстера . . . . .   | 28        |
| 1.3 Квантованная универсальная обертывающая алгебры $sl_N$ и<br>квантовая $\mathcal{R}$ -матрица . . . . .                                       | 31        |
| 1.3.1 Универсальная $\mathcal{R}$ -матрица . . . . .   | 32        |
| 1.3.2 Конечномерные неприводимые представления $\mathcal{U}_q(sl_N)$ . . . . .   | 35        |
| 1.4 Модификация метода Решетихина-Тураева для трехнитевых<br>кос. Инклюзивные матрицы Рака . . . . .   | 36        |
| 1.4.1 Представление узла в виде косы. Квантовый след . . . . .   | 37        |
| 1.4.2 Инварианты трехнитевых кос . . . . .   | 40        |
| 1.5 $\mathcal{R}$ -матрицы со случайно совпадающими собственными<br>значениями. Дополнительная блочная структура $\mathcal{R}$ -матриц . . . . . | 44        |
| 1.5.1 Гипотеза о собственных значениях $\mathcal{R}$ -матрицы . . . . .  | 45        |
| 1.5.2 $\mathcal{R}$ -матрицы со случайно совпадающими собственными<br>значениями . . . . .   | 45        |
| 1.5.3 Метод исследования $\mathcal{R}$ -матриц со случайно<br>совпадающими собственными значениями . . . . .                                     | 50        |
| 1.5.4 Вычисления для представления $T = [2, 1]$ . . . . .  | 52        |
| 1.5.5 Вычисления для представления $T = [3, 1]$ . . . . .  | 55        |
| 1.5.6 Вычисления для представления $T = [3, 2]$ . . . . .  | 59        |
| 1.5.7 Вычисления для представления $T = [4, 1]$ . . . . .  | 62        |
| 1.5.8 Вычисления для представления $T = [4, 2]$ . . . . .  | 63        |
| 1.6 Выводы . . . . .   | 63        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Глава 2. Дифференциальное разложение полиномов</b>   |           |
| <b>ХОМФЛИ-ПТ</b>  | <b>65</b> |
| 2.1 Модификация метода Решетихина-Тураева для древовидных узлов. Эксклюзивные матрицы Рака          | 65        |
| 2.1.1 Древовидные узлы и их подвиды   | 66        |
| 2.1.2 Метод вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ для двухместовых и древовидных узлов                     | 69        |
| 2.2 Основные вопросы дифференциального разложения   | 70        |
| 2.3 Дифференциальное разложение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ в симметрических представлениях             | 72        |
| 2.3.1 Вывод формулы дифференциального разложения для симметрических представлений                   | 73        |
| 2.4 Зависимость дифференциального разложения от дефекта узла  | 75        |
| 2.5 Дифференциальное разложение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ в прямоугольных представлениях              | 75        |
| 2.5.1 Ограничения на дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ в прямоугольных представлениях | 76        |
| 2.6 Пример. Дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ узла $9_{46}$                           | 77        |
| 2.7 Дифференциальное разложение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ в представлениях вида $[r, 1]$              | 84        |
| 2.8 Дифференциальное разложение узлов с дефектом $\delta^{\mathcal{K}} = 1$                         | 85        |
| 2.8.1 Семейство $a$ двухместовых узлов с дефектом один  | 86        |
| 2.8.2 Метод $U$ -матрицы  | 89        |
| 2.9 Полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов   | 92        |
| 2.9.1 Процедура мутации   | 94        |
| 2.10 Полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлении $[2, 1]$                                     | 98        |
| 2.11 Полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлении $[3, 1]$                                     | 99        |
| 2.11.1 Разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ по родам  | 101       |
| 2.11.2 Разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ крендельных узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями         | 101       |
| 2.12 Разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлении $[4, 2]$                           | 104       |

|  |   |            |
|--|---|------------|
| 2.12.1   | Разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов<br>Мортон в представлении [4, 2] . . . . .  | 104        |
| 2.12.2   | Разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ крендельных<br>узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями в<br>представлении [4, 2] . . . . .   | 106        |
| 2.13   | Дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов<br>с дефектом $\delta = 2$ на примере узлов-мутантов . . . . .  | 107        |
| 2.14   | Выводы . . . . .  | 109        |
| <b>Глава 3. Полиномы ХОМФЛИ-ПТ в корнях из единицы . . . . .</b> |   | <b>111</b> |
| 3.1  | Неприводимые представления $U_q(sl_N)$ в корнях из единицы . . . . .  | 113        |
| 3.1.1  | Действие генераторов . . . . .  | 114        |
| 3.1.2  | $\mathcal{R}$ -матрица . . . . .  | 115        |
| 3.1.3  | $\mathcal{R}$ -матрица для циклических и полуматричных<br>представлений . . . . .   | 116        |
| 3.1.4  | Особенности метода Решетихина-Тураева для<br>вычисления инвариантов зацеплений . . . . .  | 117        |
| 3.2  | Модификация метода Решетихина-Тураева для вычисления<br>инвариантов узлов и зацеплений в корнях из единицы . . . . .  | 117        |
| 3.3  | Определение инвариантов $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})$ узлов и зацеплений в<br>корнях из единицы . . . . .  | 120        |
| 3.3.1  | Связь полиномов $P_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda)$ с полиномами ХОМФЛИ-ПТ . . . . .   | 122        |
| 3.3.2  | Связь инвариантов $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})$ с полиномами Александра . . . . .  | 123        |
| 3.4  | Вычисление инвариантов $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})$ узлов и зацеплений в<br>корнях из единицы . . . . .   | 124        |
| 3.4.1  | Инварианты $\mathcal{P}_{m,2}^{\mathcal{L}}(\lambda_k)$ , инварианты АДО или цветные<br>инварианты Александра . . . . .   | 124        |
| 3.4.2  | Инварианты $\mathcal{P}_{m,3}^{\mathcal{L}}(\lambda_k)$ и $\mathcal{P}_{m,4}^{\mathcal{L}}(\lambda_k)$ , соответствующие<br>нильпотентным представлениям алгебр $U_q(sl_3)$ и $U_q(sl_4)$ . . . . . | 130        |
| 3.5  | Выводы . . . . .  | 138        |
| <b>Заключение . . . . .</b>                                      |   | <b>139</b> |
| <b>Список литературы . . . . .</b>                               |   | <b>141</b> |

|  | Стр. |
|--|------|
| <b>Список рисунков</b> . . . . .   | 160  |
| <b>Список таблиц</b> . . . . .   | 162  |
| <b>Приложение А. Полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов</b> . . . . .   | 163  |
| А.1 Узлы-мутанты с одиннадцатью пересечениями . . . . .  | 163  |
| А.1.1 Крендельные узлы-мутанты . . . . .   | 164  |
| А.1.2 Узлы-мутанты с одиннадцатью пересечениями, которые<br>не представляются в виде кренделей . . . . .                   | 172  |
| А.2 Узлы-мутанты Х. Мортонa . . . . .  | 175  |
| А.3 Разности полиномов узлов-мутантов с одиннадцатью<br>пересечениями в представлении [4, 2] . . . . .                     | 178  |
| <b>Приложение Б. Инварианты узлов в корнях из единицы</b> . . . . .  | 181  |
| Б.1 Полиномы $P_{m,N}^{\mathcal{K}}$ узлов . . . . .   | 181  |
| Б.1.1 Полиномы узлов в представлении $W_{m,2}(\lambda)$ квантовой<br>алгебры $U_q(sl_2)$ . . . . .                         | 181  |
| Б.1.2 Полиномы узлов в представлении $W_{m,3}(\lambda_1, \lambda_2)$ квантовой<br>алгебры $U_q(sl_3)$ . . . . .            | 183  |
| Б.1.3 Полиномы узлов в представлении $W_{2,4}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$<br>квантовой алгебры $U_q(sl_4)$ . . . . . | 185  |
| Б.2 Инварианты $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}$ зацеплений . . . . .  | 186  |
| Б.2.1 Зацепление Хопфа . . . . .   | 186  |
| Б.2.2 Остальные зацепления . . . . .   | 187  |
| Б.3 Полиномы Александера узлов и зацеплений . . . . .  | 188  |

## Введение

**Актуальность темы.** Квантовая теория поля появилась как решение задачи объединения квантовой механики, классической теории поля и специальной теории относительности. Она является языком описания эволюции систем в физике частиц, физике конденсированного состояния, астрофизике, атомной и ядерной физике. Главной величиной, которую вычисляют в рамках квантовой теории поля, является корреляционная функция, описывающая наблюдаемые величины, которые в перспективе можно измерить экспериментально. Отдельным классом квантовых теорий поля являются топологические квантовые теории поля. Они описывают топологические инварианты систем, а их корреляционные функции не зависят от метрики. Топологическая инвариантность в таких теориях достигается разными способами. В топологической теории поля, предложенной Э. Виттенем [1], действие перестает зависеть от метрики после топологического поворота. В теориях типа Шварца действие и корреляционные функции не зависят от метрики по построению.

В 1974 году математики Ш. Черн и Дж. Саймонс изучали расслоения над четырехмерными многообразиями. При попытке описать комбинаторной формулой первый класс Понтрягина (характеристический класс действительных векторных расслоений) они получили [2] граничный член, который стал самодостаточным интересным объектом для изучения. Его называют 3-формой Черна-Саймонса:

$$\text{Tr} \left[ d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right]. \quad (1)$$

Форма Черна-Саймонса встречается в различных областях физики и математики. Например, она используется для исследования тензора кривизны расслоений и их связностей, описывает топологический порядок в трехмерных топологических изоляторах и входит в действие, которое определяет теорию Черна-Саймонса, находящуюся в центре внимания нашей работы.

Теория Черна-Саймонса — (2+1)-мерная топологическая квантовая теория поля типа Шварца, инвариантная относительно действия простой группы Ли  $G$ , которая определяется на компактном многообразии  $\mathcal{M}$  (например,  $S^3$ )

следующим действием:

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \left( \mathcal{A}_\mu^a \partial_\nu \mathcal{A}_\lambda^a + \frac{2}{3} f_{abc} \mathcal{A}_\mu^a \mathcal{A}_\nu^b \mathcal{A}_\lambda^c \right) dt dx dy, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$  — полностью антисимметричный тензор,  $f_{abc}$  — структурные константы. Теория задается путем выбора калибровочной группы  $G$  и константы связи  $k$ , которую называют уровнем теории Черна-Саймонса. В действие теории входит только калибровочное поле  $\mathcal{A}_\mu$ , которое преобразуется под действием элемента  $g \in G$  калибровочной группы стандартным способом:

$$\mathcal{A}_\mu \mapsto \mathcal{A}'_\mu = g^{-1} \mathcal{A}_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g. \quad (3)$$

При калибровочном преобразовании (3) действие теории меняется на величину:

$$\delta S_{CS} = \frac{k}{24\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr} \left[ (g^{-1} \partial_\mu g) (g^{-1} \partial_\nu g) (g^{-1} \partial_\rho g) \right], \quad (4)$$

которая описывает число “намоток”. Поэтому, чтобы теория была калибровочно-инвариантна, ее уровень должен квантоваться [3], то есть параметр  $k$  должен быть целым числом.

Нетривиальными корреляторами в теории Черна-Саймонса являются нелокальные величины — средние значения петель Вильсона, которые вычисляются по контурам  $\mathcal{K}$  (узлам и зацеплениям) в трехмерном пространстве:

$$\langle W_{CS}(\mathcal{K}) \rangle = \left\langle \text{tr} \text{Pexp} \oint_{\mathcal{K}} \mathcal{A}_\mu dx^\mu \right\rangle. \quad (5)$$

Эти наблюдаемые являются топологическими инвариантами многообразия, на котором задается теория.

Удивительная связь теории Черна-Саймонса и теории узлов была продемонстрирована в знаменитой работе Э. Виттена [4]. Он доказал, что средние значения петель Вильсона в теории с калибровочной группой  $SU_2$  совпадают с полиномами Джонса  $J^{\mathcal{K}}(q)$  [5; 6] из математической теории узлов:

$$\langle W_{CS_{SU_2}}(\mathcal{K}) \rangle = J^{\mathcal{K}} \left( q = e^{\frac{2\pi i}{k+2}} \right). \quad (6)$$

Полином Джонса  $J^{\mathcal{K}}(q)$  является первым сильным полиномиальным инвариантом от одной переменной, который хорошо справляется с задачей различения узлов и зацеплений. Почти сразу после открытия полинома Джонса было построено его обобщение — полиномиальный инвариант  $\mathcal{H}^{\mathcal{K}}(A, q)$  от двух

переменных  $A$  и  $q$ , который называют полиномом Хоста-Окнеану-Миллетта-Фрейда-Ликориша-Йеттера-Пшителицкого-Трачика (ХОМФЛИ-ПТ) [7; 8]. Также было установлено, что вильсоновские средние в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU_N$  совпадают с полиномами ХОМФЛИ-ПТ [9–11]:

$$\left\langle W_{CS_{SU_N}}(\mathcal{K}) \right\rangle = \mathcal{H}^{\mathcal{K}} \left( A = q^N, q = e^{\frac{2\pi i}{k+N}} \right), \quad (7)$$

$$\mathcal{H}^{\mathcal{K}}(A = q^2, q) = J^{\mathcal{K}}(q). \quad (8)$$

Одновременно с открытием Э. Виттена Н. Решетихин и В. Тураев развили метод вычисления инвариантов узлов с помощью  $\mathcal{R}$ -матрицы [12–17], которая определяется в рамках квантованной универсальной обертывающей простой алгебры Ли [18; 19] и является решением уравнения Янга-Бакстера [20–23]. Метод Решетихина-Тураева позволил определить *цветные* полиномы ХОМФЛИ-ПТ, которые связаны с конечномерными неприводимыми представлениями квантованной алгебры  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$  и вильсоновскими средними, вычисленными для этих же представлений группы  $SU_N$  [9–11; 24]. Полиномы ХОМФЛИ-ПТ, которые мы обсуждали выше, являются цветными полиномами ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении алгебры  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$ . В нашей диссертационной работе мы будем опускать слово “цветные” в названии этих инвариантов и употреблять сокращенный термин “*полиномы ХОМФЛИ-ПТ*”.

Открытие Э. Виттена установило тесную связь теории Черна-Саймонса и полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Самым эффективным методом для вычисления средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса является метод Решетихина-Тураева, который подробно обсуждается в нашей работе. Важная особенность этого метода заключается в том, что он является *непертурбативным* и позволяет получать *точные* ответы для корреляторов в теории Черна-Саймонса.

Мы отождествляем вильсоновские средние в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU_N$  на многообразии  $S^3$  с полиномами ХОМФЛИ-ПТ и для краткости будем использовать термин ХОМФЛИ-ПТ.

Связь между теорией Черна-Саймонса и теорией узлов привела к значительному прогрессу в обеих областях исследований и открытию многих удивительных соответствий.

Одной из задач теории узлов является различение узлов и зацеплений (комбинаций нескольких узлов), то есть создание способа определить, можно ли один из двух узлов (или зацеплений) гладко деформировать в другой. Для



решения этой задачи долгое время использовался графический метод — преобразование проекций узлов и зацеплений, отображенных на плоскость. Это очень трудоемкий метод. Гораздо более эффективным методом различения узлов является построение и вычисление инвариантов узлов — функций, которые определяются на диаграмме узла и совпадают для эквивалентных узлов. Если инварианты двух узлов не совпадают, значит узлы различны. Инварианты, которые различают все узлы, называют полными инвариантами.

Существующие полные инварианты узлов, например фундаментальную группу [25] и квандл [26; 27], очень сложно вычислять на практике [28]. Полиномы Джонса и ХОМФЛИ-ПТ стали первыми сильными аналитическими инвариантами узлов, но они и не являются полными инвариантами. Они представляют большой интерес, так как существуют эффективные методы, которые позволяют их вычислять, а также благодаря их связи с теорией Черна-Саймонса. Цветные полиномы ХОМФЛИ-ПТ в симметрических и антисимметрических представлениях  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ , как и полином Джонса, совпадают для целых групп узлов, которые называют узлами-мутантами. Узлы-мутанты содержат 11 и более пересечений на диаграммах узлов. Большинство узлов-мутантов различаются простейшим несимметрическим представлением  $[2, 1]$  [29], однако существуют узлы-мутанты с дополнительной симметрией, которые предложил Х. Мортон [30], которые начинают различаться только представлением  $[4, 2]$ . Поэтому цветные полиномы ХОМФЛИ-ПТ в представлении  $[4, 2]$  могут претендовать на роль полных инвариантов [30–32]. На момент написания данной работы автору не известны неэквивалентные узлы, полиномы ХОМФЛИ-ПТ которые совпадают в представлении  $[4, 2]$ . Даже если найдутся узлы, которые не различаются этим представлением, есть бесконечное число других неприводимых конечномерных представлений  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ , которые открывают доступ к бесконечному числу полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Интересно исследовать и обобщения полиномов ХОМФЛИ-ПТ, такие как гиперполиномы [33–38] и суперполиномы [39–41]. Связь теории узлов с теорией Черна-Саймонса позволила существенно продвинуться в задаче различения узлов и развить существующие методы вычисления полиномов узлов.

Теория Черна-Саймонса связана и с другими теориями в физике и математической физике. В теории Янга-Милса  $\theta$ -член, который отвечает за решения в виде солитонов, инстантонов и монополей, сопровождается топологическим зарядом. Квантование этого заряда аналогично квантованию теории

Черна-Саймонса, и многие свойства фермионов в четырех измерениях можно исследовать на примере трехмерной теории в качестве подготовительного примера [42; 43].

Э. Виттен показал [44], что трехмерную гравитацию можно переформулировать в терминах теории Черна-Саймонса с некомпактной калибровочной группой и решить точно. Вместе с голографической дуальностью теория Черна-Саймонса находится на переднем крае изучения современной маломерной гравитации.

Теория Черна-Саймонса также тесно связана с двумерными конформными теориями [45—49]. Например, состояния в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU_2$  описывают конформные блоки двумерной конформной теории Весса-Зумино-Новикова-Виттена (ВЗНВ) [50—53].

Теорию Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU_N$  на  $S^3$  интерпретируют как теорию топологической струны на разрешенном конифолде [54; 55]. Заряды состояний Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (БПС) топологической струны на разрешенном конифолде соответствуют целочисленному разложению производящей функции теории Черна-Саймонса во всех представлениях [56; 57]. Р. Гопакумар и К. Вафа реализовали [58] топологическую версию АдС/КТП (Анти-де Ситтер/Конформная Теория Поля)-соответствия в пределе больших  $N$ : амплитуды открытых топологических струн на разрешенном конифолде, которые связаны со средними значениями петель Вильсона, дуальны амплитудам закрытых топологических струн [59—62].

В физике конденсированного состояния исследуют новые фазы материи и эффекты, которые демонстрируют топологические свойства материалов при низких температурах, такие как топологические изоляторы [63], для описания фаз которых используют форму Черна-Саймонса, и дробный квантовый эффект Холла [64], где теория Черна-Саймонса используется для описания как эффективная теория.

**Степень разработанности темы.** Для исследования соответствий, которые мы кратко обсудили выше, нередко требуется знание выражений для полиномов ХОМФЛИ-ПТ для разных узлов в разных представлениях. Для получения полиномов используется метод Решетихина-Тураева и его модификации, которые мы обсуждаем в нашей работе.

Классический метод, который был предложен Н. Решетихиным и В. Тураевым дает возможность вычислять полиномы ХОМФЛИ-ПТ только для конкретной алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  и получать ответы для фиксированного  $N = i: \mathcal{H}(A = q^i, q)$ . Чтобы получить общий ответ, который зависит от произвольного  $N$ , можно использовать экстраполяцию результата для достаточно большого числа частных случаев. Несмотря на его недостатки, этот метод является универсальным и дает ответы там, где недостаточно данных для более оптимизированных методов. В нашей работе мы используем этот метод для вычисления полиномов узлов-мутантов в представлении [3, 1] и [4, 2], а также для определения инвариантов узлов и зацеплений в корнях из единицы.

Отдельным направлением в теории узлов является построение инвариантов узлов в корнях из единицы [65—67]. Сложность с этим значением параметра квантования алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  возникает из-за того, что структура представлений алгебры в этом случае меняется [68; 69]: размерность неприводимых представлений оказывается ограниченной сверху, а также появляются новые типы представлений — циклические, полуциклические и нильпотентные, старший вес которых не фиксирован. Чтобы применить метод Решетихина-Тураева к таким представлениям, нужно разрезать узлы и зацепления, вычислять инварианты  $(1, 1)$ -сплетений и вводить дополнительный нормировочный коэффициент для восстановления симметрии между нитями. Именно этот случай наиболее интересен с точки зрения теории Черна-Саймонса, так как при переходе от вильсоновских средних к полиномам ХОМФЛИ-ПТ параметр  $q$  равен корню из единицы (7).

Методы, которые оптимизируют вычисления в методе Решетихина-Тураева, мы называем модификациями метода Решетихина-Тураева. Такие методы применяются к узлам, проекции на плоскость которых (диаграммы узлов) представляются в строго определенном виде. Например, для узлов, которые можно представить в виде трехнитевых кос, или для класса узлов, которые называют древовидными [32; 70—73]. Дж. Александер доказал [74], что диаграмму любого узла можно представить в виде косы: набора параллельно направленных пересекающихся нитей, которые замыкаются путем попарного соединения нитей сверху и снизу косы. Для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов, диаграммы которых представляются в виде трехнитевых кос, существует метод [75—80], который опирается на собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы и матрицы Рака  $\mathcal{U}$  (также известные, как бj-символы и коэффициенты Рака-Вигнера) [79; 81—87].

Замечательным развитием этого метода стала гипотеза о собственных значениях [88; 89]. Эта гипотеза заключается в предположении о том, что элементы матрицы Рака можно выразить через собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы, которые известны [12]. Однако, она была сформулирована только для  $\mathcal{R}$ -матриц, все собственные значения которых различны. В нашей работе мы делаем шаг к расширению области применения этой гипотезы и исследуем  $\mathcal{R}$ -матрицы с совпадающими собственными значениями, которые при этом относятся к разным представлениям. Мы называем такие собственные значения случайно совпадающими.

Нити в косе с четным числом нитей можно замкнуть с одной стороны косы. Такой способ замыкания называют “плетенкой”. В виде четырехнитевых кос, которые замыкаются плетенкой, можно представить двухмостовые узлы [90], которые являются строительными блоками для широкого класса древовидных узлов. К древовидным узлам можно применять модификацию метода Решетихина-Тураева [32; 70; 71; 91], которая основывается на использовании  $\mathcal{R}$ -матриц эксклюзивных матриц Рака. Этот метод широко использует методы двумерной конформной теории, которая тесно связана с теорией Черна-Саймонса [73; 92].

Дополнением к перечисленным методам служит метод эволюции [93–95], идея которого заключается в использовании узлов, диаграммы которых отличаются друг от друга числом пересечений в конкретном месте косы. Выражение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ для всех узлов из семейства можно выразить в виде одной формулы с параметром. Метод эволюции успешно применяется, например, к семействам двухнитевых кос [93; 95; 96], твистованных узлов [94; 97–99] и узлов двойных кос [93; 100]. В нашей работе мы использовали метод  $S$ -матриц и метод эволюции для исследования свойства полиномов ХОМФЛИ-ПТ, которое называют дифференциальным разложением.

Дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ [93; 101–103] — это гипотеза о том, что в полиноме можно разделить зависимость от узла  $\mathcal{K}$  и от представления  $R$ :

$$H_R^{\mathcal{K}}(q, A) = 1 + \sum_{Q \in M_R} Z_R^Q(q, A) \cdot F_Q^{\mathcal{K}}(q, A). \quad (9)$$

Это утверждение является теоремой для симметрических и антисимметрических представлений  $R$  и следует из свойств полиномов ХОМФЛИ-ПТ [104]. Однако простых аргументов [104] недостаточно для других представлений, поэтому существование разложения (9) в общем случае до сих пор остается под

вопросом. Задача исследования этого разложения усложняется тем, что на него влияет слабо изученная внутренняя характеристика узла, которую называют дефектом [105]. В нашей работе мы рассматриваем семейство узлов с дефектом один и узлы-мутанты с дефектом два.

**Целями** данной диссертационной работы являются:

1. Использование и развитие существующих методов для вычисления средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса.
2. Расширение области применения гипотезы о собственных значениях.
3. Построение дифференциального разложения полиномов ХОМФЛИ-ПТ.
4. Исследование полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов.
5. Определение инвариантов узлов и зацеплений в корнях из единицы для алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ .

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать  $\mathcal{R}$ -матрицы со случайно совпадающими собственными значениями.
2. Вычислить полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлениях  $[3, 1]$  и  $[4, 2]$  квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ .
3. Найти коэффициенты  $Z_R^Q$  дифференциального разложения полиномов ХОМФЛИ-ПТ для узлов с ненулевым дефектом.
4. Определить инварианты узлов и зацеплений для нильпотентных представлений без фиксированного веса алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ , когда параметр квантования равен корню из единицы.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Сформулирована гипотеза о блочной диагонализации  $\mathcal{R}$ -матриц со случайно совпадающими собственными значениями.
2. Вычислены полиномы ХОМФЛИ-ПТ ряда узлов-мутантов в представлениях  $[3, 1]$  и  $[4, 2]$ .
3. Проверено утверждение Х. Мортонна, что узлы-мутанты с дополнительной симметрией различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлении  $[4, 2]$ .
4. Построено дифференциальное разложение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ трехмостового узла в представлениях  $[2, 1]$  и  $[2, 2]$ .

5. Определены коэффициенты дифференциального разложения для семейства узлов с дефектом один в представлении  $[2, 2]$ .
6. Найдены ограничения на коэффициенты дифференциального разложения полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов с дефектом два в представлениях  $[2, 1]$  и  $[3, 1]$ .
7. Изучены инварианты узлов и зацеплений для всех возможных неприводимых представлений квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  при параметре квантования, равном корню из единицы.
8. Построено определение инвариантов узлов и зацеплений для нильпотентных представлений с параметрами квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  при параметре квантования, равном корню из единицы.
9. Вычислены инварианты ряда узлов и зацеплений для нильпотентных представлений с параметрами квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  при параметре квантования, равном корню из единицы.

**Научная новизна, достоверность и личный вклад автора.** Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к продвижению в исследовании полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Приведенные в диссертации результаты являются актуальными, используются и развиваются как российскими, так и зарубежными научными группами.

**Научная и практическая значимость.** Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Результаты имеют теоретическую значимость при исследовании теории топологической струны, двумерной конформной теории, трехмерной гравитации, они могут использоваться при расширении гипотезы о собственных значениях, построении дифференциального разложения и исследования теории Черна-Саймонса при малых значениях уровня  $k$ .

Полученные результаты так же могут использоваться при описании топологических эффектов в физике конденсированного состояния. В модели топологического квантового компьютера [106—109] большую роль играют виртуальные частицы, которые описываются дробной квантовой статистикой и называются анионами. Низкоэнергетический предел моделей неабелевых анионов описывается теорией Черна-Саймонса [110; 111]. При описании дробного квантового эффекта Холла [64] эффективной теорией является абелева теория

Черна-Саймонса, однако, фазовые переходы между плато в дробном квантовом эффекте Холла описывают неабелевой теорией Черна-Саймонса с фермионами [112].

**Апробация работы.** Основные результаты работы опубликованы в 6 статьях [113–118] в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Помимо этого, основные результаты диссертации докладывались на семинарах в отделе теоретической физики Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, а также на международной конференции Workshop and School “Topological Field Theories, String theory and Matrix Models - 2019” (Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук, 26–31 августа 2019, Москва, Россия) и пяти Молодежных конференциях по теоретической и экспериментальной физике (Институт теоретической и экспериментальной физики имени А.И. Алиханова (ИТЭФ) 2017 – 2021, Москва, Россия).

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 188 страниц, включая 29 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 178 наименований.

В главе 1 мы обсуждаем блочную структуру  $\mathcal{R}$ -матриц, метод Решетихина-Тураева и его модификацию для узлов в виде кос.

В разделе 1.1 содержится краткое введение в теорию узлов. В разделе 1.2 обсуждается метод Решетихина-Тураева вычисления инвариантов узлов с помощью квантовой  $\mathcal{R}$ -матрицы. В разделе 1.4 приводится модификация метода Решетихина-Тураева для представления узлов в виде кос, которая предполагает переход к базису собственных векторов  $\mathcal{R}$ -матрицы. Большую роль в этом методе играют матрицы Рака. Матрицы Рака и  $\mathcal{R}$ -матрицы связаны гипотезой о собственных значениях, которая применяется к  $\mathcal{R}$ -матрицам, все собственные значения которых различны. Она заключается в том, что собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц определяют элементы соответствующих матриц Рака.

В разделе 1.5 мы рассматриваем  $\mathcal{R}$ -матрицы со случайно совпадающими собственными значениями. Когда собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы совпадают, появляется дополнительная симметрия вращения базиса  $\mathcal{R}$ -матриц, в котором происходит вычисление полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Ее можно использовать для упрощения матриц  $\mathcal{R}_2$ , что и было сделано. В результате были сформулированы две гипотезы. В первой гипотезе приводятся условия, которые нужно

наложить на наборы собственных значений  $\mathcal{R}$ -матриц, для того, чтобы их было можно дополнительно блочно-диагонализовать. Вторая гипотеза определяет угол поворота в секторе случайно-совпадающих собственных значений.

В **главе 2** мы обсуждаем дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Построение дифференциального разложения для любых узлов и представлений является сложной задачей, которая усложняется тем, что его коэффициенты зависят от внутренней характеристики узла, которую называют дефектом. Также для исследования дифференциального разложения необходим доступ к большому числу полиномов ХОМФЛИ-ПТ в различных представлениях.

Мы приводим краткое изложение другой модификации метода Решетихина-Тураева, которая используется для вычисления полиномов древовидных узлов, в разделе **2.1.2**. В разделах **2.3** и **2.5** делаем обзор дифференциального разложения для симметрических и прямоугольных представлений для узлов с дефектом ноль. В разделе **2.6** для узла с нулевым дефектом  $9_{46}$  из таблицы Рольфсена [119] получаем коэффициенты дифференциального разложения, связанные с представлениями  $[2, 1]$  и  $[2, 2]$ , которые зависят от узла, что демонстрирует универсальность дифференциального разложения.

В разделе **2.8** для узлов с дефектом один мы используем метод эволюции и метод  $U$ -матрицы, чтобы определить коэффициенты дифференциального разложения, которые зависят от представления, для прямоугольного представления  $[2, 2]$ . В результате получаем универсальное преобразование, которое связывает коэффициенты дифференциального разложения узлов с дефектом один с коэффициентами твистованных узлов.

В разделе **2.9** мы начинаем обсуждать узлы-мутанты — группу узлов с дефектом два, которые не различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в симметрических представлениях. Мы обсуждаем разности полиномов узлов-мутантов с 11 пересечениями в представлениях  $[2, 1]$ ,  $[3, 1]$  и  $[4, 2]$  в разделах **2.10**, **2.11** и **2.12**. Мы также обсуждаем узлы-мутанты с дополнительной симметрией, которые начинают различаться только представлением  $[4, 2]$  в разделе **2.12.1**. Наконец, мы используем полученные результаты, чтобы исследовать дифференциальное разложение для узлов с дефектом два в разделе **2.13**.

В **главе 3** мы рассматриваем квантованную универсальную обертывающую алгебры  $sl_N$ , когда параметр квантования равен корню из единицы. Мы обозначаем такую алгебру  $U_q(sl_N)$ . Мы обсуждаем структуру представлений



алгебры  $U_q(sl_N)$  в разделе 3.1, квантовые  $\mathcal{R}$ -матрицы в разделах 3.1.2 и 3.1.3 и особенности применения метода Решетихина-Туравева к вычислению инвариантов в корнях из единицы в разделе 3.2.

В разделе 3.3 мы определяем инварианты узлов и зацеплений в корнях из единицы, связанные с нильпотентными представлениями с параметрами алгебры  $U_q(sl_N)$ . В разделах 3.4.1 и 3.4.2 мы обсуждаем детали вычисления этих инвариантов в алгебрах  $U_q(sl_2)$ ,  $U_q(sl_3)$  и  $U_q(sl_4)$ , а также их связь с полиномами ХОМФЛИИ-ПТ и Александера.

## Глава 1. Блочная структура квантовых $\mathcal{R}$ -матриц

В этой главе мы обсуждаем основы теории узлов, метод Решетихина-Тураева для вычисления инвариантов узлов [12–16; 120] и его модификацию для узлов, представленных в виде кос [121–124]. В случае трехнитевых кос необходимыми элементами для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ являются собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы и инклюзивные матрицы Рака [75; 77; 121; 125]. Мы исследовали частный случай  $\mathcal{R}$ -матриц со случайно совпадающими собственными значениями [113] и показали, что в некоторых случаях, соответствующие им матрицы Рака можно блочно-диагонализировать.

### 1.1 Инварианты узлов

Средние значения петель Вильсона в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU_N$  совпадают с полиномиальными инвариантами узлов, а именно полиномами ХОМФЛИ-ПТ. Один из основных способов нахождения вильсоновских средних в теории Черна-Саймонса заключается в вычислении инвариантов узлов, поэтому эти объекты оказываются в центре нашего внимания.

#### 1.1.1 Элементы теории узлов

Полиномы ХОМФЛИ-ПТ [7; 8] были предложены в математической теории узлов в процессе решения задачи различения узлов. Мы будем рассматривать узлы и зацепления в компактном пространстве  $S^3$ . Узел  $\mathcal{K}$  — это вложение окружности в пространство  $S^3$ :  $\mathcal{K} : S \rightarrow S^3$ , зацепление — вложение нескольких окружностей в пространство  $S^3$ . Неузлом называют тривиальное вложение, то есть окружность в пространстве  $S^3$ . На узлах и зацеплениях не допускаются самопересечения. Дальше мы будем говорить об узлах, имея в виду узлы и зацепления, если не оговорено иное. На рис. 1.1 изображены простейшие узлы и зацепление.

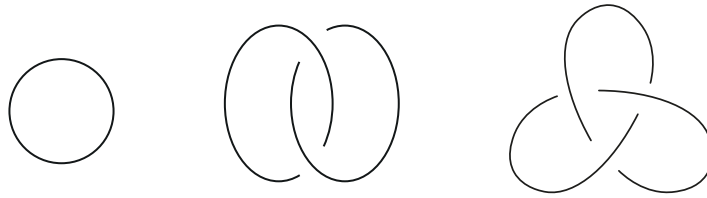


Рисунок 1.1 — Узел, зацепление Хопфа и трилистник

Пространства вложения узлов можно деформировать, при этом деформируются и объекты, находящиеся в нем. Узлы рассматриваются с точностью до так называемых объемлющих деформаций — непрерывных преобразований узлов один в другой при преобразованиях пространства. Два узла называют эквивалентными, если один можно получить из другого с помощью непрерывных преобразований.

На практике рассматриваются проекции узлов на плоскость. Если на каждом пересечении нитей на проекции отмечено, какая нить лежит поверх другой, такие проекции называют диаграммами узлов. Все возможные объемлющие деформации узлов сводятся к преобразованиям двумерного пространства и трем преобразованиям диаграмм узлов. Такие преобразования называют движениями Рейдемейстера [90]. К. Рейдемейстер, а также независимо от него Дж. Александер и Д. Бриггс доказали, что два узла, которые представлены своими диаграммами  $P_1$  и  $P_2$  являются эквивалентными тогда и только тогда, когда  $P_1$  можно преобразовать в  $P_2$  с помощью гладких деформаций двумерной плоскости и конечного набора движений, которые изображены на рис. 1.2. Это утверждение называют теоремой Рейдемейстера.

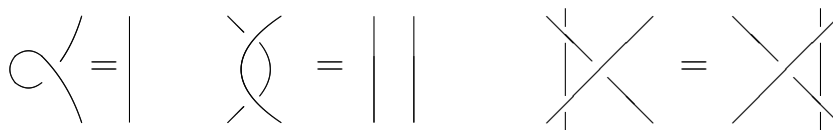


Рисунок 1.2 — Движения Рейдемейстера

Теорема Рейдемейстера ограничивает набор элементарных преобразований диаграммы узла и позволяет доказать, что узлы эквивалентны, предъявив способ получения одной диаграммы из другой. Однако, она не позволяет доказать неэквивалентность узлов. Для того, чтобы доказать, что две диаграммы представляют два разных узла, используются инварианты узлов. Инвариант узла — это функция, которую можно вычислить для любого узла. Если инварианты узлов отличаются, значит узлы не являются эквивалентными.

Полиномиальные инварианты узлов — один из эффективных известных способов решения задачи различения узлов, хотя известные полиномиальные инварианты не являются полными, то есть не различают все узлы. Полиномиальный инвариант, который находится в фокусе нашей работы — полином ХОМФЛИ-ПТ.

Составным называют узел, который получается из двух узлов путем разрывания нити каждого узла в одном месте и совмещения четырех свободных концов. Узел называют простым, если его нельзя представить в виде суммы других узлов. Существует таблица простых узлов — таблица Рольфсена, где они располагаются по возрастанию числа пересечений [119]. Простые узлы для удобства объединяют в семейства узлов, например, торические, твистованные, узлы двойных кос. О некоторых из них мы поговорим в разделе 2.1.1, подробное изложение есть в [90].

### 1.1.2 Полиномы ХОМФЛИ-ПТ

Инвариант ХОМФЛИ-ПТ  $H^{\mathcal{K}}(A, q)$  [7; 8] — это полином Лорана от двух переменных  $A$  и  $q$ . Он определяется с помощью начального условия и скейн-соотношения — равенства, которое связывает полиномы трех узлов, диаграммы которых отличаются одним пересечением. Скейн-соотношение записывается следующим образом:

$$A H \left( \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - A^{-1} H \left( \begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right) = (q - q^{-1}) H \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right). \quad (1.1)$$

Начальное условие (полином ХОМФЛИ-ПТ неузла) можно выбрать разными способами:

$$H \left( \bigcirc \right) = 1 \quad \text{или} \quad \mathcal{H} \left( \bigcirc \right) = \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} = \frac{\{A\}}{\{q\}} = \mathcal{H}^{\circ}(A, q), \quad (1.2)$$

где вводится обозначение  $\{x\} = x - x^{-1}$ . Первый способ выбора начального условия определяет так называемые нормированные полиномы ХОМФЛИ-ПТ, второй — ненормированные, то есть полиномы всех узлов оказываются пропорциональны  $\mathcal{H}^{\circ}(A, q)$ . Мы будем обозначать ненормированные полиномы ХОМФЛИ-ПТ символом  $\mathcal{H}$ , а нормированные —  $H$ . Определение полиномов

ХОМФЛИ-ПТ, которое мы привели, содержит в себе способ их вычисления. Ниже приведены детали вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ для двух неузлов, зацепления Хопфа и трилистника, нормировка неузла выбрана вторым способом.

Для вычисления полинома ХОМФЛИ-ПТ двух неузлов запишем соответствующее скейн-соотношение:

$$(q - q^{-1}) \mathcal{H} \left( \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \right) = A \mathcal{H} \left( \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} \right) - A^{-1} \mathcal{H} \left( \begin{array}{c} \circlearrowright \\ \circlearrowright \end{array} \right), \quad (1.3)$$

отсюда получаем

$$\mathcal{H} \left( \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \right) = \left( \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} \right)^2 = (\mathcal{H}^\circ(A, q))^2. \quad (1.4)$$

Аналогично можно вычислить полином ХОМФЛИ-ПТ зацепления Хопфа. В этом случае скейн-соотношение следующее:

$$A \mathcal{H} \left( \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} \right) - A^{-1} \mathcal{H} \left( \begin{array}{c} \circlearrowright \\ \circlearrowright \end{array} \right) = (q - q^{-1}) \mathcal{H} \left( \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \right), \quad (1.5)$$

при этом мы уже знаем полином двух неузлов, который соответствует первой картинке, тогда для инварианта зацепления Хопфа получаем:

$$\mathcal{H}^{Hopf} = \mathcal{H} \left( \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \right) = \mathcal{H}^\circ(A, q) \cdot A \cdot \left( \frac{A^2 + 1 - (q^2 + q^{-2})}{q - q^{-1}} \right). \quad (1.6)$$

Теперь, зная полином ХОМФЛИ-ПТ зацепления Хопфа, несложно вычислить полином простейшего нетривиального узла — трилистника. Аналогично предыдущим примерам запишем скейн-соотношения:

$$A \mathcal{H} \left( \begin{array}{c} \text{triple point} \\ \text{type 1} \end{array} \right) - A^{-1} \mathcal{H} \left( \begin{array}{c} \text{triple point} \\ \text{type 2} \end{array} \right) = (q - q^{-1}) \mathcal{H} \left( \begin{array}{c} \text{triple point} \\ \text{type 3} \end{array} \right). \quad (1.7)$$

При подстановке пересечения первого типа получаем неузел, второго — трилистник, и при выборе третьего типа пересечения получаем зацепление Хопфа. Так как мы знаем инварианты ХОМФЛИ-ПТ неузла и зацепления Хопфа, мы

легко можем вычислить полином трилистника (в таблице Рольфсена этот узел пронумерован как  $\mathfrak{Z}_1$ , мы тоже будем пользоваться этим обозначением):

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{Z}_1}(A, q) = \mathcal{H} \left( \text{trefoil} \right) = \mathcal{H}^\circ(A, q) \cdot \frac{A^2}{q^2} \cdot (q^4 - A^2 q^2 + 1). \quad (1.8)$$

Полином ХОМФЛИ-ПТ  $H^\mathcal{K}(A, q)$  является обобщением других полиномиальных инвариантов, которые были открыты до него, — полиномов Джонса  $J^\mathcal{K}(q)$  и Александра  $\mathcal{A}^\mathcal{K}(q)$ :

$$J^\mathcal{K}(q) = H^\mathcal{K}(A = q^2, q), \quad (1.9)$$

$$\mathcal{A}^\mathcal{K}(q) = H^\mathcal{K}(A = 1, q). \quad (1.10)$$

Полином Джонса определяется с помощью скейн-соотношений, которые повторяют скейн-соотношения для полиномов ХОМФЛИ-ПТ (1.1):

$$q^2 H \left( \text{crossing} \right) - q^{-2} H \left( \text{crossing} \right) = (q - q^{-1}) H \left( \text{loop} \right) H \left( \text{loop} \right). \quad (1.11)$$

## 1.2 Метод Решетихина-Тураева

Николай Решетихин и Владимир Тураев развили [12–16] метод получения инвариантов узлов с помощью  $\mathcal{R}$ -матрицы. Этот метод очень универсальный и выходит далеко за пределы вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Он позволяет получать инварианты узлов с помощью специального оператора — квантовой  $\mathcal{R}$ -матрицы, которую можно вычислять для различных представлений квантованных универсальных обертывающих простых алгебр Ли. Определение полинома ХОМФЛИ-ПТ через скейн-соотношение можно расширить и на цветные полиномы ХОМФЛИ-ПТ в симметрических представлениях [126]. Существует также метод каблирования (от англ. *cablе* — канат, кабель)[76; 127; 128], который связывает цветные полиномы ХОМФЛИ-ПТ в любых представлениях с полиномами ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении.

Метод Решетихина-Тураева связывает полиномы ХОМФЛИ-ПТ  $\mathcal{H}(A = q^N, q)$  с представлениями квантованной универсальной обертывающей

алгебры  $sl_N$  [18; 19]. При этом полином ХОМФЛИ-ПТ, который определяется с помощью скейн-соотношений (1.1), — это инвариант, вычисляемый с помощью квантовой  $\mathcal{R}$ -матрицы в фундаментальном представлении  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ . Инварианты узлов, которые вычисляются для других представлений  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ , называют **цветными полиномами ХОМФЛИ-ПТ**. Таким образом, метод Решетихина-Тураева позволяет определить более широкий класс инвариантов узлов, связанных с теорией Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU_N$ . Далее для краткости мы будем опускать слово “цветные” в названии цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ.

Существуют модификации метода Решетихина-Тураева, которые позволяют более эффективно проводить вычисления для некоторых групп узлов и некоторых представлений, мы рассмотрим их в разделах 1.4 и 2.1.2. В главе 3 мы обсудим, как можно модифицировать метод Решетихина-Тураева, чтобы вычислять с его помощью нетривиальные инварианты узлов в корнях из единицы. В этом разделе мы рассмотрим самую базовую версию метода. Наше изложение основывается на статье А. Морозова и А. Смирнова [120] и позволяет проследить логику построения этого метода.

### 1.2.1 Элементы диаграммы узла

Для применения метода Решетихина-Тураева ориентированный узел проецируют на плоскость с заданным направлением. В каждом пересечении нитей на проекции находятся только две нити. В противном случае можно использовать объемлющие деформации пространства, чтобы подвинуть лишние нити. Направление на плоскости выбирают для того, чтобы относительно него идентифицировать все элементы диаграммы узла. К элементам диаграммы узла относят пересечения и места смены направления нити относительно выбранного направления. Любое пересечение можно свести к одному из восьми типов, направление нити можно сменить одним из четырех способов. Они приведены на рис. 1.3 и 1.4.

**Инвариант определяется как свертка операторов, соответствующих всем элементам на диаграмме узла.** Например, для узла на рис. 1.5

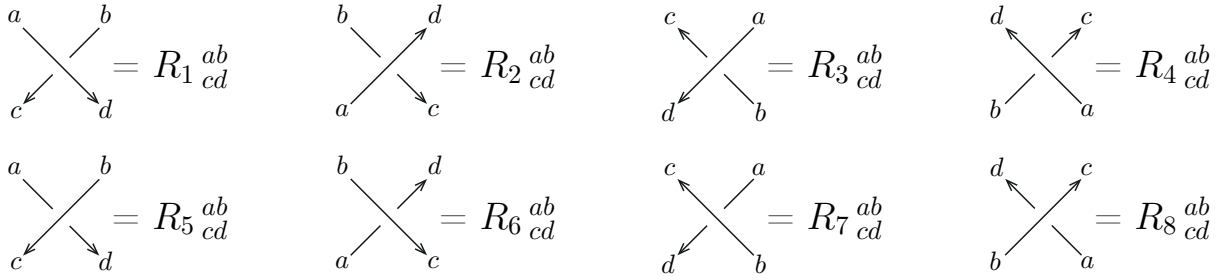


Рисунок 1.3 — Типы пересечений на диаграмме узла

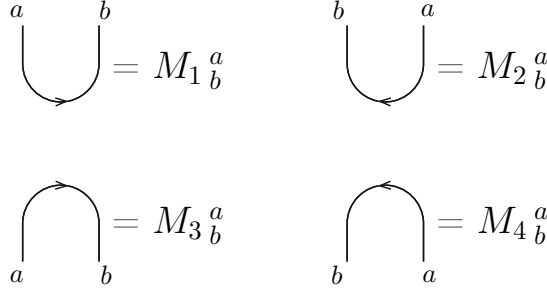


Рисунок 1.4 — Способы смены направления нити на диаграмме узла

инвариант будет даваться следующим выражением:

$$P^{3_1} = R_1^{ab} M_2^{d'} R_3^{cd'} M_2^{f'} R_4^{ef'} M_3^{h} M_3^g, \tag{1.12}$$

здесь и далее подразумевается сумма по повторяющимся индексам. Операторы

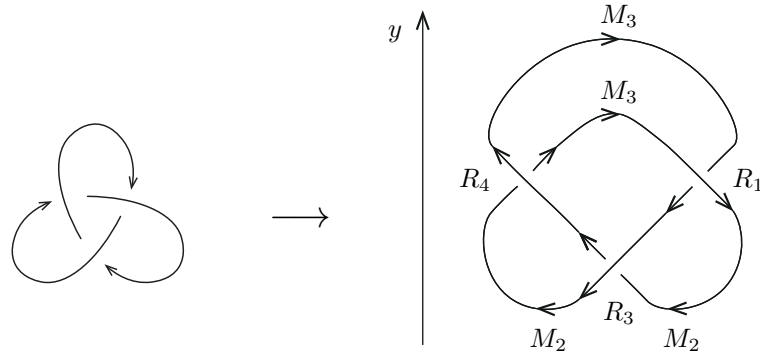


Рисунок 1.5 — Выделение пересечений и мест смены направлений нити относительно оси  $y$  на диаграмме узла  $3_1$  (трилистника)

$R_i$  и  $M_i$  не являются независимыми, а выражаются через два оператора:  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{M}$ . Используя топологическую инвариантность, можно показать, что среди операторов  $R_i$  и  $M_i$  независимыми являются только  $R_1 = \mathcal{R}$ ,  $R_5 = \overline{\mathcal{R}}$ ,  $M_1 = \mathcal{M}$  и  $M_4 = \overline{\mathcal{M}}$ , а второе движение Рейдемейстера (рис. 1.2) связывает операторы  $\mathcal{R}$  и  $\overline{\mathcal{R}}$ :  $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^{-1}$ . Далее мы подробно рассматриваем это утверждение.



## Операторы смены направления нити

Покажем, что операторы  $M_i$  не являются независимыми. Прямая вертикальная линия топологически эквивалентна кривой, в которой дважды меняется направление нити. На рис. 1.6 показаны различные варианты реализации этого утверждения. Отсюда следует, что

$$M_3 = M_1^{-1}, \quad M_2 = M_4^{-1}, \quad (1.13)$$

а это значит, что среди операторов  $M_i$  есть только два независимых оператора, мы будем обозначать их  $\mathcal{M}$  и  $\overline{\mathcal{M}}$ , другие операторы выражаются через них

$$M_1 = \mathcal{M}, \quad M_4 = \overline{\mathcal{M}}, \quad M_3 = \mathcal{M}^{-1}, \quad M_2 = \overline{\mathcal{M}}^{-1}. \quad (1.14)$$

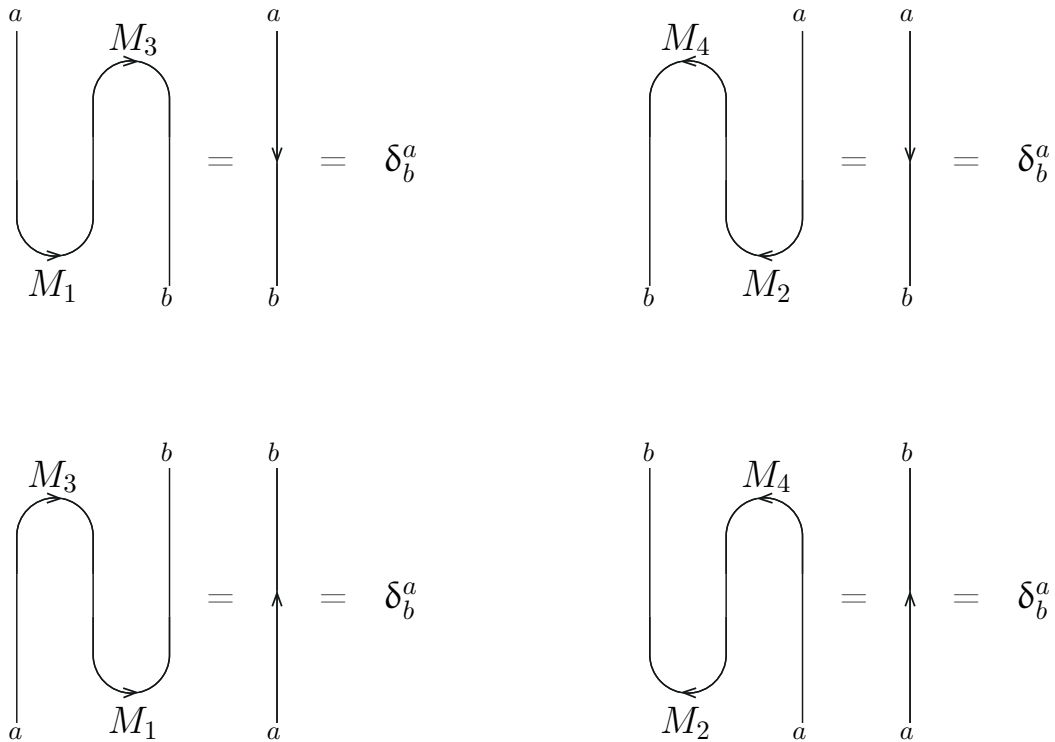


Рисунок 1.6 — Связь операторов смены направления нити

## Операторы пересечений

С помощью топологической инвариантности можно показать, что операторы  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$  можно выразить через операторы  $R_1 = \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{M}$  и  $\overline{\mathcal{M}}$ . Из рис. 1.7 следует, что

$$\begin{aligned} R_2^{ab}_{cd} &= \mathcal{R}_{ck}^{mb} \mathcal{M}^{-1}_m{}^a \mathcal{M}_d^k, \\ R_3^{ab}_{cd} &= \mathcal{R}_{md}^{ak} \overline{\mathcal{M}}^{-1}_c{}^m \overline{\mathcal{M}}_k^b, \\ R_4^{ab}_{cd} &= \mathcal{R}_{ki}^{hf} \mathcal{M}^{-1}_f{}^b \mathcal{M}^{-1}_h{}^a \mathcal{M}_d^i \mathcal{M}_c^k. \end{aligned} \tag{1.15}$$

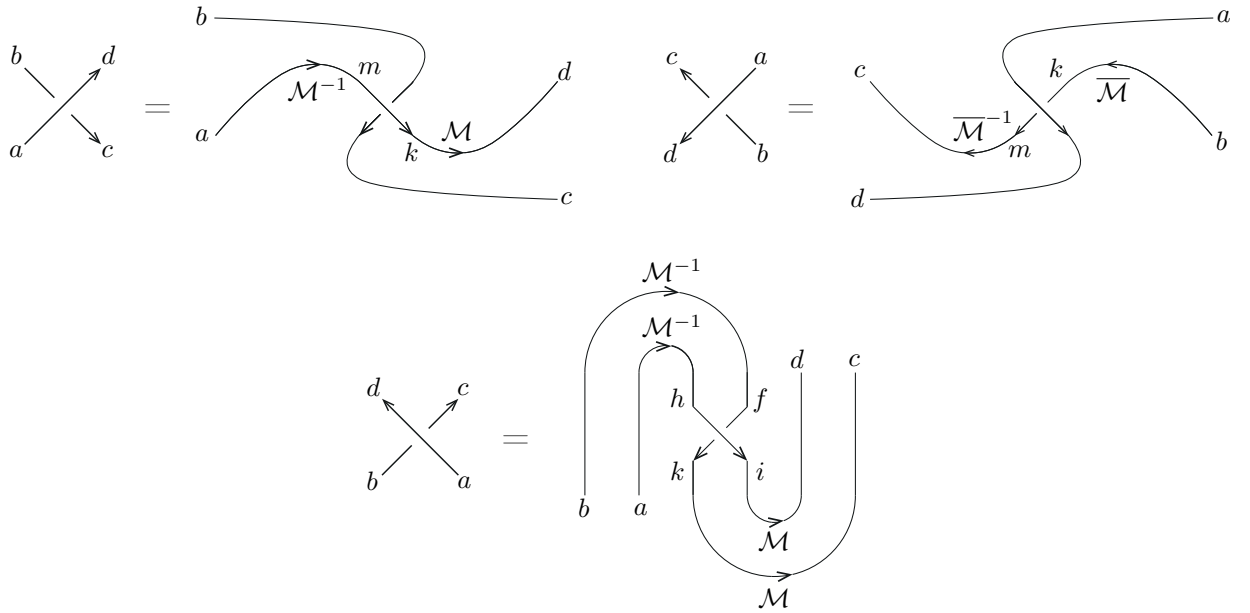


Рисунок 1.7 — Связь пересечений  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$  с пересечением  $R_1 := \mathcal{R}$

Аналогично можно показать, что операторы  $R_6$ ,  $R_7$  и  $R_8$  можно выразить через операторы  $R_5 = \overline{\mathcal{R}}$ ,  $\mathcal{M}$  и  $\overline{\mathcal{M}}$ :

$$\begin{aligned} R_6^{ab}_{cd} &= \overline{\mathcal{R}}_{ck}^{mb} \mathcal{M}^{-1}_m{}^a \mathcal{M}_d^k, \\ R_7^{ab}_{cd} &= \overline{\mathcal{R}}_{md}^{ak} \overline{\mathcal{M}}^{-1}_c{}^m \overline{\mathcal{M}}_k^b, \\ R_8^{ab}_{cd} &= \overline{\mathcal{R}}_{ki}^{hf} \mathcal{M}^{-1}_f{}^b \mathcal{M}^{-1}_h{}^a \mathcal{M}_d^i \mathcal{M}_c^k. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Для упрощения вычислений удобно погрузить операторы в тензорное произведение векторных пространств  $V_i$ , соответствующих нитям. Когда мы вычисляем инвариант узла, то на диаграмме находится всего одна нить и все

пространства  $V_i$  совпадают. Когда речь идет о зацеплениях, каждой компоненте зацепления могут ставиться в соответствие разные пространства, то есть на диаграмме могут быть нити, которым соответствуют разные векторные пространства  $V_i$ . Произвольный оператор  $O_b^a$ , действующий на нить, будет иметь два индекса: верхний индекс  $a$  соответствует входящей нити, нижний индекс  $b$  соответствует исходящей нити. В матричном представлении верхние индексы нумеруют столбцы, нижние индексы — строки. Свертка, которая соответствует умножению матриц, записывается следующим образом:

$$(O_1 O_2)_b^a = O_1^k{}_b O_2^a{}_k. \quad (1.17)$$

Операторы  $\mathcal{M}$  и  $\overline{\mathcal{M}}$  действуют на одну нить, в соответствие которой ставится пространство  $V_k$ , то есть они представляют из себя матрицы размерности  $\dim V_k \times \dim V_k$ . Операторы  $\mathcal{R}$  и  $\overline{\mathcal{R}}$  действуют на пару нитей, а значит на тензорное произведение пространств, которые им соответствуют:  $V_l \otimes V_m$ . Размерность операторов  $\mathcal{R}$  равна  $(\dim V_l \dim V_m) \times (\dim V_l \dim V_m)$ . Два верхних индекса  $a$  и  $b$  оператора  $\mathcal{R}^{ab}_{cd}$  соответствуют входящим нитям, нижние индексы  $c$  и  $d$  — исходящим. Индексы  $a$  и  $c$  соответствуют первому пространству  $V_l$ , индексы  $b$  и  $d$  — второму пространству  $V_m$ . Далее мы покажем, что  $\mathcal{R}$ -матрицу, соответствующую квантованной универсальной обертывающей алгебры  $sl_N$ , можно использовать в качестве оператора  $\mathcal{R}$ . Тогда пространства  $V_i$  — пространства неприводимых конечномерных представлений  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ .

Соотношения (1.15) и (1.16) можно переписать в виде матриц, действующих в пространстве двух нитей  $V_i \otimes V_j$  следующим образом:

$$\begin{aligned} R_2 &= (I \otimes \mathcal{M}) \mathcal{R} (\mathcal{M} \otimes I)^{-1}, \\ R_3 &= (\overline{\mathcal{M}} \otimes I)^{-1} \mathcal{R} (I \otimes \overline{\mathcal{M}}), \\ R_4 &= (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}) \mathcal{R} (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{-1} \end{aligned} \quad (1.18)$$

и

$$\begin{aligned} R_6 &= (I \otimes \mathcal{M}) \overline{\mathcal{R}} (\mathcal{M} \otimes I)^{-1}, \\ R_7 &= (\overline{\mathcal{M}} \otimes I)^{-1} \overline{\mathcal{R}} (I \otimes \overline{\mathcal{M}}), \\ R_8 &= (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}) \overline{\mathcal{R}} (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{-1} \end{aligned} \quad (1.19)$$

### 1.2.2 Движения Рейдемейстера

Для того, чтобы свертки операторов  $\mathcal{R}$ ,  $\bar{\mathcal{R}}$ ,  $\mathcal{M}$  и  $\bar{\mathcal{M}}$  давали топологически инвариантные величины, эти операторы должны удовлетворять движениям Рейдемейстера (рис. 1.8), которые представляют собой базис преобразований диаграммы узла. В записи уравнений мы будем пользоваться тем, что каждой нити ставится в соответствие векторное пространство  $V$ , операторы  $\mathcal{R}$  действуют на тензорном произведении пространств  $V \otimes V$ , операторы  $\mathcal{M}$  — на пространстве  $V$ .

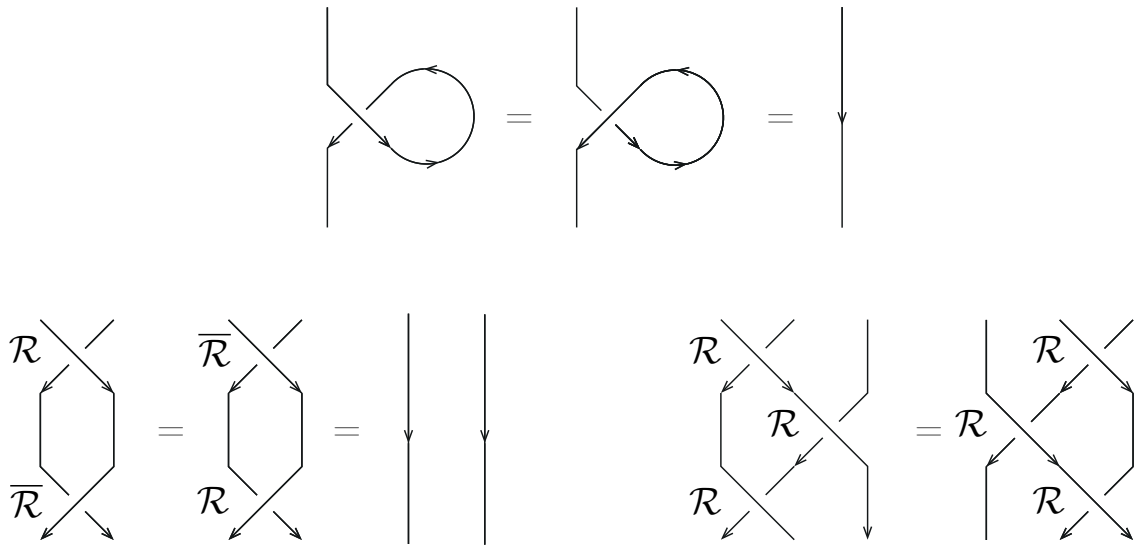


Рисунок 1.8 — Движения Рейдемейстера с выделенными элементами диаграмм

Из второго движения Рейдемейстера следует связь между операторами  $\mathcal{R}$  и  $\bar{\mathcal{R}}$ :

$$\mathcal{R} \bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{R}} \mathcal{R} = I_{V^{\otimes 2}}, \quad (1.20)$$

где  $I_{V^{\otimes 2}}$  — единичный оператор размерности  $(\dim V)^2$ , откуда получаем

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^{-1}. \quad (1.21)$$

Из третьего движения Рейдемейстера получается уравнение на оператор  $\mathcal{R}$ , которое оказывается известным уравнением Янга-Бакстера,

$$\mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{23}, \quad (1.22)$$

где  $\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R} \otimes I_V$ ,  $\mathcal{R}_{23} = I_V \otimes \mathcal{R}$ ,  $I_V$  — единичный оператор размерности  $\dim V$ .

Первое движение Рейдемейстера связывает операторы  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{Q} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{M}}$ :

$$\mathrm{Tr}_2 (\mathcal{R}^{\pm 1} (I_V \otimes \mathcal{W})) = I_V, \quad (1.23)$$

где  $\mathrm{Tr}_2$  обозначает след по второму пространству из тензорного произведения  $V \otimes V$ . Таким образом, движения Рейдемейстера накладывают ограничение на произведение  $\mathcal{M}$  и  $\overline{\mathcal{M}}$ , а не на каждый отдельный оператор и оставляют произвол в определении операторов. Мы будем использовать:

$$\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}, \quad \mathcal{M}^2 = \mathcal{Q}. \quad (1.24)$$

Теперь мы можем выразить операторы  $R_i$  и  $M_i$  (рис. 1.3 и 1.4) через операторы  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathcal{R}, & R_5 &= \mathcal{R}^{-1}, \\ R_2 &= (I \otimes \mathcal{M}) \mathcal{R} (\mathcal{M} \otimes I)^{-1}, & R_6 &= (I \otimes \mathcal{M}) \mathcal{R}^{-1} (\mathcal{M} \otimes I)^{-1}, \\ R_3 &= (\mathcal{M} \otimes I)^{-1} \mathcal{R} (I \otimes \mathcal{M}), & R_7 &= (\mathcal{M} \otimes I)^{-1} \mathcal{R}^{-1} (I \otimes \mathcal{M}), \\ R_4 &= (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}) \mathcal{R} (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{-1}, & R_8 &= (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}) \mathcal{R}^{-1} (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{-1}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}, \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}^{-1}, \quad \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}, \quad \mathcal{M}_4 = \mathcal{M}^{-1}. \quad (1.26)$$

Таким образом, для вычисления инвариантов узлов нужно определить операторы  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{M}$ , которые должны удовлетворять уравнениям

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Tr}_2 (\mathcal{R}^{\pm 1} (I_V \otimes \mathcal{W})) &= I_V, \\ \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{12} &= \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{23}. \end{aligned}} \quad (1.27)$$

То есть оператор  $\mathcal{R}$  — решение уравнения Янга-Бакстера, а оператор  $\mathcal{M}$  определяется из условия выполнения первого движения Рейдемейстера. Решение уравнения Янга-Бакстера есть в рамках квантованной универсальной обертывающей алгебр Ли — это универсальная  $\mathcal{R}$ -матрица [19]. Так как данная работа связана с полиномами ХОМФЛИ-ПТ, особое внимание мы посвятим алгебре  $sl_N$ .

## Оснащение узла и нормировки $\mathcal{R}$ -матриц

Если рассматривать узлы, которые состоят из лент, первое движение Рейдемейстера будет распутываться с дополнительным коэффициентом

$$\mathrm{Tr}_2 (\mathcal{R}^{\pm 1} (I_V \otimes \mathcal{W})) = q^{\Omega_2} I_V. \quad (1.28)$$

Этот коэффициент тесно связан с теорией Черна-Саймонса [4; 129; 130]. Для того, чтобы корректно определить средние значения петель Вильсона по контуру в трехмерном пространстве и избежать проблемы самопересечения, необходимо ввести дополнительный контур [4], который называют оснащением (framing). Этот дополнительный контур смещен относительно исходного и позволяет вместо узлов, сделанных из нитей, рассматривать узлы, сделанные из лент. Свобода в выборе оснащения контура проявляется в виде дополнительного коэффициента  $q^{\Omega_2}$  в уравнении (1.28). Это открывает возможность выбора различных нормировок оператора  $\mathcal{R}$  [104; 127]. Рассмотрим некоторые нормировки, которые естественным образом возникают в разных задачах.

1. *Топологическая нормировка* удобна при вычислении полиномов узлов. В этом случае оператор  $\mathcal{R}$  удовлетворяет уравнению (1.23). Однако, ее нельзя использовать при определении оператора  $\mathcal{R}$ , который действует на разные векторные пространства, то есть используется при вычислении инвариантов зацеплений. Уравнение (1.23) записывается для одной нити и не имеет аналога для двух нитей.
2. *Вертикальная нормировка* возникает из теории квантовых алгебр и связана с процедурой, которую называют каблированием [127]. Каблирование позволяет связать инварианты узлов, вычисленные для различных представлений квантовой алгебры, и выразить оператор  $\mathcal{R}$ , соответствующий старшим представлениям, через операторы младших представлений. Это накладывает ограничения на оператор  $\mathcal{R}$  и позволяет фиксировать нормировку.
3. *Каноническая нормировка* является естественным выбором при вычислении средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса [129; 131]. Она определяется так, чтобы ответ для вильсоновского среднего не содержал число зацепления оснащенного контура. При выборе

этой нормировки полином ХОМФЛИ-ПТ будет иметь следующее свойство: разложение по малому параметру  $\hbar$  ( $q = e^{\hbar}$ ,  $A = e^{\hbar N}$ ) не будет содержать линейного члена. Для узлов эта нормировка совпадает с топологической.

### 1.3 Квантованная универсальная обертывающая алгебры $sl_N$ и квантовая $\mathcal{R}$ -матрица

Класс квантованных универсальных обертывающих алгебр Ли со структурой алгебры Хопфа был определен в работах В. Дринфельда [18] и М. Джимбо [19]. Их также называют квантовыми алгебрами. Создание квантовых алгебр — это одно из важнейших открытий в математике и физике конца XX века. Оно берет свое начало с изучения квантового метода обратной задачи рассеяния [132; 133]. Квантовые алгебры имеют большое число приложений и связей с теорией групп и алгебр Ли, их теорией представлений, маломерной топологией, некоммутативной геометрией, комбинаторикой, теорией интегрируемых систем, конформными и квантовыми теориями поля. Для нас большую роль играет их связь с теорией узлов и возможность определить универсальную  $\mathcal{R}$ -матрицу, которая является решением уравнения Янга-Бакстера и может быть использована для вычисления инвариантов узлов. Впервые  $\mathcal{R}$ -матричный подход в теории квантовых групп был развит в работе [134] и был связан с РТТ-алгебрами, которые являются квантованными алгебрами функций на квазитреангулярной алгебре Хопфа [135–142].  $\mathcal{R}$ -матричный формализм активно используется для построения и изучения структур на квантовых многообразиях и при изучении моделей математической физики [143–147]. Подробное изложение теории квантовых групп можно найти, например, в [148; 149].

Квантовые алгебры представляют собой однопараметрическую деформацию универсальных обертывающих простых алгебр Ли и переходят в свою классическую версию, когда параметр квантования равен единице.

$\mathcal{U}_q(sl_N)$  — квантованная универсальная обертывающая алгебры Ли  $sl_N$ . Она задается набором генераторов  $E_i, F_i, K_i, K_i^{-1}$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ), которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$K_i E_j = q^{a_{ij}} E_j K_i, \quad K_i F_j = q^{-a_{ij}} F_j K_i, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad (1.29)$$

$$[K_i, K_j] = 0, \quad [E_i, E_j] = 0 \quad \text{при} \quad |i - j| > 1, \quad [F_i, F_j] = 0 \quad \text{при} \quad |i - j| > 1$$

и соотношениям Серра:

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \left[ \begin{matrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{matrix} \right]_q E_i^{1-a_{ij}-r} E_j E_i^r = 0, \quad i \neq j, \quad (1.30)$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \left[ \begin{matrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{matrix} \right]_q F_i^{1-a_{ij}-r} F_j F_i^r = 0, \quad i \neq j, \quad (1.31)$$

где  $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,N-1}$  — матрица Картана алгебры  $sl_N$ :  $a_{i,i} = 2$ ,  $a_{i,i+1} = -1$ ,  $a_{i,j} = 0$  при  $|i - j| > 1$ ,

$$\left[ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right]_q = \frac{[n]_q!}{[r]_q! [n-r]_q!}, \quad [n]_q = \frac{\{q^n\}}{\{q\}} = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}. \quad (1.32)$$

Структура алгебры Хопфа на  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  задается копроизведением  $\Delta$ :

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes \mathcal{K}_i, \quad (1.33)$$

$$\Delta(K_i^{-1}) = K_i^{-1} \otimes \mathcal{K}_i^{-1}, \quad (1.34)$$

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes K_i + I \otimes E_i, \quad (1.35)$$

$$\Delta(F_i) = F_i \otimes I + K_i^{-1} \otimes F_i, \quad (1.36)$$

коединицей  $\varepsilon$  и антиподом  $S$ :

$$\varepsilon(K_i) = 1, \quad \varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0, \quad (1.37)$$

$$S(K_i) = K_i^{-1}, \quad S(E_i) = -E_i K_i^{-1}, \quad S(F_i) = -K_i F_i. \quad (1.38)$$

### 1.3.1 Универсальная $\mathcal{R}$ -матрица

Квантовая алгебра  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  со структурой алгебры Хопфа является квазитреугольной, то есть в ней есть оператор, который коммутирует с копроизведением  $\Delta$ :

$$\mathcal{R}_u \Delta(a) \mathcal{R}_u^{-1} = \Delta^{\text{cop}}, \quad (1.39)$$

где  $\Delta^{\text{cop}} = P \circ \Delta$ ,  $P$  — оператор перестановки  $P(x \otimes y) = y \otimes x$ . Оператор  $\mathcal{R} = P \mathcal{R}_u$  удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера (1.22) и используется для



вычисления инвариантов узлов и зацеплений. Оператор  $\mathcal{R}_u$  называется универсальной  $\mathcal{R}$ -матрицей:

$$\mathcal{R}_u = q^{\sum_{i,j} a_{i,j}^{-1} h_i \otimes h_j} \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Phi^+} \exp_q \left( (q - q^{-1}) E_\beta \otimes F_\beta \right), \quad (1.40)$$

где  $\beta \in \Phi^+$  — положительные корни алгебры  $sl_N$ ,  $q^{h_i} = K_i$ , квантовая экспонента, квантовый факториал и квантовые числа:

$$\exp_q A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{[m]_q!} q^{m(m-1)/2}, \quad (1.41)$$

$$[m]_q! = \prod_{i=1}^m [i]_q, \quad [0]_q! = 1, \quad (1.42)$$

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}. \quad (1.43)$$

Оператор  $\mathcal{M}$  определяется через полусумму положительных корней  $\rho$ :

$$2\rho = \sum_{\beta \in \Delta_+} \beta = \sum_{i=1}^{N-1} n_i \alpha_i, \quad (1.44)$$

где  $n_i \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, N-1$ ) — простые корни,

$$\mathcal{M} = q^{h_\rho}, \quad \mathcal{W} = q^{2h_\rho} = K^{(2\rho)} = K_1^{n_1} K_2^{n_2} \dots K_{N-1}^{n_{N-1}}. \quad (1.45)$$

### Собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы

В общем случае векторы неприводимых представлений  $Q_k$  из разложения тензорного произведения  $T_i \otimes T_j \rightarrow \bigoplus_k a_k Q_k$  являются собственными векторами  $\mathcal{R}$ -матрицы. Это следует из того, что  $\mathcal{R}$ -матрица коммутирует с копроизведением. Чтобы показать это, рассмотрим, как  $\mathcal{R}$ -матрица действует на векторы  $v_i$  и  $u_j$  двух неприводимых представлений  $Q_1$  и  $Q_2$  ( $\dim(Q_1) < \dim(Q_2)$ ).  $v_1$  и  $u_1$  — старшие векторы представлений  $Q_1$  и  $Q_2$ ,  $E$  и  $F$  — повышающий и понижающий операторы, соответственно.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}v_1 &= \sum_{i=1}^{\dim(Q_1)} a_i v_i + \sum_{j=1}^{\dim(Q_2)} b_j u_j, \\ E\mathcal{R}v_1 &= \sum_{i=2}^{\dim(Q_1)} a_i v_{i-1} + \sum_{j=2}^{\dim(Q_2)} b_j u_{j-1}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

С другой стороны,

$$ERv_1 = \mathcal{R}Ev_1 = 0, \quad (1.47)$$

отсюда следует, что  $a_i = b_j = 0$  для  $i = 2, \dots, \dim(Q_1), j = 1, \dots, \dim(Q_2)$  и теперь  $\mathcal{R}v_1 = a_1v_1 + b_1u_1$ .

$$F^{\dim(Q_1)}\mathcal{R}v_1 = b_1u_{\dim(Q_1)+1} = \mathcal{R}F^{\dim(Q_1)}v_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0 \Rightarrow \mathcal{R}v_1 = a_1v_1. \quad (1.48)$$

Действуем на это выражение повышающим оператором, чтобы показать, что

$$\mathcal{R}v_i = a_1v_i. \quad (1.49)$$

Можно использовать эту же процедуру, чтобы показать, что это верно для каждого неприводимого представления.

Собственные значения  $\lambda$  универсальной  $\mathcal{R}$ -матрицы известны [12] и зависят от представлений, соответствующих пересекающимся нитям, а именно от разложения их тензорного произведения по неприводимым представлениям:

$$T_1 \otimes T_2 \rightarrow \bigoplus_i a_i Q_i, \quad (1.50)$$

$$\lambda_Q = \varepsilon_Q q^{\varkappa_Q - \varkappa_{T_1} - \varkappa_{T_2}}, \quad T_1 \neq T_2, \quad (1.51)$$

$$\lambda_Q = \varepsilon_Q q^{\varkappa_Q - 4\varkappa_{T_1} - N|T_1|}, \quad T_1 = T_2, \quad (1.52)$$

где  $\varepsilon_Q = \pm 1$ , собственные значения (1.52) записаны в топологическом фрейминге, а собственные значения (1.51) — в вертикальном, так как в случае разных представлений на нитях нельзя определить топологический фрейминг,

$$\varkappa_Q = \sum_{(m,n) \in Q'_i} (m - n), \quad (1.53)$$

$\varkappa_Q$  (сумма разностей номеров столбца и строки каждой клетки на диаграмме Юнга) — образ квадратичного оператора Казимира на представлении  $Q$  линейной алгебры. В случае других оснащений (фреймингов) собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы будут отличаться умножением на нормировочный коэффициент.

### 1.3.2 Конечномерные неприводимые представления $\mathcal{U}_q(sl_N)$

Структура неприводимых конечномерных представлений  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  описывается для двух отдельных случаев: когда параметр квантования  $q$  не равен и равен корню из единицы. Второй случай мы подробно обсудим в главе 3.

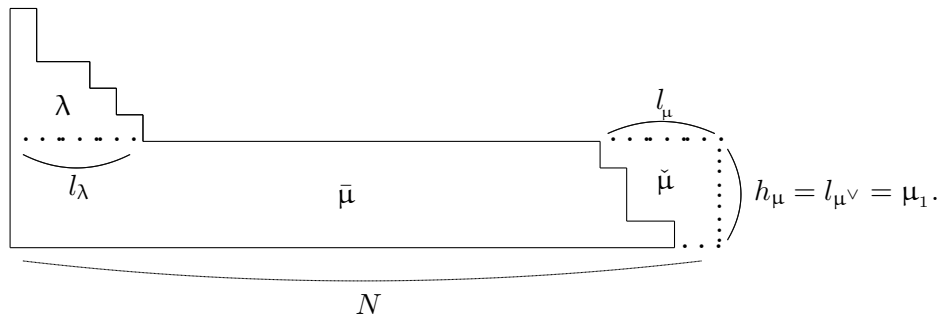
Когда параметр  $q$  не равен корню из единицы, все конечномерные неприводимые представления  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  являются представлениями со старшим и младшим весом и нумеруются диаграммами Юнга — неубывающей последовательностью натуральных чисел  $\mu = [n_1, \dots]$ . Их также изображают в виде диаграмм:

$$[7, 6, 4, 2, 2] = \begin{array}{cccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \quad (1.54)$$

Диаграмма не может содержать больше  $N - 1$  строки, столбцы, состоящие из  $N$  клеток, можно сокращать. Представления алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  состоят из одной строки  $[n]$ , представления алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  из двух  $[n_1, n_2]$  и так далее.

В данной работе мы также используем следующее обозначение для так называемых композитных представлений  $(\lambda, \mu)_N$ , которые соответствуют следующим диаграммам Юнга:

$$(\lambda, \mu)_N = \left[ \lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_{l_\lambda} + \mu_1, \underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{N - l_\lambda - l_\mu}, \mu_1 - \mu_{l_\mu}, \dots, \mu_1 - \mu_2 \right], \quad (1.55)$$



## 1.4 Модификация метода Решетихина-Тураева для трехнитевых кос. Инклюзивные матрицы Рака

Метод Решетихина-Тураева, описанный в разделе 1.2, является универсальным и может применяться к любым узлам и представлениям  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ . Однако, вычисления с его помощью делать очень сложно и громоздко. Для этого нужно выбрать конкретную алгебру  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  (фиксировать значение  $N$ ), построить ее представление, соответствующее диаграмме Юнга  $R$ , вычислить  $\mathcal{R}$ -матрицу и матрицу  $\mathcal{M}$ , а затем брать их свертки по всем элементам диаграммы узла. Это позволяет вычислить полином ХОМФЛИ-ПТ только для одного значения  $A = q^N$ . Чтобы получить инвариант, зависящий от двух переменных  $(A, q)$ , можно проделать эти вычисления для разных значений  $N$  и экстраполировать полученный результат. Для многих задач (например, для многих представлений, квадраты которых содержат кратности) это до сих пор единственный метод вычисления цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ и мы использовали его в рамках данного исследования для вычисления инвариантов и разностей между ними узлов-мутантов (см. разделы 2.9, 2.11, 2.12), а также для исследования инвариантов в корнях из единицы (см. главу 3). Однако, существуют классы узлов и представлений, для которых классический метод Решетихина-Тураева можно существенно модифицировать.

Классификация узлов — это очень сложная задача. Как мы уже говорили, классификация узлов по числу пересечений есть в таблице Рольфсена [119], там есть диаграммы узлов до 10 пересечений. Однако, для вычисления инвариантов иногда удобно использовать специальные типы диаграмм узлов. Существенных успехов в развитии методов вычисления инвариантов узлов удалось добиться при рассмотрении диаграмм узлов в виде параллельных кос, а также диаграмм древовидных узлов, о которых пойдет речь в разделе 2.1.2.

В этом разделе мы обсудим метод, который применяется к узлам, представленным в виде трехнитевой косы. Важной составляющей этого метода являются квантовые матрицы Рака, исследованию которых посвящена данная глава этой диссертации.

### 1.4.1 Представление узла в виде косы. Квантовый след

Дж. Александер доказал, что любой узел или зацепление можно представить в виде косы [74]. Коса представляет из себя несколько параллельно направленных нитей, которые пересекаются друг с другом. Узел получается путем замыкания косы, в данном случае путем попарного соединения концов нитей сверху и снизу косы. Можно рассматривать и косы с другим типом замыкания, его называют плетенкой (см. рис. 1.9).

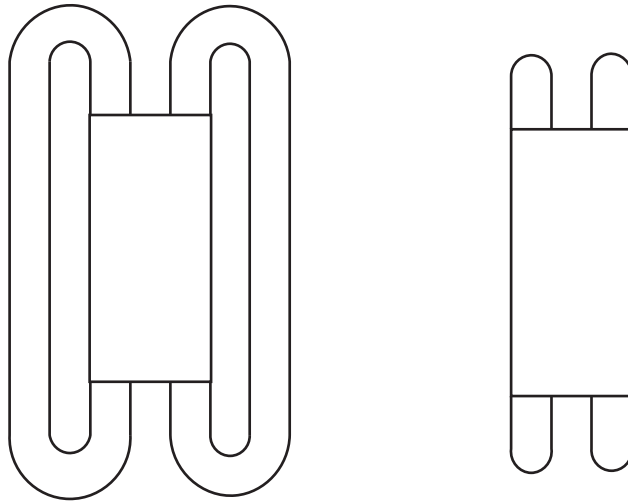


Рисунок 1.9 — Способы замыкания косы: параллельный и плетенка

Существует семейство узлов, которые называют торическими  $T[m, n]$ , так как их можно выложить без пересечений на поверхность тора (см. рис. 1.10). Они описываются двумя числами  $m$  и  $n$ , которые можно менять местами. Они являются числами намоток нити на каждый цикл тора. Если числа  $m$  и  $n$  взаимно просты, то получается узел, в противном случае – зацепление. Все торические узлы представляются в виде косы, состоящей из  $m$  (или  $n$ ) нитей. Все цветные полиномы ХОМФЛИ-ПТ торических узлов описываются замечательной формулой Россо-Джонса [150] и активно используются для исследования связей теории Черна-Саймонса с другими теориями [151–153]. На рис. 1.11 приведено представление узла  $3_1 = T[2, 3]$  (трилистника) в виде косы.

Рассмотрим, как классический метод Решетихина-Тураева (см. раздел 1.2) можно естественно преобразовать при работе с косами. Представление узла в виде косы в этом случае позволяет свести использования операторов смены направления нити  $\mathcal{M}$  к использованию оператора квантового следа.

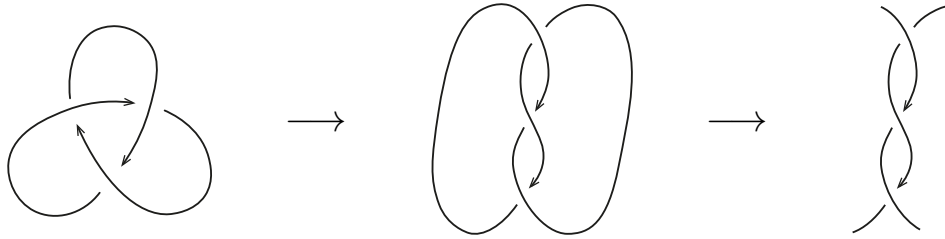
Рисунок 1.10 — Коса торического узла  $T[4, 3]$ 

Рисунок 1.11 — Представление трилистника в виде двухнитевой косы

Коса по определению содержит только пересечения двух типов:  $R_1$  и  $R_5$  (см. рис. 1.3), которым соответствуют операторы  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{R}^{-1}$ .

Каждой нити косы ставится в соответствие представление  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$   $T_i$ , а самой косе в соответствие ставится тензорное произведение этих представлений  $\bigotimes_i T_i$ . Операторы пересечений  $\mathcal{R}$  теперь будут действовать на косу целиком, то есть используются операторы

$$\mathcal{R}_i = \overbrace{I \otimes I \otimes \dots \otimes I}^{i-1} \otimes \mathcal{R} \otimes \overbrace{\dots \otimes I}^{s-i-1}, \quad (1.56)$$

где  $I$  — тождественный оператор правильной размерности,  $s$  — количество нитей в косе. Для косы из трех нитей нужны две  $\mathcal{R}$ -матрицы:  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \otimes I$ ,  $\mathcal{R}_2 = I \otimes \mathcal{R}$ . Чтобы замкнуть косу (рис. 1.12), используют операцию взятия квантового следа

$$\mathrm{Tr}_q A = \mathrm{Tr} \overbrace{W \otimes W \otimes \dots \otimes W}^s A, \quad (1.57)$$

которую определяют с помощью оператора  $W = \mathcal{M}^2$ .

Инвариант узла и зацепления определяется как квантовый след от произведения  $\mathcal{R}$ -матриц, которые соответствуют пересечениям нитей в косе,

$$\mathcal{H}^{\mathcal{L}} = \mathrm{Tr}_q \prod_i \mathcal{R}_i. \quad (1.58)$$

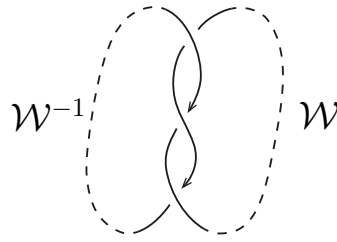
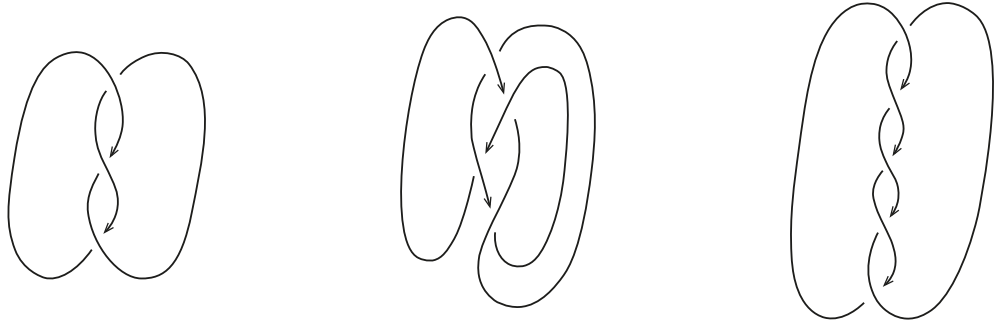
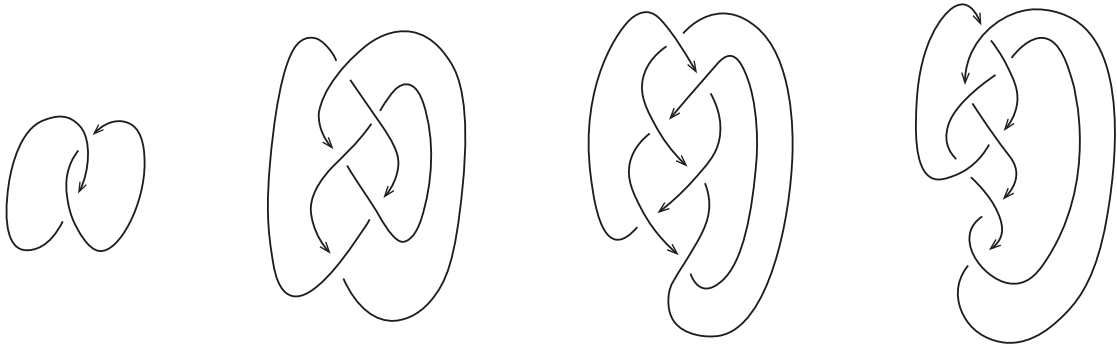


Рисунок 1.12 — Замыкание косы

Рисунок 1.13 — Узлы: трилистник (узел  $3_1$ ), восьмерка (узел  $4_1$ ) и узел  $5_1$  в виде косРисунок 1.14 — Зацепления: зацепление Хопфа (зацепление  $L_2 a_1$ ), зацепление Уайтхеда (зацепление  $L_5 a_1$ ), кольца Борромео (зацепление  $L_6 a_4$ ) и зацепление  $L_7 a_1$  в виде кос

Для узлов и зацеплений, представленных на рис. 1.13 и 1.14 получаем следующие формулы для вычисления ненормированных полиномов ХОМФЛИ-ПТ:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{3_1} &= \text{Tr} [(\mathcal{W}^{-1} \otimes \mathcal{W}) \mathcal{R}^3], \\ \mathcal{H}^{4_1} &= \text{Tr} [(\mathcal{W}^{-1} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{W}) \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2^{-1} \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2^{-1}], \\ \mathcal{H}^{5_1} &= \text{Tr} [(\mathcal{W}^{-1} \otimes \mathcal{W}) \mathcal{R}^5]. \end{aligned} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{L_2 a_1} &= \text{Tr} [(\mathcal{W}^{-1}(T_1) \otimes \mathcal{W}(T_2)) \mathcal{R}(T_1, T_2) \mathcal{R}(T_2, T_1)], & (1.60) \\
\mathcal{H}^{L_5 a_1} &= \text{Tr} [(\mathcal{W}^{-1}(T_1) \otimes \mathcal{W}(T_2) \otimes \mathcal{W}(T_2)) \times \\
&\quad \times \mathcal{R}_1^{-1}(T_1, T_2) \mathcal{R}_2(T_1, T_2) \mathcal{R}_1^{-1}(T_2, T_2) \mathcal{R}_2(T_2, T_1) \mathcal{R}_1^{-1}(T_2, T_1)], \\
\mathcal{H}^{L_6 a_4} &= \text{Tr} [(\mathcal{W}^{-1}(T_1) \otimes \mathcal{W}(T_2) \otimes \mathcal{W}(\lambda^{(3)})) \mathcal{R}_1(T_1, T_2) \mathcal{R}_2^{-1}(T_1, \lambda^{(3)}) \times \\
&\quad \times \mathcal{R}_1(T_2, \lambda^{(3)}) \mathcal{R}_2^{-1}(T_2, T_1) \mathcal{R}_1(\lambda^{(3)}, T_1) \mathcal{R}_2^{-1}(\lambda^{(3)}, T_2)], \\
\mathcal{H}^{L_7 a_1} &= \text{Tr} [(\mathcal{W}^{-1}(T_1) \otimes \mathcal{W}(T_2) \otimes \mathcal{W}(T_2)) \mathcal{R}_1^{-1}(T_1, T_2) \mathcal{R}_2(T_1, T_2) \times \\
&\quad \times \mathcal{R}_1^{-1}(T_2, T_2) \mathcal{R}_2(T_2, T_1) \mathcal{R}_1^{-1}(T_2, T_1) \mathcal{R}_2^2(T_2, T_2)].
\end{aligned}$$

В формулах для зацеплений (1.60) мы выписали представления, на которые действуют  $\mathcal{R}$ -матриц и оператор  $\mathcal{M}$ , потому что зацепления могут состоять из нитей, которым соответствуют разные представления. Узлы и зацепления на рис. 1.13 и 1.14 мы использовали для изучения инвариантов в корнях из единицы в главе 3. В разделе 3.1.4 мы более подробно обсуждаем вычисление инвариантов зацеплений.

#### 1.4.2 Инварианты трехнитевых кос

Переход от  $\mathcal{R}$ -матриц, которые действовали на две нити, к операторам, которые действуют на всю косу, а также рассмотрение пространства косы целиком, а не пространств отдельных нитей, позволяют сделать качественный скачок и существенно оптимизировать метод вычисления.

В общем виде, косу  $\mathcal{B}^{\mathcal{K}}$  можно параметризовать группами чисел, которые соответствуют количеству пересечений соседних нитей. В случае трехнитевой косы есть два типа пересечений ( $m^1$  — число пересечений между первой и второй нитью,  $m^2$  между второй и третьей):

$$\mathcal{B}_{m_i^j}^{\mathcal{K}} = \{m_1^1, m_1^2 | m_2^1, m_2^2 | \dots | m_k^1, m_k^2\}, \quad (1.61)$$

то есть коса устроена следующим образом: сначала  $m_1^1$  раз пересекаются первая и вторая нить, затем  $m_1^2$  раз пересекаются вторая и третья нить, далее опять  $m_2^1$  раз пересекаются первая и вторая нить и так далее. Числа  $m_i^j$  могут быть отрицательными, что соответствует обратному пересечению нитей (пересечение  $\mathcal{R}_5$  на рис. 1.3).



Формула для вычисления полинома ХОМФЛИ-ПТ произвольной трехнитевой косы:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{B}^k}_{m_i^j} = \text{Tr}_q \left( \mathcal{R}_1^{m_1^1} \mathcal{R}_2^{m_2^1} \dots \mathcal{R}_1^{m_k^1} \mathcal{R}_2^{m_k^2} \right) = \text{Tr}_q \left( \prod \mathcal{R}_i^{m_i^j} \right). \quad (1.62)$$

Переходим к модификации метода Решетихина-Тураева. Ключ к ней лежит в смене базиса операторов  $\mathcal{R}$ : от базиса тензорного произведения представлений, соответствующих нитям  $T_1 \otimes T_2$ , мы переходим к базису неприводимых представлений  $Q_i$ :

$$T_1 \otimes T_2 \rightarrow \bigoplus_i m_{Q_i} \otimes Q_i = \bigoplus_i Q_i^{\otimes a_i}, \quad (1.63)$$

где  $m_{Q_i}$  — пространство кратности представления  $Q_i$ ,  $a_i$  — размерность пространства кратностей  $m_{Q_i}$ . В базисе неприводимых представлений  $\mathcal{R}$ -матрица является диагональной, а ее собственные значения известны. Однако, мы можем диагонализировать только одну из матриц (например,  $\mathcal{R}_1$ ). Вторая матрица будет связана с ней преобразованием базиса разложения произведения  $(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3$  на неприводимые к базису разложения произведения  $T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3)$ . Это преобразование отлично от единичного, потому что тензорное произведение на уровне векторов представлений не ассоциативно. Этот переход осуществляется с помощью матрицы, которая связывает соответствующие базисы:

$$\mathcal{U} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} : \quad (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 \longrightarrow T_4 \quad \Longrightarrow \quad T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) \longrightarrow T_4. \quad (1.64)$$

Это преобразование хорошо известно в физике и называется матрицей Рака (6j-символами или коэффициентами Рака-Вигнера) [81–85]. Оператор  $\mathcal{R}_2$  получается из оператора  $\mathcal{R}_1$  умножением на матрицу Рака:

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{U} \mathcal{R}_1 \mathcal{U}^\dagger. \quad (1.65)$$

Вычисление матриц Рака для квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  представляет собой сложную актуальную задачу. Существуют различные подходы к ней, например, с помощью соотношения пентагона [73; 154; 155] или методом старших векторов [75; 77; 89; 125].

При вычислении полиномов узлов, представленных трехнитевыми косами, представления  $T_i$  совпадают, и для вычислений нужны только так называемые

инклюзивные матрицы Рака

$$\mathcal{U} \begin{bmatrix} T & T \\ T & Q \end{bmatrix} : \quad (T \otimes T) \otimes T \longrightarrow Q \quad \Longrightarrow \quad T \otimes (T \otimes T) \longrightarrow Q. \quad (1.66)$$

Ряд инклюзивных матриц Рака был вычислен методом старших векторов для различных представлений  $T$  алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ : для  $T = [2, 1]$  в [121], для  $T = [3, 1]$  в [122; 123] и для  $T = [3, 3]$  в [124].

### Взятие квантового следа. Полиномы Шура

Когда мы вычисляем инварианты узлов, то все представления  $T_i$ , соответствующие нитям в косе совпадают. Собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы определяются представлениями  $Q'_i$  из разложения тензорного квадрата  $T^{\otimes 2}$ :

$$T \otimes T \rightarrow \bigoplus_i m_{Q'_i} \otimes Q'_i, \quad (1.67)$$

где  $m_{Q'_i}$  — пространство кратности представления  $Q'_i$  в разложении. Собственные значения матрицы  $\mathcal{R}_1$ , соответствующие этим представлениям, легко вычисляются по диаграмме Юнга (см. формулу (1.52)). Пространство, соответствующее трехнитевой косе, тоже раскладывается по неприводимым представлениям:

$$T \otimes T \otimes T \rightarrow \bigoplus_j m_{Q_j} \otimes Q_j. \quad (1.68)$$

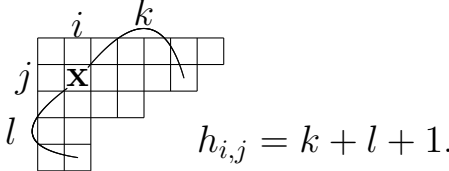
В базисе неприводимых представлений операторы  $\mathcal{R}$  разбиваются на блоки размерности  $\dim(m_{Q_j})$ , соответствующие представлениям  $Q_j$ . Это позволяет в формуле для полинома (1.62) перейти к сумме по представлениям  $Q_j$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{B^k} m_i^j &= \text{Tr}_q \left( \prod \mathcal{R}_i^{m_i^j} \right) = \text{Tr}_{T \otimes T \otimes T} K_T^{(2\rho)} \otimes K_T^{(2\rho)} \otimes K_T^{(2\rho)} \left( \prod \mathcal{R}_i^{m_i^j} \right) = \\ &= \sum_j \text{Tr}_{m_{Q_i} \otimes Q_j} K_{Q_j}^{(2\rho)} \left( \prod \mathcal{R}_i^{m_i^j} \right)_{m_{Q_j} \otimes Q_j} = \\ &= \sum_j \text{Tr}_{Q_j} K_{Q_j}^{(2\rho)} \text{Tr}_{m_{Q_j}} \left( \prod \mathcal{R}_i^{m_i^j} \right)_{m_{Q_j}} = \\ &= \sum_j \dim_q(Q_j) \text{Tr}_{m_{Q_j}} \left( \mathcal{R}_1^{m_1^1} \mathcal{R}_2^{m_1^2} \dots \mathcal{R}_1^{m_k^1} \mathcal{R}_2^{m_k^2} \right)_{m_{Q_j}}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

где  $\text{Tr}_{T \otimes T \otimes T}$  обозначает след по пространству  $T \otimes T \otimes T$ , соответствующему косе, а  $\text{Tr}_{Q_j}$  — по пространствам из прямой суммы разложения  $T \otimes T \otimes T$  на неприводимые представления. Здесь мы использовали определение оператора  $\mathcal{W}$  для алгебры  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$  (см. формулу (1.45)), поэтому мы можем вычислить  $\dim_q(Q) = \text{Tr}_Q K_Q^{(2\rho)}$  — квантовые размерности представлений, которые известны для алгебры  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$  и совпадают с полиномами Шура  $s_Q$  в специальной точке:

$$\dim_q(Q) = s_Q(x_1, \dots, x_N) \Big|_{x_i = q^{N+1-2i}} = s_Q(p_1, \dots, p_N) \Big|_{p_k = p_k^*}, \quad (1.70)$$

где  $p_k = \sum_{i=1}^N x_i^k$ ,  $p_k^* = \frac{A^k - A^{-k}}{q^k - q^{-k}}$ . Значения  $p_k^*$  называют топологическим локусом. Полином Шура в топологическом локусе  $s_Q$  можно вычислить по формуле крюков:

$$s_Q(A, q) = \prod_{(i,j) \in Q} \frac{Aq^{i-j} - A^{-1}q^{j-i}}{q^{h_{i,j}} - q^{-h_{i,j}}}, \quad (1.71)$$


Второй след  $\text{Tr}_{m_{Q_j}} \left( \mathcal{R}_1^{m_1^1} \mathcal{R}_2^{m_1^2} \dots \mathcal{R}_1^{m_k^1} \mathcal{R}_2^{m_k^2} \right)_{m_{Q_j}}$  в формуле (1.70) содержит блоки  $\mathcal{R}$ -матриц, соответствующих представлениям  $Q_j$ , размерность которых совпадает с кратностью. Матрица  $\mathcal{R}_{1,m_{Q_j}}$  диагональна и состоит из собственных значений  $\lambda_{Q'_i}$ , соответствующих представлениям  $Q'_i$ , которые удовлетворяют условию  $Q_j \in Q'_i \otimes T$ , а матрица  $\mathcal{R}_2$  получается из нее умножением на соответствующую матрицу Рака:  $\mathcal{R}_{2,m_{Q_j}} = \mathcal{U}_{m_{Q_j}} \mathcal{R}_{1,m_{Q_j}} \mathcal{U}_{m_{Q_j}}^\dagger$ . Размерность этих матриц совпадает с кратностью пространства  $Q_j$ .

Таким образом, модификация метода Решетихина-Тураева для узлов в виде трехнитевых кос позволяет свести задачу вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ к задаче вычисления матриц Рака. При этом полиномы, которые получаются в этом методе, зависят от двух переменных  $A$  и  $q$ , в отличие от классического метода Решетихина-Тураева.

## 1.5 $\mathcal{R}$ -матрицы со случайно совпадающими собственными значениями. Дополнительная блочная структура $\mathcal{R}$ -матриц

Необходимым условием использования модифицированного метода Решетихина-Тураева, который мы обсудили в предыдущем разделе, является вычисление матриц Рака для представлений  $Q_j$ :

$$\mathcal{U}^{Q_j} = \begin{bmatrix} T & T \\ T & Q_j \end{bmatrix}, \quad (1.72)$$

где представления  $T$  — представления на нитях трехнитевой косы. Важным элементом при вычислении матриц Рака оказываются собственные значения универсальной  $\mathcal{R}$ -матрицы (1.51, 1.52). Далее, обсуждая собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц, мы будем говорить о ненормированных собственных значениях  $\lambda_Q = \varepsilon_Q q^{\kappa_Q}$ , где  $\kappa_Q$  определяется формулой (1.53), нормировка которых легко восстанавливается.

У  $\mathcal{R}$ -матрицы может быть один из пяти возможных наборов собственных значений:

1. Все собственные значения разные.
2. Некоторые собственные значения совпадают из-за кратности (при  $a_i > 1$  или/и  $b_i > 1$  в разложения  $T^{\otimes 2} \rightarrow \bigoplus_i Q_i'^{\otimes a_i}$  и  $T^{\otimes 3} \rightarrow \bigoplus_i Q_i^{\otimes b_i}$ ). Такие собственные значения мы будем называть повторяющимися.
3. Некоторые собственные значения случайно совпадают ( $\varepsilon_{Q_i} q^{\kappa_{Q_i}} = \varepsilon_{Q_j} q^{\kappa_{Q_j}}$ , но  $Q_i \neq Q_j$ ). Такие собственные значения мы будем называть случайно совпадающими.
4. Есть и повторяющиеся ( $\lambda$ ), и случайно совпадающие собственные значения ( $\mu$ ), которые не совпадают между собой ( $\nexists \lambda_i, \mu_j : \lambda_i = \mu_j$ ).
5. Есть и повторяющиеся ( $\lambda$ ), и случайно совпадающие собственные значения ( $\mu$ ), которые тоже совпадают ( $\exists \lambda_i, \mu_j : \lambda_i = \mu_j$ ).

### 1.5.1 Гипотеза о собственных значениях $\mathcal{R}$ -матрицы

Уравнение Янга-Бакстера (1.22) для трехнитевых кос

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \quad (1.73)$$

можно переписать для блоков операторов  $\mathcal{R}^{Q_j}$ , соответствующих неприводимым представлениям  $Q_j$ , через матрицу Рака:

$$\mathcal{R}_1^{Q_j} \mathcal{U}^{Q_j} \mathcal{R}_1^{Q_j} \mathcal{U}^{Q_j \dagger} \mathcal{R}_1^{Q_j} = \mathcal{U}^{Q_j} \mathcal{R}_1^{Q_j} \mathcal{U}^{Q_j \dagger} \mathcal{R}_1^{Q_j} \mathcal{U}^{Q_j} \mathcal{R}_1^{Q_j} \mathcal{U}^{Q_j \dagger}. \quad (1.74)$$

Для  $\mathcal{R}$ -матриц, все собственные значения которых различны, уравнение (1.74) можно решить для матриц размером до  $6 \times 6$ , как это было сделано в [88]. В результате была сформулирована гипотеза о собственных значениях и ее обобщение [89]. Согласно гипотезе о собственных значениях, собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы полностью определяют элементы соответствующей матрицы Рака. Для представлений, которые не содержат кратностей в тензорном квадрате, эта гипотеза позволяет значительно упростить вычисление полиномов ХОМФЛИ-ПТ для узлов, которые представляются в виде трехнитевых кос.

### 1.5.2 $\mathcal{R}$ -матрицы со случайно совпадающими собственными значениями

Цель нашей работы заключалась в том, чтобы расширить возможность применения гипотезы о собственных значениях на  $\mathcal{R}$ -матрицы с совпадающими собственными значениями. Они содержат дополнительную симметрию в секторах, соответствующих представлениям со случайно совпадающими собственными значениями, что позволяет преобразовывать матрицы  $\mathcal{R}_2$ , блочно-диагонализировать их и получать блоки, все собственные значения которых оказываются различными.

В нашей работе мы рассматривали  $\mathcal{R}$ -матрицы с собственными значениями, соответствующими наборам 2, 3 и 4.

Уравнение (1.70) имеет следующую симметрию: можно одновременно повернуть базис матриц  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_2$ :

$$\mathcal{R}'_1 = \mathcal{Q}\mathcal{R}_1\mathcal{Q}^\dagger, \quad (1.75)$$

$$\mathcal{R}'_2 = \mathcal{Q}\mathcal{R}_2\mathcal{Q}^\dagger, \quad (1.76)$$

такое же преобразование следует применить к соответствующей матрице Рака, чтобы ее можно было использовать для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Когда  $\mathcal{R}$ -матрица содержит совпадающие собственные значения, появляются преобразования  $\mathcal{O}$ , которые не меняют матрицу  $\mathcal{R}_1$ , но могут упрощать матрицу  $\mathcal{R}_2$ . Эти преобразования соответствуют вращению базисных векторов, соответствующим представлениям с совпадающими собственными значениями

$$\mathcal{R}'_1 = \mathcal{O}\mathcal{R}_1\mathcal{O}^\dagger = \mathcal{R}_1, \quad (1.77)$$

$$\mathcal{R}'_2 = \mathcal{O}\mathcal{R}_2\mathcal{O}^\dagger. \quad (1.78)$$

В нашей работе мы использовали эту свободу для дальнейшего упрощения матриц  $\mathcal{R}_2$ . Мы вращали матрицы Рака, соответствующие неприводимым представлениям из разложений  $[2, 1]^{\otimes 3}$ ,  $[3, 1]^{\otimes 3}$ ,  $[3, 2]^{\otimes 3}$ ,  $[4, 1]^{\otimes 3}$  и  $[4, 2]^{\otimes 3}$ , в секторах совпадающих собственных значений (повторяющихся и случайных)  $\mathcal{R}$ -матриц. В случае повторяющихся собственных значений такие повороты представляют собой просто изменение векторов в соответствующих представлениях. Результирующая матрица Рака по-прежнему удовлетворяет определению (1.66). Повороты в секторах, соответствующих случайно совпадающим собственным значениям, смешивают векторы из разных неприводимых представлений. Таким образом, полученная матрица больше не является матрицей Рака. Но ее все же можно использовать для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ, потому что уравнение (1.70) инвариантно относительно таких поворотов. В некоторых случаях такие повороты позволили блочно-диагонализовать соответствующие матрицы  $\mathcal{R}_2$  и Рака.

В результате были сформулированы две гипотезы.

1. Матрица  $\mathcal{R}_2$  может быть преобразована к блочно-диагональной форме, если ее собственные значения удовлетворяют двум условиям: количество пар случайно совпадающих собственных значений больше либо равно  $N_a$ , количество пар кратных собственных значений больше либо равно  $N_r$ .  $N_a$  и  $N_r$  принимают следующие значения в зависимости от размерности матрицы:
  - $N_a = 1, N_r = 0$  или  $N_a = 0, N_r = 1$  для матриц размером до  $5 \times 5$ ,
  - $N_a = 1, N_r = 1$  для матриц  $6 \times 6$ ,
  - $N_a = 1, N_r = 2$  для матриц  $8 \times 8$ .
2. Угол поворота в секторах, соответствующих случайно совпадающим собственным значениям, из базиса, определяемого матрицей Рака, в базис, в котором  $\mathcal{R}_2$  является блочно-диагональной, равен  $\pm \frac{\pi}{4}$ .

Первая гипотеза была доказана для  $\mathcal{R}_2$ -матриц размером до  $3 \times 3$ . Ее также можно сформулировать для матрицы Рака, имеющей блочно-диагональную структуру при определенных преобразованиях. Фактически все расчеты в экспериментальной части производились для матриц Рака. Результаты можно найти в таблице 1. В столбце  $\dim$  указан размер матриц,  $Q$  нумерует представления из  $T^{\otimes 3}$ ,  $\lambda$  — повторяющиеся собственные значения,  $\mu$  — случайно совпадающие собственные значения. В столбце, обозначенном знаком вопроса, указано, получилось ли блочно-диагонализовать матрицу.

Результирующие блоки могут быть найдены из гипотезы собственных значений, поскольку в каждом блоке собственные значения не совпадают. Это очень важный для расчетов факт, вытекающий из первой гипотезы.

Вторая гипотеза — экспериментальное наблюдение. До сих пор остается открытым вопрос, почему угол поворота в “случайном” секторе равен  $\pm \frac{\pi}{4}$ .

В работе [156] рассматривается частный случай представления  $[2, 1]$  группы  $SU_3$  и симметрии соответствующих матриц Рака. Результат, полученный в нашей работе [113], представляет собой более общее наблюдение.

| dim          | Q             | собственные значения                           |                         | ? | блоки | блок 1  | блок 2   |
|--------------|---------------|--|-------------------------|---|-------|---|--|
|              |               | $\lambda$                                      | $\mu$                   |   |       |   |  |
| <b>[2,1]</b> |               |  |                         |   |       |   |  |
| 6            | [5,3,1]       | $\lambda_1 = \lambda_2$                        | $\lambda_3 = \lambda_4$ | + | (3,3) | $\underline{\lambda_1}, \lambda_3^*, \underline{\lambda_6}$ | $\underline{\lambda_2}, \lambda_4^*, \underline{\lambda_5}$                                      |
| 8            | [4,3,2]       | $\lambda_4 = \lambda_5, \lambda_6 = \lambda_7$ | $\lambda_2 = \lambda_3$ | + | (3,5) | $\lambda_3^*, \underline{\lambda_5}, \underline{\lambda_6}$ | $\lambda_1, \lambda_2^*, \underline{\lambda_4}$<br>$\underline{\lambda_7}, \lambda_8$            |
| 9            | [4,3,1,1]     | $\lambda_4 = \lambda_5, \lambda_6 = \lambda_7$ | $\lambda_2 = \lambda_3$ | - |       |   |  |
| <b>[3,1]</b> |               |  |                         |   |       |   |  |
| 4            | [4,3,2,2,1]   |  | $\lambda_2 = \lambda_3$ | + | (1,3) | $\lambda_3^*$   | $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4^*$  |
| 5            | [4,4,2,2]     |  | $\lambda_1 = \lambda_2$ | + | (2,3) | $\lambda_1^*, \underline{\lambda_4}$                        | $\lambda_2^*, \lambda_3, \underline{\lambda_5}$  |
| 6            | [4,3,3,1,1]   | $\lambda_1 = \lambda_2$                        | $\lambda_3 = \lambda_4$ | + | (3,3) | $\underline{\lambda_1}, \lambda_4^*, \underline{\lambda_6}$ | $\underline{\lambda_2}, \lambda_3^*, \underline{\lambda_5}$                                      |
| 9            | [5,3,2,2]     | $\lambda_4 = \lambda_5$                        | $\lambda_2 = \lambda_3$ | - |       |   |  |
|              | [4,4,3,1]     | $\lambda_5 = \lambda_6, \lambda_7 = \lambda_8$ | $\lambda_2 = \lambda_3$ | + | (3,6) | $\lambda_3^*, \underline{\lambda_5}, \underline{\lambda_8}$ | $\lambda_1, \lambda_2^*, \lambda_4$<br>$\underline{\lambda_6}, \underline{\lambda_7}, \lambda_9$ |
| <b>[3,2]</b> |               |  |                         |   |       |   |  |
| 6            | [4,3,3,2,2,1] | $\lambda_5 = \lambda_6$                        | $\lambda_3 = \lambda_4$ | + | (3,3) | $\underline{\lambda_1}, \lambda_4^*, \underline{\lambda_5}$ | $\underline{\lambda_2}, \lambda_3^*, \underline{\lambda_6}$                                      |
|              | [6,4,2,1,1,1] | $\lambda_1 = \lambda_2$                        | $\lambda_3 = \lambda_4$ | + | (3,3) | $\underline{\lambda_1}, \lambda_4^*, \underline{\lambda_6}$ | $\underline{\lambda_2}, \lambda_3^*, \underline{\lambda_5}$                                      |
| <b>[4,1]</b> |               |  |                         |   |       |   |  |
| 4            | [5,4,3,2,1]   | -  | $\lambda_2 = \lambda_3$ | + | (1,3) | $\lambda_3^*$   | $\lambda_1, \lambda_2^*, \lambda_4$  |
| 6            | [5,5,3,2]     | $\lambda_3 = \lambda_4$                        | $\lambda_5 = \lambda_6$ | + | (3,3) | $\underline{\lambda_1}, \lambda_3, \lambda_5^*$             | $\underline{\lambda_2}, \underline{\lambda_4}, \lambda_6^*$                                      |
|              | [5,4,4,1,1]   | $\lambda_2 = \lambda_3, \lambda_4 = \lambda_5$ | $\lambda_6 = \lambda_7$ | + | (3,3) | $\underline{\lambda_1}, \lambda_3^*, \underline{\lambda_6}$ | $\underline{\lambda_2}, \lambda_4^*, \underline{\lambda_5}$                                      |
|              | [6,4,2,2,1]   | -  | $\lambda_4 = \lambda_5$ | - |       |   |  |
| <b>[4,2]</b> |               |  |                         |   |       |   |  |
| 4            | [5,4,3,3,2,1] | -  | $\lambda_2 = \lambda_3$ | + | (1,3) | $\lambda_3^*$   | $\lambda_1, \lambda_2^*, \lambda_4$  |
| 5            | [5,5,3,3,1,1] | -  | $\lambda_4 = \lambda_5$ | + | (2,3) | $\underline{\lambda_1}, \lambda_4^*$                        | $\underline{\lambda_2}, \lambda_3, \lambda_5^*$  |
| 6            | [5,4,4,2,2,1] | $\lambda_5 = \lambda_6$                        | $\lambda_3 = \lambda_4$ | + | (3,3) | $\underline{\lambda_1}, \lambda_3^*, \underline{\lambda_6}$ | $\underline{\lambda_2}, \lambda_4^*, \underline{\lambda_5}$                                      |
|              | [11,6,1]      | $\lambda_1 = \lambda_2$                        | $\lambda_3 = \lambda_4$ | + | (3,3) | $\underline{\lambda_1}, \lambda_3^*, \underline{\lambda_5}$ | $\underline{\lambda_2}, \lambda_4^*, \underline{\lambda_6}$                                      |

Таблица 1 — Матрицы со случайно совпадающими собственными значениями. В последних двух столбцах случайно совпадающие собственные значения отмечены звездочками, повторяющиеся собственные значения подчеркнуты (и дважды подчеркнуты), в рамку заключены собственные значения, которые отличаются знаком и относятся к одинаковым представлениям из симметрического и антисимметрического квадрата  $T^{\otimes 2}$



## Доказательство первой гипотезы для частных случаев

Рассмотрим общий случай  $\mathcal{R}$ -матриц с парой совпадающих собственных значений.

1.  $n = 2$

В этом случае

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.79)$$

Это означает, что  $\mathcal{R}_2$  также пропорциональна единичной матрице, потому что  $\mathcal{R}_2 = URU^\dagger$ .

2.  $n = 3$

Теперь

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (1.80)$$

$\mathcal{R}_2$  симметрична, потому что  $\mathcal{R}$  диагональна и  $\mathcal{U}$  действительна. Тогда можно записать

$$\mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (1.81)$$

Поскольку всегда можно использовать вращение, чтобы сделать  $\beta_1 = 0$ :

$$\mathcal{O}_{(\beta_1=0)} = \begin{pmatrix} c & -s & \\ s & c & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.82)$$

где

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\sqrt{(\alpha_1 - \beta_2)^2 + 4\beta_1^2} + \alpha_1 - \beta_2)^2}{4\beta_1^2} + 1}}, \quad s = \frac{\sqrt{(\alpha_1 - \beta_2)^2 + 4\beta_1^2} + \alpha_1 - \beta_2}{2\beta_1 \sqrt{\frac{(\sqrt{(\alpha_1 - \beta_2)^2 + 4\beta_1^2} + \alpha_1 - \beta_2)^2}{4\beta_1^2} + 1}}. \quad (1.83)$$

Разумно рассмотреть  $\tilde{\mathcal{R}}_2 = \mathcal{O}_{(\beta_1=0)} \mathcal{R}_2 \mathcal{O}_{(\beta_1=0)}^\dagger$ . Такой поворот не меняет матрицу  $\mathcal{R}_1$ , поскольку происходит в секторе совпадающих собственных значений.

Переименовав элементы получаем

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (1.84)$$

$\mathcal{R}$  и  $\tilde{\mathcal{R}}_2$  подчиняются уравнению Янга-Бакстера. Элемент  $YB_{12}$  этого уравнения —

$$\lambda_3 c_1 c_2 = 0. \quad (1.85)$$

Оба возможных решения ( $c_1 = 0$  и  $c_2 = 0$ ) блочно-диагонализуют  $\tilde{\mathcal{R}}_2$ .

### 1.5.3 Метод исследования $\mathcal{R}$ -матриц со случайно совпадающими собственными значениями

Мы изучили ряд  $\mathcal{R}$ -матриц в различных представлениях  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  и отобрали матрицы с совпадающими собственными значениями. Затем мы повернули соответствующие им матрицы Рака и обнаружили, что почти все матрицы, повернутые в секторе случайно совпадающих собственных значений, стали блочно-диагональными, поэтому соответствующие матрицы  $\mathcal{R}_2$  также блочно-диагонализуются. Результаты можно увидеть в таблице 1. Если  $\mathcal{R}$ -матрица имеет совпадающие собственные значения ( $\lambda_i = \lambda_j$ )

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \dots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.86)$$

мы можем повернуть соответствующую матрицу Рака  $\mathcal{U}$  в секторе  $i - j$  с помощью ортогональной матрицы  $\mathcal{O}$ :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \dots & & & & \\ & c & & -s & \\ & & \dots & & \\ & s & & c & \\ & & & & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.87)$$

$$\mathcal{U}' = \mathcal{O}\mathcal{U}\mathcal{O}^T, \quad (1.88)$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 & -s \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ s & 0 & \cdots & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i,i} & u_{i,i+1} & \cdots & u_{i,j-1} & u_{i,j} \\ u_{i+1,i} & u_{i+1,i+1} & \cdots & u_{i+1,j-1} & u_{i+1,j} \\ & & \ddots & & \\ u_{j-1,i} & u_{j-1,i+1} & \cdots & u_{j-1,j-1} & u_{j-1,j} \\ u_{j,i} & u_{j,i+1} & \cdots & u_{j,j-1} & u_{j,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 & s \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -s & 0 & \cdots & 0 & c \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} u'_{i,i} & u'_{i,i+1} & \cdots & u'_{i,j-1} & u'_{i,j} \\ u'_{i+1,i} & u'_{i+1,i+1} & \cdots & u'_{i+1,j-1} & u'_{i+1,j} \\ & & \ddots & & \\ u'_{j-1,i} & u'_{j-1,i+1} & \cdots & u'_{j-1,j-1} & u'_{j-1,j} \\ u'_{j,i} & u'_{j,i+1} & \cdots & u'_{j,j-1} & u'_{j,j} \end{pmatrix}. \quad (1.89)$$

Чтобы сделать  $\mathcal{U}'$  блочно-диагональной, можно определить угол поворота из требования равенства нулю диагональных элементов внутри сектора итоговой матрицы:

$$u'_{i,j} = u'_{j,i} = 0. \quad (1.90)$$

Этот метод работает, только если  $u_{i,j} = u_{j,i}$  в исходной матрице, иначе уравнения не имеют решения. Если  $u_{i,j} \neq u_{j,i}$ , мы можем использовать две разные матрицы вращения:

$$\mathcal{O}_1 = \begin{pmatrix} \cdots & & & & \\ & c_1 & & -s_1 & \\ & & \ddots & & \\ & s_1 & & c_1 & \\ & & & & \cdots \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} \cdots & & & & \\ & c_2 & & -s_2 & \\ & & \ddots & & \\ & s_2 & & c_2 & \\ & & & & \cdots \end{pmatrix}, \quad (1.91)$$

чтобы получить новую матрицу смешивания

$$\mathcal{U}' = \mathcal{O}_1 \mathcal{U} \mathcal{O}_2^T. \quad (1.92)$$

Углы поворота можно найти из того же требования (1.90), что и в предыдущем случае.

### 1.5.4 Вычисления для представления $T = [2, 1]$

Квадрат представления  $[2, 1]$  раскладывается по неприводимым представлениям следующим образом:

$$[2, 1] \otimes [2, 1] = [4, 2] \oplus [4, 1, 1] \oplus [3, 3] \oplus [3, 2, 1] \oplus [3, 2, 1] \oplus [3, 1, 1, 1] \oplus [2, 2, 2] \oplus [2, 2, 1, 1]. \quad (1.93)$$

Представления можно разделить на две группы: относящиеся к симметричному и антисимметричному квадрату. Представления из второй группы подчеркнуты, собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы, которые им соответствуют, отрицательные:

$$\begin{aligned} \lambda_{[4,2]} &= \frac{1}{q^5}, & \lambda_{[4,1,1]} &= -\frac{1}{q^3}, & \lambda_{[3,3]} &= -\frac{1}{q^3}, & \lambda_{[3,2,1]_{\pm}} &= \pm 1, \\ \lambda_{[3,1,1,1]} &= q^3, & \lambda_{[2,2,2]} &= q^3, & \lambda_{[2,2,1,1]} &= -q^5, \end{aligned} \quad (1.94)$$

среди них есть две пары случайно совпадающих собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda_{[4,1,1]} &= \lambda_{[3,3]} = -\frac{1}{q^3}, \\ \lambda_{[3,1,1,1]} &= \lambda_{[2,2,2]} = q^3. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Эти собственные значения входят в блоки  $\mathcal{R}$ -матриц, соответствующие представлениям  $[5, 3, 1]$ ,  $[4, 3, 2]$  и  $[4, 3, 1, 1]$ . Матрицы Рака, соответствующие представлениям  $[5, 3, 1]$  и  $[4, 3, 2]$ , возможно блочно-диагонализировать.

### Представление $Q = [5, 3, 1]$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^{[5,3,1]} &= \text{diag}(q^{\lambda_{[2,2,1,1]}}, q^{\lambda_{[2,2,1,1]}}, -q^{\lambda_{[3,1,1,1]}}, -q^{\lambda_{[2,2,2]}}, -q^{\lambda_{[3,2,1]}}, q^{\lambda_{[3,2,1]}}) = \\ &= \text{diag}(-q^{-5}, -q^{-5}, q^{-3}, q^{-3}, -1, 1). \end{aligned} \quad (1.96)$$

Совпадающие собственные значения  $\lambda_1 = \lambda_2$  и  $\lambda_3 = \lambda_4$ , поэтому мы вращаем  $\mathcal{U}^{[5,3,1]}$  в секторах 1 – 2 и 3 – 4 и получаем, что

$$c_{12}^{[5,3,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{q(1+q^2)(1+q^4)^2}{(1+q^2)(1+(-1+q)q)(1+q+q^2)(2+q^4+q^6)}}, \quad (1.97)$$

$$s_{12}^{[5,3,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(1+(-1+q)q)(1+q+q^2+q^3+q^4)(1+(-1+q)q(1+(-1+q)q)(1+q+q^2))}{(1+q^2)(1+(-1+q)q)(1+q+q^2)(2+q^4+q^6)}},$$

и

$$\boxed{c_{34}^{[5,3,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{34}^{[5,3,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (1.98)$$

После поворотов матрица  $\mathcal{U}^{[5,3,1]}$  становится блочно-диагональной:

$$\mathcal{U}^{[5,3,1]} = \begin{pmatrix} -\frac{q^2(1+q+q^2)}{(1+q^2)y_1} & 0 & x_{13} & 0 & 0 & x_{16} \\ 0 & \frac{q^2(1-q+q^2)}{(1+q^2)y_2} & 0 & x_{24} & x_{25} & 0 \\ x_{13} & 0 & \frac{-1+q-q^2+q^3-q^4}{(1+q^2)(1-q+q^2)} & 0 & 0 & x_{36} \\ 0 & x_{24} & 0 & \frac{y_1}{y_1+q^2} & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & x_{45} & -\frac{q^3}{1+q^2-q^3+q^4+q^6} & 0 \\ x_{16} & 0 & x_{36} & 0 & 0 & -\frac{q^3}{y_1+q^6} \end{pmatrix}, \quad (1.99)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} x_{13} &= \frac{q}{1+q^2} \sqrt{\frac{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6}{1+q^2+q^3+q^4+q^6}}, & x_{24} &= -\frac{q}{1+q^2} \sqrt{\frac{1-q+q^2-q^3+q^4-q^5+q^6}{1+q^2-q^3+q^4+q^6}}, \\ x_{16} &= \frac{(1+q^4) \sqrt{\frac{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6}{1-q+q^2+q^4-q^5+q^6}}}{1+q+q^2+q^3+q^4}, & x_{45} &= \frac{q \sqrt{\frac{1+q^4}{1-q+q^2-q^3+q^4}}}{1+q+q^2}, \\ x_{36} &= \frac{q \sqrt{\frac{1+q^4}{1+q+q^2+q^3+q^4}}}{1-q+q^2}, & x_{25} &= \frac{\sqrt{(1+q^4)(1+q^2-q^3+q^4+q^6)(1-q+q^2-q^3+q^4-q^5+q^6)}}{(1+q+q^2)(1-q+q^2-q^3+q^4)^{3/2}}, \\ x_{52} &= \frac{(1+q^4) \sqrt{\frac{1-q+q^2-q^3+q^4-q^5+q^6}{1+q+q^2+q^4+q^5+q^6}}}{1-q+q^2-q^3+q^4}, \\ y_1 &= 1 + q + q^2 + q^3 + q^4, & y_2 &= 1 - q + q^2 - q^3 + q^4. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Меняя строки и столбцы матрицы (1.99), мы видим, что она имеет блочно-диагональную структуру с блоками  $3 \times 3$ .

### Представление $Q = [4, 3, 2]$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^{[4,3,2]} &= & (1.101) \\ &= \text{diag} (q^{\mathcal{Z}[2,2,1,1]}, -q^{\mathcal{Z}[3,1,1,1]}, -q^{\mathcal{Z}[2,2,2]}, -q^{\mathcal{Z}[3,2,1]}, -q^{\mathcal{Z}[3,2,1]}, q^{\mathcal{Z}[3,2,1]}, q^{\mathcal{Z}[3,2,1]}, q^{\mathcal{Z}[3,3]}) = \\ &= \text{diag} (-q^5, q^3, q^3, -1, -1, 1, 1, -q^{-3}). \end{aligned}$$

Несмотря на то, что у этой  $\mathcal{R}$ -матрицы есть три пары совпадающих собственных значений:  $\lambda_2 = \lambda_3$ ,  $\lambda_4 = \lambda_5$  и  $\lambda_6 = \lambda_7$ , достаточно одного поворота в секторе 2 – 3 со следующими элементами матрицы поворота

$$\boxed{c_{23}^{[4,3,2]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{23}^{[4,3,2]} = -\frac{1}{\sqrt{2}},} \quad (1.102)$$

чтобы блочно-диагонализировать матрицу  $\mathcal{U}^{[4,3,2]}$  и получить

$$\mathcal{U}'^{[4,3,2]} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 0 & x_{17} & x_{18} \\ x_{12} & \frac{2q^2}{(1+q^2)^2} & 0 & x_{24} & 0 & 0 & x_{27} & x_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ x_{14} & x_{24} & 0 & \frac{1+q-3q^2+q^3+q^4}{2(1-q+q^2-q^3+q^4)} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{q^2}{(1+q^2)\sqrt{1+q^4}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ x_{17} & x_{27} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{(-1+q+3q^2+q^3-q^4)^2}}{2(1+q+q^2+q^3+q^4)} & -\frac{q^2}{(1+q^2)\sqrt{1+q^4}} \\ x_{18} & x_{28} & 0 & -\frac{q^2}{(1+q^2)\sqrt{1+q^4}} & 0 & 0 & -\frac{q^2}{(1+q^2)\sqrt{1+q^4}} & \frac{q^4}{(1+q^2)^2(1+q^4)} \end{pmatrix}, \quad (1.103)$$

где

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{q^4(1+q^2+3q^4+q^6+q^8)}{(1+q^2)^2(1+q^2+2q^4+2q^6+2q^8+q^{10}+q^{12})}, & x_{12} &= \sqrt{\frac{2q^6(1+q^4+q^8)}{(1+q^2)^4(1+q^2+2q^4+2q^6+2q^8+q^{10}+q^{12})}}, \\ x_{14} &= \sqrt{\frac{q^2(1-q+q^2)^3(1+q+q^2)(1-q^2+q^4)}{(1+q^2)^2(1+q^4)(1-q+q^2-q^3+q^4)^2}}, & x_{17} &= -\sqrt{\frac{q^2(1-q+q^2)(1+q+q^2)^3(1-q^2+q^4)}{(1+q^2)^2(1+q^4)(1+q+q^2+q^3+q^4)^2}}, \\ x_{24} &= \sqrt{\frac{(q-1)^4(1+q+q^2+q^3+q^4)}{2(1+q^2)^2(1-q+q^2-q^3+q^4)}}, & x_{27} &= -\sqrt{\frac{(1+q)^4(1-q+q^2-q^3+q^4)}{2(1+q^2)^2(1+q+q^2+q^3+q^4)}}, \\ x_{18} &= \sqrt{\frac{(1-q^2+q^4)(1+q^2+q^4)^3}{(1+q^2)^4(1+q^4)^2}}, & x_{28} &= -\frac{\sqrt{2}q\sqrt{\frac{1+q^2+q^4+q^6+q^8}{1+q^4}}}{(1+q^2)^2}. \end{aligned}$$

Меняя строки и столбцы матрицы (1.103), мы видим, что она имеет блочно-диагональную структуру с блоками  $5 \times 5$  и  $3 \times 3$ .

### 1.5.5 Вычисления для представления $T = [3, 1]$

Квадрат представления  $[3, 1]^{\otimes 2}$  раскладывается по неприводимым представлениям

$$[3, 1]^{\otimes 2} = [6, 2] \oplus [6, 1, 1] \oplus [5, 3] \oplus 2[5, 2, 1] \oplus [5, 1, 1, 1] \oplus [4, 4] \oplus \quad (1.104) \\ \oplus 2[4, 3, 1] \oplus [4, 2, 2] \oplus [4, 2, 1, 1] \oplus [3, 3, 2] \oplus [3, 3, 1, 1],$$

которые определяют собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы в представлении  $[3, 1]$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{[6,2]} &= q^{-14}, & \lambda_{[6,1,1]} &= -q^{-12}, & \lambda_{[5,3]} &= -q^{-10}, & \lambda_{[5,2,1]_{\pm}} &= \pm q^{-7}, \\ \lambda_{[5,1,1,1]} &= q^{-4}, & \lambda_{[4,4]} &= q^{-8}, & \lambda_{[4,3,1]_{\pm}} &= \pm q^{-4}, & \lambda_{[4,2,2]} &= q^{-2}, \\ \lambda_{[4,2,1,1]} &= -1, & \lambda_{[3,3,2]} &= -1, & \lambda_{[3,3,1,1]} &= q^2. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Среди них есть случайно совпадающие собственные значения

$$\begin{aligned} \lambda_{[5,1,1,1]} &= \lambda_{[4,3,1]_+} = q^{-4}, \\ \lambda_{[4,2,1,1]} &= \lambda_{[3,3,2]} = -1, \end{aligned} \quad (1.106)$$

которые входят в блоки  $\mathcal{R}$ -матрицы, соответствующие неприводимым представлениям  $[4, 3, 2, 2, 1]$ ,  $[4, 4, 2, 2]$ ,  $[4, 3, 3, 1, 1]$ ,  $[5, 3, 2, 2]$  и  $[4, 4, 3, 1]$ , многие из которых получилось дополнительно блочно-диагонализовать.

#### Представление $Q = [4, 3, 2, 2, 1]$

$$\mathcal{R}_1^{[4,3,2,2,1]} = \text{diag}(q^{\lambda_{[3,3,1,1]}}, -q^{\lambda_{[4,2,1,1]}}, -q^{\lambda_{[3,3,2]}}, q^{\lambda_{[4,2,2]}}) = \text{diag}(q^2, 1, 1, q^{-2}). \quad (1.107)$$

После поворота в секторе 2 – 3 матрицей (1.87) с элементами

$$\boxed{c_{23}^{[4,3,2,2,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{23}^{[4,3,2,2,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (1.108)$$

матрица  $\mathcal{R}_2^{[4,3,2,2,1]}$  становится блочно-диагональной, и

$$\mathcal{U}'^{[4,3,2,2,1]} = \mathcal{O}_{23}^{[4,3,2,2,1]} \mathcal{U}^{[4,3,2,2,1]} (\mathcal{O}_{23}^{[4,3,2,2,1]})^\dagger = \quad (1.109)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{q^2}{(1+q^2)^2} & \frac{(\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4})}{(1+q^2)^2} & 0 & \frac{1+q^2+q^4}{(1+q^2)^2} \\ -\frac{\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4}}{(1+q^2)^2} & \frac{(-1-q^4)}{(1+q^2)^2} & 0 & \frac{\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4}}{(1+q^2)^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1+q^2+q^4}{(1+q^2)^2} & -\frac{(\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4})}{(1+q^2)^2} & 0 & \frac{q^2}{(1+q^2)^2} \end{pmatrix}. \quad (1.110)$$

Матрица  $\mathcal{U}'^{[4,3,2,2,1]}$  разбивается на блоки  $3 \times 3$  и  $1 \times 1$ .

### Представление $Q = [4, 4, 2, 2]$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^{[4,4,2,2]} &= \text{diag}(-q^{\mathcal{Z}[4,2,1,1]}, -q^{\mathcal{Z}[3,3,2]}, q^{\mathcal{Z}[4,2,2]}, q^{\mathcal{Z}[4,3,1]}, -q^{\mathcal{Z}[4,3,1]}) = \\ &= \text{diag}(-1, -1, q^{-2}, q^{-4}, -q^{-4}). \end{aligned} \quad (1.111)$$

Мы можем повернуть матрицу  $\mathcal{U}^{[4,4,2,2]}$  в секторе 1 – 2, соответствующем случайно совпадающим собственным значениям, матрицей (1.87) с элементами

$$\boxed{c_{12}^{[4,4,2,2]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{12}^{[4,4,2,2]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (1.112)$$

и получить

$$\mathcal{U}'_{[4,4,2,2]} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & x_{14} & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & -x_{25} \\ 0 & x_{23} & x_{33} & 0 & x_{23} \\ -x_{14} & 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & x_{25} & x_{23} & 0 & -x_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.113)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{q^2}{1+q^4}, & x_{22} &= -\frac{q^2}{(1+q^2)^2}, & x_{23} &= -\frac{\sqrt{2}q\sqrt{1-q+q^2}\sqrt{1+q+q^2}}{(1+q^2)^2}, \\ x_{25} &= \frac{1+q^2+q^4}{(1+q^2)^2}, & x_{14} &= \frac{\sqrt{1-q+q^2}\sqrt{1+q+q^2}\sqrt{1-q^2+q^4}}{1+q^4}, & x_{33} &= -\frac{1+q^4}{(1+q^2)^2}. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Эта матрица состоит из блоков  $3 \times 3$  и  $2 \times 2$ .



### Представление $Q = [4, 3, 3, 1, 1]$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^{[4,3,3,1,1]} &= \text{diag}(q^{\mathcal{Z}_{[3,3,1,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[3,3,1,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,2,1,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[3,3,2]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}) = \\ &= \text{diag}(q^2, q^2, -1, -1, q^{-4}, -q^{-4}). \end{aligned} \quad (1.115)$$

Мы можем использовать повороты в секторах 1 – 2 и 3 – 4 с элементами

$$\begin{aligned} c_{12}^{[4,3,3,1,1]} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + q^4) \sqrt{\frac{1+q^2+q^4}{1+2q^4+2q^8+q^{12}}}, \\ s_{12}^{[4,3,3,1,1]} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-q^2+q^4+q^8-q^{10}+q^{12}}{1+2q^4+q^6+2q^8+q^{12}}} \end{aligned} \quad (1.116)$$

и

$$\boxed{c_{34}^{[4,3,3,1,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{34}^{[4,3,3,1,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}},} \quad (1.117)$$

чтобы блочно-диагонализировать матрицу

$$\mathcal{U}^{[4,3,3,1,1]} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & x_{14} & 0 & x_{16} \\ 0 & \frac{q^2}{1+q^2+q^4} & -\frac{q}{\sqrt{1+q^2+q^4}} & 0 & \frac{\sqrt{1+q^2+q^4+q^6+q^8}}{1+q^2+q^4} & 0 \\ 0 & \frac{q}{\sqrt{1+q^2+q^4}} & \frac{-1+q^2-q^4}{1+q^4} & 0 & -q \sqrt{\frac{(1+q^2+q^4+q^6+q^8)}{1+q^2+q^4}} & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & \frac{1+q^2+q^4}{(1+q^2)^2} & 0 & q \frac{\sqrt{1+q^2+q^4+q^6+q^8}}{(1+q^2)^2} \\ 0 & \frac{\sqrt{1+q^2+q^4+q^6+q^8}}{1+q^2+q^4} & \frac{q \sqrt{\frac{1+q^2+q^4+q^6+q^8}{1+q^2+q^4}}}{1+q^4} & 0 & \frac{q^4}{1+q^2+2q^4+q^6+q^8} & 0 \\ x_{61} & 0 & 0 & \frac{q \sqrt{\frac{1+q^2+q^4+q^6+q^8}{1+q^2+q^4}}}{(1+q^2)^2} & 0 & -\frac{q^4}{1+q^2+q^6+q^8} \end{pmatrix}, \quad (1.118)$$

где

$$\begin{aligned} x_{11} &= -\frac{q^2+q^6}{1+q^2+q^6+q^8}, \\ x_{41} &= \frac{q+q^9}{(1+q^2)^2 \sqrt{1-q^2+q^4+q^8-q^{10}+q^{12}}}, & x_{61} &= -\frac{\sqrt{(1+q^8)(1+q^2+q^4+q^6+q^8)}}{1+q^2+q^6+q^8}, \\ x_{14} &= -\frac{q(1+q^8)}{(1+q^2)^2 \sqrt{1-q^2+q^4+q^8-q^{10}+q^{12}}}, & x_{16} &= \frac{\sqrt{(1+q^8)(1+q^2+q^4+q^6+q^8)}}{1+q^2+q^6+q^8}. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Матрица  $\mathcal{U}^{[4,3,3,1,1]}$  состоит из двух блоков  $3 \times 3$ .

Представление  $Q = [4, 4, 3, 1]$ 

$$\mathcal{R}_1^{[4,4,3,1]} = \text{diag}(q^{\mathcal{Z}_{[3,3,1,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,2,1,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[3,3,2]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,2,2]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,4]}}) = \text{diag}(q^2, -1, -1, q^{-2}, q^{-4}, q^{-4}, -q^{-4}, -q^{-4}, q^{-8}). \quad (1.120)$$

У матрицы  $\mathcal{R}_1^{[4,4,3,1]}$  есть три пары совпадающих собственных значений:  $\lambda_2 = \lambda_3$  (случайно сопадающие),  $\lambda_5 = \lambda_6$ ,  $\lambda_7 = \lambda_8$ . Мы повернули соответствующую матрицу Рака  $\mathcal{U}^{[4,4,3,1]}$  в секторах 2-3 и 7-8. Мы использовали одну матрицу для поворота в секторе 2 – 3

$$\boxed{c_{23}^{[4,4,3,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{23}^{[4,4,3,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (1.121)$$

и две матрицы (1.91) для поворота в секторе 7 – 8. Матрицы поворота содержат элементы

$$\begin{aligned} c_{1,78}^{[4,4,3,1]} &= \sqrt{\frac{1+q^2+q^4}{2(1+q^4)}}, & s_{1,78}^{[4,4,3,1]} &= -\sqrt{\frac{1-q^2+q^4}{2(1+q^4)}}, \\ c_{2,78}^{[4,4,3,1]} &= 1, & s_{2,78}^{[4,4,3,1]} &= 0. \end{aligned} \quad (1.122)$$

В результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & x_{14} & 0 & x_{16} & x_{17} & 0 & x_{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -x_{13} & 0 & -\frac{2q^2}{(q^2+1)^2} & -x_{34} & 0 & x_{36} & x_{37} & 0 & x_{39} \\ x_{14} & 0 & x_{34} & \frac{q^8+q^6+3q^4+q^2+1}{(q^2+1)^2(q^4+q^2+1)} & 0 & -\frac{q}{\sqrt{q^4+q^2+1}} & -\frac{q(q^4+1)}{(q^2+1)^2\sqrt{q^4+q^2+1}} & 0 & x_{49} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -x_{16} & 0 & x_{36} & \frac{q}{\sqrt{q^4+q^2+1}} & 0 & \frac{-q^4+q^2-1}{2(q^4+q^2+1)} & \frac{1}{2} & 0 & -x_{69} \\ -x_{17} & 0 & x_{27} & \frac{q^5+q}{(q^2+1)^2\sqrt{q^4+q^2+1}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{q^8+3q^6-4q^4+3q^2+1}{2(q^8+q^6+q^2+1)} & 0 & x_{79} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ x_{19} & 0 & -x_{39} & x_{49} & 0 & x_{69} & -x_{79} & 0 & x_{99} \end{pmatrix}, \quad (1.123)$$

где

$$\begin{aligned}
x_{11} &= \frac{q^4((q^2+1)(q^8+2q^4+q^2+1)q^2+1)}{(q^2+1)^2((q^4+1)(q^{10}+q^8+q^6+q^4+2q^2+1)q^2+1)}, & x_{13} &= \frac{\sqrt{2}q^3\sqrt{\frac{q^{12}+q^{10}+q^8+q^6+q^4+q^2+1}{(q^4+1)(q^{10}+q^8+q^6+q^4+2q^2+1)q^2+1}}}{(q^2+1)^2}, \\
x_{14} &= \frac{q^2\sqrt{\frac{q^{12}+q^{10}+q^8+q^6+q^4+q^2+1}{(q^2+1)(q^8+q^6+2q^4+q^2+2)q^2+1}}}{(q^2+1)^2}, & x_{16} &= \frac{q\sqrt{\frac{q^{12}+q^{10}+q^8+q^6+q^4+q^2+1}{q^8+q^6+q^4+q^2+1}}}{q^4+q^2+1}, \\
x_{17} &= \frac{(q^5+q)\sqrt{\frac{q^{12}+q^{10}+q^8+q^6+q^4+q^2+1}{q^8+q^6+q^4+q^2+1}}}{q^8+q^6+q^4+q^2+1}, & x_{19} &= \frac{(q^4+1)\sqrt{\frac{q^{12}+q^{10}+q^8+q^6+q^4+q^2+1}{q^4+q^2+1}}}{q^8+q^6+q^4+q^2+1}, \\
x_{34} &= \frac{\sqrt{2}q\sqrt{q^4-q^2+1}}{(q^2+1)^2}, & x_{36} &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{4q^2}{q^4-q^2+1}+2}}, \\
x_{37} &= -\frac{(q^2-1)^2\sqrt{\frac{2q^2}{q^4-q^2+1}+1}}{\sqrt{2}(q^2+1)^2}, & x_{39} &= \frac{(q^4+1)\sqrt{\frac{q^{12}+q^{10}+q^8+q^6+q^4+q^2+1}{q^4+q^2+1}}}{q^8+q^6+q^4+q^2+1}, \\
x_{49} &= \frac{q^6+q^2}{(q^4+q^2+1)\sqrt{q^8+q^6+q^4+q^2+1}}, & x_{69} &= \frac{q^3}{\sqrt{(q^2+1)(q^8+q^6+2q^4+q^2+2)q^2+1}}, \\
x_{79} &= \frac{q^3}{\sqrt{(q^4+q^2+1)(q^8+q^6+q^4+q^2+1)}}, & x_{99} &= \frac{q^6}{(q^2+1)(q^8+q^6+2q^4+q^2+2)q^2+1}.
\end{aligned} \tag{1.124}$$

Матрица (1.123) состоит из блоков  $3 \times 3$  и  $6 \times 6$ .

### 1.5.6 Вычисления для представления $T = [3, 2]$

$$\begin{aligned}
[3, 2]^{\otimes 2} &= [6, 4] \oplus [6, 3, 1] \oplus [6, 2, 2] \oplus [5, 5] \oplus [5, 4, 1] \oplus [5, 4, 1] \oplus [5, 3, 2] \oplus [5, 3, 2] \oplus [5, 3, 1, 1] \oplus [5, 2, 2, 1] \oplus [4, 4, 2] \oplus [4, 4, 1, 1] \oplus [4, 3, 3] \oplus \\
&\oplus [4, 3, 2, 1] \oplus [4, 3, 2, 1] \oplus [4, 2, 2, 2] \oplus [3, 3, 3, 1] \oplus [3, 3, 2, 2],
\end{aligned} \tag{1.125}$$

где подчеркнуты представления из асимметрического квадрата. Соответствующие  $\mathcal{R}$ -матрицы содержат собственные значения

$$\begin{aligned}
\lambda_{[6,4]} &= q^{-17}, & \lambda_{[6,3,1]} &= -q^{-13}, & \lambda_{[6,2,2]} &= q^{-11}, \\
\lambda_{[5,5]} &= -q^{-15}, & \lambda_{[5,4,1]_{\pm}} &= \pm q^{-10}, & \lambda_{[5,3,2]_{\pm}} &= \pm q^{-7}, \\
\lambda_{[5,3,1,1]} &= q^{-5}, & \lambda_{[5,2,2,1]} &= -q^{-3}, & \lambda_{[4,4,2]} &= q^{-5}, \\
\lambda_{[4,4,1,1]} &= -q^{-3}, & \lambda_{[4,3,3]} &= -q^{-3}, & \lambda_{[4,3,2,1]_{\pm}} &= \pm 1, \\
\lambda_{[4,2,2,2]} &= q^3, & \lambda_{[3,3,3,1]} &= q^3, & \lambda_{[3,3,2,2]} &= -q^5,
\end{aligned} \tag{1.126}$$

среди которых есть случайно совпадающие:

$$\begin{aligned}
\lambda_{[5,3,1,1]} &= \lambda_{[4,4,2]} = q^{-5}, \\
\lambda_{[5,2,2,1]} &= \lambda_{[4,4,1,1]} = \lambda_{[4,3,3]} = -q^{-3}, \\
\lambda_{[4,2,2,2]} &= \lambda_{[3,3,3,1]} = q^3.
\end{aligned} \tag{1.127}$$

Они содержатся в блоках матрицы  $\mathcal{R}_1$ , соответствующих неприводимым представлениям  $[4, 3, 3, 2, 2, 1]$  и  $[6, 4, 2, 1, 1, 1]$ , которые можно дополнительно блочно-диагонализировать.

### Представление $Q = [4, 3, 3, 2, 2, 1]$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^{[4,3,3,2,2,1]} &= \text{diag}(-q^{\mathcal{Z}_{[4,3,2,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,3,2,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,2,2,2]}}, q^{\mathcal{Z}_{[3,3,3,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[3,3,2,2]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[3,3,2,2]}}) = \\ &= \text{diag}(-1, 1, q^3, q^3, -q^5, -q^5). \end{aligned} \quad (1.128)$$

У матрицы  $\mathcal{R}_1^{[4,3,3,2,2,1]}$  есть две пары совпадающих собственных значений:  $\lambda_3 = \lambda_4$  (случайно совпадающие) и  $\lambda_5 = \lambda_6$ . Мы используем две матрицы поворота с элементами

$$\boxed{c_{34}^{[4,3,3,2,2,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{34}^{[4,3,3,2,2,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}},} \quad (1.129)$$

$$\begin{aligned} c_{1,56}^{[4,3,3,2,2,1]} &= \frac{\sqrt{\frac{q(q^2+1)(q^8+1)}{q^{12}+2q^{10}+2q^8+q^6+2q^4+2q^2+1}+1}}{\sqrt{2}}, & s_{1,56}^{[4,3,3,2,2,1]} &= \frac{\sqrt{1-\frac{q(q^2+1)(q^8+1)}{q^{12}+2q^{10}+2q^8+q^6+2q^4+2q^2+1}}}{\sqrt{2}}, \\ c_{2,56}^{[4,3,3,2,2,1]} &= \frac{\sqrt{1-\frac{q(q^2+1)(q^8+1)}{q^{12}+2q^{10}+2q^8+q^6+2q^4+2q^2+1}}}{\sqrt{2}}, & s_{2,56}^{[4,3,3,2,2,1]} &= \frac{\sqrt{\frac{q(q^2+1)(q^8+1)}{q^{12}+2q^{10}+2q^8+q^6+2q^4+2q^2+1}+1}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (1.130)$$

и получаем блочно-диагонализированную матрицу

$$\mathcal{U}'^{[4,3,3,2,2,1]} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & x_{14} & -x_{15} & 0 \\ 0 & -\frac{q^3}{q^6+q^4+q^3+q^2+1} & x_{23} & 0 & 0 & x_{26} \\ 0 & -x_{23} & -x_{33} & 0 & 0 & -x_{36} \\ x_{14} & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & 0 \\ x_{15} & 0 & 0 & -x_{45} & \frac{q^2((q-1)q+1)}{(q^2+1)((q-1)q(q^2+1)+1)} & 0 \\ 0 & -x_{26} & -x_{36} & 0 & 0 & \frac{q^2(q^2+q+1)}{(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)} \end{pmatrix}, \quad (1.131)$$

где

$$\begin{aligned}
x_{11} &= \frac{q^3}{q^6+q^4-q^3+q^2+1}, \\
x_{14} &= \frac{q\sqrt{(q^4+1)((q-1)q(q^2+1)+1)}}{q^6+q^4-q^3+q^2+1}, & x_{15} &= \frac{\sqrt{(q^4+1)((q^2+1)(q^4-q+1)q^2+1)}}{q^6+q^4-q^3+q^2+1}, \\
x_{23} &= \frac{q\sqrt{(q^4+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)}}{q^6+q^4+q^3+q^2+1}, & x_{26} &= \frac{\sqrt{(q^4+1)((q^2+1)(q^4+q+1)q^2+1)}}{q^6+q^4+q^3+q^2+1}, \\
x_{33} &= \frac{q^2}{((q-1)q+1)(q^2+1)} - 1, & x_{36} &= \frac{q\sqrt{(q^4+q^3+q^2+q+1)((q^2+1)(q^4+q+1)q^2+1)}}{(q^6+2q^4+q^3+2q^2+q+2)q^2+1}, \\
x_{44} &= \frac{q^2}{q^4+q^3+2q^2+q+1} - 1, & x_{45} &= \frac{q(- (q-1)q((q-1)q+1)(q^2+q+1)-1)}{(q^2+1)\sqrt{((q-1)q(q^2+1)+1)((q^2+1)(q^4-q+1)q^2+1)}}.
\end{aligned} \tag{1.132}$$

Она состоит из блоков двух блоков  $3 \times 3$ .

### Представление $Q = [6, 4, 2, 1, 1, 1]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1^{[6,4,2,1,1,1]} &= \tag{1.133} \\
&= \text{diag}(q^{\mathcal{Z}_{[5,3,1,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[5,3,1,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[5,2,2,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,4,1,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,3,2,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,3,2,1]}}) = \\
&= \text{diag}(q^{-5}, q^{-5}, -q^{-3}, -q^{-3}, -1, 1).
\end{aligned}$$

Совпадающие собственные значения:  $\lambda_1 = \lambda_2$  и  $\lambda_3 = \lambda_4$  (случайно совпадающие). Сектор 3 – 4 мы вращаем одной матрицей поворота с элементами

$$\boxed{c_{34}^{[6,4,2,1,1,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{34}^{[6,4,2,1,1,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \tag{1.134}$$

В секторе 1 – 2 используем две матрицы поворота, элементы которых приведены в работе [113]. Получаем блочно-диагонализированную матрицу

$$\mathcal{U}'^{[6,4,2,1,1,1]} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & x_{14} & 0 & -x_{16} \\ 0 & -\frac{q^2(q^2+q+1)}{(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)} & x_{23} & 0 & -x_{25} & 0 \\ 0 & x_{23} & x_{33} & 0 & x_{35} & 0 \\ x_{14} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & x_{46} \\ 0 & x_{25} & -x_{35} & 0 & \frac{q^3}{q^6+q^4+q^3+q^2+1} & 0 \\ x_{16} & 0 & 0 & x_{46} & 0 & -\frac{q^3}{q^6+q^4-q^3+q^2+1} \end{pmatrix}, \tag{1.135}$$

где

$$\begin{aligned}
x_{11} &= \frac{q^2(-q^2+q-1)}{(q^2+1)((q-1)q(q^2+1)+1)}, \\
x_{14} &= \frac{q(-(q-1)q((q-1)q+1)(q^2+q+1)-1)}{(q^2+1)\sqrt{((q-1)q(q^2+1)+1)((q^2+1)(q^4-q+1)q^2+1)}}, & x_{16} &= \frac{\sqrt{(q^4+1)((q^2+1)(q^4-q+1)q^2+1)}}{q^6+q^4-q^3+q^2+1}, \\
x_{23} &= -\frac{q(q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)}{(q^2+1)\sqrt{(q^4+q^3+q^2+q+1)((q^2+1)(q^4+q+1)q^2+1)}}, & x_{25} &= \frac{\sqrt{(q^4+1)((q^2+1)(q^4+q+1)q^2+1)}}{q^6+q^4+q^3+q^2+1}, \\
x_{33} &= \frac{q^2}{((q-1)q+1)(q^2+1)} - 1, & x_{35} &= \frac{q\sqrt{(q^4+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)}}{q^6+q^4+q^3+q^2+1}, \\
x_{44} &= 1 - \frac{q^2}{q^4+q^3+2q^2+q+1}, & x_{46} &= -\frac{q\sqrt{(q^4+1)((q-1)q(q^2+1)+1)}}{q^6+q^4-q^3+q^2+1}.
\end{aligned} \tag{1.136}$$

Матрица  $\mathcal{U}'_{[6,4,2,1,1,1]}$  состоит из двух блоков  $3 \times 3$ .

### 1.5.7 Вычисления для представления $T = [4, 1]$

Квадрат представления раскладывается по неприводимым следующим образом:

$$\begin{aligned}
[4, 1]^{\otimes 2} &= [8, 2] \oplus [8, 1, 1] \oplus [7, 3] \oplus [7, 2, 1] \oplus [7, 2, 1] \oplus [7, 1, 1, 1] \oplus [6, 4] \oplus \\
&\oplus [6, 3, 1] \oplus [6, 3, 1] \oplus [6, 2, 2] \oplus [6, 2, 1, 1] \oplus [5, 5] \oplus [5, 4, 1] \oplus \\
&\oplus [5, 4, 1] \oplus [5, 3, 2] \oplus [5, 3, 1, 1] \oplus [4, 4, 2] \oplus [4, 4, 1, 1].
\end{aligned} \tag{1.137}$$

Собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы:

$$\begin{aligned}
\lambda_{[8,2]} &= q^{-27}, & \lambda_{[8,1,1]} &= -q^{-25}, & \lambda_{[7,3]} &= -q^{-21}, \\
\lambda_{[7,2,1]_{\pm}} &= \pm q^{-18}, & \lambda_{[7,1,1,1]} &= q^{-15}, & \lambda_{[6,4]} &= q^{-17}, \\
\lambda_{[6,3,1]_{\pm}} &= \pm q^{-13}, & \lambda_{[6,2,2]} &= q^{-11}, & \lambda_{[6,2,1,1]} &= -q^{-9}, \\
\lambda_{[5,5]} &= -q^{-15}, & \lambda_{[5,4,1]_{\pm}} &= \pm q^{-10}, & \lambda_{[5,3,2]} &= -q^{-7}, \\
\lambda_{[5,3,1,1]} &= q^{-5}, & \lambda_{[4,4,2]} &= q^{-5}, & \lambda_{[4,4,1,1]} &= -q^{-3},
\end{aligned} \tag{1.138}$$

среди которых есть только одна пара случайно совпадающих

$$\lambda_{[5,3,1,1]} = \lambda_{[4,4,2]} = q^{-5}. \tag{1.139}$$

Эти собственные значения содержатся в блоках  $\mathcal{R}$ -матрицы, соответствующей представлениям  $[5, 4, 3, 2, 1]$ ,  $[5, 5, 3, 2]$ ,  $[5, 4, 4, 1, 1]$  и  $[6, 4, 2, 2, 1]$ . Соответствующие им матрицы Рака получилось диагонализировать для первых трех представлений, детали вычисления приведены в работе [113].

### 1.5.8 Вычисления для представления $T = [4, 2]$

$$\begin{aligned}
[4, 2]^{\otimes 2} = & [8, 4] \oplus [8, 3, 1] \oplus [8, 2, 2] \oplus [7, 5] \oplus [7, 4, 1] \oplus [7, 4, 1] \oplus [7, 3, 2] \oplus \quad (1.140) \\
& \oplus [7, 3, 2] \oplus [7, 3, 1, 1] \oplus [7, 2, 2, 1] \oplus [6, 6] \oplus [6, 5, 1] \oplus [6, 5, 1] \oplus \\
& \oplus [6, 4, 2] \oplus 2[6, 4, 2] \oplus [6, 4, 1, 1] \oplus [6, 3, 3] \oplus [6, 3, 2, 1] \oplus [6, 3, 2, 1] \oplus \\
& \oplus [6, 2, 2, 2] \oplus [5, 5, 2] \oplus [5, 5, 1, 1] \oplus [5, 4, 3] \oplus [5, 4, 3] \oplus [5, 4, 2, 1] \oplus \\
& \oplus [5, 4, 2, 1] \oplus [5, 3, 3, 1] \oplus [5, 3, 2, 2] \oplus [4, 4, 4] \oplus [4, 4, 3, 1] \oplus [4, 4, 2, 2].
\end{aligned}$$

Собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы:

$$\begin{aligned}
\lambda_{[8,4]} &= q^{-30}, & \lambda_{[8,3,1]} &= -q^{-26}, & \lambda_{[8,2,2]} &= q^{-24}, & \lambda_{[7,5]} &= -q^{-26}, \\
\lambda_{[7,4,1]_{\pm}} &= \pm q^{-21}, & \lambda_{[7,3,2]_{\pm}} &= \pm q^{-18}, & \lambda_{[7,3,1,1]} &= q^{-16}, & \lambda_{[7,2,2,1]} &= -q^{-14}, \\
\lambda_{[6,6]} &= q^{-24}, & \lambda_{[6,5,1]_{\pm}} &= \pm q^{-18}, & \lambda_{[6,4,2]_{\pm}} &= \pm q^{-14}, & \lambda_{[6,4,1,1]} &= -q^{-12}, \\
\lambda_{[6,3,3]} &= -q^{-12}, & \lambda_{[6,3,2,1]_{\pm}} &= \pm q^{-9}, & \lambda_{[6,2,2,2]} &= q^{-6}, & \lambda_{[5,5,2]} &= -q^{-12}, \\
\lambda_{[5,5,1,1]} &= q^{-10}, & \lambda_{[5,4,3]_{\pm}} &= \pm q^{-9}, & \lambda_{[5,4,2,1]_{\pm}} &= \pm q^{-6}, & \lambda_{[5,3,3,1]} &= q^{-4}, \\
\lambda_{[5,3,3,2]} &= -q^{-2}, & \lambda_{[4,4,4]} &= q^{-6}, & \lambda_{[4,4,3,1]} &= -q^{-2}, & \lambda_{[4,4,2,2]} &= 1.
\end{aligned} \tag{1.141}$$

В этом случае появляется много пар случайно совпадающих собственных значений,

$$\begin{aligned}
\lambda_{[8,3,1]} &= \lambda_{[7,5]} = -q^{-26}, & \lambda_{[8,2,2]} &= \lambda_{[6,6]} = q^{-24}, \\
\lambda_{[7,3,2]_{\pm}} &= \lambda_{[6,5,1]_{\pm}} = \pm q^{-18}, & \lambda_{[7,2,2,1]} &= \lambda_{[6,4,2]_{-}} = -q^{-14}, \\
\lambda_{[6,4,1,1]} &= \lambda_{[6,3,3]} = \lambda_{[5,5,2]} = -q^{-12}, & \lambda_{[6,3,2,1]_{\pm}} &= \lambda_{[5,4,3]_{\pm}} = \pm q^{-9}, \\
\lambda_{[6,2,2,2]} &= \lambda_{[5,4,2,1]_{+}} = \lambda_{[4,4,4]} = q^{-6}, & \lambda_{[5,3,2,2]} &= \lambda_{[4,4,3,1]} = -q^{-2}.
\end{aligned} \tag{1.142}$$

Однако, они появляются парами только в блоках  $\mathcal{R}$ -матрицы, соответствующим представлениям  $[5, 4, 3, 3, 2, 1]$ ,  $[5, 5, 3, 3, 1, 1]$ ,  $[5, 4, 4, 2, 2, 1]$ ,  $[11, 6, 1]$ . Все матрицы Рака, которые им соответствуют, получилось блочно-диагонализовать [113].

## 1.6 Выводы

В эту главу вошло исследование [113]  $\mathcal{R}$ -матриц со случайно совпадающими собственными значениями и соответствующих матриц Рака в представле-

ниях  $Q$  из разложения тензорных кубов представлений  $[2, 1]$ ,  $[3, 1]$ ,  $[3, 2]$ ,  $[4, 1]$  и  $[4, 2]$  квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$ . Рассмотренные представления  $Q$ , матрицы Рака (1.66) которых исследовались, перечислены в таблице 1, там же содержится информация о собственных значениях соответствующих блоков  $\mathcal{R}$ -матриц и результат: получилось ли их блочно-диагонализировать поворотами в секторах совпадающих собственных значений. На основе этих результатов были сформулированы две гипотезы (см. раздел 1.5.2). Первая из них накладывает ограничения на число совпадающих собственных значений каждого типа, вторая — определяет преобразование в секторе матрицы Рака, соответствующее случаю случайно совпадающим собственным значениям. Детали поворотов каждой матрицы, которую получилось блочно-диагонализировать, приведены в разделах 1.5.4, 1.5.5, 1.5.6, 1.5.7 и 1.5.8.



## Глава 2. Дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ

В этой главе мы обсуждаем свойство полиномов ХОМФЛИ-ПТ, которое называют дифференциальным разложением. Для исследования дифференциального разложения активно используются явные выражения полиномов ХОМФЛИ-ПТ, которые получены разными методами, в том числе и методом с эксклюзивными матрицами Рака, который мы обсуждаем в этой главе (см. раздел 2.1.2). Этот метод применяется к классу древовидных узлов, обзор которых содержится в разделе 2.1.1.

Дифференциальное разложение зависит от характеристики узла, которую называют дефектом (см. раздел 2.4). Большинство результатов, которые связаны с построением дифференциального разложения, получены для узлов с нулевым дефектом. В этой главе мы обсуждаем метод получения коэффициентов разложения для узлов с дефектом один, который использует метод эволюции и метод  $U$ -матрицы.

Широким классом узлов с дефектом два являются узлы-мутанты (см. раздел 2.9). Эти узлы особенно интересны тем, что их полиномы ХОМФЛИ-ПТ совпадают во всех симметрических и антисимметрических представлениях и начинают различаться только представлениями, тензорные квадраты которых содержат кратности, например,  $[2, 1]$ ,  $[3, 1]$ . Мы используем разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов с 11 пересечениями в представлениях  $[2, 1]$  и  $[3, 1]$  для исследования дифференциального разложения узлов с дефектом два в разделе 2.13.

В разделе 2.12.1 мы также обсуждаем класс узлов-мутантов, предложенный Муртоном [30], который начинает различаться только представлением  $[4, 2]$ .

### 2.1 Модификация метода Решетихина-Тураева для древовидных узлов. Эксклюзивные матрицы Рака

В разделе 1.4 мы познакомились с модификацией метода Решетихина-Тураева для узлов, представленных трехнитевыми косами. Однако, можно

рассмотреть другой широкий класс узлов, который называют древовидными. Метод, который мы рассмотрим в этом разделе, тесно связан с конформными блоками в двумерной конформной теории поля и черпает из нее много идей [73]. Он основан на использовании  $\mathcal{R}$ -матриц и матриц Рака, которые называют эксклюзивными, и позволяет вычислять полиномы ХОМФЛИ-ПТ для любых древовидных узлов [70—72]. Мы кратко обсудим различные семейства узлов, которые относят к классу древовидных [90], а затем опишем основные отличия этого метода от метода вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ для узлов, представленных трехнитевыми косами (разд. 1.4).

### 2.1.1 Древовидные узлы и их подвиды

В данной диссертации и во многих работах, которые исследуют полиномы узлов, рассматривают семейства узлов. В этом разделе мы обсудим семейства узлов, которые относятся к широкому классу древовидных узлов, в ссылках приведем примеры работ, в которых используются данные узлы.

Метод эволюции [93—95] удобно применять к простым семействам узлов, состоящим из одной или нескольких двухнитевых кос. Из таких семейств выделим узлы в виде двухнитевых кос [93; 95; 96], твистованные узлы [94; 97—99] и узлы двойных кос [93; 100] (см. рис. 2.1).

Торические узлы, которые мы обсуждали в разделе 1.4.1 можно обобщить и рассматривать узлы, которые можно поместить без пересечений на поверхности произвольного рода. Такие узлы называют крендельными [157; 158]. На рис. 2.2 представлены крендельные узлы, помещенные на поверхности рода два и три.

Вычисление полиномов ХОМФЛИ-ПТ классическим методом (см. раздел 1.2) существенно упрощается для крендельных узлов. Именно для них мы смогли получить полиномы ХОМФЛИ-ПТ для алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  узлов-мутантов с 11 пересечениями в представлении [3, 1], которые мы обсуждаем в разделе 2.11. Мы также обсуждаем дифференциальное разложение крендельного узла  $9_{46}$  в разделе 2.6.

Для сокращенной записи крендельных узлов используют наборы чисел  $(n_1, n_2, \dots)$ , которые означают число пересечений в каждой двухнитевой косе.

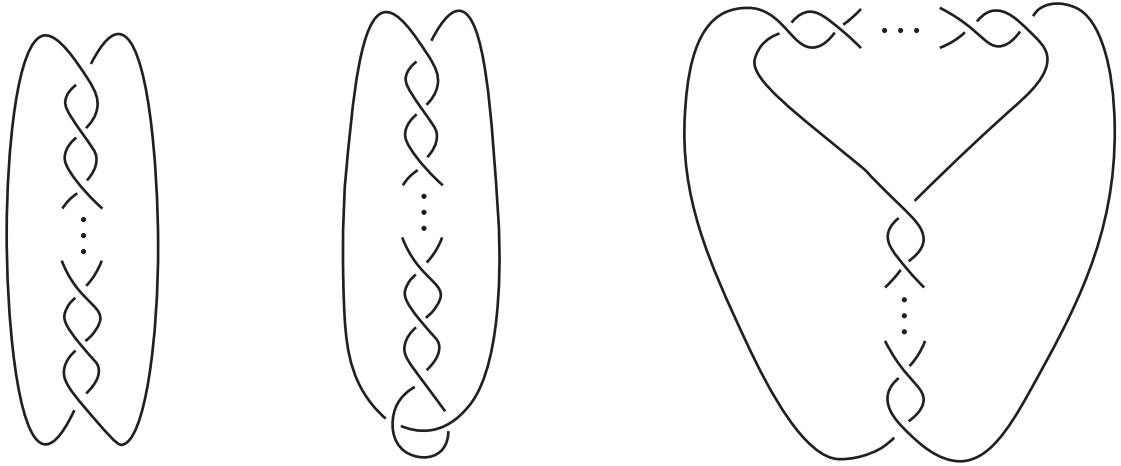


Рисунок 2.1 — Простейшие семейства узлов: торические узлы  $T[2, n]$  (узлы в виде двухнитевых кос), твистованные узлы и узлы двойных кос

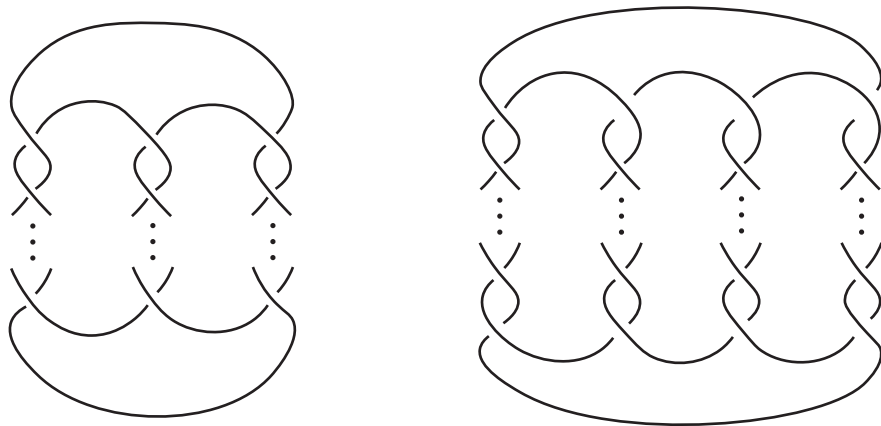


Рисунок 2.2 — Крендельные узлы

Отрицательные числа в такой записи означают обратные пересечения, также иногда чертой сверху ( $\bar{n}_1, n_2, \dots$ ) показывают, что в косе нити направлены в противоположных направлениях, а не сонаправлены.

Двухмостовые узлы [159] — класс узлов, которые можно выложить на плоскость без пересечений, за исключением двух нитей, которые “мостами” соединяют разные части узла. Двухмостовые узлы представляются в виде четырехнитевой косы, которая замыкается плетенкой (см. рис. 2.3). Их также называют рациональными узлами.

Двухмостовые узлы являются строительными блоками для всего класса древовидных узлов: беря за основу незамкнутые или частично замкнутые четы-

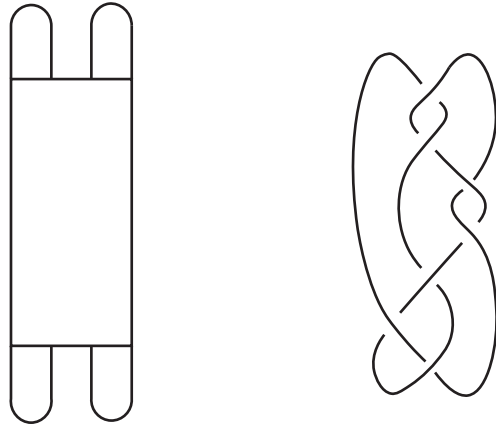


Рисунок 2.3 — Замыкание косы двухмостового узла и двухмостовой узел  $7_6$

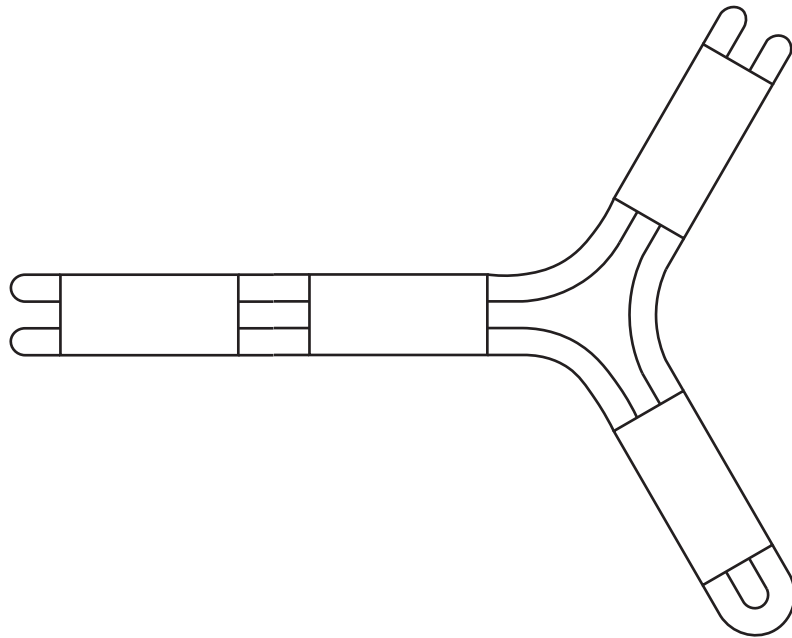


Рисунок 2.4 — Пример схемы диаграммы древесного узла. Строительными блоками таких узлов являются четырехнитевые косы.

рехнитевые косы можно строить древесные диаграммы (например, см. рис. 2.4), которыми представляется весь класс древовидных узлов. Эти узлы замечательны тем, что полиномы ХОМФЛИ-ПТ для них можно вычислять модификацией метода Решетихина-Тураева, которая основывается на использовании эксклюзивных матриц Рака и которую мы обсуждаем в следующем разделе.

### 2.1.2 Метод вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ для двухмостовых и древовидных узлов

Двухмостовые узлы можно представить как косу из четырех нитей, которые замкнуты плетенкой. В отличие от попарного соединения нитей косы сверху и снизу, которое мы обсуждали в разделе 1.4, в этом случае направления нитей в косе не определены, и могут быть разными (прямым и противоположным). С точки зрения пространства косы, прямому направлению нити соответствует представление  $T$ , а противоположному — сопряженное представление  $\bar{T}$ . Сопряженное представление определяется следующим свойством:

$$T \otimes \bar{T} = \emptyset \oplus \dots \quad (2.1)$$

Сопряженное представление  $\bar{T}$  алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  соответствует диаграмме Юнга, которая дополняет диаграмму Юнга представления  $T$  до прямоугольника из  $N$  строк.

Разложение тензорного произведения  $T$  и  $\bar{T}$  на неприводимые представления всегда включает в себя среди прочих представлений тривиальное представление. Замыкание косы в вычислении означает, что из произведения четырех представлений берется только тривиальное представление  $\emptyset$ . То есть представление, которое следует выбрать из произведения первых трех представлений, определяется четвертым представлением. Другими словами, это означает, что на самом деле мы имеем тот же случай с тремя нитями, что и в разделе 1.4, но с коэффициентами Рака следующего вида:

$$\begin{aligned} S : & \quad ((T \otimes T) \otimes \bar{T} \rightarrow T) \longrightarrow (T \otimes (T \otimes \bar{T}) \rightarrow T), \\ S^\dagger : & \quad ((\bar{T} \otimes T) \otimes T \rightarrow T) \longrightarrow (\bar{T} \otimes (T \otimes T) \rightarrow T), \\ \bar{S} : & \quad ((T \otimes \bar{T}) \otimes T \rightarrow T) \longrightarrow (T \otimes (\bar{T} \otimes T) \rightarrow T). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Все остальные необходимые в этом случае коэффициенты Рака можно найти путем сопряжения всех представлений, что не меняет саму матрицу. Эти матрицы Рака называют эксклюзивными матрицами, они удовлетворяют условию

$$SS^\dagger = I, \quad \bar{S}\bar{S} = I. \quad (2.3)$$

Столбцы и строки в матрицах Рака и  $\mathcal{R}$  соответствуют представлению из тензорного произведения двух представлений. Замыкание нитей с одной стороны косы соответствует выбору тривиального представления среди них. Вся

коса соответствует матрице  $B_{XY}$ , которая является произведением матриц Рака и  $\mathcal{R}$ -матриц в базисе их собственных значений), как это происходит при построении косы в разделе 1.4.  $X$  и  $Y$  перечисляют представления в произведении  $T \otimes \bar{T}$ . Тогда сам полином соответствует матричному элементу матрицы  $B_{\emptyset\emptyset}$ .

Далее можно перейти к строительству древовидных узлов. Если один из концов четырехнитевой косы открыт, то она соответствует оператору  $B_{X\emptyset}$ . Свертки таких операторов позволяют строить новые узлы путем соединения открытых диаграмм нитями, а полиномы ХОМФЛИ-ПТ таких узлов определяются операторами, соответствующими строительным блокам,

$$\mathcal{H} = \sum_{X \in T \otimes \bar{T}} \prod_i^3 B_{X\emptyset}^{(i)}. \quad (2.4)$$

При этом мы также можем использовать диаграммы, оба конца которых открыты, соединять их друг с другом и получать еще более сложные структуры, которые являются диаграммами древовидных узлов. Важная особенность таких диаграмм заключается в том, что они не могут содержать петель, потому что по петлям будут бежать уже все неприводимые представления, а не только тривиальное.

Это очень мощный метод [32; 70–73], который тоже опирается на знание матриц Рака для представлений, соответствующих нитям. Эксклюзивные матрицы Рака известны для симметрических представлений, а также для представления  $[2, 1]$  [73]. В работах [72; 160] этот метод использовался для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлении  $[2, 1]$ , результаты мы кратко обсудим в разделе 2.10.

## 2.2 Основные вопросы дифференциального разложения

Дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ — это гипотеза [93; 102; 103] о том, что в полиноме можно разделить зависимость от узла  $\mathcal{K}$  и от представления  $R$ :

$$H_R^{\mathcal{K}}(q, A) = 1 + \sum_{Q \in M_R} Z_R^Q(q, A) \cdot F_Q^{\mathcal{K}}(q, A). \quad (2.5)$$

Более того, независимые от узлов  $Z$ -факторы на самом деле состоят из произведений квантовых чисел и “дифференциалов” [161]  $D_n := \{Aq^n\} = [N + n] \cdot \{q\}$ , где  $\{x\} := x - x^{-1}$  и квантовые числа  $[n] := \frac{\{q^n\}}{\{q\}}$ . Это утверждение является теоремой теории представлений для симметрических и антисимметрических  $R$  [104]. Однако простых аргументов [104] недостаточно для более сложных представлений  $R$ , которые состоят из более чем одной строки или столбца, поэтому существование разложения (2.5) в общем случае до сих пор остается под вопросом.

Изучение дифференциального разложения предполагает исследование следующих вопросов.

Первая задача заключается в выборе области суммирования  $M_R$  в (2.5). В случае симметрических и антисимметрических представлений  $R$  она состоит из всех поддиаграмм Юнга  $R$  (диаграммы, которые получаются из исходной удалением одной или нескольких ячеек так, что диаграмма в результате тоже является диаграммой Юнга). Вопрос в том, что происходит для произвольного  $R$ . На данный момент лучше всего понятен случай твистованных узлов, где наивно  $M_R^{\text{twist}} = R \otimes \bar{R}$ , т.е.  $M_R$  является комбинацией составных представлений (см. определение 1.55). Существует гипотеза [162], заключающаяся в том, что предполагаемая универсальность (2.5) подразумевает, что  $M_R$  одинакова для всех остальных узлов. Это подтверждается тем, что для всех прямоугольных представлений  $R$  произведение  $R \otimes \bar{R}$  состоит только из диагональных составных представлений и фактически эквивалентна множеству поддиаграмм.

Известные формулы дифференциального разложения для прямоугольных представлений [97] получены для твистованных узлов и узлов двойных кос. Мы приводим пример и приводим коэффициенты  $F$  для трехмостового узла  $9_{46}$  с нулевым дефектом.

Вторая задача — вычисление коэффициентов  $F$  из (2.5) для конкретных узлов. Известно из [105], что даже для (анти)симметрических представлений коэффициенты  $F$  содержат полюса в знаменателях в случае узлов с ненулевыми дефектами. Также нам неизвестны полиномы ХОМФЛИИ-ПТ для сумм недиагональных составных представлений, которые входят в “пространство модулей”  $M_R$  в случае непрямоугольных представлений  $R$ . Это делает поиск  $F$  очень сложной задачей. В нашей работе мы применяем очень мощный подход — использование “семейств” узлов для нахождения  $F$ . Вместе с  $U$ -матричным подходом они позволили выразить коэффициенты  $F$  через коэффициенты  $F_{Tw}$

твистованных узлов, а также найти новую универсальную треугольную матрицу  $V$ .

Третья задача — поиск  $Z$ -факторов. Нам известны  $Z$ -факторы для (анти)симметрических [104], прямоугольных представлений [97] и представлений, соответствующих диаграмме Юнга  $[r, 1]$  [163]. Поиск  $Z$ -факторов для более общих типов представлений, а также для узлов с ненулевым дефектом является актуальной задачей.

### 2.3 Дифференциальное разложение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ в симметрических представлениях

Для симметрических представлений  $R = [r]$  область суммирования  $M_{[r]}$  состоит только из симметрических представлений  $[i]$  с  $i \leq R$ , и, что примечательно, в этом случае произведение  $[r] \otimes \overline{[r]}$  состоит только из композитных представлений  $([i], [i])$ :

$$M_{[r]} = [r] \otimes \overline{[r]} = \bigoplus_{i=0}^r ([i], [i]) \cong \bigoplus_{i=0}^r [i] \quad (2.6)$$

и

$$H_{[r]}^{\mathcal{K}} = 1 + \sum_{i=1}^r Z_{[r]}^{[i]} \cdot F_{[i]}^{\mathcal{K}} \quad (2.7)$$

со следующими коэффициентами:

$$Z_{[r]}^{[i]}(q, A) := \prod_{j=0}^{i-1} \frac{[r-j]}{[j+1]} \{Aq^{r+j}\} \{Aq^{j-1}\} \quad \text{и} \quad F_{[i]}^{\mathcal{K}}(q, A) = \frac{G_{[i]}^{\mathcal{K}}(q, A)}{\prod_{j=1}^{i-1} \{Aq^{j-1}\}}. \quad (2.8)$$

Для симметричных представлений  $R = [r]$  имеется ровно один новый коэффициент  $F_{[r]}^{\mathcal{K}}$  для каждого нового  $r$ , таким образом, для каждого узла они могут быть рекурсивно извлечены из выражение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ  $H_{[r]}^{\mathcal{K}}$  в симметрических представлениях.

Дифференциальное разложение (2.7) является прямым следствием теории представлений, а именно эквивалентности антисимметрических представлений для алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ :

$$H_{[1^k]}^{\mathcal{K}}(q, A = q^N) = H_{[1^{N-k}]}^{\mathcal{K}}(q, A = q^N). \quad (2.9)$$



Связь с симметрическими представлениями обеспечивается равенством:

$$H_R(A, q^{-1}) = H_{R^\vee}(A, q), \quad (2.10)$$

где  $R^\vee$  обозначает транспонированную диаграмму Юнга  $R$ . Одновременная инверсия  $A$  и  $q$  превращает узел в его зеркальное отражение. К (2.10) следует добавить тривиальность всех симметрических характеров для случая  $U_1$ , т.е. для  $A = q$ :

$$H_{[r]}^{\mathcal{K}}(q, A = q) = 1 \implies H_{[r]}^{\mathcal{K}} - 1 \sim \{A/q\} \implies H_{[1^r]}^{\mathcal{K}} - 1 \sim \{Aq\}. \quad (2.11)$$

Поскольку мы имеем дело с нормированными полиномами ХОМФЛИ-ПТ, полиномы, соответствующие антисимметрическим представлениям, не обязательно должны быть равны единице при  $A = q$ , потому что в них входит деление на размерность, которое обращается в ноль при  $A = q$  и  $R \neq [r]$ .

### 2.3.1 Вывод формулы дифференциального разложения для симметрических представлений

Для представления  $R = [1]$  имеем  $H_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A = q) = 1$ , откуда получаем

$$H_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A) - 1 \div \{A/q\}. \quad (2.12)$$

Так как диаграмма  $[1]$  симметрична, из уравнения (2.10) следует инвариантность  $H_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A)$  относительно замены  $q \longrightarrow q^{-1}$ , поэтому

$$H_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A) = 1 + \{Aq\}\{A/q\} \cdot F_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A) \quad (2.13)$$

с некоторым полиномом Лорана  $F_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A) = F_{[1]}^{\mathcal{K}}(q^{-1}, A)$ .

Идея дифференциального разложения [102] пришла из свойства так называемых “специальных” полиномов — полиномов ХОМФЛИ-ПТ, в точке  $q = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q = 1, A) &= \left( \mathcal{H}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q = 1, A) \right)^{|R|} = \\ &= \left( 1 + \{A\}^2 \cdot F_{[1]}^{\mathcal{K}}(q = 1, A) \right)^{|R|} = \sum_{I=0}^{|R|} \frac{|R|!}{I! (|R|-I)!} \cdot F_{\mathcal{K}}^I \cdot \{A\}^{2I}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

что является биномиальным разложением степени  $|R|$  по четным степеням  $\{A\}$ . Построение дифференциального разложения — это задача о “квантовании” этого свойства при  $q \neq 1$ . Для краткости мы заменили  $F_{\mathcal{K}}(A) := F_{[1]}^{\mathcal{K}}(q = 1, A)$ .

Далее, для  $R = [2]$  и  $R = [2]^{\vee} = [1, 1]$  имеем два интересных соотношения, для  $N = 2$  и  $N = 3$ :

$$H_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(q, A = q^2) = 1 \implies H_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(q, A) - 1 : \{Aq\}\{A/q^2\}, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} H_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(q, A = q^3) &= H_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A = q^3) = 1 + F_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A = q^3)\{q^4\}\{q^2\} \implies \\ \implies H_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(q, A) - 1 - F_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A = q^3)\{q^4\}\{q^2\} &: \{A/q^3\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Вместе они означают, что

$$\begin{aligned} H_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(q, A) &= 1 + \tilde{G}_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(q, A)\{Aq\}\{A/q^2\} = \\ &= 1 + [2]F_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A)\{Aq\}\{A/q^2\} + G_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(q, A)\{Aq\}\{A/q^2\}\{A/q^3\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

для некоторого многочлена Лорана  $G_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(q, A)$ . Из симметрии транспонирования получаем, что

$$H_{[2]}^{\mathcal{K}}(q, A) = 1 + [2]F_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A)\{Aq^2\}\{A/q\} + G_{[2]}^{\mathcal{K}}(q, A)\{Aq^3\}\{Aq^2\}\{A/q\}, \quad (2.18)$$

где  $G_{[2]}^{\mathcal{K}}(q, A) = G_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(q^{-1}, A)$ .

Аналогично можно получить, что

$$H_{[r]}^{\mathcal{K}} - H_{[r']}^{\mathcal{K}} \sim \{Aq^{r+r'}\}\{A/q\}, \quad (2.19)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} H_{[r]}^{\mathcal{K}}(q, A) &= \\ &= 1 + [r]F_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A)\{Aq^r\}\{A/q\} + \sum_{i=2}^r G_{[i]}^{\mathcal{K}}(q, A) \cdot \{A/q\} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{[r-j]}{[j+1]}\{Aq^{r+j}\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

для набора полиномов Лорана  $G_{[i]}^{\mathcal{K}}(q, A) = G_{[1^i]}^{\mathcal{K}}(q^{-1}, A)$ . Чтобы доказать это, следует использовать тождества типа  $[r]D_r - [r']D_{r'} = [r-r']D_{r+r'}$ . Обратите внимание, что  $G_{[i]}^{\mathcal{K}}(q = 1, A)$  должен обращаться в ноль при  $i \geq 2$  согласно (2.14), так как степень дифференциалов  $i + 1 < 2i$ , отсюда на самом деле следует, что  $G_{[i]}^{\mathcal{K}}(q, A = q^N) \sim \{q\}^{i-1}$ , когда  $q$  стремится к 1.

## 2.4 Зависимость дифференциального разложения от дефекта узла

Согласно приведенному выше определению (2.8), коэффициенты  $F_{[i]}$  дифференциального разложения не являются полиномами Лорана, только  $G_{[i]}$  должны быть таковыми, что было показано с использованием аргументов теории представлений. Однако существует множество узлов, для которых  $F_{[i]}$  являются полиномами Лорана. Этот набор характеризуется обращением в ноль своеобразного квантового числа — дефекта:  $\delta^{\mathcal{K}} = 0$ . Для таких полиномов ХОМФЛИ-ПТ  $F_{[1]}(A)$  не зависит от  $q$ , и поэтому их фундаментальные полиномы Александра равны:

$$\mathcal{A}_{[1]}^{\mathcal{K}(0)} = 1 + \text{const}^{\mathcal{K}} \cdot \{q\}^2, \quad (2.21)$$

т.е. являются многочленами Лорана первой степени от  $q^{\pm 2}$  (постоянный коэффициент зависит от  $\mathcal{K}$ ). Оказывается, что для любого узла  $\mathcal{K}$  степень его полинома Александра  $\deg(\mathcal{A}_{[1]}^{\mathcal{K}}) = 1 + \delta^{\mathcal{K}}$  определяет делимость  $G_{[i]}$  по следующему правилу [105]:

$$G_{[i]}^{\mathcal{K}}(q, A) = F_{[i]}^{\mathcal{K}}(q, A) \cdot \prod_{j=1}^{\text{entier}\left(\frac{i-1}{1+\delta^{\mathcal{K}}}\right)} \{Aq^{j-1}\}. \quad (2.22)$$

Для узлов с дефектом  $\delta^{\mathcal{K}} = -1$  полином Александра равен единице, т.е.  $F_{[1]}^{\mathcal{K}^{-1}} = 0$ , но все остальные  $F_{[i]}$  — полиномы, как и для узлов с дефектом 0.

Узлы с нулевым дефектом встречаются относительно редко, наиболее важные серии состоят из твистованных узлов и узлов двойных кос. Первый пример за пределами этой серии — узел-претцель  $9_{46}$ , который мы рассмотрим ниже.

## 2.5 Дифференциальное разложение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ в прямоугольных представлениях

Симметрии полиномов ХОМФЛИ-ПТ в симметрических представлениях  $H_{[r]}^{\mathcal{K}}$  достаточно, чтобы получить все  $F_{[r]}^{\mathcal{K}}$  путем рекурсивного использования (2.7) с известным  $Z_{[i]}^{[r]}$ . Случай прямоугольных представлений  $R = [r^s]$ , соответствующих диаграммам Юнга из  $r$  столбцов и  $s$  строк, более сложен. Область

суммирования  $M_{[r^s]}$  состоит из всех поддиаграмм Юнга  $\lambda \in [r^s]$ , которые не обязательно должны быть прямоугольными:

$$M_{[r^s]} = [r^s] \otimes \overline{[r^s]} = \sum_{\lambda \in [r^s]} (\lambda, \lambda) \quad \text{и} \quad H_{[r^s]} = \sum_{\lambda \in [r^s]} Z_{[r^s]}^\lambda \cdot F_\lambda. \quad (2.23)$$

Кроме того, аргументов теории представлений уже недостаточно, чтобы построить дифференциальное разложение. Однако, исследование [97] полиномов семейств твистованных узлов и узлов двойных кос позволило найти  $Z$ -факторы для всех представлений  $\lambda \in [r^s]$ . Они имеют простую форму:

$$Z_{[r^s]}^\lambda = d_{\lambda^\vee}(r) d_\lambda(s) \prod_{\square \in \lambda} \left\{ Aq^{a'_\square - l'_\square + r} \right\} \left\{ Aq^{a'_\square - l'_\square - s} \right\}, \quad (2.24)$$

где  $d_Q(m)$  — квантовая размерность представления  $Q$  в точке  $A = q^m$ , т.е. многочлены Шура в топологическом локусе  $\chi_Q\{p_k^* = [mk]/[k]\}$ . Как и в симметрическом случае, ожидается, что коэффициенты  $F_\lambda^K$  будут полиномами Лорана от  $q$  и  $A$  только для узлов с дефектами  $\delta^K = 0$  и  $-1$ . Эти коэффициенты находятся в явном виде для всех твистованных узлов и узлов двойных кос [98; 100; 164—169] и [170], но утверждение остается верным и за пределами этих семейств.

### 2.5.1 Ограничения на дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ в прямоугольных представлениях

Не смотря на то, что симметрии полиномов ХОМФЛИ-ПТ не позволяют получить все  $Z$ -факторы в дифференциальном разложении на прямоугольных представлениях, они все равно накладывают на них ограничения, которые мы рассмотрим в этом разделе.

На этот раз у нас есть следующие соотношения:

$$H_{[r^s]}^K - H_{[r^{s'}]}^K \vdash \{A/q^{s+s'}\} \quad \text{и} \quad H_{[r^s]}^K - H_{[r^{s'}]}^K \vdash \{Aq^{r+r'}\}. \quad (2.25)$$

Например, это означает, что

$$H_{[2,2]}^K - 1 \vdash \{Aq^2\} \{A/q^2\}, \quad (2.26)$$

$$H_{[2,2]}^K - H_{[2]}^K \vdash \{A/q^3\}, \quad (2.27)$$

$$H_{[2,2]}^K - H_{[1,1]}^K \vdash \{Aq^3\}. \quad (2.28)$$

Подставляя  $H_{[2]}^{\mathcal{K}} = 1 + [2]F_{[1]}^{\mathcal{K}}\{Aq^2\}\{A/q\} + F_{[2]}^{\mathcal{K}}\{Aq^3\}\{Aq^2\}\{A\}\{A/q\}$ , мы получаем

$$H_{[2,2]}^{\mathcal{K}} = 1 + [2]^2 F_{[1]}^{\mathcal{K}}\{Aq^2\}\{A/q^2\} + [3]F_{[2]}^{\mathcal{K}}\{Aq^3\}\{Aq^2\}\{A/q\}\{A/q^2\} + \\ + [3]F_{[1,1]}^{\mathcal{K}}\{Aq^2\}\{Aq\}\{A/q^2\}\{A/q^3\} + \tilde{F}_{[2,2]}^{\mathcal{K}}\{Aq^3\}\{Aq^2\}\{A/q^2\}\{A/q^3\}, \quad (2.29)$$

так как  $[2]\{A/q^2\} - \{A/q\} = \{A/q^3\}$  и  $[3]\{A/q^2\} - \{A\} = [2]\{A/q^3\}$ . Однако, этого недостаточно, чтобы оправдать дальнейшее разделение зависимостей от представлений

$$\tilde{F}_{[2,2]}^{\mathcal{K}} = [2]^2 F_{[2,1]}^{\mathcal{K}} \cdot \{Aq\}\{A/q\} + F_{[2,2]}^{\mathcal{K}} \cdot \{Aq^2\}\{Aq\}\{A/q\}\{A/q^2\} \quad (2.30)$$

во второй строке.

Прямое обобщение формулы (2.29) следующее:

$$H_{[r,s]}^{\mathcal{K}} = 1 + [r][s]F_{[1]}^{\mathcal{K}}\{Aq^r\}\{A/q^s\} + \\ + \frac{[r][r-1][s][s+1]}{[2]^2} F_{[2]}^{\mathcal{K}}\{Aq^{r+1}\}\{Aq^r\}\{A/q^{s-1}\}\{A/q^s\} + \\ + \frac{[r][r+1][s][s-1]}{[2]^2} F_{[1,1]}^{\mathcal{K}}\{Aq^r\}\{Aq^{r-1}\}\{A/q^s\}\{A/q^{s+1}\} + \\ + O\left(\{Aq^{r+1}\}\{Aq^r\}\{A/q^s\}\{A/q^{s+1}\}\right). \quad (2.31)$$

Для прямоугольных представлений большего размера с  $r, s > 2$  у нас есть больше условий для дальнейшего структурирования оставшейся части во второй строке, тем не менее этого рассуждения самого по себе недостаточно для построения полной формулы дифференциального разложения прямоугольных представлений.

## 2.6 Пример. Дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ узла $9_{46}$

Узел  $9_{46}$  (см. рис. 2.5) является трехмостовым узлом с дефектом ноль и не входит в семейства твистованных узлов и узлов двойных кос, на основе которых строятся формулы дифференциального разложения для прямоугольных представлений [97].

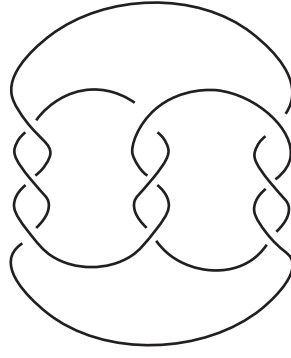


Рисунок 2.5 — Крендельный узел  $9_{46} = (\bar{3}, -\bar{3}, 3)$

Для этого узла получаем следующие коэффициенты  $F$  дифференциального разложения:

$$F_{[1]}^{9_{46}} = A^{-4} \cdot (1 + A^2), \quad (2.32)$$

$$F_{[2]}^{9_{46}} = q^{-8} A^{-8} \cdot (1 + A^2 q^2 + A^2 q^4 + A^4 q^8),$$

$$F_{[3]}^{9_{46}} = q^{-24} A^{-12} (1 + A^2 q^4) (1 + A^2 q^6 + A^2 q^8 - A^4 q^{10} + A^4 q^{14} + A^4 q^{16}),$$

$$F_{[2,1]}^{9_{46}} = \frac{1}{A^{12}} \left( \frac{[10]}{[5][2]} (A^6 + [3]A^4) + \frac{[6]}{[2]} A^2 + 1 + [3]^2 \{q\}^4 A^4 \right), \quad (2.33)$$

$$F_{[2,2]}^{9_{46}} = \frac{1}{A^{16}} \left\{ \frac{[20][2]}{[10][4]} A^8 + \frac{[10][2]}{[5]} A^6 + \frac{[4][3]}{[2]} A^4 + [2]^2 A^2 + 1 \right\}. \quad (2.34)$$

В качестве примера, в этом разделе мы рассмотрим построение дифференциального разложения прямоугольного представления  $[2, 2]$ , исследуя полиномы ХОМФЛИ-ПТ узла  $9_{46}$ .

Согласно формулам для дифференциального разложения прямоугольных представлений (2.23) и (2.24)

$$H_{[2,2]}^{\mathcal{K}} = 1 + [2]^2 D_2 D_{-2} \cdot F_{[1]}^{\mathcal{K}} + [3] D_3 D_2 D_{-1} D_{-2} \cdot F_{[2]}^{\mathcal{K}} + [3] D_2 D_1 D_{-2} D_{-3} \cdot F_{[1,1]}^{\mathcal{K}} + \\ + [2]^2 D_3 D_2 D_1 D_{-1} D_{-2} D_{-3} \cdot F_{[2,1]}^{\mathcal{K}} + D_3 D_2^2 D_1 D_{-1} D_{-2}^2 D_{-3} \cdot F_{[2,2]}^{\mathcal{K}}, \quad (2.35)$$

где  $D_n = \{Aq^n\} = Aq^n - A^{-1}q^{-n}$ .

Раскроем структуру формулы (2.35) на примере конкретных полиномов. Из дифференциального разложения для симметричных представлений (2.7) можно вывести общий вид вклада в полином ХОМФЛИ-ПТ, соответствующий представлению  $Q$ :

$$Z_R^Q(q, A) \cdot F_Q^{\mathcal{K}}(q, A) = \prod_i [n_i] \prod_{j=0}^d D_{k_j} \cdot F_Q^{\mathcal{K}}(q, A). \quad (2.36)$$

Мы также можем видеть, что для каждого представления число  $d$  дифференциалов  $D_{k_j}$  увеличивается с размером представления  $|Q|$ :

$$\begin{aligned} Z^{[1]} &\sim D \cdot D \\ Z^{[2]} &\sim D \cdot D \cdot D \cdot D \\ Z^{[3]} &\sim D \cdot D \cdot D \cdot D \cdot D \cdot D \end{aligned} \quad (2.37)$$

Вот почему мы можем использовать предел  $x = q - q^{-1} \rightarrow 0$  для извлечения вкладов из различных представлений полиномов ХОМФЛИ-ПТ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} Z_R^Q(q, A) \cdot F_Q^{\mathcal{K}}(q, A) = \prod_i n_i \prod_{j=0}^d \{q\}(N + k_i) \cdot F_Q^{\mathcal{K},(0)}. \quad (2.38)$$

Для подтверждения наших наблюдений и (2.35) рассмотрим полином ХОМФЛИ-ПТ  $H_{[2,2]}$  узла  $9_{46}$  из таблицы узлов Рольфсена [119] в представлении  $[2, 2]$ . Все  $F_{[r]}$  уже известны из дифференциального разложения для симметричных представлений (2.7).

$$\left. \frac{H_{[2,2]} - 1}{F_{[1]}\{q\}^2} \right|_{A=q^k} = 4(k+2)(k-2) + O(\{q\}^2). \quad (2.39)$$

Теперь нам нужно угадать правило квантования  $4(k-2)(k+2) \rightarrow [2]^2 D_2 D_{-2}$ . Дифференциалы  $D_2 D_{-2}$  также можно получить из свойств полиномов ХОМФЛИ-ПТ:  $H_{[2,2]}(q, q^2) = 1$ ,  $H_{[2,2]}(q, q^{-2}) = 1$ .

$Z_{[2]}$  и  $Z_{[1,1]}$  имеют один и тот же порядок. Из теории представлений мы знаем, что  $[2, 2]^\vee = [2, 2]$ , поэтому мы можем сделать вывод, что  $Z_{[2]}^{[2,2]}(A, q) = Z_{[1,1]}^{[2,2]}(A, q^{-1})$ .

$$\begin{aligned} &Z_{[2,2]}^{[2]} F_{[2]} + Z_{[2,2]}^{[1,1]} F_{[1,1]} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \prod_i n_i \prod_{j=1}^d \{q\}(N + k_j) F_{[2]}^{(0)} + \prod_i n_i \prod_{j=1}^d \{q\}(N - k_j) F_{[1,1]}^{(0)} = \\ &= \prod_i n_i \{q\}^d \left( \prod_{j=1}^d (N + k_j) + \prod_{j=1}^d (N - k_j) \right) F^{(0)} = \\ &= \prod_i n_i \{q\}^d \cdot 2 (N^d + e_2(k_i) N^{d-2} + \dots) F^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где  $e_2(k_i) = k_1k_2 + k_1k_3 + \dots + k_1k_d + k_2k_3 + \dots$ ,  $F_{[2]}^{(0)} = F_{[1,1]}^{(0)} = F^{(0)}$ .

Непосредственные расчеты дают нам следующее:

$$\begin{aligned} H_{[2,2]} - 1 - [2]^2 D_2 D_{-2} F_{[1]} &= (24N^4 - 168N^2 + 288)\{q\}^4 + O(\{q\}^5), \\ F^{(0)} &= 4 + O(\{q\}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Мгновенно получаем, что  $d = 4$ ,  $\prod_i [n_i] = [3]$ , и уравнения на  $k_i$ :

$$k_1 k_2 k_3 k_4 = 12, \quad (2.42)$$

$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + \dots = -7, \quad (2.43)$$

решения которых дают нам коэффициенты  $Z^{[2]}$  и  $Z^{[1,1]}$ :

$$\begin{aligned} Z^{[2]} &= [3] D_3 D_2 D_{-2} D_{-1}, \\ Z^{[1,1]} &= [3] D_{-3} D_{-2} D_2 D_1. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Теперь мы можем перейти к следующему порядку теории возмущений и найти  $Z^{[2,1]}$ . Сложность заключается в том, что мы еще не знаем выражение для  $F_{[2,1]}$  и, следовательно, не знаем, как разделить  $F_{[2,1]}^{(0)}$  и произведение квантовых чисел. В нашем расчете считаем, что в первом порядке теории возмущений  $F_{[2,1]}^{(0)} = F_{[3]}^{(0)} = 8$ . Для  $A = q^k$ :

$$\begin{aligned} H_{[2,2]} - 1 - [2]^2 D_2 D_{-2} F_{[1]} - [3] D_3 D_2 D_{-2} D_{-1} F_{[2]} - [3] D_{-3} D_{-2} D_2 D_1 \Big|_{A=q^k} &= \\ = 32(k+3)(k+2)(k+1)(k-1)(k-2)(k-3)\{q\}^6 + O(\{q\}^7). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Находим правило квантования:

$$4(k+3)(k+2)(k+1)(k-1)(k-2)(k-3) \rightarrow [2]^2 D_3 D_2 D_1 D_{-1} D_{-2} D_{-3}. \quad (2.46)$$

Мы строим дифференциальное разложение с предположением, что оно применимо ко всем узлам, поэтому наша гипотеза о значении  $F_{[2,1]}^{(0)}$  может быть проверена вычислениями для полиномов других узлов. Переход к квантовым числам также является сложной задачей. Чтобы убедиться в правильности правила квантования, мы должны рассмотреть все члены разложения. Чтобы найти  $Z_{[2,2]}^{[2,2]}$ , мы должны сначала вычислить  $F_{[2,1]}$ , но это возможно, только если мы найдем дифференциальное разложение для  $H_{[2,1]}$ . Общие формулы для представлений вида  $[r, 1]$  мы приведем в следующем разделе.



В случае  $[2, 1]$  область суммирования состоит из следующих представлений:

$$\begin{aligned} [2, 1] \otimes \overline{[2, 1]} = & [2^N] + 2([1], [1])_N + ([2], [2])_N + \\ & + ([1, 1], [1, 1])_N + ([2], [1, 1])_N + ([1, 1], [2])_N. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Можно заметить два больших отличия от случая  $[2, 2]$ . Во-первых,  $([1], [1])$  входит 2 раза, что означает, что  $Z_{[2,1]}^{[1]}$  состоит из двух частей и делает задачу квантования гораздо сложнее. Во-вторых, существует недиагональный вклад представлений  $([2], [1, 1])_N + ([1, 1], [2])_N$  в дифференциальное разложение, который обозначим как  $Z_{[2,1]}^{X_2}$ . Это также усложняет квантование и порождает неоднозначность, поскольку с этого момента количество представлений меньше числа коэффициентов, участвующих в дифференциальном разложении. Это создает препятствия в процессе поиска коэффициентов  $F$  и означает необходимость поиска различных типов ограничений.

$$\begin{aligned} H_{[2,1]}^{\mathcal{K}} = & \left( \frac{[3]}{[2]^2} D_0^2 + \frac{[3]^2}{[2]^2} D_2 \right) F_{[1]}^{\mathcal{K}} + \frac{[3]}{[2]} D_3 D_2 D_0 D_{-2} F_{[2]}^{\mathcal{K}} + \frac{[3]}{[2]} D_2 D_0 D_{-2} D_{-3} F_{[1,1]}^{\mathcal{K}} + \\ & + D_3 D_2 D_1 D_{-1} D_{-2} D_{-3} F_{[2,1]}^{\mathcal{K}} - \{q\}^4 [3]^2 D_2 D_{-2} F_{X_2}^{\mathcal{K}}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Существуют некоторые ограничения из теории представлений на  $H_{[2,1]}^{\mathcal{K}}$ . Прежде всего,  $[2, 1] = [2, 1]^{\vee}$ , а это означает, что дифференциальное разложение симметрично относительно замены  $q \rightarrow q^{-1}$ . Помимо этого  $H_{[2,1]}^{\mathcal{K}}(q, A = q^{\pm 2}) = H_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, A = q^{\pm 2})$ , откуда следует, что

$$H_{[2,1]}^{\mathcal{K}}(q, A = q^{\pm 2}) = 1 + \{q\}^3 \{q\} F_{[1]}^{\mathcal{K}}. \quad (2.49)$$

Теперь мы будем следовать тому же курсу действий, который мы использовали для представления  $[2, 2]$ . Все расчеты здесь основаны на узле  $\mathcal{K} = 9_{46}$  с дефектом ноль. Начинаем с первого порядка по  $\{q\}$ :

$$\left. \frac{H_{[2,1]} - 1}{\{q\}^2 F_{[1]}} \right|_{A=q^N} = 3N^2 - 9 + O(\{q\}^2). \quad (2.50)$$

Предполагаем, что структура  $Z^{[1]}$  следующая:

$$Z^{[1]} = c_1 D_{k_1} D_{k_2} + c_2 D_{k_3} D_{k_4}. \quad (2.51)$$

С учетом ограничений теории представлений (2.49) и  $Z^{[1]} = Z^{[1]}|_{q \rightarrow q^{-1}}$  получаем

$$Z^{[1]} = c_1 D_k D_k + c_2 D_2 D_{-2}. \quad (2.52)$$

Чтобы получить правильный предел (2.50) нужно взять  $k = 0$ , (2.49) дает нам  $c_1 = \frac{[3]}{[2]^2}$  и мы получаем  $c_2 = \frac{[3]^2}{[2]^2}$ .

$$Z^{[1]} = \frac{[3]}{[2]^2} D_0^2 + \frac{[3]^2}{[2]^2} D_2 D_{-2}. \quad (2.53)$$

Теория представлений дала нам ценные сведения, потому что если бы мы попытались проквантовать  $3N^2 - 9$  в сумму произведений дифференциалов без каких-либо предположений, то получили бы более 10 различных вариантов квантования.

Мы можем перейти к следующему порядку теории возмущений. Здесь у нас есть два вклада от  $[2]$  и  $[1, 1]$ . Структура суммы такая же, как и в случае  $[2, 2]$  (2.40).

$$\begin{aligned} H_{[2,1]} - 1 - \left( \frac{[3]}{[2]^2} D_0^2 + \frac{[3]^2}{[2]^2} D_2 D_{-2} \right) \Big|_{A=q^N} &= (12N^4 - 48N^2) \{q\}^4 + O(\{q\}^5), \\ F^{(0)} &= 4 + O(\{q\}), \end{aligned} \quad (2.54)$$

и мы получаем  $d = 4$ ,  $\prod_i [n_i] = \frac{[3]}{[2]}$ ,

$$k_1 k_2 k_3 k_4 = 0, \quad (2.55)$$

$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + \dots = -4. \quad (2.56)$$

Из (2.49) следует, что  $k_1 = 0$  и  $k_{2,3} = \pm 2$ ,  $k_4$  остается неизвестным. Мы получаем  $Z^{[2]} = \frac{[3]}{[2]} D_k D_2 D_0 D_{-2}$  и  $Z^{[1,1]} = \frac{[3]}{[2]} D_2 D_0 D_{-2} D_{-k}$ .

Переходим к следующему шагу. Мы знаем, что разница между полиномом ХОМФЛИИ-ПТ и всеми известными сейчас членами дифференциального разложения должна быть шестого порядка. Если мы используем  $Z^{[2]}$  и  $Z^{[1,1]}$ , написанные выше, мы можем найти  $k = 3$  из этого требования. Таким образом, мы получаем  $Z^{[2]} = \frac{[3]}{[2]} D_3 D_2 D_0 D_{-2}$  и  $Z^{[1,1]} = \frac{[3]}{[2]} D_2 D_0 D_{-2} D_{-3}$ .

$$\begin{aligned} &H_{[2,1]} - 1 - \\ &- \left( \frac{[3]}{[2]^2} D_0^2 + \frac{[3]^2}{[2]^2} D_2 D_{-2} \right) \frac{[3]}{[2]} D_3 D_2 D_0 D_{-2} F_{[2]} - \frac{[3]}{[2]} D_2 D_0 D_{-2} D_{-3} F_{[1,1]} \Big|_{A=q^N} = \\ &= (8N^6 - 112N^4 + 320N^2) \{q\}^6 + O(\{q\}^7). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Теперь мы подошли к самой сложной части этого расчета. Нам нужно извлечь  $Z$ -факторы  $Z^{[2,1]}$  и  $Z^{X_2}$ . Из предыдущих исследований (для разных узлов) мы

знаем, что  $Z^{X_2} \sim -\{q\}^4$ . Мы также уже знаем из (2.49), что  $Z^{[2,1]}$  и  $Z^{X_2}$  должны содержать дифференциалы  $D_2D_{-2}$  (мы также можем проверить это требование явно), а остальные дифференциалы должны быть инвариантны относительно преобразования  $q \rightarrow q^{-1}$ . Мы получаем следующую структуру  $Z$ -факторов:

$$Z^{[2,1]} = c_1 D_2 D_{-2} D_{k_1} D_{-k_1} D_{k_2} D_{-k_2} \quad \text{и} \quad Z^{X_2} = -c_2 \{q\}^4 D_2 D_{-2}. \quad (2.58)$$

Этих условий достаточно, чтобы из уравнения ( $k$  и  $c$  не зависят от  $N$ )

$$\begin{aligned} 8N^6 - 112N^4 + 320N^2 &= \\ &= c_1 F_{[2,1]}^{(0)}(N-2)(N+2)(N-k_1)(N+k_1)(N-k_2)(N+k_2) - \\ &- c_2 F_{X_2}^{(0)}(N-2)(N+2) \end{aligned} \quad (2.59)$$

получить  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 1$ ,  $c_1 F_{[2,1]}^{(0)} = 8$  и  $c_2 F_{X_2}^{(0)} = 72$ . Мы предполагаем, что  $F_{[2,1]}^{(0)} = F_{X_2}^{(0)} = 8$ , и получаем  $c_1 = 1$  и  $c_2 = 9 \rightarrow [3]^2$ . Так мы приходим к дифференциальному разложению полиномов ХОМФЛИИ-ПТ в представлении  $[2, 1]$  (2.48).

Чтобы вернуться к нашей задаче с  $Z_{[2,2]}^{[2,2]}$ , нам нужно найти  $F_{[2,1]}$  и  $F_{X_2}$ . Это возможно с точностью до произвольного коэффициента  $\rho$ :

$$F_{[2,1]} = \tilde{F}_{[2,1]} - \rho \cdot \{q\}^4 [3]^2 \quad \text{и} \quad F_{X_2} = \tilde{F}_{X_2} - \rho \cdot D_3 D_1 D_{-1} D_{-3}, \quad (2.60)$$

где  $\tilde{F}_{[2,1]}$  и  $\tilde{F}_{X_2}$  в случае узлов с нулевым дефектом — полиномы от  $A$  и  $q$ , удовлетворяющие уравнению (2.48). В случае узлов с ненулевыми дефектами те же рассуждения можно использовать для дифференциального разложения с коэффициентами  $G$ . Нам нужно всего три первых члена из разложения  $F_{[2,1]}$ , чтобы найти  $Z_{[2,2]}^{[2,2]}$ , и они не содержат  $\rho$ :

$$F_{[2,1]} = 8 - 36N\{q\} + (17 + 84N^2)\{q\}^2 + O(\{q\}^3), \quad (2.61)$$

и, наконец, мы можем получить

$$\begin{aligned} H_{[2,2]} - 1 - [2]^2 D_2 D_{-2} F_{[1]} - [3] D_3 D_2 D_{-2} D_{-1} F_{[2]} - [3] D_{-3} D_{-2} D_2 D_1 - \\ - [2]^2 D_3 D_2 D_1 D_{-1} D_{-2} D_{-3} \Big|_{A=q^N} = \\ = 16(N+3)(N+2)^2(N+1)(N-1)(N-2)^2(N-3)\{q\}^8 + O(\{q\}^9), \end{aligned} \quad (2.62)$$

и дифференциалы  $Z_{[2,2]}^{[2,2]} = D_3 D_2^2 D_1 D_{-1} D_{-2} D_{-3}$  (2.35).

Уравнение (2.35) вместе с  $F_{[2,1]}$ ,  $F_{X_2}$  и симметричными  $F$  дает нам  $F^{[2,2]}$ . Однако требование, чтобы  $F^{[2,2]}$  был полиномом, может не удовлетворяться при первом выборе  $\tilde{F}_{[2,1]}$ . К счастью, мы можем внести коррективы с помощью  $b$ . После этого у нас остался свободный параметр  $\rho$ :  $\delta F_{[2,1]} = -\{q\}^4 [3]^2 D_2 D_{-2} \rho$ ,  $\delta F_{X_2} = D_3 D_2 D_1 D_{-1} D_{-2} D_{-3} \rho$ ,  $\delta F_{[2,2]} = -[2]^2 \{q\}^4 [3]^2 \rho$ . Эта неоднозначность, вероятно, может быть разрешена в старших представлениях.

## 2.7 Дифференциальное разложение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ в представлениях вида $[r, 1]$

Поскольку мы знаем  $F_{[2,1]}$ , мы также можем надеяться описать непрямоугольные  $R = [2, 1]$ . Однако, в этом случае имеют место кратности,  $Z$ -факторы уже не задаются (2.24), а пространство  $M_R$  состоит не только из поддиаграмм  $R$ . В простейшем примере  $R = [2, 1]$   $Z$ -факторы равны

$$\begin{aligned} Z_{[2,1]}^{[1]} &= D_1 D_{-1} + (q^2 + q^{-2}) D_2 D_{-2}, \\ Z_{[2,1]}^{[2]} &= \frac{[3]}{[2]} D_3 D_2 D_0 D_{-2}, \\ Z_{[2,1]}^{[2,1]} &= D_3 D_2 D_1 D_{-1} D_{-2} D_{-3} \end{aligned} \quad (2.63)$$

и появляется один  $Z$ -фактор нового типа  $Z_{[2,1]}^{X_2} = -[3]^2 \{q\}^4 D_2 D_{-2}$ , который связан с соответствующей функцией  $F$ :

$$F_{X_2}^{9_{46}} = \frac{1}{A^8} \left\{ \frac{[6]^2}{[2]^2} - \frac{[14]}{[7][2]} A^2 - \{q\}^2 A^4 \right\}. \quad (2.64)$$

Мы сталкиваемся с неоднозначностью дифференциального разложения за рамками (анти)симметрических представлений. Она проявляется, например в возникающей неоднозначности коэффициентов  $F$ :

$$\begin{aligned} \delta F_{[2,2]} &= -\rho \cdot [2]^2 [3]^2 \{q\}^4, \\ \delta F_{[2,1]} &= \rho \cdot [3]^2 \{q\}^4 D_2 D_{-2}, \\ \delta F_{X_2} &= \rho \cdot D_3 D_2 D_1 D_{-1} D_{-2} D_{-3}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

где  $\rho(q, A)$  — произвольный полином Лорана. Наше конкретное предположение (2.33, 2.64) может оказаться неверным, когда мы узнаем больше: наш выбор состоит в том, чтобы просто минимизировать выражения для  $F$ . Действительно важным является тот факт, что существует по крайней мере некоторый полиномиальный выбор для  $F^{946}$ .

Полиномиальные формулы для  $F^{946}$  дают первый результат данной работы: их существование показывает, что дифференциальное разложение остается верным за пределами симметричных представлений — и не только для твистованных узлов и узлов двойных кос.

В общем случае для  $R = [r, 1]$  область суммирования  $M_R$  состоит из набора составных представлений

$$\begin{aligned} M_{[r,1]} &= [r, 1] \otimes \overline{[r, 1]} = id + \\ &+ \sum_{i=1}^{r-1} \left( 2([i], [i]) + ([i, 1], [i+1]) + ([i+1], [i, 1]) \right) + ([r], [r]) + \sum_{i=1}^r ([i, 1], [i, 1]). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Основной интерес представляет первая большая сумма, содержащая симметричные составные представления  $([i], [i])$  дважды (с кратностью два) и включает также недиагональные составные представления, которые попарно равны, мы будем обозначать их  $X_{i+1} := ([i, 1], [i+1]) + ([i+1], [i, 1])$  для краткости. Для дифференциального разложения это означает, что

$$\begin{aligned} H_{[r,1]}^{\mathcal{K}} &= 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \left( \left( Z_{[r,1]}^{[i]'} + Z_{[r,1]}^{[i]''} \right) \cdot F_{[i]}^{\mathcal{K}} + Z_{[r,1]}^{X_{i+1}} \cdot F_{X_{i+1}} \right) + \\ &+ Z_{[r,1]}^{[r]} \cdot F_{[r]}^{\mathcal{K}} + \sum_{i=1}^r Z_{[r,1]}^{[i,1]} \cdot F_{[i,1]}^{\mathcal{K}}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

## 2.8 Дифференциальное разложение узлов с дефектом $\delta^{\mathcal{K}} = 1$

Все предыдущие разделы были посвящены узлам с нулевым дефектом. Теперь мы двигаемся дальше и рассмотрим узлы с ненулевыми дефектами. Это означает сокращение  $Z$ -факторов, или, как мы предпочитаем формулировать,

появление определенных полюсов в  $F$ -факторах. Проблема в том, что вне симметричных представлений мы не знаем, когда появляются эти полюса и что они из себя представляют. В этом разделе мы рассматриваем только дефект  $\delta_{\mathcal{K}} = 1$  и только представления  $R = [2, 1]$  и  $R = [2, 2]$ , но и в этом случае задача оказывается достаточно сложной. В следующих разделах есть рассмотрение для мутантных узлов с дефектом два.

### 2.8.1 Семейство $a$ двухместовых узлов с дефектом один

Метод эволюции [93; 171] для работы с полиномами узлов состоит в том, чтобы рассматривать отдельные узлы как членов семейства узлов, которое зависит от дополнительных параметров. Мы возьмем двухместовое семейство (“family $_a$ ”) узлов с дефектом один, которое описывается древовидной формулой

$$H_R^{\text{family}_a(k)} = d_R \langle \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^{2k} \bar{S} \rangle_{\emptyset\emptyset}. \quad (2.68)$$

В него входят следующие члены таблицы Рольфсена [119]:

|                |     |         |        |        |        |        |        |        |     |
|----------------|-----|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| $k$            | ... | -3      | -2     | -1     | 0      | 1      | 2      | 3      | ... |
| family $_a(k)$ |     | 10 $_4$ | 8 $_4$ | 6 $_2$ | 3 $_1$ | 5 $_1$ | 7 $_3$ | 9 $_4$ |     |

(2.69)

Преимущество эволюции в том, что мы знаем, как ответ зависит от  $k$  через явно известные собственные значения  $\lambda_Q$

$$H_R^{\text{family}_a(k)}(q, A) = \sum_{Q \in R \otimes \bar{R}} \alpha_Q^{\text{family}_a(k)}(q, A) \cdot \lambda_Q^{2k}, \quad (2.70)$$

а коэффициенты  $\alpha_Q^{\text{family}_a(k)}(q, A)$  можно найти по нескольким  $H_R$  для “маленьких” узлов в семье. Более того, это можно сделать непосредственно для коэффициентов дифференциального разложения  $F_Q^{\text{family}_a(k)}$ . Единственная проблема заключается в том, что количество необходимых “маленьких” узлов увеличивается с ростом  $R$ . В  $F_{[1]}$  вносят вклад только два собственных значения:  $\lambda_{\emptyset} = 1$  и  $\lambda_{[1]} = -A$ , таким образом, знание только двух полиномов, например,  $H_{[1]}^3$  и  $H_{[1]}^5$ , достаточно и мы получаем

$$F_{[1]}^{\text{family}_a(k)} = -A^2 \left( 1 + (q^2 + q^{-2}) \cdot A^2 \cdot \frac{1 - A^{2k}}{1 - A^2} \right). \quad (2.71)$$

Для  $F_{[2]}$  нам нужны три полинома, чтобы получить

$$F_{[2]}^{\text{family}_a(k)} = q^2 A^4 + \frac{(1 + q^{-2})A^6 \left( A^2(1 + q^6) - (q^2 + q^6) \right)}{A^2 - 1} \cdot \frac{A^{2k} - 1}{A^2 - 1} + \quad (2.72)$$

$$+ \frac{(q^{12} + q^8 + q^6 + 1)A^8}{q^4 A^2 - 1} \cdot \left( \frac{q^{4k} A^{4k} - 1}{q^2 A^2 - 1} - (1 + q^{-2}) \cdot \frac{A^{2k} - 1}{A^2 - 1} \right).$$

Сингулярность при  $q^4 A^2 - 1$  в последнем члене фактически аннулируется скобкой в числителе, потому что при  $A = q^{-2}$  имеем  $q^4 A^4 = A^2$ . Однако, средний член имеет в знаменателе один несокращенный  $D_0$ , потому что дефект узлов ненулевой. В полном соответствии с (2.29) замечаем далее, что разность

$$H_{[2,2]}^{\text{family}_a(k)} - 1 - \left( [2]^2 F_{[1]}^{\text{family}_a(k)} D_2 D_{-2} + [3] F_{[2]}^{\text{family}_a(k)} D_3 D_2 D_{-1} D_{-2} + [3] F_{[1,1]}^{\text{family}_a(k)} D_2 D_1 D_{-2} D_{-3} \right) \quad (2.73)$$

делится на  $D_3 D_2 D_{-2} D_{-3}$ . Обратим внимание, что разность и отношение являются полиномами Лорана — несмотря на то, что  $F_{[2]}$  и  $F_{[1,1]}$  не являются: они содержат множитель  $D_0^{-1}$ , поскольку дефект больше нуля. Тем не менее, два полюса сокращаются по очень общей причине.

Когда дефект больше нуля,  $F_{[2]} = \frac{G_{[2]}}{D_0}$  и  $F_{[1,1]} = \frac{G_{[1,1]}}{D_0}$  больше не полиномы, у них появляется  $D_0$  в знаменателе. Тем не менее, вклад (2.31) в  $H_{[rs]}$  в прямоугольных представлениях  $[r^s]$

$$\frac{[r][r-1][s][s+1]}{[2]^2} \frac{D_r D_{r+1} D_{-s} D_{1-s}}{D_0} G_{[2]} + \quad (2.74)$$

$$+ \frac{[r][r+1][s][s-1]}{[2]^2} \frac{D_r D_{r-1} D_{-s} D_{-s-1}}{D_0} G_{[1,1]} \quad (2.75)$$

всегда полиномиальный. Вычеты в полюсах в  $A = \pm 1$  на самом деле не зависят от  $r$  и  $s$  и равны

$$(G_{[2]} + G_{[1,1]})|_{A=\pm 1} = 0. \quad (2.76)$$

Это условие означает, что  $G_{[2]}$  меняет знак при инверсии  $q \rightarrow q^{-1}$  в точках  $A = \pm 1$ , а  $G_{[1,1]}$  получается из  $G_{[2]}$  обращением  $q$ . Это можно сформулировать также в терминах дифференциального разложения полинома Александра в представлении  $R = [2]$ .

Далее, вклад диаграмм размера три в тот же полином  $H_{[r,s]}$  равен

$$\begin{aligned}
& \frac{[r][r-1][r-2][s][s+1][s+2]}{[2]^2[3]^2} \frac{D_r D_{r+1} D_{r+2} D_{-s} D_{1-s} D_{2-s}}{D_1 D_0} \cdot G_{[3]} + \\
& + \frac{[r+1][r][r-1][s+1][s][s-1]}{[3]^2} \frac{D_{r+1} D_r D_{r-1} D_{-s+1} D_{-s} D_{-s-1}}{D_1 D_{-1}} \cdot G_{[2,1]} + \\
& + \frac{[r][r+1][r+2][s][s-1][s-2]}{[2]^2[3]^2} \frac{D_r D_{r-1} D_{r-2} D_{-s} D_{-s-1} D_{-s-2}}{D_0 D_{-1}} \cdot G_{[1,1,1]}.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Вклады диаграмм  $[3]$  и  $[1, 1, 1]$  в точке  $A = \pm 1$  исчезают из-за свойства:

$$(G_{[3]} - G_{[1,1,1]})|_{A=\pm 1} = 0. \tag{2.78}$$

Вклады диаграмм  $[3]$  и  $[2, 1]$  при  $A = \pm q^{-1}$  обращаются в ноль из-за соотношения между  $G_{[2,1]}$  и  $G_{[3]}$ :

$$([2]G_{[2,1]} + G_{[3]})|_{A=\pm q^{-1}} = 0. \tag{2.79}$$

Вклад при  $A = \pm q$  тогда автоматически исчезает, потому что  $G_{[1,1,1]}(A, q) = G_{[3]}(A, q^{-1})$  и  $G_{[2,1]}(A, q^{-1}) = G_{[2,1]}(A, q)$ .

Возвращаемся к  $\tilde{G}_{[2,2]}^{\text{family}_a(k)}$ . Теперь он зависит от шести собственных значений, но коэффициенты все равно должны быть разделены между двумя  $F$ -функциями,  $F_{[2,1]} \oplus F_{[2,2]}$ . Собственное значение  $A^{8k}$  дает вклад только в  $F_{[2,2]}$ , но этого недостаточно, чтобы решить, как разделить все остальное. Причем сумма пропорциональна только  $D_3 D_2 D_{-2} D_{-3}$ , но мы не знаем, обеспечивает ли  $D_1 D_{-1}$  полюса в обоих  $F_{[2,1]}$  и  $F_{[2,2]}$  и/или может ли быть лишний полюс  $D_2 D_{-2}$  в  $F_{[2,2]}$ . Это очень сложная задача, которая требует более системного подхода. Совсем недавно такой инструмент был найден, и мы сознательно выбрали семейство узлов  $\text{family}_a$ , чтобы применить его. На примере одного семейства можно исправить неоднозначности и получить гипотезу, применимую ко всем узлам с ненулевым дефектом.



## 2.8.2 Метод $U$ -матрицы

Мы будем использовать метод  $U$ -матрицы [162], который успешно применялся к семейству твистованных узлов. Он заключается в том, что в формулу для полинома вводится специальная матрица  $U$ , которая уже известна для многих представлений  $R$ .  $U$ -матрица строится на основе полиномов для твистованных узлов по следующей схеме. Для известных матриц  $\mathcal{B}$ , выраженных через косые функции Шура (см. [163, ур. (4)]), строится матрица собственных функций  $\mathcal{E}$ . Из  $\mathcal{E}$  можно построить матрицу Рака  $\bar{S}$ , она билинейна по  $\mathcal{E}$ . Наконец,  $U = \mathcal{E}\bar{S}^{-1}$ . Матрицы  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{E}$  являются нижнетреугольными и универсальными, т.е. не зависят от представления  $R$ .  $\bar{S}$  и  $U$  не обладают этими свойствами и должны вычисляться для каждого  $R$ . Таким образом, вся пятерка  $\{\mathcal{B}, \mathcal{E}, U, \bar{S}, S\}$  может быть получена из функций Шура, по крайней мере для всех прямоугольных представлений  $R$ . Для непрямоугольного  $R$  исходная формула для  $\mathcal{B}$  еще не полностью доступна.

$$\begin{aligned} H_R^{\text{family}_a(k)} &= d_R \langle \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^{2k+2} \bar{S} \rangle_{\emptyset\emptyset} = \\ &= \sum_X d_R \underbrace{\langle \emptyset | \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^{-2} \bar{S}U | X \rangle}_{Z_R^X \text{ family}_a} \underbrace{\langle X | U^{-1} \bar{S}\bar{T}^{2k+2} \bar{S} | \emptyset \rangle}_{F_X^{\text{twist}(k)}}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Теперь зависимость от параметра эволюции  $k$  полностью содержится в коэффициентах  $F_X^{\text{twist}(k)}$ , буквально таких же, как и для твистованных узлов, но факторы  $Z_R^X \text{ family}_a$  являются новыми и отличаются от стандартных  $Z$ -факторов

$$Z_R^X = d_R \langle \emptyset | \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^{-2} \bar{S}U | X \rangle \quad (2.81)$$

дифференциального разложения. Например,

$$Z_{[1]}^{\emptyset \text{ family}_a} = \overbrace{1}^{Z_{[1]}^{\emptyset}} - A^2 \overbrace{D_1 D_{-1}}^{Z_{[1]}^{[1]}}, \quad Z_{[1]}^{[1] \text{ family}_a} = \frac{[4]}{[2]} A^2 \overbrace{D_1 D_{-1}}^{Z_{[1]}^{[1]}}, \quad (2.82)$$

$$\mathcal{Z}_{[2]}^{\emptyset \text{ family}_a} = \overbrace{1}^{Z_{[2]}^{\emptyset}} - A^2 \overbrace{[2]D_2D_{-1}}^{Z_{[2]}^{[1]}} + q^2 A^4 \overbrace{D_3D_2D_0D_{-1}}^{Z_{[2]}^{[2]}}, \quad (2.83)$$

$$\mathcal{Z}_{[2]}^{[1] \text{ family}_a} = \frac{[4]}{[2]} A^2 \overbrace{[2]D_2D_{-1}}^{Z_{[2]}^{[1]}} - \frac{[2]A^3}{D_0} \left( \frac{[4]}{[2]} q^3 - \frac{[6]}{[3]} A^2 q^2 \right) \overbrace{D_3D_2D_0D_{-1}}^{Z_{[2]}^{[2]}}, \quad (2.84)$$

$$\mathcal{Z}_{[2]}^{[2] \text{ family}_a} = A^4 q^2 \left( \frac{[9]}{[3]} + q^2 \right) \overbrace{D_3D_2D_0D_{-1}}^{Z_{[2]}^{[2]}}. \quad (2.85)$$

Для представления  $R = [2, 2]$  получаем

$$\mathcal{Z}_{[2,2]}^{\emptyset \text{ family}_a} = 1 - A^2 Z_{[2,2]}^{[1]} + q^2 A^4 Z_{[2,2]}^{[2]} + \frac{A^4}{q^2} Z_{[2,2]}^{[1,1]} - A^6 Z_{[2,2]}^{[2,1]} + A^8 Z_{[2,2]}^{[2,2]}, \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{[2,2]}^{[1] \text{ family}_a} &= \frac{[4]}{[2]} A^2 Z_{[2,2]}^{[1]} - \frac{[2]A^3}{D_0} \left( \frac{[4]}{[2]} q^3 - \frac{[6]}{[3]} A^2 q^2 \right) Z_{[2,2]}^{[2]} - \\ &- \frac{[2]A^3}{D_0} \left( \frac{[4]}{[2]} \frac{1}{q^3} - \frac{[6]}{[3]} \frac{A^2}{q^2} \right) Z_{[2,2]}^{[1,1]} + \frac{[3]A^4}{D_1 D_{-1}} \left( \frac{[8]}{[4]} A^4 - \frac{[6]^2}{[3]^2} A^2 + 2 \frac{[4]}{[2]} - 2 \right) Z_{[2,2]}^{[2,1]} - \\ &- \frac{[8][2]^2}{[4]} \cdot A^8 Z_{[2,2]}^{[2,2]}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{[2,2]}^{[2] \text{ family}_a} &= A^4 q^2 \left( \frac{[9]}{[3]} + q^2 \right) Z_{[2,2]}^{[2]} + \left( \frac{[3]A^6}{[2]q^7} \left( \frac{\{q\}[8][6]}{[4][3]} q^{10} A^2 - q^{14} - 2q^8 - 1 \right) - \right. \\ &- \left. A^9 q^7 \frac{\{q\}[8][3]}{[4][2]D_1} \right) Z_{[2,2]}^{[2,1]} + [3] \left( \frac{[12]}{[4]} + q^2 \right) \cdot A^8 Z_{[2,2]}^{[2,2]}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{[2,2]}^{[1,1] \text{ family}_a} &= \frac{A^4}{q^2} \left( \frac{[9]}{[3]} + \frac{1}{q^2} \right) Z_{[2,2]}^{[1,1]} + \left( -\frac{[3]q^7 A^6}{[2]} \left( \frac{\{q\}[8][6]}{[4][3]} \frac{A^2}{q^{10}} + \frac{1}{q^{14}} + \frac{2}{q^8} + 1 \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{A^9 \{q\}[8][3]}{q^7 [4][2]D_{-1}} \right) Z_{[2,2]}^{[2,1]} + [3] \left( \frac{[12]}{[4]} + \frac{1}{q^2} \right) \cdot A^8 Z_{[2,2]}^{[2,2]}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\mathcal{Z}_{[2,2]}^{[2,1] \text{ family}_a} = \left( A^2 [3] \{q\}^2 + \frac{[10][8][6]}{[5][4][3]} \right) \cdot A^6 Z_{[2,2]}^{[2,1]} - \frac{[10][8][6][2]^2}{[5][4][3]} \cdot A^8 Z_{[2,2]}^{[2,2]}, \quad (2.90)$$

$$\mathcal{Z}_{[2,2]}^{[2,2] \text{ family}_a} = A^8 \cdot \left( [11] + \frac{[20]}{[4]} \right) Z_{[2,2]}^{[2,2]}. \quad (2.91)$$

Приведенные выше формулы показывают, что для семейства узлов “family<sub>a</sub>” мы получаем верхнетреугольную матрицу преобразования  $V^{\text{family}_a}$ , которая является универсальной в том смысле, что ее элементы не зависят от представления  $R$ :

$$\mathcal{Z}_R^X \text{ family}_a = \sum_{Y \subset R} V_Y^X \text{ family}_a \cdot Z_R^Y. \quad (2.92)$$

Сегмент  $V$ , относящийся к  $R = [2, 2]$ , выписан в формуле (2.93):

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -A^2 & q^2 A^4 & \frac{A^2}{q^2} & -A^6 & A^8 \\ 0 & \frac{[4]}{[2]} A^2 & \frac{[2]A^3}{D_0} \left( \frac{[4]}{[2]} q^3 - \frac{[6]}{[3]} A^2 q^2 \right) & \frac{[2]A^3}{D_0} \left( \frac{[4]}{[2]} \frac{1}{q^3} - \frac{[6]}{[3]} \frac{A^2}{q^2} \right) & v_{25} & -\frac{[8][2]^2}{[4]} \cdot A^8 \\ 0 & 0 & A^4 q^2 \left( \frac{[9]}{[3]} + q^2 \right) & 0 & v_{35} & [3] \left( \frac{[12]}{[4]} + q^2 \right) \cdot A^8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A^4}{q^2} \left( \frac{[9]}{[3]} + \frac{1}{q^2} \right) & v_{45} & [3] \left( \frac{[12]}{[4]} + \frac{1}{q^2} \right) \cdot A^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_{55} & -\frac{[10][8][6][2]^2}{[5][4][3]} \cdot A^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left( [11] + \frac{[20]}{[4]} \right) \cdot A^8 \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

где

$$\begin{aligned} v_{25} &= \frac{[3]A^4}{D_1 D_{-1}} \left( \frac{[8]}{[4]} A^4 - \frac{[6]^2}{[3]^2} A^2 + 2 \frac{[4]}{[2]} - 2 \right), \\ v_{35} &= \frac{[3]A^6}{[2]q^7} \left( \frac{\{q\}[8][6]}{[4][3]} q^{10} A^2 - q^{14} - 2q^8 - 1 \right) - A^9 q^7 \frac{\{q\}[8][3]}{[4][2]D_1}, \\ v_{45} &= -\frac{[3]q^7 A^6}{[2]} \left( \frac{\{q\}[8][6]}{[4][3]} \frac{A^2}{q^{10}} + \frac{1}{q^{14}} + \frac{2}{q^8} + 1 \right) + \frac{A^9 \{q\}[8][3]}{q^7 [4][2]D_{-1}}, \\ v_{55} &= \left( A^2 [3] \{q\}^2 + \frac{[10][8][6]}{[5][4][3]} \right) A^6. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Это треугольное преобразование немедленно преобразуется в формулу для  $\mathcal{F}$ :

$$H_R^{\text{family}_a(k)} = \sum_{X \subset R} Z_R^X \text{family}_a \cdot F_X^{\text{twist}_k} = \sum_{X \subset R} Z_R^X \cdot \mathcal{F}_X^{\text{family}_a(k)}. \quad (2.95)$$

Универсальность матрицы  $V$  влечет универсальность дифференциального разложения, а именно, что его коэффициенты  $\mathcal{F}_X$  не зависят от  $R$ .

Мы получили это новое треугольное свойство на примере семейства узлов “family<sub>a</sub>”, но оно может быть верно и в гораздо более широком контексте, возможно, даже за пределами двухместовых древовидных узлов.

Согласно (2.95) свойства  $F_X^{\text{twist}_{-1}} = 1$ ,  $F_X^{\text{twist}_0} = \delta_{X,\emptyset}$ ,  $F_X^{\text{twist}_1} = \Lambda_X^{\text{trefoil}}$  твистованных функций  $F_X^{\text{twist}_k} = \langle X | \mathcal{B}^{k+1} U | \emptyset \rangle = \sum_Y \langle X | \mathcal{B}^{k+1} | Y \rangle$  подразумевают, что

$$\begin{aligned} \sum_{X \subset R} \mathcal{Z}_R^{X \text{ family}_a} &= H_R^{\text{family}_a(k=-1)} = H_R^{6_2}, \\ \mathcal{Z}_R^{\emptyset \text{ family}_a} &= H_R^{\text{family}_a(k=0)} = H_R^{\text{trefoil}}, \\ \sum_{X \subset R} \mathcal{Z}_R^{X \text{ family}_a} \cdot \Lambda_X^{\text{trefoil}} &= H_R^{\text{family}_a(k=1)} = H_R^{5_1}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

На самом деле выбор матрицы  $V$  неоднозначен: мы можем перемещать содержимое между последним и предпоследним столбцами, связанными с представлениями  $[2, 1]$  и  $[2, 2]$ . Нашим выбор был ориентирован на максимальную простоту и отсутствие полюсов в последнем столбце, т.е. мы предполагаем, что  $F_{[2,1]}$  может иметь полюсы  $D_1 D_{-1}$ , но  $F_{[2,2]}$  — это просто полином. Такие предположения обеспечивают достаточно хорошие элементы  $V$ . Более того, простое вычисление показывает, что  $F_{X_2}$  имеет полюс  $[3]\{q\}^2$  (или что  $Z_{X_2}$  для первого дефекта редуцируется до  $[3]\{q\}^2 D_2 D_{-2}$ ). Этот результат мы постулируем/предполагаем как модификацию дифференциального разложения для узлов с дефектом один. Он тесно связан с неожиданной новой треугольной структурой — матрицей  $V$ , которая в нашем примере найдена при исследовании семейства узлов “family<sub>a</sub>”.

## 2.9 Полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов

Узлы-мутанты представляют собой группы узлов, диаграммы которых связаны друг с другом определенными преобразованиями. В контексте данной работы, нам важно подчеркнуть две особенности узлов-мутантов. Во первых, полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов совпадают во всех (анти)симметрических и прямоугольных представлениях, и некоторые из них различаются представлением  $[2, 1]$  [29]. И во-вторых, дефект данных узлов отличен от нуля и равен двум, а значит их можно использовать для изучения дифференциального разложения узлов с ненулевым дефектом.

Одна из задач, которая решалась в рамках этой диссертации, представляет из себя вычисление полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в

представлениях  $[3, 1]$  и  $[4, 2]$  различных квантовых алгебр  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$ , а также исследование разностей между ними.

Основная цель математической теории узлов — различать разные узлы. Для этого были построены полиномиальные инварианты узлов. Инварианты совпадают, когда узлы совпадают, но при этом до сих пор не построен полный инвариант, который различает все узлы. Например, полиномы ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$  узлов  $5_1$  и  $10_{132}$  совпадают. Это случайное совпадение, и эти узлы отличаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в других представлениях. Узлы-мутанты при этом представляют собой большой класс узлов, полиномы которых совпадают в большом количестве представлений, поэтому в теории узлов существует отдельная задача их различения.

Существует специальная процедура — *мутация*, которая не изменяет полиномы ХОМФЛИ-ПТ в (анти)симметрических и прямоугольных представлениях, но иногда может изменить узел. Это связано с особенностями метода определения цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ (метода Решетихина-Тураева) и происходит потому, что квадраты (анти)симметрических и прямоугольных представлений не содержат кратностей, то есть все неприводимые представления, которые получаются из квадратов встречаются в сумме только один раз. Некоторые из узлов-мутантов различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлении  $[2, 1]$  — наименьшем непрямоугольном представлении [29; 31; 70]. Однако, есть особые типы мутаций, предложенные Х. Мортонем [30], которые позволяют получить узлы-мутанты, которые не различаются представлением  $[2, 1]$ . Представление наименьшей размерности, которое их различает — представление  $[4, 2]$  [30].

Для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлении  $[4, 2]$  в данной работе мы использовали метод Решетихина-Тураева, который описан в разделе 1.2. Он требует явного построения матриц соответствующих представлений,  $\mathcal{R}$ -матриц и взятие свертки по всем элементам диаграмм. Использование этого метода является сложной вычислительной задачей, однако, сделать аналогичные вычисления с помощью существующих модификаций метода Решетихина-Тураева (которые в некоторых случаях существенно упрощают вычисления и позволяют получить более общие ответы) переставляет из себя более сложную задачу.

Ранее были известны разности полиномов узлов-мутантов для следующих узлов и представлений: для представления  $[2, 1]$  квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  для пары узлов  $K11n34 - K11n42$  (знаменитые узлы Киношиты-Терасаки и Конвея) [31] и для представления  $[4, 2]$  квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  для пар узлов  $K(3, 3, 3, -3, -3) - K(3, 3, -3, 3, -3)$  и  $(1, 3, 3, -3, -3) - (1, 3, -3, 3, -3)$  [30]. Для семейства древовидных узлов был разработан специальный метод [72], который позволил систематически вычислять полиномы ХОМФЛИ-ПТ древовидных узлов-мутантов в представлении  $[2, 1]$ .

В работе [115] нам удалось получить разности между полиномами ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлении  $[3, 1]$ . Это позволило нам изучить их структуру и сравнить с разностями в представлении  $[2, 1]$ . Одним из важных свойств полиномов ХОМФЛИ-ПТ, которое отражается в этих разностях, является дифференциальное разложение, которое мы обсуждали в предыдущих разделах. Особенности дифференциального разложения узлов-мутантов обсуждаются в статье [116] и в разделе (2.13). Мы также вычислили полиномы узлов-мутантов и разности между ними для некоторых узлов в представлении  $[4, 2]$  квантовых алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_4)$ .

### 2.9.1 Процедура мутации

Для того, чтобы получить узлы-мутанты для конкретного узла, необходимо применить к его диаграмме процедуру мутации. Для этого диаграмма узла разбивается на два  $(2, 2)$ -сплетения.  $(2, 2)$ -сплетение — это часть диаграммы с двумя входящими и двумя исходящими нитями, как показано на рис. 2.6. Далее к одному из сплетений (в данном случае к  $F$ ) применяется один из поворотов на угол  $\pi \tau_i$ , а результат вклеивается в исходную диаграмму. Так из одного узла можно получить целое семейство узлов-мутантов. Отметим, что не все узлы, которые получаются в результате мутации, отличаются от исходного. Минимальное число пересечений, которое встречается у узлов-мутантов — одиннадцать пересечений. Самые известные узлы-мутанты — пара узлов Киношиты-Терасаки и Конвея (рис. 2.7).

Для крендельных узлов, которые мы обсуждали в разделе 2.1.1 (см. рис. 2.2), мутации соответствуют перестановка местами двухнитевых кос внутри

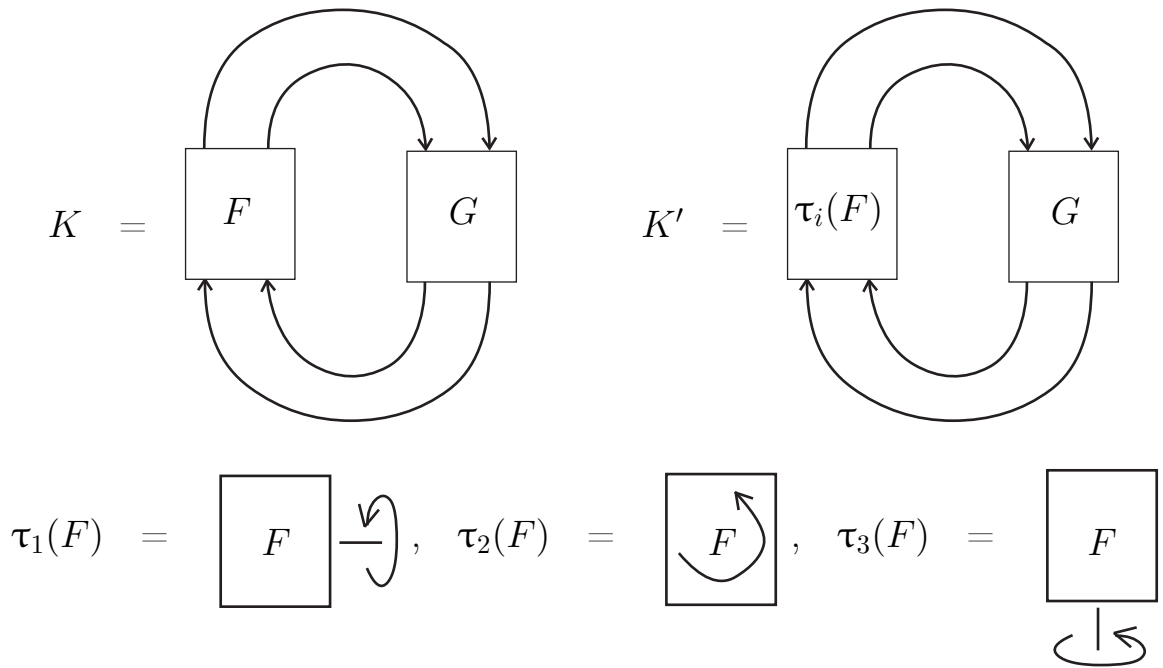


Рисунок 2.6 — Процедура мутации

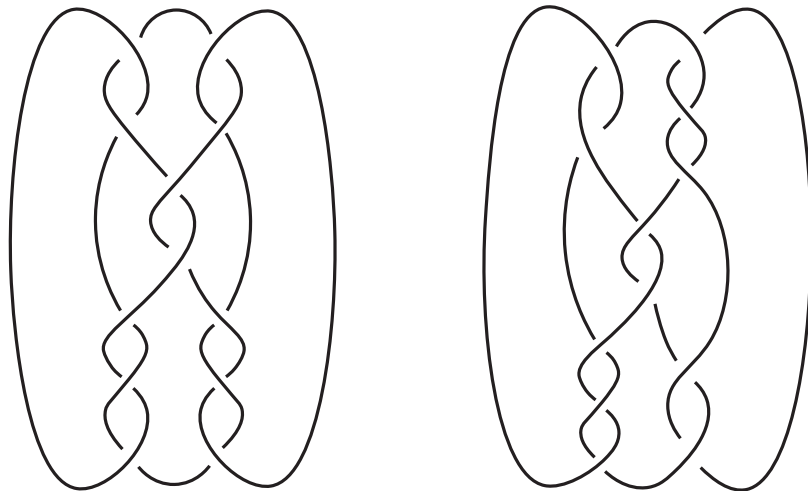


Рисунок 2.7 — Узлы-мутанты Киношиты-Терасаки и Конвея

кренделя. Для крендельных узлов на поверхности рода два и три, мутация дает в точности тот же узел, однако для старших родов существуют более широкие наборы мутантов. Таким образом, начиная с рода 4, появляются пары мутантов-кренделей.

Узлы-мутанты с 11 пересечениями соответствуют следующим номерам из таблицы Рольфсена [119]:

$$\begin{array}{lll}
11a44 - 11a47 & 11a19 - 11a25 & 11n34 - 11n42 \\
11a57 - 11a231 & 11a24 - 11a26 & 11n35 - 11n43 \\
11n71 - 11n75 & 11a251 - 11a253 & 11n36 - 11n44 \\
11n73 - 11n74 & 11a252 - 11a254 & 11n39 - 11n45 \\
11n76 - 11n78 & & 11n40 - 11n46 \\
& & 11n41 - 11n47 \\
& & 11n151 - 11n152
\end{array} \tag{2.97}$$

В первом столбце выписаны крендельные узлы, во втором — оставшиеся альтернированные узлы-мутанты (они обозначаются буквой  $a$  в названии), в третьем — неальтернированные узлы-мутанты (они обозначаются буквой  $n$  в названии).

### Мутанты Мортонa

В статье [30] Х. Мортон предложил узлы-мутанты, которые отличаются еще большей степенью симметрии (см. рис. 2.8). В данном случае узел состоит из трех  $(2, 2)$ -сплетений, два из которых ( $A$  и  $B$ ) симметричны относительно преобразования  $\tau_3$ . Тогда мутантный узел, который получается из исходного перестановкой симметричных сплетений, будет иметь такой же полином ХОМФЛИ-ПТ, как и исходный узел для представлений, соответствующих диаграммам Юнга с меньше чем шестью клетками. Получается, что такие узлы не различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлении  $[2, 1]$ , в отличие от менее симметричных узлов-мутантов. Простейшим представлением, которое их различает, является представление  $[4, 2]$ . Причина этого свойства, вероятно, в том, что представление  $[4, 2]$  — представление с наименьшей размерностью, в разложении квадрата которого появляется кратность 3. Размерность представления  $[4, 2]$  квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  — 27, а алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_4)$  — 126.

В разделе 2.12.1 мы приводим ответы для разностей узлов-мутантов, которые удовлетворяют процедуре мутации Мортонa для крендельных узлов  $MM_1 = (1, 3, 3, -3, -3)$ ,  $MM_2 = (1, 3, -3, 3, -3)$ ,  $MM_3 = (3, 3, 3, -3, -3)$  и  $MM_4 = (3, 3, -3, 3, -3)$ , которые изображены на рис. 2.9.



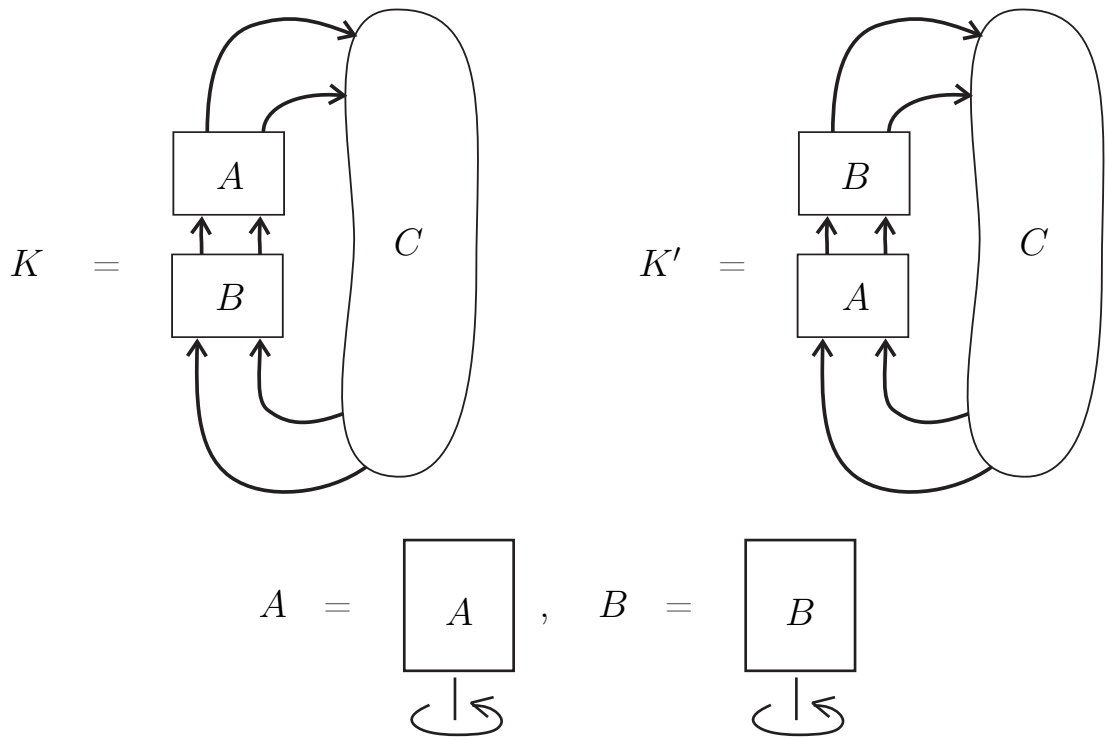


Рисунок 2.8 — Процедура мутации, предложенная Мортонем

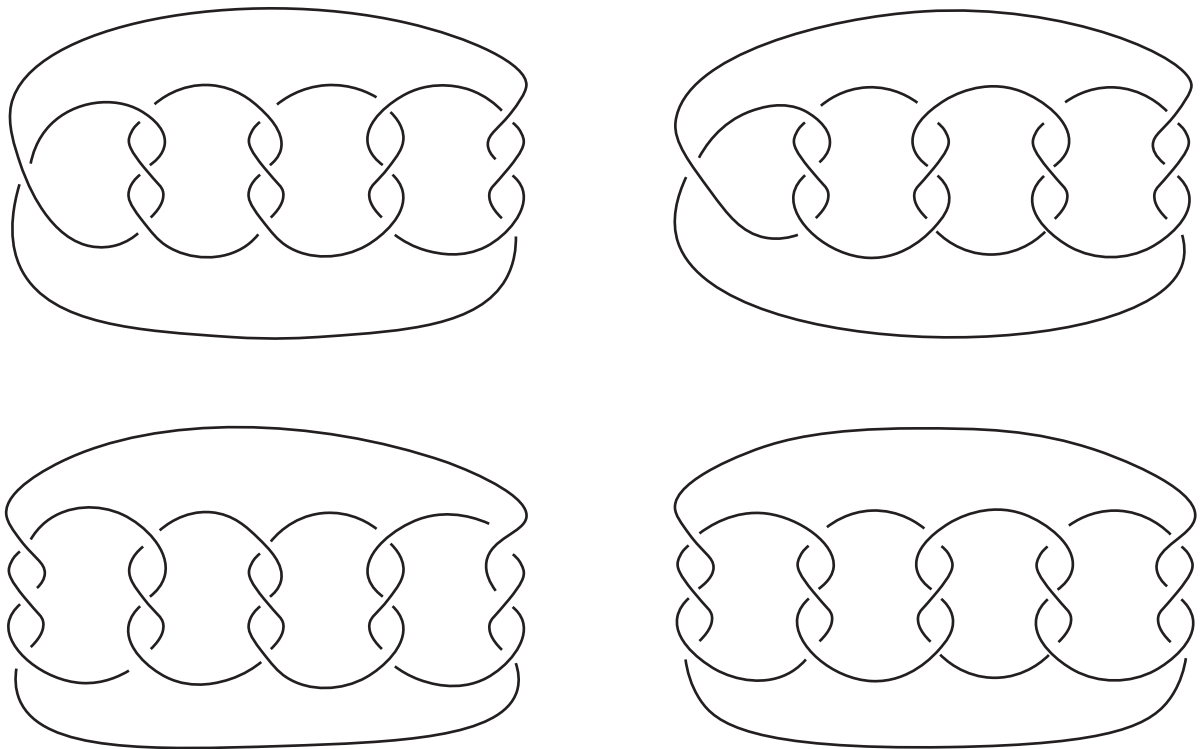


Рисунок 2.9 — Мутанты Мортонна  $(1, 3, 3, -3, -3) - (1, 3, -3, 3, -3)$  и  $(3, 3, 3, -3, -3) - (3, 3, -3, 3, -3)$

## 2.10 Полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлении [2, 1]

Разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями в представлении [2, 1] алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  известны [72]. Так как эти мутантные узлы относятся к семейству древовидных узлов, к ним можно применять модифицированный метод Решетихина-Тураева, который мы описали в начале этой главы. Для создания полного описания полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов, мы приводим здесь результаты вычислений. Эти результаты не были получены автором диссертации, однако используются далее в разделе 2.13.

Разности между полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлении [2, 1] алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  хорошо факторизуются и представляются в следующем виде:

$$\Delta \mathcal{H}_{[2,1]}^{mutant} = A^\gamma \cdot f(A, q) \cdot M(q), \quad (2.98)$$

где  $\gamma$  — целое число,  $M(q)$  зависит только от  $q$  (не зависит от переменной  $A$ ),

$$f(A, q) := \{q\}^{11} \cdot D_3^2 D_2 D_1 D_0^2 D_1 D_{-2} D_{-3}^2 [3]^{-1}, \quad (2.99)$$

где  $D_k = \{Aq^k\}/\{q\}$ .

Полные выражения для разностей полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов с 11 пересечениями в представлении [2, 1] есть в статье [72] (формула 56).

Появление общего множителя (2.99) можно объяснить с помощью свойств квантовых алгебр и полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Поскольку  $A = q^N$  для квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ ,  $D_{-N}$  равно нулю. Это приводит к очевидному предположению, которое подтверждается, что разность должна включать  $D_0$ ,  $D_{-1}$  и  $D_{-2}$ , поскольку мутанты не различаются соответствующими представлениями — кратности в этом случае не возникают. Разности также обращаются в ноль для алгебры  $sl_3$ . Замена переменных  $q \rightarrow -q^{-1}$  в полиноме ХОМФЛИ-ПТ соответствует транспонированию представления. Поскольку представление [2, 1] не меняется при транспонировании, разность включает факторы  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ . Аналогичная структура должна существовать и для других представлений, которые мы рассмотрим в следующих разделах.

## 2.11 Полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлении [3, 1]

Для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов и разностей между ними мы использовали классический метод Решетихина-Тураева, описанный в разделе 1.2. Однако, этот подход позволяет получить ответы только для квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  при фиксированном значении  $N$ . В некоторых случаях нам удалось вычислить разности между полиномами ХОМФЛИ-ПТ для пар мутантных узлов для достаточно большого числа разных квантовых групп, чтобы экстраполировать ответы на произвольные значения  $N$ . Мы также использовали связь между полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлениях, соответствующих транспонированным диаграммам Юнга, в нашем случае [3, 1] и [2, 1, 1]:  $H_{[3,1]}(A, q) = H_{[2,1,1]}(A, -q^{-1})$ . В результате для группы узлов-мутантов с 11 пересечениями получилось выделить следующие дифференциалы в разности между полиномами:

$$\boxed{\Delta \mathcal{H}_{[3,1]}^{mutant} = M(A, q) \cdot D_4 D_3 D_2 D_1 D_0^2 D_{-1} D_{-2}.} \quad (2.100)$$

В этом случае ответ не так сильно факторизуется, как в случае представления [2, 1]: выделяются только дифференциалы, а множитель  $M(A, q)$  зависит от двух переменных. Ожидаемо возникают дифференциалы  $D_0$ ,  $D_{-1}$  и  $D_{-2}$ , поскольку мутанты не различаются соответствующими представлениями. Для транспонированного представления [2, 1, 1] получаем  $D_0$ ,  $D_1$  и  $D_2$ . В случае  $sl_3$  представление [2, 1, 1] совпадает с [1], что означает обращение в ноль разности и дифференциала  $D_3$ .

Для крендельных узлов-мутантов мы вычислили ответы для представления [3, 1] алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  для  $N$  от 3 до 7 и для представления [2, 1, 1] алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  для  $N$  от 5 до 8. Полиномы некрендельных узлов-мутантов вычислить сложнее. В этом случае мы получили ответы только для представления [3, 1] алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_4)$ .

Мы смогли провести экстраполяцию, потому что степени многочленов (они зависят от  $A^2$ ) оказались меньше числа известных точек. Мы также использовали информацию об общих множителях, которые появляются в ответах для разных алгебр, так как предполагали, что ответ по структуре будет похож на ответ для представления [2, 1] (2.98). В таблице 2 можно увидеть,

как общий множитель был извлечен из множителей (факторов) для каждого фиксированного  $N$ . В столбце “факторы” мы указали наибольший общий делитель разностей полиномов ХОМФЛИ-ПТ различных узлов для определенных значений  $N$ . В таблице 2 приведены нормированные ответы, нормировочный коэффициент (полином неузла) для представления  $[3, 1]$ :  $\mathcal{H}_{[3,1]}^{\text{unknot}} = \frac{D_2 D_1 D_0 D_{-1}}{[4][2]}$ .

|           | [3,1]                       |                  | [2,1,1]                  |                 |
|-----------|-----------------------------|------------------|--------------------------|-----------------|
| алгебра   | факторы                     | дифференциалы    | факторы                  | дифференциалы   |
| $sl_3$    | $[9][8]^2[7][6][4]^3[2]$    | $[7][6][3][1]$   |                          |                 |
| $sl_4$    | $[8][7][4]^3[2]^3$          | $[8][7][4][2]$   |                          |                 |
| $sl_5$    | $[9][8][6][5][4]^2[3][2]^3$ | $[9][8][5][3]$   | $[8]^2[7][5][4]^3[2]^2$  | $[7][5][2][1]$  |
| $sl_6$    | $[10][9][6][5][4]^3[2]^2$   | $[10][9][6][4]$  | $[9][8][6][4]^2[2]^3$    | $[8][6][3][2]$  |
| $sl_7$    | $[11][10][7][5][4]^5[2]$    | $[11][10][7][5]$ | $[9][7][6][4]^3[3][2]^3$ | $[9][7][4][3]$  |
| $sl_8$    |                             |                  | $[10][8][5][4]^3[2]^2$   | $[10][8][5][4]$ |
| результат | $D_4 D_3 D_0 D_{-2}$        |                  | $D_2 D_0 D_{-3} D_{-4}$  |                 |

Таблица 2 — Таблица общих факторов в разностях узлов-мутантов с 11 пересечениями в представлениях  $[3, 1]$  и  $[2, 1, 1]$

Мы также сделали дополнительную проверку экстраполированных результатов, используя разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ по родам.

### 2.11.1 Разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ по родам

Разложение полинома ХОМФЛИ-ПТ  $H_Q^{\mathcal{K}}(A, q)$  по степеням  $z = q - q^{-1}$  называют разложением по родам [172–174]:

$$H_Q^{\mathcal{K}}(A, q) = {}_0\bar{\sigma}_Q^{\mathcal{K}}(A) + {}_1\bar{\sigma}_Q^{\mathcal{K}}(A) \cdot z + {}_2\bar{\sigma}_Q^{\mathcal{K}} \cdot z^2 + {}_3\bar{\sigma}_Q^{\mathcal{K}} \cdot z^3 + {}_4\bar{\sigma}_Q^{\mathcal{K}} \cdot z^4 \dots \quad (2.101)$$

В результате мы можем разделить зависимость от представления  $Q$  и от узла  $\mathcal{K}$  в каждом порядке этого разложения. Зависимость от узла  $\mathcal{K}$  содержится в  $\sigma^{\mathcal{K}}$ , а  $\varphi_Q(T)$  зависят от представления  $Q$ .

$$\begin{aligned} {}_0\bar{\sigma}_Q^{\mathcal{K}} &= \left(\sigma_{[1]}^{\mathcal{K}}\right)^{|Q|}, \\ {}_1\bar{\sigma}_Q^{\mathcal{K}} &= \left(\sigma_{[1]}^{\mathcal{K}}\right)^{|Q|-2} \cdot {}_1\sigma_{[2]}^{\mathcal{K}} \cdot \varphi_Q([2]), \\ {}_2\bar{\sigma}_Q^{\mathcal{K}} &= \left(\sigma_{[1]}^{\mathcal{K}}\right)^{|Q|-4} \cdot \left({}_2\sigma_{[1]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([1]) + {}_2\sigma_{[11]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([11]) + {}_2\sigma_{[3]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([3]) + {}_2\sigma_{[22]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([22])\right), \\ {}_3\bar{\sigma}_Q^{\mathcal{K}} &= \left(\sigma_{[1]}^{\mathcal{K}}\right)^{|Q|-6} \cdot \left({}_3\sigma_{[2]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([2]) + {}_3\sigma_{[21]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([21]) + {}_3\sigma_{[4]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([4]) + {}_3\sigma_{[211]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([211]) + \right. \\ &\quad \left. + {}_3\sigma_{[32]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([32]) + {}_3\sigma_{[222]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([222])\right), \\ {}_4\bar{\sigma}_Q^{\mathcal{K}} &= \left(\sigma_{[1]}^{\mathcal{K}}\right)^{|Q|-8} \cdot \left({}_4\sigma_{[1]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([1]) + {}_4\sigma_{[11]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([11]) + {}_4\sigma_{[3]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([3]) + {}_4\sigma_{[111]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([111]) + \right. \\ &\quad \left. + {}_4\sigma_{[31]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([31]) + {}_4\sigma_{[22]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([22]) + {}_4\sigma_{[1111]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([1111]) + {}_4\sigma_{[5]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([5]) + {}_4\sigma_{[311]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([311]) + \right. \\ &\quad \left. + {}_4\sigma_{[221]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([221]) + {}_4\sigma_{[42]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([42]) + {}_4\sigma_{[33]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([33]) + {}_4\sigma_{[2211]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([2211]) + \right. \\ &\quad \left. + {}_4\sigma_{[322]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([322]) + {}_4\sigma_{[2222]}^{\mathcal{K}} \varphi_Q([2222])\right). \end{aligned} \quad (2.102)$$

Используя ответы для полиномов ХОМФЛИ-ПТ в представлениях [1], [2], [3], [2, 1], [4] и [2, 2] для крендельных узлов-мутантов, мы нашли все  $\sigma$ , входящие в разложение по родам полинома в представлении [3, 1]. Это позволило нам провести дополнительную проверку полиномов, которые мы получили для представления [3, 1]  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ .

### 2.11.2 Разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ крендельных узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями

Для крендельных узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями были получены полиномы ХОМФЛИ-ПТ от двух переменных ( $A$  и  $q$ ) путем экстраполяции ответов для представлений [3, 1] алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  с  $N = 3, 4, 5, 6, 7$  и для представлений [2, 1, 1] алгебр с  $N = 5, 6, 7, 8$ . Ответы очень громоздки,

поэтому мы приводим здесь только один пример, а остальные перечислены в приложении A.1.1. Разности полиномов узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями, которые не представляются в виде кренделей, в представлении [3, 1] мы тоже вычислили, только для алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_4)$ . Результаты приведены в приложении A.1.2.

Нормированная разность полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов 11a44 и 11a47:

$$\Delta H_{[3,1]}^{11a44-11a47} = \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} = & \{q\}^8 [4]^2 [2] D_4 D_3 D_0 D_{-2} A^{-4} q^{-42} (A^8 q^{86} - A^8 q^{84} - 2A^6 q^{84} + A^8 q^{82} + 3A^6 q^{82} + \\ & + A^4 q^{82} - 2A^{10} q^{80} - A^8 q^{80} - 3A^6 q^{80} - 2A^4 q^{80} + 2A^{10} q^{78} + 5A^8 q^{78} + 2A^4 q^{78} - \\ & - 5A^8 q^{76} - 4A^6 q^{76} + A^4 q^{76} + A^{12} q^{74} - 2A^{10} q^{74} + A^8 q^{74} + 4A^6 q^{74} + 3A^4 q^{74} - A^{12} q^{72} - \\ & - A^{10} q^{72} + 10A^8 q^{72} - 4A^6 q^{72} - 6A^4 q^{72} - 2A^2 q^{72} - A^{12} q^{70} + A^{10} q^{70} - 2A^8 q^{70} - \\ & - 5A^6 q^{70} + 11A^4 q^{70} + 5A^2 q^{70} + 3A^{12} q^{68} - 6A^8 q^{68} - 10A^6 q^{68} - 4A^4 q^{68} - 7A^2 q^{68} - \\ & - A^{12} q^{66} - 5A^{10} q^{66} + 15A^8 q^{66} + 20A^6 q^{66} + 8A^4 q^{66} + A^2 q^{66} - 2A^{12} q^{64} - 4A^{10} q^{64} - \\ & - 6A^8 q^{64} - 25A^6 q^{64} - A^4 q^{64} + 2A^2 q^{64} + 5A^{12} q^{62} + 14A^{10} q^{62} + 16A^8 q^{62} - 15A^6 q^{62} + \\ & + A^4 q^{62} - 8A^2 q^{62} + q^{62} - 4A^{12} q^{60} - 18A^{10} q^{60} - 8A^8 q^{60} + 19A^6 q^{60} + 24A^4 q^{60} + \\ & + 2A^2 q^{60} - 3q^{60} - A^{10} q^{58} + 3A^8 q^{58} - 27A^6 q^{58} - 9A^4 q^{58} + 5q^{58} + 6A^{12} q^{56} + 13A^{10} q^{56} \\ & + 36A^8 q^{56} - 9A^6 q^{56} - 4A^4 q^{56} - 14A^2 q^{56} - 2q^{56} - 6A^{12} q^{54} - 24A^{10} q^{54} - 20A^8 q^{54} + \\ & + 10A^6 q^{54} + 39A^4 q^{54} + 8A^2 q^{54} - 4q^{54} + 2A^{12} q^{52} + 6A^{10} q^{52} - 6A^8 q^{52} - 58A^6 q^{52} - \\ & - 13A^4 q^{52} + A^2 q^{52} + 15q^{52} + 6A^{12} q^{50} + 13A^{10} q^{50} + 61A^8 q^{50} + 41A^6 q^{50} + 11A^4 q^{50} - \\ & - 40A^2 q^{50} - 19q^{50} - 9A^{12} q^{48} - 37A^{10} q^{48} - 44A^8 q^{48} - 23A^6 q^{48} + 47A^4 q^{48} + \\ & + 46A^2 q^{48} + 15q^{48} + 8A^{12} q^{46} + 24A^{10} q^{46} + 28A^8 q^{46} - 88A^6 q^{46} - 64A^4 q^{46} - \\ & - 38A^2 q^{46} + 5q^{46} - A^{12} q^{44} - 7A^{10} q^{44} + 46A^8 q^{44} + 97A^6 q^{44} + 100A^4 q^{44} - 9A^2 q^{44} - \\ & - 24q^{44} - 3A^{12} q^{42} - 23A^{10} q^{42} - 62A^8 q^{42} - 89A^6 q^{42} - 22A^4 q^{42} + 32A^2 q^{42} + 35q^{42} + \\ & + 6A^{12} q^{40} + 22A^{10} q^{40} + 72A^8 q^{40} - 10A^6 q^{40} - 40A^4 q^{40} - 63A^2 q^{40} - 18q^{40} - 4A^{12} q^{38} - \\ & - 19A^{10} q^{38} - 4A^8 q^{38} + 30A^6 q^{38} + 107A^4 q^{38} + 37A^2 q^{38} - 7q^{38} + 2A^{12} q^{36} - 20A^8 q^{36} - \\ & - 76A^6 q^{36} - 38A^4 q^{36} - 8A^2 q^{36} + 29q^{36} + A^{12} q^{34} + A^{10} q^{34} + 45A^8 q^{34} + 22A^6 q^{34} + \\ & + A^4 q^{34} - 46A^2 q^{34} - 26q^{34} - A^{12} q^{32} - 7A^{10} q^{32} - 5A^8 q^{32} - 3A^6 q^{32} + 54A^4 q^{32} + \\ & + 40A^2 q^{32} + 8q^{32} + A^{12} q^{30} - A^{10} q^{30} - 4A^8 q^{30} - 52A^6 q^{30} - 26A^4 q^{30} - 18A^2 q^{30} - \\ & + 17q^{30} + A^{10} q^{28} + 26A^8 q^{28} + 18A^6 q^{28} + 21A^4 q^{28} - 24A^2 q^{28} - 21q^{28} - 4A^{10} q^{26} - \\ & - 10A^8 q^{26} - 9A^6 q^{26} + 30A^4 q^{26} + 21A^2 q^{26} + 10q^{26} - A^{10} q^{24} + 8A^8 q^{24} - 26A^6 q^{24} - \\ & - 26A^4 q^{24} - 23A^2 q^{24} + 9q^{24} + A^{10} q^{22} + 12A^8 q^{22} + 9A^6 q^{22} + 24A^4 q^{22} + 5A^2 q^{22} - \\ & - 12q^{22} - 2A^{10} q^{20} - 9A^8 q^{20} - 15A^6 q^{20} + 12A^4 q^{20} + 4A^2 q^{20} + 4q^{20} + 8A^8 q^{18} - \\ & - 6A^4 q^{18} - 19A^2 q^{18} + 5q^{18} + 2A^8 q^{16} - A^6 q^{16} + 5A^4 q^{16} + 9A^2 q^{16} - 3q^{16} - A^8 q^{14} - \\ & - 8A^6 q^{14} + 6A^4 q^{14} + 2A^2 q^{14} + A^8 q^{12} - A^6 q^{12} + 2A^4 q^{12} - 10A^2 q^{12} + q^{12} + A^8 q^{10} + \\ & + 3A^6 q^{10} + A^4 q^{10} + 3A^2 q^{10} - 5A^6 q^8 - 2A^4 q^8 + A^2 q^8 + 4A^4 q^6 - 2A^2 q^6 + A^6 q^4 - \\ & - A^6 q^2 - A^4 q^2 + A^4). \end{aligned}$$

Следующие коэффициенты разложения по родам не различают узлы-мутанты, и для узлов  $11a44$  и  $11a47$  равны:

$$\begin{aligned}
\sigma_{[1]} &= -\frac{5A^6-13A^4+9A^2-2}{A^4}, \\
{}_1\sigma_{[2]} &= \frac{(A^2-1)(53A^{10}-116A^8+29A^6+70A^4-53A^2+11)}{A^8}, \\
{}_2\sigma_{[1]} &= -\sigma_{[1]}^3 \frac{7A^6-22A^4+15A^2-3}{A^4}, \\
{}_2\sigma_{[1,1]} &= \sigma_{[1]}^2 \frac{299A^{12}-1293A^{10}+2303A^8-2159A^6+1187A^4-382A^2+57}{2A^8}, \\
{}_2\sigma_{[3]} &= -\sigma_{[1]} \frac{(A^2-1)^2(2011A^{14}-5594A^{12}+5010A^{10}-2501A^8+2509A^6-2497A^4+1139A^2-188)}{2A^{12}}, \\
{}_2\sigma_{[2,2]} &= {}_1\sigma_{[2]}^2, \\
{}_3\sigma_{[2]} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{(A^2-1)(3125A^{10}-6708A^8+197A^6+5998A^4-3989A^2+811)}{8A^8}, \\
{}_3\sigma_{[2,1]} &= -\sigma_{[1]}^3 \frac{(A^2-1)(13936A^{16}-56799A^{14}+82137A^{12}-34516A^{10}-35635A^8+55190A^6-32764A^4+10033A^2-1318)}{3A^{12}}, \\
{}_3\sigma_{[4]} &= \sigma_{[1]}^2 \frac{L(A^2-1)}{6A^{16}}, \\
{}_3\sigma_{[2,1,1]} &= ({}_1\sigma_{[2]}) \cdot ({}_2\sigma_{[1,1]}), \\
{}_4\sigma_{[1]} &= -\sigma_{[1]}^7 \frac{(2A^2-1)(2A^4-7A^2+1)}{A^4}, \\
{}_4\sigma_{[1,1]} &= \sigma_{[1]}^6 \frac{1702A^{12}-7432A^{10}+13357A^8-12798A^6+7557A^4-2712A^2+444}{2A^8}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1,1]} &= 3({}_2\sigma_{[1,1]})^2,
\end{aligned} \tag{2.104}$$

где

$$\begin{aligned}
L &= 136412A^{24} - 844179A^{22} + 2169523A^{20} - 2942698A^{18} + 2101236A^{16} - \\
&\quad - 361818A^{14} - 919414A^{12} + 1347985A^{10} - 1168221A^8 + 696262A^6 - \\
&\quad - 269099A^4 + 59776A^2 - 5765.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Разница между полиномами ХОМФЛИ-ПТ узлов  $11a44$  и  $11a47$  проявляется только в четвертом порядке разложения по родам:

$$\begin{aligned}
{}_4\sigma_{[3]}^{11a44} &= -\sigma_{[1]}^5 \frac{(A^2-1)^2(126502A^{14}-330767A^{12}+272505A^{10}-161495A^8+212800A^6-203005A^4+89447A^2-15038)}{6A^{12}}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11a44} &= \sigma_{[1]}^5 \frac{M_0}{6A^{12}}, \\
{}_4\sigma_{[3,1]}^{11a44} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{M_1}{8A^{16}}, \\
{}_4\sigma_{[2,2]}^{11a44} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{M_2}{12A^{16}}, \\
{}_4\sigma_{[3]}^{11a47} &= {}_4\sigma_{[3]}^{11a44} - \sigma_{[1]}^5 \frac{12(A^2-1)^7}{A^8}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11a47} &= {}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11a44} + \sigma_{[1]}^5 \frac{24(A^2-1)^7}{A^8}, \\
{}_4\sigma_{[3,1]}^{11a47} &= {}_4\sigma_{[3,1]}^{11a44} + \sigma_{[1]}^5 \frac{12(A^2-1)^7}{A^8}, \\
{}_4\sigma_{[2,2]}^{11a47} &= {}_4\sigma_{[2,2]}^{11a44} - \sigma_{[1]}^5 \frac{32(A^2-1)^7}{A^8},
\end{aligned} \tag{2.106}$$

где

$$\begin{aligned}
M_0 &= -115078A^{18} + 681937A^{16} - 1808204A^{14} + 2851057A^{12} - 2997653A^{10} + \\
&\quad + 2224199A^8 - 1177844A^6 + 430039A^4 - 98241A^2 + 10706, \\
M_1 &= 1119235A^{24} - 7225039A^{22} + 19907264A^{20} - 30800410A^{18} + \\
&\quad + 30670905A^{16} - 23997490A^{14} + 20086857A^{12} - 18271527A^{10} + \\
&\quad + 13724564A^8 - 7265762A^6 + 2522613A^4 - 519606A^2 + 48372, \\
M_2 &= 2219023A^{24} - 13508232A^{22} + 32990983A^{20} - 38826012A^{18} + \\
&\quad + 17251727A^{16} + 6217024A^{14} - 3560525A^{12} - 13683778A^{10} + \\
&\quad + 20342527A^8 - 13652158A^6 + 5218892A^4 - 1113552A^2 + 104153.
\end{aligned}$$

## 2.12 Разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлении $[4, 2]$

Мы вычислили полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов с 11 пересечениями и полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов Х. Мортонна в представлении  $[4, 2]$ . Для последних представление  $[4, 2]$  — простейшее представление, которое их различает.

В работе Х. Мортонна [30] были вычислены разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ для двух пар узлов в представлении  $[4, 2]$  алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$ . Нам удалось повторить эти результаты, а также вычислить и другие разности для алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_4)$ .

### 2.12.1 Разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов Мортонна в представлении $[4, 2]$

В статье Х. Мортонна [30] были упомянуты следующие пары узлов мутантов с дополнительной симметрией (см. рис. 2.9):  $MM_{11} = K(1, 3, 3, -3, -3)$  и  $MM_{12} = K(1, 3, -3, 3, -3)$ ,  $MM_{21} = K(3, 3, 3, -3, -3)$  и  $MM_{22} = K(3, 3, -3, 3, -3)$  (см. рис. 2.9). Для двух пар крендельных узлов  $MM_{11} - MM_{12}$  и  $MM_{21} - MM_{22}$  разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ в представлении  $[4, 2]$  ал-



гебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H}_{[4,2]}^{MM_{11}-MM_{12}} &= 2q^{-136} (q^2 - 1)^{18} (q^3 + q)^{10} (q^4 + 1)^4 (q^4 - q^2 + 1)^5 \times \\ &\times (q^4 + q^2 + 1)^7 (q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1)^3 (q^{20} - q^{16} + q^{14} + q^{12} - q^{10} + q^8 + \\ &+ q^6 - q^4 + 1)^2 (q^{20} + q^{18} + q^{16} + q^{14} + 2q^{12} + 2q^{10} + 2q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1) \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H}_{[4,2]}^{MM_{21}-MM_{22}} &= 2q^{-174} (q^2 - 1)^{18} (q^2 + 1)^{10} (q^4 + 1)^4 (q^4 - q^2 + 1)^5 \times \\ &\times (q^4 + q^2 + 1)^7 (q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1)^3 (q^{20} - q^{16} + q^{14} + q^{12} - q^{10} + q^8 + \\ &+ q^6 - q^4 + 1)^2 (2q^{84} - 2q^{82} - 2q^{80} + 5q^{78} - 5q^{76} - 2q^{74} + 14q^{72} - 14q^{70} - \\ &- 12q^{68} + 35q^{66} - 13q^{64} - 33q^{62} + 46q^{60} + 4q^{58} - 54q^{56} + 34q^{54} + 24q^{52} - \\ &- 49q^{50} + 15q^{48} + 18q^{46} - 37q^{44} + 19q^{42} + 15q^{40} - 39q^{38} + 23q^{36} + 23q^{34} - \\ &- 40q^{32} + 12q^{30} + 37q^{28} - 26q^{26} - 11q^{24} + 30q^{22} + q^{20} - 16q^{18} + 10q^{16} + \\ &+ 12q^{14} - 5q^{12} - 3q^{10} + 8q^8 + 3q^6 - 2q^4 + q^2 + 2) \end{aligned} \quad (2.108)$$

Эти разности совпадают с результатом в [30] после подстановки  $q \rightarrow q^{-2}$  и умножения на полином ХОМФЛИ-ПТ неузла ( $\mathcal{H}_{[4,2]}^{\text{unknot}} = \frac{[6][3]}{[2]}$ ). Нам также удалось вычислить сами полиномы, они приведены в Приложении A.2.

Для алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_4)$  ( $\mathcal{H}_{[4,2,0]}^{\text{unknot}} = \frac{[7][6][4][3]}{[2]^2}$ ) ненормированные разности равны

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H}_{[4,2,0]}^{MM_{11}-MM_{12}} &= 2q^{-156} (q - 1)^{18} (q + 1)^{18} (q^2 + 1)^{10} (q^2 - q + 1)^5 \times \\ &\times (q^2 + q + 1)^5 (q^4 + 1)^4 (q^4 - q^2 + 1)^2 (q^4 - q^3 + q^2 - q + 1)^3 \times \\ &\times (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)^3 (q^6 - q^3 + 1) (q^6 + q^3 + 1) (q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + \\ &+ q^2 - q + 1) (q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) (q^8 + 1) (q^8 - q^6 + q^4 - q^2 + 1)^2 \times \\ &\times (q^{40} + q^{36} + 2q^{34} + q^{32} + q^{30} + 3q^{28} + q^{26} + 2q^{24} + 3q^{22} + 2q^{20} + 3q^{18} + 2q^{16} + \\ &+ q^{14} + 3q^{12} + q^{10} + q^8 + 2q^6 + q^4 + 1)^2 \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H}_{[4,2,0]}^{MM_{21}-MM_{22}} &= 2q^{-224} (q - 1)^{18} (q + 1)^{18} (q^2 + 1)^{10} (q^2 - q + 1)^5 (q^2 + q + 1)^5 \times \\ &\times (q^4 + 1)^4 (q^4 - q^2 + 1)^2 (q^4 - q^3 + q^2 - q + 1)^3 (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)^3 (q^6 - \\ &- q^3 + 1) (q^6 + q^3 + 1) (q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1) (q^8 + 1) (q^6 + q^5 + q^4 + \\ &+ q^3 + q^2 + q + 1) (q^8 - q^6 + q^4 - q^2 + 1)^2 (q^{40} + q^{36} + 2q^{34} + q^{32} + q^{30} + 3q^{28} + \\ &+ q^{26} + 2q^{24} + 3q^{22} + 2q^{20} + 3q^{18} + 2q^{16} + q^{14} + 3q^{12} + q^{10} + q^8 + 2q^6 + q^4 + 1)^2 \times \\ &\times (2q^{84} - 4q^{82} - 2q^{80} + 10q^{78} - 5q^{76} - 10q^{74} + 17q^{72} - q^{70} - 25q^{68} + 22q^{66} + \\ &+ 9q^{64} - 21q^{62} + 7q^{60} + 3q^{58} + 7q^{56} - 22q^{54} - q^{52} + 46q^{50} - 43q^{48} - 7q^{46} + 43q^{44} - \\ &- 41q^{42} + 11q^{40} + 17q^{38} - 24q^{36} + 23q^{34} - 12q^{32} - 9q^{30} + 20q^{28} - 17q^{26} + 7q^{24} + \\ &+ 7q^{22} - 12q^{20} + 10q^{18} - 4q^{16} - 6q^{14} + 9q^{12} - 2q^{10} - 2q^8 + 4q^6 - 2q^4 - 2q^2 + 2) \end{aligned} \quad (2.110)$$

**2.12.2 Разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ крендельных узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями в представлении [4, 2]**

Мы вычислили ответы для узлов-мутантов с 11 пересечениями в представлении [4, 2] алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_4)$ . Для алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  разности имеют очень красивую форму:

$$\begin{aligned}
\Delta H_{[4,2]}^{11a19-11a25} &= -2\{q\}^{14} \frac{[9]^3}{[3]^3} [8] [7] [5]^2 [4]^3 [2]^4 q^{-60} (q^8 - q^4 + 1)^2 (q^{12} + q^8 - 1)^2, \\
\Delta H_{[4,2]}^{11a24-11a26} &= -2\{q\}^{14} \frac{[9]^3}{[3]^3} [8] [7] [5]^2 [4]^3 [2]^4 q^{-28} (q^8 - q^4 + 1)^2 (q^{12} - q^4 - 1) (q^{12} + q^8 - 1), \\
\Delta H_{[4,2]}^{11a44-11a47} &= 2\{q\}^{14} [12] \frac{[9]^2}{[3]^2} [8] [7] [5]^2 [4] [2]^4 q^{-6} (q^{12} + q^8 - 1), \\
\Delta H_{[4,2]}^{11a57-11a231} &= -2\{q\}^{14} [12] \frac{[9]^2}{[3]^2} [8] [7] [5]^2 [4] [2]^4 q^{26} (q^{12} - q^4 - 1), \\
\Delta H_{[4,2]}^{11a251-11a253} &= -2\{q\}^{14} \frac{[9]^3}{[3]^3} [8] [7] [5]^2 [4]^3 [2]^4 q^{-12} (q^8 - q^4 + 1)^2 (q^{12} - q^4 - 1) (q^{12} + q^8 - 1), \\
\Delta H_{[4,2]}^{11a252-11a254} &= -2\{q\}^{14} \frac{[9]^3}{[3]^3} [8] [7] [5]^2 [4]^3 [2]^4 q^{-44} (q^8 - q^4 + 1)^2 (q^{12} + q^8 - 1)^2, \\
\Delta H_{[4,2]}^{11n34-11n42} &= -2\{q\}^{14} \frac{[9]^3}{[3]^3} [8] [7] [5]^2 [4]^3 [2]^4 q^4 (q^8 - q^4 + 1)^2 (q^{12} - q^4 - 1) (q^{12} + q^8 - 1), \\
\Delta H_{[4,2]}^{11n35-11n43} &= -2\{q\}^{14} \frac{[9]^3}{[3]^3} [8] [7] [5]^2 [4]^3 [2]^4 q^{-132} (q^8 - q^4 + 1)^2 (q^{12} + q^8 - 1)^2, \\
\Delta H_{[4,2]}^{11n36-11n44} &= -2\{q\}^{14} \frac{[9]^3}{[3]^3} [8] [7] [5]^2 [4]^3 [2]^4 q^{-68} (q^8 - q^4 + 1)^2 (q^{12} - q^4 - 1) (q^{12} + q^8 - 1), \\
\Delta H_{[4,2]}^{11n39-11n45} &= -2\{q\}^{14} \frac{[9]^3}{[3]^3} [8] [7] [5]^2 [4]^3 [2]^4 q^{-28} (q^8 - q^4 + 1)^2 (q^{12} + q^8 - 1)^2, \\
\Delta H_{[4,2]}^{11n40-11n46} &= -2\{q\}^{14} \frac{[9]^3}{[3]^3} [8] [7] [5]^2 [4]^3 [2]^4 q^{-100} (q^8 - q^4 + 1)^2 (q^{12} - q^4 - 1) (q^{12} + q^8 - 1), \\
\Delta H_{[4,2]}^{11n41-11n47} &= -2\{q\}^{14} \frac{[9]^3}{[3]^3} [8] [7] [5]^2 [4]^3 [2]^4 q^{-100} (q^8 - q^4 + 1)^2 (q^{12} + q^8 - 1)^2, \\
\Delta H_{[4,2]}^{11n71-11n75} &= -2\{q\}^{14} [12] \frac{[9]^2}{[3]^2} [8] [7] [5]^2 [4] [2]^4 q^{-78} (q^{12} + q^8 - 1), \\
\Delta H_{[4,2]}^{11n73-11n74} &= 2\{q\}^{14} [12] \frac{[9]^2}{[3]^2} [8] [7] [5]^2 [4] [2]^4 q^{-22} (q^{12} + q^8 - 1), \\
\Delta H_{[4,2]}^{11n76-11n78} &= 2\{q\}^{14} [12] \frac{[9]^2}{[3]^2} [8] [7] [5]^2 [4] [2]^4 q^{-94} (q^{12} + q^8 - 1), \\
\Delta H_{[4,2]}^{11n151-11n152} &= -2\{q\}^{14} \frac{[9]^3}{[3]^3} [8] [7] [5]^2 [4]^3 [2]^4 q^{-76} (q^8 - q^4 + 1)^2 (q^{12} + q^8 - 1)^2.
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Разности полиномов узлов-мутантов в алгебре  $\mathcal{U}_q(sl_4)$  гораздо более громоздкие. Мы приводим здесь только один пример, остальные перечислены в приложении. **A.3.**

$$\begin{aligned}
\Delta H_{[4,2]}^{11a44-11a47} = \{q\}^{11} [10] [8] [5]^2 [4] [2]^4 q^{-134} & (q^{240} + q^{238} - 5q^{236} + 3q^{234} + 16q^{232} - \\
& - 25q^{230} - 10q^{228} + 68q^{226} - 55q^{224} - 63q^{222} + 159q^{220} - 77q^{218} - \\
& - 152q^{216} + 283q^{214} - 133q^{212} - 243q^{210} + 521q^{208} - 357q^{206} - \\
& - 362q^{204} + 1071q^{202} - 861q^{200} - 577q^{198} + 2005q^{196} - 1625q^{194} - \\
& - 821q^{192} + 3090q^{190} - 2510q^{188} - 924q^{186} + 4049q^{184} - 3461q^{182} - \\
& - 594q^{180} + 4401q^{178} - 4299q^{176} + 747q^{174} + 3089q^{172} - 4627q^{170} + \\
& + 4031q^{168} - 1571q^{166} - 3139q^{164} + 8612q^{162} - 9627q^{160} + \\
& + 1978q^{158} + 10583q^{156} - 17480q^{154} + 10665q^{152} + 6090q^{150} - \\
& - 20139q^{148} + 19642q^{146} - 4350q^{144} - 14450q^{142} + 22450q^{140} - \\
& - 14428q^{138} - 2442q^{136} + 15829q^{134} - 18756q^{132} + 11647q^{130} + \\
& + 1895q^{128} - 15789q^{126} + 21696q^{124} - 12857q^{122} - 6827q^{120} + \\
& + 22591q^{118} - 21389q^{116} + 4642q^{114} + 14050q^{112} - 21105q^{110} + \\
& + 13323q^{108} + 1819q^{106} - 13568q^{104} + 14750q^{102} - 6358q^{100} - \\
& - 4158q^{98} + 9644q^{96} - 8167q^{94} + 2588q^{92} + 2934q^{90} - 5824q^{88} + \\
& + 5141q^{86} - 1372q^{84} - 2846q^{82} + 4574q^{80} - 2799q^{78} - 832q^{76} + \\
& + 3227q^{74} - 2650q^{72} + q^{70} + 2218q^{68} - 2081q^{66} - q^{64} + 1659q^{62} - \\
& - 1355q^{60} - 216q^{58} + 1202q^{56} - 730q^{54} - 313q^{52} + 726q^{50} - \\
& - 333q^{48} - 204q^{46} + 349q^{44} - 131q^{42} - 81q^{40} + 111q^{38} - 32q^{36} - \\
& - 19q^{34} + q^{32} + 15q^{30} + 6q^{28} - 26q^{26} + 10q^{24} + 16q^{22} - 16q^{20} - \\
& - 7q^{18} + 15q^{16} - 12q^{12} + 7q^{10} + 4q^8 - 6q^6 + q^4 + 2q^2 - 1).
\end{aligned}
\tag{2.112}$$

### 2.13 Дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов с дефектом $\delta = 2$ на примере узлов-мутантов

Построение дифференциального разложения полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов с дефектом  $\delta = 2$  является очень сложной задачей. На основе разностей полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлениях  $[2, 1]$  и  $[3, 2]$  был проведен анализ возможной формы дифференциального разложения в этом случае.

Рассмотрим разность дифференциальных разложений полиномов пары узлов-мутантов. Мы обозначаем разность через  $\Delta$ . Можно предположить, что вклад в нее вносят только недиагональные составные представления, такие как  $X_2 := ([2], [1, 1]) \oplus ([1, 1], [2])$  и  $X_3 := ([3], [2, 1]) \oplus ([2, 1], [3])$ . Мы,

однако, допускаем также дополнительное преобразование некоторых коэффициентов дифференциального разложения, которые остаются ненаблюдаемыми в лидирующем порядке, но могут внести вклад в старшие представления, эти преобразования мы обозначим через малую  $\delta$ . В первом смешанном представлении из [70, ур.(106)] и [163, ур.(14)-(17)] можно получить выражение, зависящее от двух неизвестных функций вида

$$\begin{aligned} \Delta H_{[2,1]} &= \frac{[3]}{[2]^2} \left( \underbrace{D_0^2}_{\times 0} + \underbrace{[3]D_2D_{-2}}_{\times \{q\}^4[2]^2 \cdot \delta F_{[1]}} \right) \oplus \underbrace{\{q\}^4[3]^2 D_2D_{-2}}_{\times (\Delta F_{X_2} - \delta F_{[1]})} = \\ &= \{q\}^4 \cdot [3]^2 D_3^2 D_2 D_0 D_{-2} D_{-3}^2 \cdot \text{Mt}_{[2,1]}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Величина  $\delta F_1$  обозначает возможное перераспределение коэффициентов между разными членами дифференциального разложения для двух мутантов, которое при этом не влияет на правую часть выражения, однако может проявить себя в разнице между мутантами в старших представлениях. Естественно предположить, что она равна нулю, однако мы оставляем эту возможность открытой.

Аналогично, для следующего смешанного представления

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1]} &= \frac{[4]}{[3]} \left( \underbrace{D_1 D_0}_0 + \underbrace{\frac{[4]}{[2]} D_3 D_{-2}}_{\times [2]^2 \{q\}^4 \cdot \delta F_{[1]}} \right) \oplus \underbrace{\{q\}^4 [4]^2 [2] D_3 D_{-2}}_{\times (\Delta F_{X_2} - \delta F_{[1]})} + \\ &+ \frac{[4]}{[3]^2} \left( \underbrace{D_3 D_1^2 D_0}_{\times 0} + \underbrace{[4][2] D_4 D_3 \overline{D_0} D_{-2}}_{\times \{q\}^4 [3]^2 \cdot \delta F_{[2]}} \right) \oplus \underbrace{\{q\}^4 [4]^2 [2] D_4 D_3 \overline{D_0} D_{-2}}_{\times (\Delta F_{X_3} - \delta F_{[2]})} = \\ &= \{q\}^4 \cdot [4]^2 [2] D_4 D_3 D_0 D_{-2} \cdot \text{Mt}_{[3,1]}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Теперь мы сталкиваемся со следующей проблемой: все члены в последней строке делятся на  $D_4$ , кроме  $\Delta F_{X_2} \neq 0$

Существует по крайней мере два возможных выхода из этой ситуации. Первая возможность заключается в том, чтобы позволить  $\delta F_{[1]} \neq 0$ . Например, возьмем

$$\Delta F_{X_2} = D_3^2 D_0 D_{-3}^2 \cdot \text{Mt}_{[2,1]} \delta F_{[1]} = D_3 D_2 D_1 D_{-3}^2 \cdot \text{Mt}_{[2,1]}$$

так, что  $\Delta F_{X_2} - \delta F_{[1]} = -[2]\{q\}^2 D_3 D_{-3}^2 \cdot \text{Mt}_{[2,1]}$ . Тогда мы получим:

$$\{q\}^4 [4]^2 [2] D_2 D_{-2} \left( \Delta F_{X_2} - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{[3]}\right)}_{\frac{[4]}{[3][2]}} \delta F_{[1]} \right) =$$

$$= \{q\}^4 [4]^2 [2] D_2 D_{-2} D_3 D_{-3}^2 \underbrace{\left( D_3 D_0 - \frac{[4]}{[3][2]} D_2 D_1 \right)}_{\frac{D_4 D_{-1}}{[3]}} \cdot \text{Mt}_{[2,1]},$$

которое делится на  $D_4$ . Однако, теперь возникает новая возможная проблема: мы получаем  $D_4 D_{-1}$ , а не  $D_4 D_0$ , при этом подчеркнутый сверху  $D_0$  может отсутствовать в дифференциальном разложении для ненулевого дефекта. В любом случае, еще большое количество других факторов должно сойтись.

Другая возможность заключается в том, чтобы обратить внимание на  $F_{[3,1]}$ , который не участвовал в вышеизложенном вычислении разностей и может отличаться для разных мутантов. В случае  $H_{[2,1]}$  у нас получалось  $\Delta F_{[2,1]} = 0$ , потому что он также входит в выражение для прямоугольного  $H_{[2,2]}$ , который не различает мутантов, то есть  $\Delta H_{[2,2]} = 0$ . Однако,  $H_{[3,3]}$  содержит вклады от двух непрямоугольных структур, таким образом,  $F_{[3,1]}$  и  $F_{[3,2]}$ , могут быть ненулевыми и компенсировать друг друга в нулевом прямоугольном  $\Delta H_{[3,3]}$ .

Для получения более общих формул и результатов необходимо провести дальнейшие вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов, что на данный момент представляет из себя очень сложную задачу.

## 2.14 Выводы

В данной главе мы исследовали дифференциальное разложение для узлов с разными дефектами. Результаты этой главы опубликованы в работах [114–116]. Основные результаты, описанные в главе, следующие.

1. Для трехмостового узла  $9_{46}$  (см. раздел 2.6) были получены коэффициенты  $F_R^{9_{46}}$  дифференциального разложения для симметрических представлений (2.32), представлений  $R = [2, 1]$  (2.33),  $R = [2, 2]$  (2.34) и коэффициент  $F_{X_2}^{9_{46}}$  (2.64).
2. Для узлов с дефектом  $\delta = 1$  были найдены коэффициенты дифференциального разложения  $\mathcal{Z}_R$ , которые входят в дифференциальное разложение с коэффициентами  $F_{Tw}$  твистованных узлов, для симметрических представлений  $R = [1]$  и  $R = [2]$  ((2.82)-(2.85)) и прямоугольного представления  $R = [2, 2]$  ((2.86)-(2.91)). Связь коэффициентов  $\mathcal{Z}_R$  и  $Z_R$

описывается найденным универсальным преобразованием  $V$  (2.93), которое так же связывает  $F = VF_{Tw}$ .

3. Были вычислены разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов с 11 пересечениями в представлении [3, 1]. В разделе 2.11 приведена общая структура (2.100) таких разностей, которая получена на основе результатов из таблицы 2. Для крендельных узлов-мутантов получены ответы для разностей полиномов ХОМФЛИ-ПТ алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ : они приведены в разделе 2.11.2 и в приложении A.1.1. Там же есть коэффициенты разложения по родам, которые использовались для дополнительной проверки ответов. Для узлов-мутантов с 11 пересечениями, которые не представляются в виде кренделей, были получены ответы в представлении [3, 1] алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_4)$ , они приведены в приложении A.1.2.
4. Впервые были вычислены полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов Мортонa в представлении [4, 2] алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$ , они приведены в приложении A.2. Эти ответы позволили получить разности узлов-мутантов Мортонa (2.107) и (2.108), которые совпали с вычислениями Мортонa [30]. Впервые были вычислены разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов Мортонa в представлении [4, 2] алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_4)$  (2.107) и (2.110).
5. Были вычислены разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ в представлении [4, 2] алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  узлов-мутантов с 11 пересечениями, они приведены в формуле 2.111. Аналогичные вычисления были сделаны для представления [4, 2] алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_4)$  для крендельных узлов-мутантов с 11 пересечениями. Ответы приведены в формуле 2.112 и в приложении A.3.
6. На основе дифференциалов (2.99) и (2.100) в разностях полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлениях [2, 1] и [3, 1] была получена возможная форма дифференциального разложения для узлов с дефектом  $\delta = 2$ : 2.113 и 2.114.

### Глава 3. Полиномы ХОМФЛИ-ПТ в корнях из единицы

Вильсоновские средние в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU_N$  совпадают с полиномами ХОМФЛИ-ПТ [9–11]. При этом переменные полинома  $q$  и  $A$  связаны с константой связи  $k$  (уровнем теории) и степенью  $N$  специальной унитарной группы  $SU_N$  следующим образом:

$$q = e^{\frac{2\pi i}{k + N}}, \quad A = q^N. \quad (3.1)$$

Для того, чтобы теория Черна-Саймонса была калибровочно-инвариантной, параметр  $k$  должен быть целым числом [4], поэтому в этом случае  $q$  должен быть корнем из единицы. Это означает, что для понимания того, как ведут себя наблюдаемые теории Черна-Саймонса, необходимо изучить структуру инвариантов узлов и зацеплений, связанных с  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$ , для  $q$ , равного корню из единицы.

Пусть  $q$  —  $2m$ -й первообразный корень из единицы. Это означает, что не существует целого числа  $p < 2m$ , такого, что  $q^p = 1$ . Полученные результаты распространяются и на нечетные степени.

Когда  $q$  является корнем из единицы, структура представлений  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$  меняется [68; 69], и мы будем называть такую алгебру  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ . Операторы  $E^m$ ,  $F^m$  и  $K^m$  принадлежат центру  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ , что ограничивает размерность неприводимых представлений. Среди неприводимых конечномерных представлений  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  есть как обычные представления со старшим и младшим весом  $L_{m,N}$ , совпадающие с представлениями  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$  и имеющие размерности меньше  $m^{N(N-1)/2}$ , так и новые типы представлений размерностей  $m^{N(N-1)/2}$  с параметрами: циклические  $\mathcal{U}_{m,N}$  и полуциклические  $V_{m,N}$ , а также нильпотентные представления с параметрами  $W_{m,N}$ .

Эти четыре типа представлений порождают инварианты узлов и зацеплений, которые можно вычислить с помощью метода Решетихина-Тураева с использованием  $\mathcal{R}$ -матриц, однако этот метод следует модифицировать. Циклические и полуциклические представления порождают тривиальные инварианты узлов и зацеплений, а инварианты, связанные с представлениями  $L_{m,N}$ , совпадают с многочленами ХОМФЛИ-ПТ. Наиболее интересные инварианты  $\mathcal{P}_{m,N}(\lambda_i)$  связаны с нильпотентными представлениями с параметрами  $W_{m,N}(\lambda_i)$ .

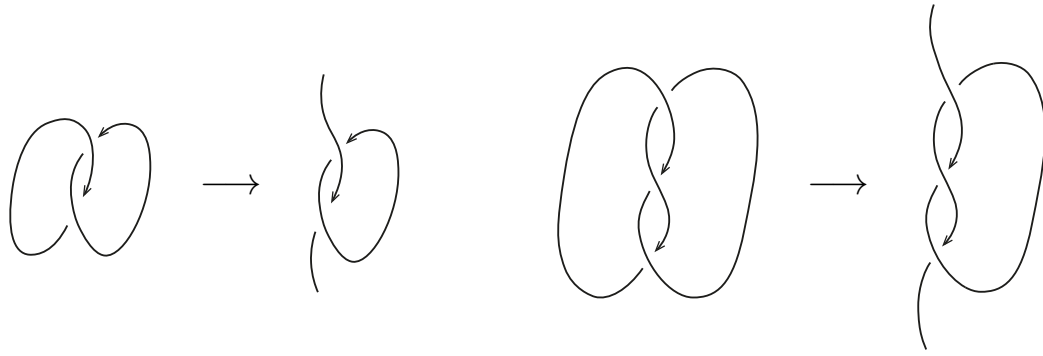


Рисунок 3.1 — Зацепление Хопфа, трилистник и  $(1, 1)$ -сплетения, которые им соответствуют

Проблема применения стандартной версии метода Решетихина-Тураева к вычислению инвариантов узлов и зацеплений в корнях из единицы заключается в том, что этот метод дает инварианты, которые обращаются в ноль. Это происходит потому, что нормировочный коэффициент (инвариант неузла) в случае корней из единицы равен нулю. Модификация метода Решетихина-Тураева позволяет определять нормированные (приведенные) полиномы.

Идея модификации метода заключается в следующем: нужно разрезать одну нить узла/зацепления и вычислять инвариант соответствующего  $(1, 1)$ -сплетения (см. рис. 3.1). Это возможно благодаря существующему соответствию между узлами/зацеплениями и  $(1, 1)$ -сплетениями [175]. Метод Решетихина-Тураева в этом случае позволяет получать редуцированные полиномы, которые, однако, зависят от цвета нити, которая была разрезана. Чтобы восстановить симметрию его компонент и получить инвариант, нужно разделить получившиеся полиномы на нормировочный коэффициент  $\Xi_{m, N}(\lambda_i^{(1)})$ . Этот коэффициент был известен для квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  [65]. В работе [117] мы сначала нашли его для алгебр  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_3)$  и  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_4)$ , а затем обобщили для алгебры  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$  при произвольном  $N$ .

Идея использовать сплетения вместо узлов была реализована Ю. Акуцу, Т. Дегучи и Т. Оцуки в [65], где они также вычислили нормировочный коэффициент для алгебры  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ , восстанавливающий инвариантность ответов. М. Россо упомянул использование модифицированного квантового следа в [67]. Дж. Мураками в своей работе [66] использовал  $\mathcal{R}$ -матричный подход (основанный на универсальной  $\mathcal{R}$ -матрице) и сплетениях для определения инвариантов узлов/зацеплений для алгебры  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  в корнях из единицы. Мы расширили их



результаты, а именно рассмотрели нильпотентные представления  $U_q(sl_N)$  и обобщили нормировочный коэффициент на случай произвольного  $N$ .

### 3.1 Неприводимые представления $U_q(sl_N)$ в корнях из единицы

В этом разделе мы обсудим структуру неприводимых представлений  $U_q(sl_N)$ , когда параметр квантования  $q$  является корнем из единицы  $2m$ -й степени. Этот раздел основан на работе Б. Абдесселама, Д. Арнодона и А. Чакрабарти [68].

К конечномерным неприводимым представлениям  $U_q(sl_N)$  относятся представления со старшим и младшим весами, а также новые типы представлений, отсутствующие в случае произвольного  $q$  (когда  $q$  не равен корню из единицы): циклические (периодические), полуциклические (полупериодические) и представления со старшим и младшим весами с параметрами (будем называть их нильпотентными представлениями с параметрами). Есть и экзотические типы представлений: атипичные и частично периодические, мы их не будем рассматривать. Размерности всех неприводимых представлений  $U_q(sl_N)$  не превосходят  $m^{N(N-1)/2}$ . Наибольший интерес для нас представляют циклические, полуциклические и нильпотентные представления с параметрами, все они имеют размерность  $m^{N(N-1)/2}$ , которая зависит от степени корня.

У алгебры  $U_q(sl_N)$  есть новые типы представлений, потому что ее центр состоит не только из операторов Казимира  $C_i$ , но также включает операторы  $E_\alpha^m$ ,  $F_\alpha^m$ ,  $K_i^m$ , где  $\alpha$  — положительные корни алгебры  $sl_N$ . Эти операторы действуют как скаляры на элементах алгебры и обеспечивают  $N^2 - 1$  непрерывных параметров. Список представлений разных размерностей можно найти в таблице 3. Количество непрерывных параметров для каждого представления следующее:

- $L_{m,N}$  не содержит непрерывных параметров.
- $U_{m,N}(p_{jl}, c_{jl})$  содержит наибольший набор параметров: всего  $N^2 - 1$ ,  $c_{jl}$  для  $1 \leq j \leq l < N$  и  $p_{j,l}$  для  $1 \leq j \leq l \leq N$ .
- $V_{m,N}(p_{iN}, c_{jl})$  : всего  $(N - 1)(N - 2)/2$ , где  $N - 1$  из  $p_{iN}$  и  $N(N - 1)/2$  из  $c_{jl}$ .
- $W_{m,N}(p_{iN})$  содержит  $N - 1$  параметров  $p_{iN}$ .

| размерность        | обозн.                    | $E^m, F^m$                                  | описание   |
|--------------------|---------------------------|---|--|
| $d < m^{N(N-1)/2}$ | $L_{m,N}$                 | $E_\alpha^m = 0,$<br>$F_\alpha^m = 0$       | представления со старшим и младшим весами  |
| $d = m^{N(N-1)/2}$ | $U_{m,N}(p_{jl}, c_{jl})$ | $E_\alpha^m \neq 0,$<br>$F_\alpha^m \neq 0$ | <b>циклические</b> представления<br>без старшего и младшего весов                    |
|                    | $V_{m,N}(p_{iN}, c_{jl})$ | $E_\alpha^m = 0$ или<br>$F_\alpha^m = 0$    | <b>полуциклические</b> представления<br>со старшим или с младшим весом               |
|                    | $W_{m,N}(p_{iN})$         | $E_\alpha^m = 0,$<br>$F_\alpha^m = 0$       | представления со старшим и с младшим весом<br>с параметрами ( <b>нильпотентные</b> ) |

Таблица 3 — Неприводимые представления  $U_q(sl_N)$  в корнях из единицы

### 3.1.1 Действие генераторов

Каждый вектор представления связывается с состоянием  $|p\rangle$ , он задается набором параметров  $p_{il}$ , которые определяют действие генераторов на вектор:

$$|p\rangle = \left| \begin{array}{ccccccc} p_{1,N} & & p_{2,N} & \cdots & p_{N-1,N} & & p_{N,N} \\ & & & & & & \\ & & p_{1,N-1} & & \cdots & & p_{N-1,N-1} \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & p_{12} & & p_{22} \\ & & & & & & \\ & & & & & & p_{11} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Генераторы  $K_l^{\pm 1}$ ,  $E_l$ ,  $F_l$  действуют следующим образом

$$K_l^{\pm 1}|p\rangle = q^{\pm\left(2\sum_{i=1}^l p_{il} - \sum_{i=1}^{l+1} p_{i,l+1} - \sum_{i=1}^{l-1} p_{i,l-1} - 1\right)}|p\rangle, \quad (3.3)$$

$$F_l|p\rangle = \sum_{j=1}^l c_{jl} \frac{P'_1(j, l; p)P'_2(j, l; p)}{P'_3(j, l; p)}|p_{jl} - 1\rangle, \quad (3.4)$$

$$E_l|p\rangle = \sum_{j=1}^l c_{jl}^{-1} \frac{P''_1(j, l; p_{jl} + 1)P''_2(j, l; p_{jl} + 1)}{P''_3(j, l; p_{jl} + 1)}|p_{jl} + 1\rangle, \quad (3.5)$$

где состояние  $|p_{jl} \pm 1\rangle$  отличается от  $|p\rangle$  заменой одного элемента:  $p_{jl} \rightarrow p_{jl} \pm 1$ , и

$$\begin{aligned} P'_1(j, l; p) &= \prod_{i=1}^{l+1} [\varepsilon_{ij}(p_{i,l+1} - p_{j,l} + 1)]^{1-\eta_{ijl}}, \\ P''_1(j, l; p_{jl} + 1) &= \prod_{i=1}^{l+1} [\varepsilon_{ij}(p_{i,l+1} - p_{j,l})]^{\eta_{ijl}}, \\ P'_2(j, l; p) &= \prod_{i=1}^{l-1} [\varepsilon_{ji}(p_{j,l} - p_{i,l-1})]^{\eta_{j,i,l-1}}, \\ P'_3(j, l; p) &= \prod_{i=1}^{l-1} [\varepsilon_{ji}(p_{j,l} - p_{i,l-1})]^{\eta_{j,i,l-1}}, \\ P'_3(j, l; p) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^l [\varepsilon_{ij}(p_{i,l} - p_{j,l})]^{1/2} [\varepsilon_{ij}(p_{i,l} - p_{j,l} + 1)]^{1/2}, \\ P''_3(j, l; p_{jl} + 1) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^l [\varepsilon_{ij}(p_{i,l} - p_{j,l} - 1)]^{1/2} [\varepsilon_{ij}(p_{i,l} - p_{j,l})]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $\varepsilon_{ij} = 1$  для  $i \leq j$  и  $\varepsilon_{ij} = -1$  для  $i > j$ ,  $\eta_{ijl}$  — дискретные параметры, нарушающие симметрию между  $E$  и  $F$ , они могут быть равны 0, 1 или 1/2. Эти параметры не входят в список непрерывных параметров представлений.

Мы разберем конкретные примеры представлений в следующих разделах.

### 3.1.2 $\mathcal{R}$ -матрица

Квантовая алгебра  $U_q(sl_N)$  квазитреугольна, и в ней определяется универсальная  $\mathcal{R}$ -матрица, которую можно использовать в методе Решетихина-Тураева для вычисления инвариантов узлов и зацеплений. Универсальная  $\mathcal{R}$ -матрица коммутирует с действием копроизведения, действует на тензорном произведении неприводимых конечномерных представлений  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  и явно задается выражением:

$$\mathcal{R}_u = P q^{\sum_{i,j} a_{i,j}^{-1} h_i \otimes h_j} \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Phi^+} \exp_q((q - q^{-1})E_\beta \otimes F_\beta), \quad (3.7)$$

где  $P(x \otimes y) = y \otimes x$ ,  $\Phi^+$  — положительные корни алгебры  $sl_N$ ,  $q^{h_i} = K_i$ , квантовая экспонента

$$\exp_q A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{[m]_q!} q^{m(m-1)/2}. \quad (3.8)$$

$\mathcal{R}$ -матрицу можно вычислить для нильпотентных представлений с параметрами  $W_{m,N}(p_{iN})$  и использовать для вычисления инвариантов узлов и зацеплений, когда параметр квантования  $q$  равен корню из единицы.

Это было проделано для нильпотентных представлений и произвольной степени корня  $2m$  для квантовой алгебры  $U_q(sl_2)$ , для  $m = 2, 3, 4$  для  $U_q(sl_3)$ , и для  $m = 2$  для  $U_q(sl_4)$ , детали вычислений приведены в разделах 3.4.1, 3.4.2.

### 3.1.3 $\mathcal{R}$ -матрица для циклических и полуциклических представлений

В [176] было показано, что  $\mathcal{R}$ -матрица для ненильпотентных представлений (циклических и полуциклических) существует и удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \mathcal{R}(\xi, \xi) &= 1, \\ \text{(II)} \quad \mathcal{R}(\xi_1, \xi_2) &= \mathcal{R}^{-1}(\xi_2, \xi_1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из этих свойств матрицы следует, что ее нельзя использовать для вычисления инвариантов узлов и зацеплений.

Выполнения условия (I) означает, что  $\mathcal{R}$ -матрица тривиально действует на нити с одинаковыми представлениями и все инварианты узлов, которые с ее помощью можно вычислить, также тривиальны.

Свойство (II) делает эту  $\mathcal{R}$ -матрицу бесполезной для вычисления инвариантов зацеплений, поскольку  $\mathcal{R}$ -матрица с таким свойством дает только тривиальные инварианты [177].

Это означает, что хотя и существуют нетривиальные  $\mathcal{R}$ -матрицы ненильпотентных представлений (например, ур. (15) в [176]), они не порождают нетривиальные инварианты узлов и зацеплений.

### 3.1.4 Особенности метода Решетихина-Тураева для вычисления инвариантов зацеплений

При вычислении инвариантов зацеплений появляется дополнительная свобода: можно выбирать разные представления для разных компонентов связи. В нашем случае это означает, что мы выбираем представления с разными параметрами  $\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}, \dots$ . В этом случае используются  $\mathcal{R}$ -матрицы, зависящие от двух разных цветов  $\mathcal{R}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ , а движения Рейдемейстера дают нам следующие уравнения, аналогичные уравнениям (1.27):

$$\mathrm{Tr}_2(\mathcal{R}^{\pm 1}(\lambda, \lambda)(I \otimes \mathcal{W})) = I, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{R}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})\mathcal{R}^{-1}(\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}) = I, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} &(\mathcal{R}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \otimes I)(I \otimes \mathcal{R}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(3)}))(\mathcal{R}(\lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}) \otimes I) = \\ &= (I \otimes \mathcal{R}(\lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}))(\mathcal{R}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(3)}) \otimes I)(I \otimes \mathcal{R}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Уравнение 3.10 содержит только один параметр, поскольку соответствующее движение Рейдемейстера задействует одну нить, уравнение 3.11 определяет обратную  $\mathcal{R}$ -матрицу, уравнение 3.12 является расширенным уравнением Янга-Бакстера. Эти уравнения позволяют определить цветную  $\mathcal{R}$ -матрицу и весовую матрицу  $\mathcal{W}$ , которые позволяют вычислять инварианты зацеплений.

## 3.2 Модификация метода Решетихина-Тураева для вычисления инвариантов узлов и зацеплений в корнях из единицы

Для того чтобы использовать метод Решетихина-Тураева для определения инвариантов узлов и зацеплений, соответствующих представлениям  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  в корнях из единицы, необходимо определить  $\mathcal{R}$ -матрицы и матрицы весов для специальных представлений  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ . Естественным решением кажется использование универсальной  $\mathcal{R}$ -матрицы и оператора  $\mathcal{W}$ , которые позволяют получить полиномы ХОМФЛИ-ПТ. Однако, на этом пути встречается проблема, связанная с нормировкой полиномов. Нередуцированные инварианты ХОМФЛИ-ПТ, которые мы получаем методом Решетихина-Тураева из

представлений  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$ , пропорциональны многочлену неузла — квантовой размерности представления, который равен многочлену Шура представления в специальной точке. И он всегда равен нулю, если учесть, что  $q$  — это  $2m$ -й корень из единицы. Для того, чтобы обойти это препятствие, можно модифицировать метод и вычислять ненормированные инварианты, которые оказываются нетривиальными. Это можно сделать с помощью модифицированной операции квантового следа, эквивалентной вычислению инвариантов  $(1, 1)$ -сплетений.

Этот метод, однако, предполагает нарушение симметрии между компонентами зацепления. Чтобы восстановить симметрию, мы вводим нормировочный коэффициент, который зависит от цвета нити, которая была разрезана.

### Квантовый след

Существование взаимно однозначного соответствия между узлами/зацеплениями и  $(1, 1)$ -сплетениями [175] позволяет вычислять инварианты сплетений и, по сути, получать нормированные инварианты соответствующих узлов и зацеплений. Это означает, что нужно разорвать одно замыкание косы, как показано на рис. 3.2, и применить тот же метод Решетихина-Тураева, который мы описали выше (в том числе в главе 1).

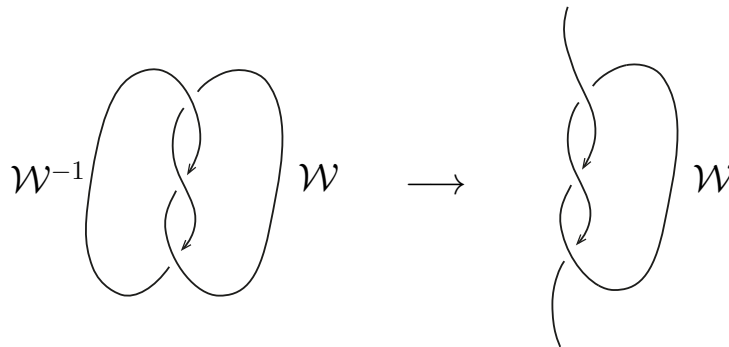


Рисунок 3.2 — Диаграмма трилистника и соответствующего ему  $(1, 1)$ -сплетения

Разрезая одно замыкание косы, как показано на рис. 3.2, мы получаем сплетение с одной входящей и одной исходящей нитями, поэтому его называют  $(1, 1)$ -сплетением. К таким сплетениям можно применять движения Рейдемейстера (рис. 1.2), если зафиксировать открытые концы нитей. Инвариантом

сплетения является диагональная матрица, все ненулевые члены которой равны редуцированному полиному ХОМФЛИ-ПТ соответствующего узла или зацепления [66]:

$$H^{(1,1)\text{-сплетение}} = I H^{\mathcal{L}}. \quad (3.13)$$

Аналогично можно переопределить операцию взятия квантового следа и применить ее к узлам и зацеплениям, а не к сплетениям. В определении мы опускаем одну весовую матрицу  $\mathcal{W}$ , что фактически означает, что мы разрезаем одну линию на диаграмме:

$$\boxed{\text{Tr}_q^* A = \text{Tr} \left[ A I \otimes \overbrace{\mathcal{W} \otimes \dots \otimes \mathcal{W}}^{s-1} \right]}, \quad (3.14)$$

где  $I$  — единичный оператор. В этом случае мы получаем дополнительный нормировочный коэффициент, равный классической размерности представления.

Сплетения, соответствующие узлам и зацеплениям с рис. (1.13) и (1.14), изображены на рис. (3.3) и (3.4).

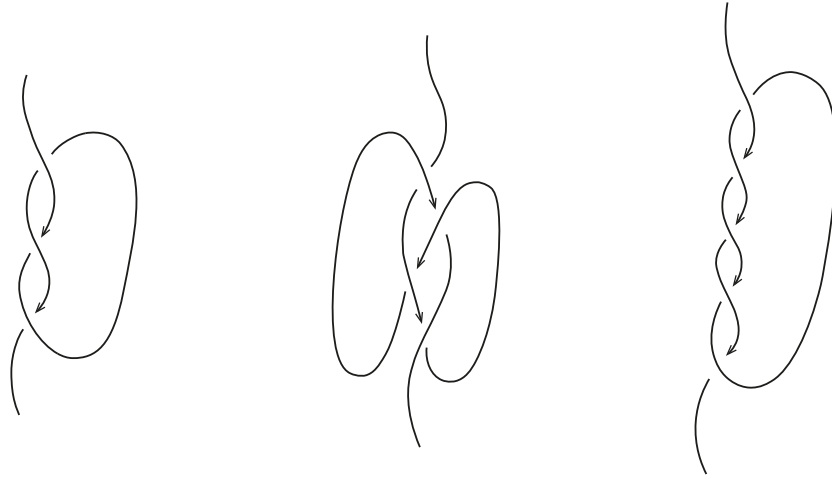


Рисунок 3.3 —  $(1, 1)$ -сплетения, соответствующие трилистнику, восьмерке и узлу  $5_1$

Для вычисления полиномов в корнях из единицы узлов и зацеплений с рис. (3.3) и (3.4) можно использовать формулы:

$$\begin{aligned} P^{3_1} &= \text{Tr} [(I \otimes \mathcal{W}) \mathcal{R}^3], \\ P^{4_1} &= \text{Tr} [(\mathcal{W}^{-1} \otimes I \otimes \mathcal{W}) \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2^{-1} \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2^{-1}], \\ P^{5_1} &= \text{Tr} [(I \otimes \mathcal{W}) \mathcal{R}^5]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

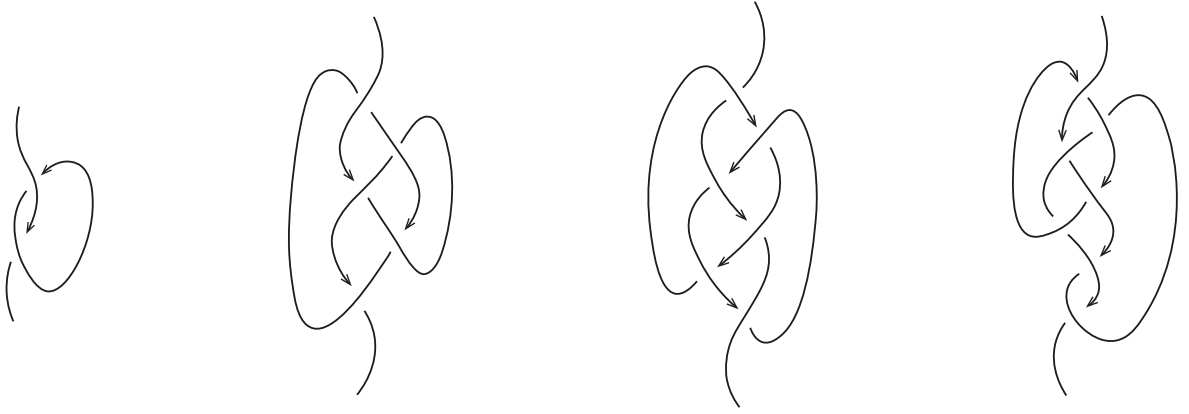


Рисунок 3.4 —  $(1, 1)$ -сплетения, соответствующие зацеплению Хопфа, зацеплению Уайтхеда, кольцам Борромео и зацеплению  $L_7a_1$

$$P^{L_2a_1} = \text{Tr} [(I \otimes \mathcal{W}(\lambda^{(2)})) \mathcal{R}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \mathcal{R}(\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)})], \quad (3.16)$$

$$P^{L_5a_1} = \text{Tr} [(\mathcal{W}^{-1}(\lambda^{(1)}) \otimes I \otimes \mathcal{W}(\lambda^{(2)})) \times \\ \times \mathcal{R}_1^{-1}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \mathcal{R}_2(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \mathcal{R}_1^{-1}(\lambda^{(2)}, \lambda^{(2)}) \mathcal{R}_2(\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}) \mathcal{R}_1^{-1}(\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)})],$$

$$P^{L_6a_4} = \text{Tr} [(\mathcal{W}^{-1}(\lambda^{(1)}) \otimes I \otimes \mathcal{W}(\lambda^{(3)})) \mathcal{R}_1(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \mathcal{R}_2^{-1}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(3)}) \times \\ \times \mathcal{R}_1(\lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}) \mathcal{R}_2^{-1}(\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}) \mathcal{R}_1(\lambda^{(3)}, \lambda^{(1)}) \mathcal{R}_2^{-1}(\lambda^{(3)}, \lambda^{(2)})],$$

$$P^{L_7a_1} = \text{Tr} [(\mathcal{W}^{-1}(\lambda^{(1)}) \otimes I \otimes \mathcal{W}(\lambda^{(2)})) \mathcal{R}_1^{-1}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \mathcal{R}_2(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \times \\ \times \mathcal{R}_1^{-1}(\lambda^{(2)}, \lambda^{(2)}) \mathcal{R}_2(\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}) \mathcal{R}_1^{-1}(\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}) \mathcal{R}_2^2(\lambda^{(2)}, \lambda^{(2)})].$$

Эти формулы повторяют формулы (1.59 и 1.60), но содержат модифицированный квантовый след и поэтому позволяют вычислять ненормированные инварианты.  $\lambda^{(i)}$  обозначают наборы параметров, связанных с представлениями, бегущими по нитям, на которые действуют  $\mathcal{R}$ -матрицы.

### 3.3 Определение инвариантов $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})$ узлов и зацеплений в корнях из единицы

Модифицированный метод Решетихина-Тураева, который мы описали выше, предполагает введение дополнительного нормировочного коэффициента, который восстанавливает симметрию между цветами разрезанных и неразрезанных нитей зацепления. Узлы окрашены одним цветом, поэтому выбор



(1, 1)-сплетения на ответ в случае узлов не влияет. Для создания единообразного описания инвариантов в корнях из единицы, мы будем нормировать ответы для узлов аналогично ответам для зацеплений.

Среди всех представлений с параметрами квантовой алгебры  $U_q(sl_N)$  в корнях из единицы, нетривиальные инварианты узлов и зацеплений методом Решетихина-Тураева получаются только для нильпотентных представлений  $W_{m,N}(\lambda_i^{(k)})$ . Такие инварианты мы обозначаем  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})$ . Обратим внимание, что в обозначении инварианта  $m$  — половина степени корня ( $q^{2m} = 1$ ),  $N$  — ранг алгебры  $U_q(sl_N)$ ,  $\mathcal{L}$  — узел или зацепление,  $\lambda_i^{(k)}$  — параметры представлений  $W_{m,N}(\lambda_i^{(k)})$ , при этом  $(k)$  нумерует число компонент зацепления,  $i$  — параметры, соответствующие каждому конкретному представлению  $W_{m,N}(\lambda_i)$ ,  $1 \leq i \leq N - 1$ .

Для вычисления инварианта  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})$  необходимо раскрыть компоненты зацепления (состоящего из  $j$  компонент) представлениями  $W_{m,N}(\lambda_i^{(k)})$  ( $\lambda_i^{(k)} = \{\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_{N-1}^{(k)}\}$ ,  $1 \leq k \leq j$ ), разрезать одну нить зацепления и применить метод Решетихина-Тураева к (1, 1)-сплетению. Эта процедура приводит к приведенному многочлену  $P_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda)$ , который зависит от цвета открытой компоненты.

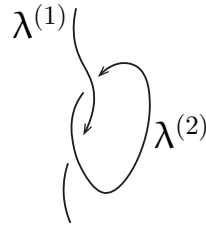


Рисунок 3.5 — Цветное (1, 1)-сплетение, соответствующее зацеплению Хопфа

Сама процедура была известна ранее [65–67], но тонкий момент заключается в том, чтобы зафиксировать правильный нормировочный коэффициент. Обозначим цвет открытой компоненты  $\lambda_i^{(1)}$  (см. рис. (3.5)). Мы получили, что правильным нормировочным коэффициентом, который, в частности, обеспечивает симметричность инварианта зацепления относительно всех компонент, является следующий:

$$\boxed{\Xi_{m,N}(\lambda_i^{(1)}) = \prod_{\alpha \in \Phi_N^+} \xi_m(\lambda_\alpha^{(1)} q^{|\alpha|}),} \quad (3.17)$$

где  $\alpha$  — положительные корни  $\Phi_N^+$  алгебры  $sl_N$ ,  $\alpha = \sum_{k=i}^j \alpha_k$  ( $i \leq j < N$ ), где  $\alpha_k$  — простые корни алгебры  $sl_N$ ,  $|\alpha| = j - i$ ,

$$\xi_m(\lambda) = \prod_{i=0}^{m-2} \{\lambda q^{-i}\}. \quad (3.18)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \Xi_{m,2}(\lambda) &= \xi_m(\lambda), \\ \Xi_{m,3}(\lambda) &= \xi_m(\lambda_1) \xi_m(\lambda_2) \xi_m(q\lambda_1\lambda_2), \\ \Xi_{m,4}(\lambda) &= \xi_m(\lambda_1) \xi_m(\lambda_2) \xi_m(\lambda_3) \xi_m(q\lambda_1\lambda_2) \xi_m(q\lambda_2\lambda_3) \xi_m(q^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Следовательно, (нередуцированные) инварианты узлов и зацеплений равны

$$\boxed{\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)}) = \frac{P_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})}{\Xi_{m,N}(\lambda_i^{(1)})}.} \quad (3.20)$$

Хотя  $P_{m,N}^{\mathcal{L}}$  является полиномом (Лорана) от  $\lambda$ , инвариант  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}$  является рациональной функцией. Смысл нормировочного коэффициента  $\Xi_{m,N}(\lambda^{(1)})$  состоит в восстановлении квантовой размерности и переходе от редуцированных к нередуцированным инвариантам.

### 3.3.1 Связь полиномов $P_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda)$ с полиномами ХОМФЛИ-ПТ

Параметры представлений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  играют роль старших весов ( $K_i v_0 = \lambda_i v_0$ ), и существует соответствие между ХОМФЛИ-ПТ инвариантами  $\mathcal{H}_T^{\mathcal{L}}(A = q^N, q)$  в представлении  $T_{m,N}$ , соответствующем диаграмме Юнга  $[(N-1)(m-1), (N-2)(m-1), \dots, (m-1)]$  и  $P_{m,N}^{\mathcal{L}}$  при специальных значениях параметров представления  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ :

$$\boxed{P_{m,N}^{\mathcal{L}}(q, \lambda_i = q^{m-1}) \Big|_{q^{2m}=1} = H_{[(N-1)(m-1), (N-2)(m-1), \dots, (m-1)]}^{\mathcal{L}}(A = q^N, q) \Big|_{q^{2m}=1}.} \quad (3.21)$$

Эта связь существует, поскольку нильпотентное представление  $W_{m,N}$  является обобщением представления  $[(N-1)(m-1), (N-2)(m-1), \dots, (m-1)] =$

$= T_{m,N}$ . В представлении  $W_{m,N}$  старшие веса  $\lambda_i$  не фиксированы, но, если положить их равными старшим весам представления  $T_{m,N}$ , соответствующие полиномы совпадают с полиномами ХОМФЛИ-ПТ при условии, что  $q^{2m} = 1$ .

### 3.3.2 Связь инвариантов $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})$ с полиномами Александра

Существуют также интересные связи между  $P_{m,N}^{\mathcal{L}}$  и полиномами Александра в частных случаях.

Во-первых, полиномы Александра узлов  $\mathcal{A}^{\mathcal{K}}(q)$  связаны с полиномами ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении при специализации  $A = 1$ :  $\mathcal{A}(q) = H_{[1]}^{\mathcal{K}}(A = 1, q)$  и, как было обнаружено в [67], совпадают с полиномами  $P_{2,2}^{\mathcal{L}}$ , соответствующими нильпотентному представлению с параметром  $W_{2,2}(\lambda)$  алгебры  $U_q(sl_2)$  при  $q^4 = 1$ :

$$P_{2,2}^{\mathcal{K}}(\lambda) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda). \quad (3.22)$$

Эту связь можно распространить на зацепления: мы обнаружили, что многопеременные полиномы Александра зацеплений  $\Delta^{\mathcal{L}}(u, v, \dots)$  совпадают с инвариантами  $\mathcal{P}_{2,2}^{\mathcal{L}}$ , соответствующими четвертому корню из единицы нильпотентных представлений с параметрами алгебры  $U_q(sl_2)$ , вычисленными для зацеплений, компоненты которых раскрашены разными цветами:

$$\mathcal{P}_{2,2}^{\mathcal{L}}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots) = \Delta^{\mathcal{L}}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots). \quad (3.23)$$

Помимо этих весьма общих соотношений, мы нашли в случае узлов связи между полиномами  $P_{2,3}^{\mathcal{K}}$  и  $P_{3,3}^{\mathcal{K}}$  для представлений алгебры  $U_q(sl_2)$ , соответствующих четвертому и шестому корням из единицы, и полиномов Александра:

$$P_{2,3}^{\mathcal{K}}(\lambda_1, \lambda_2 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1^2), \quad (3.24)$$

$$P_{3,3}^{\mathcal{K}}(q, \lambda_1, \lambda_2 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1) \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1^3). \quad (3.25)$$

Эти соотношения справедливы и для  $\lambda_1 = 1$ , потому что инварианты симметричны относительно перестановки параметров:  $P_{m,3}^{\mathcal{K}}(\lambda_1, \lambda_2) = P_{m,3}^{\mathcal{K}}(\lambda_2, \lambda_1)$ .

В случае  $U_q(sl_4)$  симметрия между параметрами устроена сложнее, и были найдены следующие связи между  $P_{2,4}^{\mathcal{K}}(q, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  и полиномами Александра:

$$P_{2,4}^{\mathcal{K}}(q, \lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_2^2), \quad (3.26)$$

$$P_{2,4}^{\mathcal{K}}(q, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_3) \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_3^2), \quad (3.27)$$

$$P_{2,4}^{\mathcal{K}}(q, \lambda_1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1) \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1^2). \quad (3.28)$$

Инварианты зацеплений  $\mathcal{P}_{2,3}^{\mathcal{L}}$  также связаны с полиномами Александра зацеплений  $\Delta^{\mathcal{L}}$ :

$$\mathcal{P}_{2,3}^{L_2 a_1}(q, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}) = q \Delta^{L_2 a_1}, \quad (3.29)$$

$$\mathcal{P}_{2,3}^{L_5 a_1}(q, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)} = q, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} = q) = -4q \left( \left( \Delta^{L_5 a_1}(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) \right)^2 - 1 \right), \quad (3.30)$$

$$\mathcal{P}_{2,3}^{L_6 a_4}(q, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)} = q, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} = q, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} = q) = \quad (3.31)$$

$$= 8q \left( \left( \Delta^{L_6 a_4}(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \lambda_1^{(3)}) \right)^2 - 2 \right). \quad (3.32)$$

### 3.4 Вычисление инвариантов $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})$ узлов и зацеплений в корнях из единицы

В этом разделе мы разберем примеры определения и вычисления инвариантов для нильпотентных представлений с параметрами алгебр  $U_q(sl_2)$ ,  $U_q(sl_3)$  и  $U_q(sl_4)$  для различных значений параметра квантования  $q$ :  $q^{2m} = 1$ . Для каждой алгебры мы строим представления,  $\mathcal{R}$ -матрицу и определяем инварианты.

#### 3.4.1 Инварианты $\mathcal{P}_{m,2}^{\mathcal{L}}(\lambda_k)$ , инварианты АДО или цветные инварианты Александра

Алгебра  $U_q(sl_2)$  является простейшим примером для изучения инвариантов узлов и зацеплений в корнях из единицы. Когда  $q$  равен  $2m$ -му корню из единицы, у алгебры  $U_q(sl_2)$  появляются нильпотентные представления  $W_{m,2}^{\lambda}$  с

одним непрерывным параметром  $\lambda$ . С помощью этих представлений Ю. Акуцу, Т. Дегучи и Т. Оцуки [65] определили инварианты зацеплений в корнях из единицы, которые называют инвариантами Акуцу-Дегучи-Оцуки (АДО). Их так же называют цветными полиномами Александра, потому что инварианты АДО для четверного корня из единицы совпадают с полиномами Александра.

На примере алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  мы подробно рассмотрим отличия представлений, когда параметр квантования  $q$  не равен и равен корню из единицы, и определим инварианты АДО.

### Представления $U_q(sl_2)$ в корнях из единицы

$\mathcal{U}_q(sl_2)$  порождается элементами  $e, f, k = q^h$  и  $k^{-1} = q^{-h}$ , удовлетворяющими соотношениям:

$$\begin{aligned} kk^{-1} &= k^{-1}k = 1, & kek^{-1} &= q^2e, \\ kfk^{-1} &= q^{-2}f, & [e, f] &= ef - fe = \frac{k - k^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Универсальная  $\mathcal{R}$ -матрица имеет следующий вид:

$$\mathcal{R} = P q^{h \otimes h / 2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m(m+1)/2} (1 - q^{-2})^m}{[m]_q!} e^m \otimes f^m, \quad (3.34)$$

соответствующая весовая матрица совпадает с оператором  $k$ :  $\mathcal{W} = k$ .

Когда  $q$  не является корнем из единицы, неприводимые конечномерные представления  $L_r$  алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  являются симметрическими представлениями, нумерованными диаграммами Юнга, состоящими из одной строки  $[r]$ .  $L_r$  — представления со старшим и младшим весами, действующие на векторном пространстве  $\mathcal{V}_{r+1}$  размерности  $r + 1$  с базисными векторами  $v_i, i = \{0, \dots, r\}$ , где  $v_0$  и  $v_r$  — векторы старшего и младшего весов, соответственно.

$$\begin{aligned} L_r(k)v_i &= q^{r-2i}v_i, \\ L_r(e)v_i &= [i]_q[r - i + 1]_q v_{i-1}, & L_r(e)v_0 &= 0, \\ L_r(f)v_i &= v_{i+1}, & L_r(f)v_r &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

В этом случае фиксирован старший вес  $L_r(k)v_0 = \lambda v_0$ ,  $\lambda = q^r$ . Условие, фиксирующее вес  $\lambda$ , возникает при построении модуля Верма. Мы выбираем собственный вектор  $v_0$  оператора  $k$ , удовлетворяющий условию  $e v_0 = 0$ . Остальные векторы модуля Верма получаем действием оператора  $f$  на  $v_0$ :  $f v_0 = v_1$ ,  $f^2 v_0 = v_2$ ,  $\dots$ ,  $f^n v_0 = v_n$ . Затем ищем инвариантное подпространство с условием  $e v_{r+1} = 0$ , которое является следующим:

$$[r+1]_q(\lambda q^{-r} - \lambda^{-1} q^r) = 0. \quad (3.36)$$

Это условие фиксирует вес  $\lambda$  только в том случае, если  $[r+1] \neq 0$ , а это означает, что когда  $q$  — корень из единицы, существуют представления, в которых вес произволен.

Пусть  $q$  — первообразный корень из единицы степени  $2m$ , то есть не существует  $p < 2m$ , для которого  $q^p = 1$ . В этом случае операторы  $e^m$ ,  $f^m$  и  $k^m$  являются центральными, что следует непосредственно из определяющих соотношений (3.33). Центральность  $k^m$  приводит к тому, что вес представлений размерности  $m$  не фиксирован и является параметром представлений. А центральность операторов  $e^m$  и  $f^m$ , становится причиной появления циклического и полумодульного представлений.

Существует четыре типа неприводимых представлений (любое неприводимое представление  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  в корнях из единицы конечномерно):

1.  $L_r$  (3.35) при  $r \leq m-1$ ,
2. циклические  $U_m^{a,b,\lambda}$ ,
3. полумодульные  $V_m^{a,\lambda} = U_m^{a,0,\lambda}$  или  $V_m^{b,\lambda} = U_m^{0,b,\lambda}$ ,
4. нильпотентные представления  $W_m^\lambda = U_m^{0,0,\lambda}$ .

Последние три представления имеют одинаковую размерность  $m$  и могут быть описаны следующими операторами, действующими в  $m$ -мерном векторном пространстве  $\mathcal{V}_m$  с базисом  $v_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m-1$ .

$$\begin{aligned} U_m^{\lambda,a,b}(k)v_i &= q^{-2i}\lambda v_i, \\ U_m^{\lambda,a,b}(e)v_i &= \left( ab + [i]_q \frac{\lambda q^{1-i} - \lambda^{-1} q^{i-1}}{q - q^{-1}} \right) v_{i-1}, \quad i > 0, \\ U_m^{\lambda,a,b}(e)v_0 &= av_{m-1}, \\ U_m^{\lambda,a,b}(f)v_i &= v_{i+1}, \quad i < m-1, \\ U_m^{\lambda,a,b}(f)v_{m-1} &= bv_0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где  $a, b, \lambda$  — произвольные комплексные числа,  $\lambda \neq 0$ . Можно проверить, что эти операторы удовлетворяют определяющим соотношениям (3.33) алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_2)$ .

Представления  $W_m^\lambda$  позволяют получить нетривиальные  $\mathcal{R}$ -матрицы и определять с их помощью инварианты узлов и зацеплений, известные как АДО или цветные инварианты Александра.

Представления  $W_m^\lambda$  можно выписать, используя формулы, приведенные в разделе 3.1.1. Для полноты описания сделаем это.

Дискретные параметры в этом случае следующие:  $c_{jl} = 1$  и  $\eta_{ijl} = 1$ . Непрерывные параметры  $p_{22} = 0$ ,  $p_{11} = p_{12} = \mu + 1$ , что означает, что непрерывный параметр всего один. Вектор со старшим весом  $v_0$  соответствует состоянию

$$v_0 = \left| \begin{array}{cc} \mu + 1 & 0 \\ & \mu + 1 \end{array} \right\rangle, \quad (3.38)$$

остальным векторам пространства представления соответствуют состояния

$$v_i = \left| \begin{array}{cc} \mu + 1 & 0 \\ & \mu + 1 - i \end{array} \right\rangle. \quad (3.39)$$

Тогда матрицы представлений, действующих на базисных векторах  $v_i$ , будут следующими:

$$\begin{aligned} kv_i &= q^{\mu-2i}v_i, & ev_i &= [i][\mu - i + 1]v_{i-1}, & fv_i &= v_{i+1}, \\ ev_0 &= 0, & & & fv_{m-1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Здесь  $Kv_0 = q^\mu v_0$ , что означает, что  $\mu$  играет роль старшего веса. Для вычислений удобно сделать замену  $q^\mu = \lambda$ , полиномиальные инварианты, связанные с этими вычисленными нами представлениями, зависят от  $\lambda$ .

## Инварианты АДО или цветные инварианты Александра

Инварианты АДО узлов и зацеплений [65] можно определить методом Решетихина-Тураева, который применяется к  $(1, 1)$ -сплетениям — узлам и зацеплениям, у которых одна нить разрезана (см. рис. 3.6). Рассмотрение сплетений вместо узлов и зацеплений возможно проводить благодаря существующему

взаимно однозначному соответствию между ними [175]. Этот важный шаг позволяет вычислять ненулевые инварианты. Инварианты, которые вычисляются на основе узлов и зацеплений, равны нулю из-за свойств следа Маркова в представлениях  $W_m^\lambda$ .

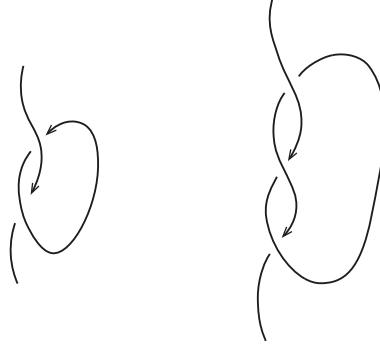


Рисунок 3.6 —  $(1, 1)$ -сплетения зацепления Хопфа и трилистника

Для определения инвариантов АДО делаем две важные модификации метода Решетихина-Тураева. Прежде всего, мы должны переопределить след Маркова следующим образом:

$$\boxed{\text{Tr}_q^* \cdots = \text{Tr} I \otimes \overbrace{\mathcal{W} \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}}^{s-1} \cdots,} \quad (3.41)$$

то есть опустить одну весовую матрицу, связанную с разрезанной нитью. Тогда нормировочный коэффициент полиномов (ненормированный полином неузла) равен классической размерности представления.

Переход от узлов и зацеплений к сплетениям заставляет нас выбирать нить, которая будет разрезана и вносит асимметрию в определение инварианта. Поэтому также необходимо ввести нормировочный коэффициент. Коэффициент, вычисленный в [65] с точностью до коэффициента нормировки  $q^m$ , выглядит следующим образом:

$$\boxed{\Xi_m^{sl_2}(\lambda_1) = \prod_{i=0}^{m-2} \{\lambda_1 q^{-i}\},} \quad (3.42)$$

где  $\{x\} = x - x^{-1}$ ,  $\lambda_1$  — цвет разрезанной нити.

Теперь мы можем определить инвариант АДО  $\Phi_m^{\mathcal{L}}(\lambda_1, \dots)$ :

$$\boxed{\Phi_m^{\mathcal{L}}(\lambda_1, \dots) = \frac{\text{Tr} I \otimes \overbrace{\mathcal{W} \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}}^{s-2} \prod_i \mathcal{R}_i}{\Xi_m^{sl_2}(\lambda_1)}.} \quad (3.43)$$



В этом определении  $\mathcal{R}$  — универсальная  $\mathcal{R}$ -матрица в представлении  $W_m^\lambda$  алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  в корнях из единицы. В общем случае она зависит от двух цветов  $\lambda_1 = q^{\mu_1}$  и  $\lambda_2 = q^{\mu_2}$ :

$$\mathcal{R}_m(v_i^{\mu_1} \otimes v_j^{\mu_2}) = \sum_{n=0}^{m-1} q^{\mu_2(m-1-i+n) - \mu_1(j+n) + 2(i-n)(j+n) + \frac{n(n-1)}{2}} \frac{(q - q^{-1})^n}{[n]!} \times \quad (3.44)$$

$$\times [i - n + 1; n][\mu_1 - i + n; n] (v_{j+n}^{\mu_2} \otimes v_{i-n}^{\mu_1}).$$

и

$$\mathcal{W}_m v_i^\mu = q^{-\mu(m-1)-2i} v_i = q^{-\mu m} k v_i^\mu. \quad (3.45)$$

Инварианты АДО  $\Phi_m^\mathcal{L}$  связаны с полиномами Александера и Джонса. Для простоты определим полиномы АДО узлов и одноцветных зацеплений:

$$\hat{\Phi}_m^\mathcal{L}(\lambda) = \Phi_m^\mathcal{L}(\lambda) \Xi_m^{sl_2}(\lambda), \quad (3.46)$$

тогда

$$\hat{\Phi}_2^\mathcal{K}(\lambda) = \mathcal{A}^\mathcal{K}(q = \lambda), \quad (3.47)$$

то есть полиномы АДО для четверного корня из единицы совпадают с полиномами Александера узлов, а инварианты АДО для четвертого корня из единицы совпадают с полиномами Александера от многих переменных (полиномами Александера зацеплений)

$$\Phi_2^\mathcal{L}(\lambda_1, \dots) = \Delta^\mathcal{L}(\lambda_1, \dots), \quad (3.48)$$

поэтому инварианты АДО также называют цветными инвариантами Александера.

Связь с полиномами Джонса следующая:

$$\hat{\Phi}_m^\mathcal{L}(\lambda = q^{m-1}) = J_{[m-1]}^\mathcal{L}(q) \Big|_{q^{2m}=1}, \quad (3.49)$$

где  $J_{[m-1]}^\mathcal{L}(q)$  — нормированные полиномы Джонса в представлении  $L_{m-1}$ . Это следует из того, что представления  $W_m^\lambda$  совпадают с представлениями  $L_{m-1}$  при правильном выборе значения веса  $\lambda = q^{m-1}$ .

Недавнее исследование С. Уиллетса [178] показало, что инварианты АДО и цветные полиномы Джонса можно обобщить с помощью универсального инварианта узла, который содержит в себе оба инварианта: АДО и Джонса. И существует отображение, позволяющее получить инварианты АДО из цветных полиномов Джонса.

### 3.4.2 Инварианты $\mathcal{P}_{m,3}^{\mathcal{L}}(\lambda_k)$ и $\mathcal{P}_{m,4}^{\mathcal{L}}(\lambda_k)$ , соответствующие нильпотентным представлениям алгебр $U_q(sl_3)$ и $U_q(sl_4)$

В этом разделе мы опишем процесс построения нильпотентных представлений с параметрами алгебры  $U_q(sl_3)$  для четвертого, шестого и восьмого корней из единицы и для алгебры  $U_q(sl_3)$  для четвертого корня из единицы, а также определим соответствующий им инвариант.

#### Нильпотентные представления с параметрами алгебры $U_q(sl_3)$

В этом разделе мы рассматриваем нильпотентные представления  $W_{m,3}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2})$  алгебры  $U_q(sl_3)$  с непрерывными параметрами.  $W_{m,3}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2})$  — неприводимое представление в векторном пространстве  $\mathcal{V}_{m^3}$  размерности  $m^3$ . Генераторы:  $E_1, E_2, F_1, F_2, K_1, K_2$ . Дискретные параметры:  $c_{jl} = 1, \eta_{ijl} = 1$ . Есть два непрерывных параметра  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , которые входят в параметры состояния старшего веса следующим образом:  $p_{33} = 0, p_{23} = p_{22} = \mu_2 + 1, p_{13} = p_{12} = p_{11} = \mu_1 + \mu_2 + 2$ . Старший вектор соответствует состоянию

$$v_0 = \left| \begin{array}{ccc} \mu_1 + \mu_2 + 2 & \mu_2 + 1 & 0 \\ & \mu_1 + \mu_2 + 2 & \mu_2 + 1 \\ & & \mu_1 + \mu_2 + 2 \end{array} \right\rangle, \quad (3.50)$$

и мы используем следующие обозначения для других векторов векторного пространства  $\mathcal{V}_{m^3}$ :

$$\begin{aligned} v(n_1, n_2, n_3) &= \\ &= \left| \begin{array}{ccc} \mu_1 + \mu_2 + 2 & \mu_2 + 1 & 0 \\ & \mu_1 + \mu_2 + 2 - n_2 & \mu_2 + 1 - n_3 \\ & & \mu_1 + \mu_2 + 2 - n_1 \end{array} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Операторы  $E_1, E_2, F_1, F_2$  действуют следующим образом

$$\begin{aligned} K_1 v(n_1, n_2, n_3) &= q^{\mu_1 - 2n_1 + n_2 + n_3} v(n_1, n_2, n_3), \\ K_2 v(n_1, n_2, n_3) &= q^{\mu_2 + n_1 - 2n_2 - 2n_3} v(n_1, n_2, n_3), \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} E_1 v(n_1, n_2, n_3) &= [n_1 - n_2][\mu_1 + 1 + n_3 - n_1] v(n_1 + 1, n_2, n_3), \\ E_2 v(n_1, n_2, n_3) &= \\ &= [n_2][\mu_1 + 1 - n_2][\mu_1 + \mu_2 + 1 - n_2][\mu_1 + 2 + n_3 - n_2]^{-1/2} [\mu_1 + 1 + n_3 - n_2]^{-1/2} v(n_1, n_2 + 1, n_3) + \\ &+ [\mu_1 + 1 + n_3][n_3][\mu_2 + 1 - n_3][\mu_1 + n_3 - n_2]^{-1/2} [\mu_1 + 1 + n_3 - n_2]^{-1/2} v(n_1, n_2, n_3 + 1), \\ F_1 v(n_1, n_2, n_3) &= v(n_1 - 1, n_2, n_3), \\ F_2 v(n_1, n_2, n_3) &= [n_2 - n_1][\mu_1 + 1 + n_3 - n_2]^{-1/2} [\mu_1 + n_3 - n_2]^{-1/2} v(n_1, n_2 - 1, n_3) + \\ &+ [\mu_1 + 1 + n_3 - n_1][\mu_1 + 1 + n_3 - n_2]^{-1/2} [\mu_1 + 2 + n_3 - n_2]^{-1/2} v(n_1, n_2, n_3 - 1). \end{aligned}$$

Выбор непрерывных параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в представлениях сделан таким образом, чтобы эти параметры играли роль старших весов:  $K_1 v_0 = q^{\mu_1} v_0$ ,  $K_2 v_0 = q^{\mu_2} v_0$ . Также удобно использовать замены:  $q^{\mu_1} = \lambda_1$  и  $q^{\mu_2} = \lambda_2$ , которые входят в инварианты, связанные с представлениями  $U_q(sl_3)$ .

В этой работе из-за вычислительных ограничений мы рассмотрели три представления  $U_q(sl_3)$ , которые соответствуют четвертому, шестому и восьмому корням из единицы. При  $m = 2$  представление  $W_{2,3}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2})$  действует на восьмимерном векторном пространстве, состоящем из следующих векторов:

$$\begin{aligned} v_0 &= v(0, 0, 0), & v_2 &= v(0, 0, 1), & v_4 &= v(1, 0, 1), & v_6 &= v(1, 1, 0), \\ v_1 &= v(1, 0, 0), & v_3 &= v(1, 1, 0), & v_5 &= v(2, 1, 0), & v_7 &= v(2, 1, 1). \end{aligned} \quad (3.53)$$

При  $m = 3$  получаем представление  $W_{3,3}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2})$ , действующее в 27-мерном векторном пространстве с векторами:

$$\begin{aligned} v_0 &= v(0, 0, 0), & v_7 &= v(2, 1, 0), & v_{14} &= v(2, 1, 1), & v_{21} &= v(3, 2, 1), \\ v_1 &= v(1, 0, 0), & v_8 &= v(2, 0, 1), & v_{15} &= v(1, 1, 2), & v_{22} &= v(3, 1, 2), \\ v_2 &= v(0, 0, 1), & v_9 &= v(1, 1, 1), & v_{16} &= v(3, 2, 0), & v_{23} &= v(2, 2, 2), \\ v_3 &= v(2, 0, 0), & v_{10} &= v(1, 0, 2), & v_{17} &= v(3, 1, 1), & v_{24} &= v(4, 2, 1), \\ v_4 &= v(1, 1, 0), & v_{11} &= v(3, 1, 0), & v_{18} &= v(2, 2, 1), & v_{25} &= v(3, 2, 2), \\ v_5 &= v(1, 0, 1), & v_{12} &= v(2, 0, 2), & v_{19} &= v(2, 1, 2), & v_{26} &= v(4, 2, 2), \\ v_6 &= v(1, 0, 2), & v_{13} &= v(2, 2, 0), & v_{20} &= v(4, 2, 0). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Чтобы избежать иррациональностей в знаменателях в наших вычислениях, мы сделали рациональное перемасштабирование операторов представления с диагональной матрицей  $M_6$ :  $\tilde{E}_{1,2} = M_6 E_{1,2} M_6^{-1}$ ,  $\tilde{F}_{1,2} = M_6 F_{1,2} M_6^{-1}$ ,  $\tilde{K}_{1,2} = K_{1,2}$ , где

$$M_6 = \text{diag} \left( \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \right. \\ \sqrt{[\mu_1 + 3]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 3]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 - 1]}, \\ \sqrt{[\mu_1 + 3]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1 - 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1]} \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \\ \left. \sqrt{[\mu_1 - 1]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]} \right). \quad (3.55)$$

При  $m = 4$  получаем представление  $W_{4,3}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2})$ , действующее в 64-мерном векторном пространстве с векторами:

$$\begin{aligned} v_0 &= v(0, 0, 0), & v_1 &= v(1, 0, 0), & v_2 &= v(0, 0, 1), & v_3 &= v(2, 0, 0), \\ v_4 &= v(1, 0, 1), & v_5 &= v(1, 1, 0), & v_6 &= v(0, 0, 2), & v_7 &= v(3, 0, 0), \\ v_8 &= v(2, 0, 1), & v_9 &= v(2, 1, 0), & v_{10} &= v(1, 0, 2), & v_{11} &= v(1, 1, 1), \\ v_{12} &= v(0, 0, 3), & v_{13} &= v(3, 0, 1), & v_{14} &= v(3, 1, 0), & v_{15} &= v(2, 0, 2), \\ v_{16} &= v(2, 1, 1), & v_{17} &= v(1, 0, 3), & v_{18} &= v(2, 2, 0), & v_{19} &= v(1, 1, 2), \\ v_{20} &= v(4, 1, 0), & v_{21} &= v(3, 0, 2), & v_{22} &= v(3, 1, 1), & v_{23} &= v(2, 0, 3), \\ v_{24} &= v(3, 2, 0), & v_{25} &= v(2, 1, 2), & v_{26} &= v(2, 2, 1), & v_{27} &= v(1, 1, 3), \\ v_{28} &= v(4, 1, 1), & v_{29} &= v(3, 0, 3), & v_{30} &= v(4, 2, 0), & v_{31} &= v(3, 1, 2), \\ v_{32} &= v(3, 2, 1), & v_{33} &= v(2, 1, 3), & v_{34} &= v(3, 3, 0), & v_{35} &= v(2, 2, 2), \\ v_{36} &= v(5, 2, 0), & v_{37} &= v(4, 1, 2), & v_{38} &= v(4, 2, 1), & v_{39} &= v(3, 1, 3), \\ v_{40} &= v(4, 3, 0), & v_{41} &= v(3, 2, 2), & v_{42} &= v(3, 3, 1), & v_{43} &= v(2, 2, 3), \\ v_{44} &= v(5, 2, 1), & v_{45} &= v(4, 1, 3), & v_{46} &= v(5, 3, 0), & v_{47} &= v(4, 2, 2), \\ v_{48} &= v(4, 3, 1), & v_{49} &= v(3, 2, 3), & v_{50} &= v(3, 3, 2), & v_{51} &= v(6, 3, 0), \\ v_{52} &= v(5, 2, 2), & v_{53} &= v(5, 3, 1), & v_{54} &= v(4, 2, 3), & v_{55} &= v(4, 3, 2), \\ v_{56} &= v(3, 3, 3), & v_{57} &= v(6, 3, 1), & v_{58} &= v(5, 2, 3), & v_{59} &= v(5, 3, 2), \\ v_{60} &= v(4, 3, 3), & v_{61} &= v(6, 3, 2), & v_{62} &= v(5, 3, 3), & v_{63} &= v(6, 3, 3). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Чтобы избежать иррациональностей в знаменателях в наших вычислениях, мы сделали рациональное перемасштабирование операторов представления с диагональной матрицей  $M_8$ :  $\tilde{E}_{1,2} = M_8 E_{1,2} M_8^{-1}$ ,  $\tilde{F}_{1,2} = M_8 F_{1,2} M_8^{-1}$ ,

$\tilde{K}_{1,2} = K_{1,2}$ , где

$$M_8 = \text{diag} \left( \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 3]}, \right. \\ \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 3]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 4]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1]}, \\ \sqrt{[\mu_1 + 3]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 4]}, \sqrt{[\mu_1 - 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 3]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \\ \sqrt{[\mu_1 + 4]}, \sqrt{[\mu_1 - 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 3]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 4]}, \sqrt{[\mu_1 - 1]}, \\ \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 3]}, \sqrt{[\mu_1 - 2]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 - 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1]}, \\ \sqrt{[\mu_1 + 3]}, \sqrt{[\mu_1 - 2]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 - 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 3]}, \sqrt{[\mu_1 - 2]}, \\ \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 - 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 - 2]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 - 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \\ \left. \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 - 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 2]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]}, \sqrt{[\mu_1 + 1]} \right). \quad (3.57)$$

### Нильпотентные представления с параметрами алгебры $U_q(sl_4)$

В этом разделе мы рассматриваем представление  $W_{2,4}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2}, q^{\mu_3})$  алгебры  $U_q(sl_4)$  с непрерывными параметрами. Размерность этих представлений  $m^6$ . Генераторы:  $E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3, K_1, K_2, K_3$ . Есть три непрерывных параметра:  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  или  $\lambda_1 = q^{\mu_1}, \lambda_2 = q^{\mu_2}, \lambda_3 = q^{\mu_3}$ .  $p_{1,i} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + 3$ ,  $p_{2,i} = \mu_2 + \mu_3 + 2$ ,  $p_{3,i} = \mu_3 + 1$  и  $p_{4,4} = 0$ . Вектор старшего веса

$$v_0 = \left| \begin{array}{cccc} \mu_{123} + 3 & \mu_{23} + 2 & \mu_3 + 1 & 0 \\ & \mu_{123} + 3 & \mu_{23} + 2 & \mu_3 + 1 \\ & & \mu_{123} + 3 & \mu_{23} + 2 \\ & & & \mu_{123} + 3 \end{array} \right\rangle, \quad (3.58)$$

где введены обозначения:  $\mu_{123} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ ,  $\mu_{23} = \mu_2 + \mu_3$ . И мы используем следующие обозначения для других векторов векторного пространства  $\mathcal{V}_{m^6}$ :

$$v(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) = \left| \begin{array}{cccc} \mu_{123} + 3 & \mu_{23} + 2 & \mu_3 + 1 & 0 \\ & \mu_{123} + 3 - n_4 & \mu_{23} + 2 - n_5 & \mu_3 + 1 - n_6 \\ & & \mu_{123} + 3 - n_2 & \mu_{23} + 2 - n_3 \\ & & & \mu_{123} + 3 - n_1 \end{array} \right\rangle. \quad (3.59)$$

Представление  $W_{2,4}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2}, q^{\mu_3})$  — это 64-мерное представление со следующими базисными векторами

$$\begin{aligned}
v_0 &= v(0, 0, 0, 0, 0, 0), & v_1 &= v(1, 0, 0, 0, 0, 0), & v_2 &= v(0, 0, 1, 0, 0, 0), & v_3 &= v(0, 0, 0, 0, 0, 1), \\
v_4 &= v(1, 0, 1, 0, 0, 0), & v_5 &= v(1, 0, 0, 0, 0, 1), & v_6 &= v(1, 1, 0, 0, 0, 0), & v_7 &= v(0, 0, 1, 0, 0, 1), \\
v_8 &= v(0, 0, 1, 0, 1, 0), & v_9 &= v(2, 1, 0, 0, 0, 0), & v_{10} &= v(1, 0, 1, 0, 0, 1), & v_{11} &= v(1, 0, 1, 0, 1, 0), \\
v_{12} &= v(1, 1, 1, 0, 0, 0), & v_{13} &= v(1, 1, 0, 0, 0, 1), & v_{14} &= v(0, 0, 2, 0, 1, 0), & v_{15} &= v(1, 1, 0, 1, 0, 0), \\
v_{16} &= v(0, 0, 1, 0, 1, 1), & v_{17} &= v(2, 1, 1, 0, 0, 0), & v_{18} &= v(2, 1, 0, 0, 0, 1), & v_{19} &= v(1, 0, 2, 0, 1, 0), \\
v_{20} &= v(2, 1, 0, 1, 0, 0), & v_{21} &= v(1, 0, 1, 0, 1, 1), & v_{22} &= v(1, 1, 1, 0, 0, 1), & v_{23} &= v(1, 1, 1, 0, 1, 0), \\
v_{24} &= v(1, 1, 1, 1, 0, 0), & v_{25} &= v(0, 0, 2, 0, 1, 1), & v_{26} &= v(1, 1, 0, 1, 0, 1), & v_{27} &= v(2, 1, 1, 0, 0, 1), \\
v_{28} &= v(2, 1, 1, 0, 1, 0), & v_{29} &= v(2, 1, 1, 1, 0, 0), & v_{30} &= v(1, 0, 2, 0, 1, 1), & v_{31} &= v(2, 1, 0, 1, 0, 1), \\
v_{32} &= v(1, 1, 2, 0, 1, 0), & v_{33} &= v(2, 2, 0, 1, 0, 0), & v_{34} &= v(1, 1, 1, 0, 1, 1), & v_{35} &= v(1, 1, 1, 1, 0, 1), \\
v_{36} &= v(1, 1, 1, 1, 1, 0), & v_{37} &= v(2, 1, 2, 0, 1, 0), & v_{38} &= v(3, 2, 0, 1, 0, 0), & v_{39} &= v(2, 1, 1, 0, 1, 1), \\
v_{40} &= v(2, 1, 1, 1, 0, 1), & v_{41} &= v(2, 1, 1, 1, 1, 0), & v_{42} &= v(2, 2, 1, 1, 0, 0), & v_{43} &= v(1, 1, 2, 0, 1, 1), \\
v_{44} &= v(2, 2, 0, 1, 0, 1), & v_{45} &= v(1, 1, 2, 1, 1, 0), & v_{46} &= v(1, 1, 1, 1, 1, 1), & v_{47} &= v(3, 2, 1, 1, 0, 0), \\
v_{48} &= v(2, 1, 2, 0, 1, 1), & v_{49} &= v(3, 2, 0, 1, 0, 1), & v_{50} &= v(2, 1, 2, 1, 1, 0), & v_{51} &= v(2, 1, 1, 1, 1, 1), \\
v_{52} &= v(2, 2, 1, 1, 0, 1), & v_{53} &= v(2, 2, 1, 1, 1, 0), & v_{54} &= v(1, 1, 2, 1, 1, 1), & v_{55} &= v(3, 2, 1, 1, 0, 1), \\
v_{56} &= v(3, 2, 1, 1, 1, 0), & v_{57} &= v(2, 1, 2, 1, 1, 1), & v_{58} &= v(2, 2, 2, 1, 1, 0), & v_{59} &= v(2, 2, 1, 1, 1, 1), \\
v_{60} &= v(3, 2, 2, 1, 1, 0), & v_{61} &= v(3, 2, 1, 1, 1, 1), & v_{62} &= v(2, 2, 2, 1, 1, 1), & v_{63} &= v(3, 2, 2, 1, 1, 1).
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Чтобы избежать иррациональностей в знаменателях в наших вычислениях, мы сделали рациональное перемасштабирование операторов представления с диагональной матрицей  $M_4$ :  $\tilde{E}_{1,2} = M_4 E_{1,2} M_4^{-1}$ ,  $\tilde{F}_{1,2} = M_4 F_{1,2} M_4^{-1}$ ,  $\tilde{K}_{1,2} = K_{1,2}$ , матрица  $M_4$  приведена в работе [117] (ур. 62).

### $\mathcal{R}$ -матрицы в представлениях $W_{m,3}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2})$

В этом разделе мы обсудим, как вычислить  $\mathcal{R}$ -матрицу в представлениях  $W_{m,3}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2}) = W_{m,3}(\lambda_1, l_2)$  из  $U_q(sl_3)$ . В случае  $U_q(sl_3)$  матрица Картана равна  $a_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , а положительные корни  $\Phi^+$  следующие:

$$\begin{aligned}
E_{\beta_1} &= E_1, & E_{\beta_2} &= q^{-1} E_2 E_1 - E_1 E_2, & E_{\beta_3} &= E_2, \\
F_{\beta_1} &= F_1, & F_{\beta_2} &= q F_1 F_2 - F_2 F_1, & F_{\beta_3} &= F_2,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

так что формула (3.7) принимает вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_u|_{sl_3} &= P q^{\frac{2}{3}h_1 \otimes h_1 + \frac{1}{3}h_1 \otimes h_2 + \frac{1}{3}h_2 \otimes h_1 + \frac{2}{3}h_2 \otimes h_2} \exp_q((q - q^{-1}) E_1 \otimes F_1) \times \\
&\quad \times \exp_q((q - q^{-1}) E_{12} \otimes F_{12}) \exp_q((q - q^{-1}) E_2 \otimes F_2).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Для работы в топологическом оснащении мы нормируем  $\mathcal{R}$ -матрицы следующим образом:

$$\mathcal{R}_{m,3} = q^{-2/3(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)} \lambda_1^{2m-2} \lambda_2^{2m-2} \mathcal{R}_u|_{sl_3}, \quad (3.63)$$

а для  $\mathcal{R}$ -матриц, действующих на разные представления, используем аналогичную нормировку, с симметричным разделением параметров

$$\mathcal{R}_{m,3}(\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}) = q^{-2/3(\mu_1^{(1)}\mu_1^{(2)} + \frac{1}{2}(\mu_1^{(1)}\mu_2^{(2)} + \mu_1^{(2)}\mu_2^{(1)}) + \mu_2^{(1)}\mu_2^{(2)})} \left( \lambda_1^{(1)}\lambda_1^{(2)}\lambda_2^{(1)}\lambda_2^{(2)} \right)^{m-1} \mathcal{R}_u|_{sl_3}. \quad (3.64)$$

Матрица весов для таких  $\mathcal{R}$ -матриц равна:

$$\mathcal{W}_{m,3} = \lambda_1^{-2m} \lambda_2^{-2m} K_1^2 K_2^2, \quad (3.65)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — операторы, входящие в  $\mathcal{R}_u|_{sl_3}$  принадлежат соответствующему нильпотентному представлению с параметрами  $\mathcal{W}_{m,3}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2})$ ,  $q^{\mu_1} = l_1$ ,  $q^{\mu_2} = \lambda_2$ .

Мы также вычислили собственные значения этих  $\mathcal{R}$ -матриц.  $\mathcal{R}_{2,3}$  имеет восемь собственных значений, каждое из которых соответствует подпространству размерности восемь:

$$q^{\pm 1}, \quad \left( \lambda_1^{(1)}\lambda_1^{(2)} \right)^{\pm 1}, \quad \left( \lambda_2^{(1)}\lambda_2^{(2)} \right)^{\pm 1}, \quad - \left( \lambda_1^{(1)}\lambda_1^{(2)}\lambda_2^{(1)}\lambda_2^{(2)} \right)^{\pm 1}. \quad (3.66)$$

$\mathcal{R}_{3,3}$  имеет двадцать семь собственных значений, каждое из которых соответствует подпространству размерности двадцать семь. Найденные собственные значения приведены в работе [117] (ур. 69).

### $\mathcal{R}$ -матрицы в представлениях $W_{2,4}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2}, q^{\mu_3})$

В этом разделе мы обсудим, как вычислить  $\mathcal{R}$ -матрицу в представлении  $W_{2,4}(q^{\mu_1}, q^{\mu_2}, q^{\mu_3}) = W_{2,4}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  из  $U_q(sl_4)$ . Для алгебры  $U_q(sl_4)$  матрица Картана имеет вид

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

а положительные корни  $\Phi^+$  следующие

$$\begin{aligned}
F_{\beta_1} &= F_1, \\
F_{\beta_2} &= qF_1F_2 - F_2F_1, \\
F_{\beta_3} &= F_2, \\
F_{\beta_4} &= q^2F_1F_2F_3 - qF_2F_3F_1 - qF_3F_1F_2 + F_3F_2F_1, \\
F_{\beta_5} &= qF_2F_3 - F_3F_2, \\
F_{\beta_6} &= F_3,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
E_{\beta_1} &= E_1, \\
E_{\beta_2} &= q^{-1}E_2E_1 - E_1E_2, \\
E_{\beta_3} &= E_2, \\
E_{\beta_4} &= E_1E_2E_3 - q^{-1}E_1E_2E_3 - q^{-1}E_2E_1E_3 - q^{-2}E_3E_2E_1, \\
E_{\beta_5} &= q^{-1}E_3E_2 - E_2E_3, \\
E_{\beta_6} &= E_3.
\end{aligned}$$

Мы используем  $\mathcal{R}$ -матрицу в топологическом оснащении, то есть нормируем ее следующим образом

$$\mathcal{R}_{2,4} = q^{-\left(\frac{3}{4}\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_1\mu_3 + \mu_2^2 + \mu_2\mu_3 + \frac{3}{4}\mu_3^2\right)} \lambda_1^3 \lambda_2^4 \lambda_3^3 \mathcal{R}_u|_{sl_4}. \tag{3.69}$$

Для случая двухцветной матрицы

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{2,4} \left( q^{\mu_i^{(1)}}, q^{\mu_i^{(2)}} \right) &= q^{-\left(\frac{3}{4}\mu_1^{(1)}\mu_1^{(2)} + \frac{1}{2}(\mu_1^{(1)}\mu_2^{(2)} + \mu_1^{(2)}\mu_2^{(1)}) + \frac{1}{4}(\mu_1^{(1)}\mu_3^{(2)} + \mu_1^{(2)}\mu_3^{(1)}) + \mu_2^{(1)}\mu_2^{(2)}\right)} \times \\
&\times q^{\left(\frac{1}{2}(\mu_2^{(1)}\mu_3^{(2)} + \mu_2^{(2)}\mu_3^{(1)}) + \frac{3}{4}\mu_3^{(1)}\mu_3^{(2)}\right)} q^{\frac{3}{2}(\mu_1^{(1)} + \mu_1^{(2)})} q^{2(\mu_2^{(1)} + \mu_2^{(2)})} q^{\frac{3}{2}(\mu_3^{(1)} + \mu_3^{(2)})} \mathcal{R}_u|_{sl_4}, \tag{3.70}
\end{aligned}$$

весовая матрица тоже нормируется

$$\mathcal{W}_{2,4} = \lambda_1^{-6} \lambda_2^{-8} \lambda_3^{-6} K_1^3 K_2^4 K_3^3. \tag{3.71}$$

## Инварианты узлов и зацеплений

Редуцированные полиномы узлов и зацеплений можно вычислить по формулам (3.15) и (3.16) с  $\mathcal{R}_{m,3}$ ,  $\mathcal{R}_{m,4}$  и  $\mathcal{W}_{m,3}$ ,  $\mathcal{W}_{m,4}$ . Для получения инвариантов узлов и зацеплений следует использовать нормировочный коэффициент (3.17):

$$\begin{aligned}
\Xi_{m,3}(\lambda) &= \xi_m(\lambda_1) \xi_m(\lambda_2) \xi_m(q\lambda_1\lambda_2), \\
\Xi_{m,4}(\lambda) &= \xi_m(\lambda_1) \xi_m(\lambda_2) \xi_m(\lambda_3) \xi_m(q\lambda_1\lambda_2) \xi_m(q\lambda_2\lambda_3) \xi_m(q^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3).
\end{aligned} \tag{3.72}$$



Тогда инварианты  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})$  (где  $1 \leq i \leq N-1$ ,  $k$  перечисляет компоненты зацепления,  $\lambda_i^{(1)}$  — цвет открытой компоненты) узлов и зацеплений в корнях единицы определяются как:

$$\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)}) = \frac{P_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})}{\Xi_{m,N}(\lambda_i^{(1)})}. \quad (3.73)$$

### Связь с полиномами ХОМФЛИ-ПТ и полиномами Александра

Полиномы  $P_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})$  и инварианты  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(k)})$  связаны с полиномами ХОМФЛИ-ПТ и полиномами Александра. Для алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$ :

$$P_{2,3}^{\mathcal{K}}(\lambda_1, \lambda_2 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1^2), \quad (3.74)$$

$$P_{3,3}^{\mathcal{K}}(q, \lambda_1, \lambda_2 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1)\mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1^3). \quad (3.75)$$

Эти соотношения справедливы и для  $\lambda_1 = 1$ , потому что инвариант симметричен относительно перестановки параметров:  $P_{m,3}^{\mathcal{K}}(\lambda_1, \lambda_2) = P_{m,3}^{\mathcal{K}}(\lambda_2, \lambda_1)$ .

В случае  $U_q(sl_4)$  симметрия между параметрами более сложная, и были найдены следующие связи между  $P_{2,4}^{\mathcal{K}}(q, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  и полиномами Александра:

$$P_{2,4}^{\mathcal{K}}(q, \lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_2^2), \quad (3.76)$$

$$P_{2,4}^{\mathcal{K}}(q, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_3)\mathcal{A}(\lambda_3^2), \quad (3.77)$$

$$P_{2,4}^{\mathcal{K}}(q, \lambda_1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1)\mathcal{A}(\lambda_1^2). \quad (3.78)$$

Инварианты зацеплений  $\mathcal{P}_{2,3}^{\mathcal{L}}$  также связаны с полиномами Александра зацеплений  $\Delta^{\mathcal{L}}$ :

$$\mathcal{P}_{2,3}^{L_2 a_1}(q, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}) = q \Delta^{L_2 a_1}, \quad (3.79)$$

$$\mathcal{P}_{2,3}^{L_5 a_1}(q, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)} = q, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} = q) = -4q \left( \left( \Delta^{L_5 a_1}(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}) \right)^2 - 1 \right), \quad (3.80)$$

$$\mathcal{P}_{2,3}^{L_6 a_4}(q, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)} = q, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} = q, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} = q) = \quad (3.81)$$

$$= 8q \left( \left( \Delta^{L_6 a_4}(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \lambda_1^{(3)}) \right)^2 - 2 \right). \quad (3.82)$$

### 3.5 Выводы

В этой главе мы обсудили инварианты узлов в корнях из единицы, связанные с неприводимыми представлениями квантовой алгебры  $U_q(sl_N)$ . Основные результаты главы следующие.

1. Был проведен анализ  $\mathcal{R}$ -матриц для циклических и полуматричных представлений в разделе 3.1.3.
2. Были определены инварианты (3.20) узлов и зацеплений в корнях из единицы для нильпотентных представлений с параметрами алгебры  $U_q(sl_N)$  в разделе 3.3. Для этого был получен нормировочный коэффициент (3.17), который является критически важным при определении инвариантов зацеплений.
3. Были вычислены инварианты узлов и зацеплений для простейших узлов  $(3_1, 4_1, 5_1)$  и зацеплений (зацепления Уайтхеда, колец Борромео и зацепления  $L_7a_1$ ) для различных алгебр  $U_q(sl_N)$ . Результаты приведены в приложениях Б.1 и Б.2.
4. Был получен ответ (Б.17) для инварианта зацепления Хопфа для произвольного корня из единицы алгебры  $U_q(sl_N)$ .
5. Была исследована связь получившихся инвариантов с полиномами ХОМФЛИ-ПТ (3.21) и Александера (3.23) – (3.32).

## Заключение

В данной диссертационной работе получены следующие результаты.

1. Исследован ряд  $\mathcal{R}$ -матриц со случайно совпадающими собственными значениями. На основе этого сформулированы две гипотезы, которые накладывают необходимые условия на блочную диагонализацию соответствующих матриц Рака и матриц  $\mathcal{R}_2$ . Первая гипотеза ограничивает снизу число совпадающих собственных значений, которое необходимо для блочной диагонализации. Вторая гипотеза определяет угол поворота в секторе случайно совпадающих собственных значений.
2. Исследованы две группы узлов-мутантов: узлы-мутанты с 11 пересечениями на диаграмме и узлы-мутанты с дополнительной симметрией Мортонa. Для первой группы мутантов был построен общий вид разностей между полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлении  $[3, 1]$  квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ , а также вычислены значения разностей в представлении  $[4, 2]$  квантовых алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_4)$ . Для узлов-мутантов Мортонa были вычислены полиномы ХОМФЛИ-ПТ в представлении  $[4, 2]$  квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  и разности между полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлении  $[4, 2]$  квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_4)$ . Таким образом, мы дополнительно проверили, что эти мутанты различаются представлением  $[4, 2]$ .
3. Проверено дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ для трехмостового узла, который не входит в семейства ранее изученных узлов. Это подтверждает универсальность дифференциального разложения.
4. К выделенному семейству узлов применен метод  $U$ -матрицы. Он позволил связать коэффициенты дифференциального разложения  $Z_R^Q$  для узлов с дефектом один с коэффициентами дифференциального разложения твистованных узлов, которые уже известны в частных случаях. В результате получилось универсальное преобразование, которое связывает коэффициенты  $F_Q^K$  с соответствующими коэффициентами твистованных узлов.

5. Исследовано дифференциальное разложение узлов с дефектом два на примере узлов-мутантов. Сформулированы ограничения на дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов с дефектом два в представлениях [2, 1] и [3, 1].
6. Исследованы инварианты узлов и зацеплений для всех неприводимых представлений квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  при параметре квантования  $q$ , равном корню из единицы.
7. Для нильпотентных представлений с параметрами в корнях из единицы построено определение инвариантов узлов и зацеплений. Важная часть этого определения — нормировочный коэффициент, который получен для произвольной квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ .
8. Вычислены инварианты в корнях из единицы ряда узлов и зацеплений. Получен инвариант для зацепления Хопфа для корня произвольной четной степени и произвольной алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ .
9. Исследованы и получены связи инвариантов в корнях из единицы с полиномами ХОМФЛИ-ПТ и Александера.

**Благодарности.** В заключение я хочу выразить благодарность и большую признательность научному руководителю Миронову А. Д. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также благодарю Морозова А. Ю., Морозова Ан. А., Слепцова А. В. и Шакирова Ш. Р. за совместную работу, постановку задач и поддержку во многих вопросах. Я очень признательна своим коллегам из Отдела теоретической физики ФИАН и Лаборатории методов математической физики ИТЭФ им. А.И. Алиханова. Благодарю Суслову Е. С. за помощь в подготовке текста данной работы.

Эта работа была бы невозможна без поддержки моей семьи.

## Список литературы

1. *Witten, E.* Topological quantum field theory / E. Witten // Communications in Mathematical Physics. — 1988. — Vol. 117, no. 3. — P. 353—386. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01223371>.
2. *Chern, S.-S.* Characteristic Forms and Geometric Invariants / S.-S. Chern, J. Simons // The Annals of Mathematics. — 1974. — Vol. 99, no. 1. — P. 48. — URL: <http://dx.doi.org/10.2307/1971013>.
3. *Mariño, M.* Chern-Simons Theory, Matrix Integrals, and Perturbative Three-Manifold Invariants / M. Mariño // Communications in Mathematical Physics. — 2004. — Vol. 253, no. 1. — P. 25—49.
4. *Witten, E.* Quantum field theory and the Jones polynomial / E. Witten // Comm. Math. Phys. — 1989. — Vol. 121, no. 3. — P. 351—399.
5. *Jones, V. F. R.* A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras / V. F. R. Jones // Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. — 1985. — Vol. 12, no. 1. — P. 103—111.
6. *Jones, V. F. R.* Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials / V. F. R. Jones // The Annals of Mathematics. — 1987. — Vol. 126, no. 2. — P. 335. — URL: <http://dx.doi.org/10.2307/1971403>.
7. A new polynomial invariant of knots and links / P. Freyd [et al.] // Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. — 1985. — Vol. 12, no. 2. — P. 239—246.
8. *Przytycki, J. H.* Invariants of links of Conway type / J. H. Przytycki, P. Traczyk // J. Knot Theor. — 1987. — Vol.4. — P. 115—139.
9. *Kaul, R.* Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links / R. Kaul, T. Govindarajan // Nuclear Physics B. — 1992. — Vol. 380, no. 1/2. — P. 293—333. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(92\)90524-F](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(92)90524-F).
10. *Kaul, R.* Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links / R. Kaul, T. Govindarajan // Nuclear Physics B. — 1993. — Vol. 393, no. 1/2. — P. 392—412. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(93\)90251-J](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(93)90251-J).

11. *Rama Devi, P.* Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links (III). Compact semi-simple group / P. Rama Devi, T. Govindarajan, R. Kaul // Nuclear Physics B. — 1993. — Vol. 402, no. 1/2. — P. 548—566. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(93\)90652-6](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(93)90652-6).
12. *Reshetikhin, N. Y.* Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links / N. Y. Reshetikhin // LOMI-E-4-87. — 1988.
13. *Reshetikhin, N. Y.* Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups / N. Y. Reshetikhin, V. G. Turaev // Communications in Mathematical Physics. — 1990. — Vol. 127, no. 1. — P. 1—26.
14. *Reshetikhin, N.* Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups / N. Reshetikhin, V. G. Turaev // Inventiones Mathematicae. — 1991. — Vol. 103, no. 1. — P. 547—597. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01239527>.
15. *Turaev, V. G.* The Yang-Baxter equation and invariants of links / V. G. Turaev // Inventiones Mathematicae. — 1988. — Vol. 92, no. 3. — P. 527—553. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01393746>.
16. *Решетихин, Н. Ю.* Квазитреугольные алгебры Хопфа и инварианты связок / Н. Ю. Решетихин // Алгебра и анализ. — 1990. — Т. 1, № 2. — С. 491—513.
17. *Turaev, V.* State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols / V. Turaev, O. Viro // Topology. — 1992. — Vol. 31, no. 4. — P. 865—902. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383\(92\)90015-A](http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(92)90015-A).
18. *Drinfeld, V. G.* Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation / V. G. Drinfeld // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1985. — Vol. 283, no. 5. — P. 1060—1064.
19. *Jimbo, M.* A q-difference analogue of  $U(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation / M. Jimbo // Letters in Mathematical Physics. — 1985. — Vol. 10, no. 1. — P. 63—69. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00704588>.
20. *Yang, C. N.* Some Exact Results for the Many-Body Problem in one Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction / C. N. Yang // Physical Review Letters. — 1967. — Dec. — Vol. 19, no. 23. — P. 1312—1315. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1312>.

21. *Baxter, R. J.* Exactly Solved Models in Statistical Mechanics / R. J. Baxter // Series on Advances in Statistical Mechanics. — 1985. — May. — P. 5—63. — URL: [http://dx.doi.org/10.1142/9789814415255\\_0002](http://dx.doi.org/10.1142/9789814415255_0002).
22. *Faddeev, L.* Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory / L. Faddeev // World Scientific Series in 20th Century Mathematics. — 1995. — Oct. — P. 294—341. — URL: [http://dx.doi.org/10.1142/9789812815453\\_0009](http://dx.doi.org/10.1142/9789812815453_0009).
23. *Kulish, P. P.* Quantum spectral transform method recent developments / P. P. Kulish, E. K. Sklyanin // Integrable Quantum Field Theories. — — P. 61—119. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/3-540-11190-5\\_8](http://dx.doi.org/10.1007/3-540-11190-5_8).
24. *Ramadevi, P.* Chirality of knots  $9_{42}$  and  $10_{71}$  and Chern-Simons theory / P. Ramadevi, T. Govindarajan, R. Kaul // Modern Physics Letters A. — 1994. — Vol. 09, no. 34. — P. 3205—3217. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732394003026>.
25. *Kawauchi, A.* A survey on knot theory / A. Kawauchi. — Springer Science I& Business Media, 1996.
26. *Joyce, D.* A classifying invariant of knots, the knot quandle / D. Joyce // Journal of Pure and Applied Algebra. — 1982. — Vol. 23, no. 1. — P. 37—65. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049\(82\)90077-9](http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049(82)90077-9).
27. *Matveev, S. V.* Distributive groupoids in knot theory / S. V. Matveev // Mathematics of the USSR-Sbornik. — 1984. — Vol. 47, no. 1. — P. 73—83. — URL: <http://dx.doi.org/10.1070/SM1984v047n01ABEH002630>.
28. *Manturov, V.* Knot Theory / V. Manturov. — CRC Press, 2018. — URL: <http://dx.doi.org/10.1201/9780203710920>.
29. *Morton, H. R.* Distinguishing mutants by knot polynomials / H. R. Morton, P. R. Cromwell. — 1996. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216596000163>.
30. *Morton, H. R.* Mutant knots with symmetry / H. R. Morton // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 2009. — Vol. 146, no. 1. — P. 95—107. — URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0305004108001862>.

31. *Morton, H.* Mutants and  $SU(3)_q$  invariants / H. Morton, H. Ryder // *Geom. Topol. Monogr.* — 1998. — Vol. 1. — URL: <https://arxiv.org/abs/math/9810197>.
32. *Nawata, S.* Colored HOMFLY-PT polynomials that distinguish mutant knots / S. Nawata, P. Ramadevi, V. K. Singh // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications.* — 2017. — Dec. — Vol. 26, no. 14. — P. 1750096. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216517500961>.
33. *Cherednik, I.* Jones Polynomials of Torus Knots via DAHA / I. Cherednik // *International Mathematics Research Notices.* — 2012. — Vol. 2013, no. 23. — P. 5366—5425. — URL: <http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rns202>.
34. *Cherednik, I.* DAHA and iterated torus knots / I. Cherednik, I. Danilenko // *Algebraic I& Geometric Topology.* — 2016. — Vol. 16, no. 2. — P. 843—898. — URL: <http://dx.doi.org/10.2140/agt.2016.16.843>.
35. *Aganagic, M.* Knot Homology and Refined Chern–Simons Index / M. Aganagic, S. Shakirov // *Communications in Mathematical Physics.* — 2014. — Vol. 333, no. 1. — P. 187—228. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-014-2197-4>.
36. *Gorsky, E.* Quadruply-graded colored homology of knots / E. Gorsky, S. Gukov, M. Stošić // *Fundamenta Mathematicae.* — 2018. — Vol. 243, no. 3. — P. 209—299. — URL: <http://dx.doi.org/10.4064/fm30-11-2017>.
37. *Gorsky, E.* Refined knot invariants and Hilbert schemes / E. Gorsky, A. Neguț // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.* — 2015. — Vol. 104, no. 3. — P. 403—435. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2015.03.003>.
38. *Arthamonov, S.* Refined Chern–Simons theory in genus two / S. Arthamonov, S. Shakirov // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications.* — 2020. — Vol. 29, no. 07. — P. 2050044. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216520500443>.
39. *Dunfield, N. M.* The Superpolynomial for Knot Homologies / N. M. Dunfield, S. Gukov, J. Rasmussen // *Experimental Mathematics.* — 2006. — Vol. 15, no. 2. — P. 129—160.



40. Interplay between MacDonald and Hall-Littlewood expansions of extended torus superpolynomials / A. Mironov [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2012. — Vol. 2012, no. 5. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05\(2012\)070](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05(2012)070).
41. Superpolynomials for torus knots from evolution induced by cut-and-join operators / P. Dunin-Barkowski [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2013. — Vol. 2013, no. 3. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2013\)021](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2013)021).
42. *Dunne, G. V.* Aspects Of Chern-Simons Theory / G. V. Dunne // Aspects topologiques de la physique en basse dimension. Topological aspects of low dimensional systems. — P. 177—263. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/3-540-46637-1\\_3](http://dx.doi.org/10.1007/3-540-46637-1_3).
43. *Lee, C.* Self-dual Maxwell Chern-Simons solitons / C. Lee, K. Lee, H. Min // Physics Letters B. — 1990. — Dec. — Vol. 252, no. 1. — P. 79—83. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(90\)91084-O](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(90)91084-O).
44. *Witten, E.* On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity / E. Witten // Nuclear Physics B. — 1990. — Vol. 340, no. 2/3. — P. 281—332. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(90\)90449-N](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(90)90449-N).
45. *Moore, G.* Classical and quantum conformal field theory / G. Moore, N. Seiberg // Communications in Mathematical Physics. — 1989. — Vol. 123, no. 2. — P. 177—254. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01238857>.
46. *Belavin, A.* Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory / A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov // Nuclear Physics B. — 1984. — Vol. 241, no. 2. — P. 333—380. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90052-X](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(84)90052-X).
47. *Dotsenko, V.* Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models / V. Dotsenko, V. Fateev // Nuclear Physics B. — 1984. — Vol. 240, no. 3. — P. 312—348. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90269-4](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(84)90269-4).
48. Wess-Zumino-Witten models as a theory of free fields / A. Gerasimov [et al.] // International Journal of Modern Physics A. — 1990. — Vol. 05, no. 13. — P. 2495—2589. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X9000115X>.

49. *Di Francesco, P.* Conformal Field Theory / P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal. — Springer New York, 1997. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-2256-9>.
50. *Wess, J.* Consequences of anomalous ward identities / J. Wess, B. Zumino // Physics Letters B. — 1971. — Vol. 37, no. 1. — P. 95—97. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(71\)90582-X](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(71)90582-X).
51. *Novikov, S. P.* Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory / S. P. Novikov // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1981. — Vol. 260, no. 1. — P. 31—35.
52. *Novikov, S. P.* The Hamiltonian formalism and a many-valued analogue of Morse theory / S. P. Novikov // Russian Mathematical Surveys. — 1982. — Vol. 37, no. 5. — P. 1—56. — URL: <http://dx.doi.org/10.1070/RM1982v037n05ABEH004020>.
53. *Witten, E.* Non-abelian bosonization in two dimensions / E. Witten // Communications in Mathematical Physics. — 1984. — Vol. 92, no. 4. — P. 455—472. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01215276>.
54. *Witten, E.* Chern-Simons gauge theory as a string theory / E. Witten // The Floer Memorial Volume. — 1995. — P. 637—678. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-9217-9\\_28](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-9217-9_28).
55. *Ramadevi, P.* On link invariants and topological string amplitudes / P. Ramadevi, T. Sarkar // Nuclear Physics B. — 2001. — Vol. 600, no. 3. — P. 487—511. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(00\)00761-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(00)00761-6).
56. *Ooguri, H.* Knot invariants and topological strings / H. Ooguri, C. Vafa // Nuclear Physics B. — 2000. — Vol. 577, no. 3. — P. 419—438. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(00\)00118-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(00)00118-8).
57. Sequencing BPS spectra / S. Gukov [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2016. — Vol. 2016, no. 3. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2016\)004](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2016)004).
58. *Gopakumar, R.* On the gauge theory/geometry correspondence / R. Gopakumar, C. Vafa // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. — 1999. — Vol. 3, no. 5. — P. 1415—1443. — URL: <http://dx.doi.org/10.4310/ATMP.1999.v3.n5.a5>.

59. *Labastida, J. M.* Knots, links and branes at large N / J. M. Labastida, M. Mariño, C. Vafa // Journal of High Energy Physics. — 2000. — Vol. 2000, no. 11. — P. 007—007. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2000/11/007>.
60. *Diaconescu, D.-E.* Large N Duality, Lagrangian Cycles, and Algebraic Knots / D.-E. Diaconescu, V. Shende, C. Vafa // Communications in Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 319, no. 3. — P. 813—863. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-012-1563-3>.
61. *Aganagic, M.* Large N Duality, Mirror Symmetry, and a Q-deformed A-polynomial for Knots / M. Aganagic, C. Vafa. — 2012. — URL: <https://arxiv.org/abs/1204.4709>.
62. Topological strings, D-model, and knot contact homology / C. Vafa [et al.] // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 18, no. 4. — P. 827—956. — URL: <http://dx.doi.org/10.4310/ATMP.2014.v18.n4.a3>.
63. *Hasan, M. Z.* Three-Dimensional Topological Insulators / M. Z. Hasan, J. E. Moore // Annual Review of Condensed Matter Physics. — 2011. — Vol. 2, no. 1. — P. 55—78. — URL: <http://dx.doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-062910-140432>.
64. *Lopez, A.* Fractional quantum Hall effect and Chern-Simons gauge theories / A. Lopez, E. Fradkin // Physical Review B. — 1991. — Vol. 44, no. 10. — P. 5246—5262. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.44.5246>.
65. *Akutsu, Y.* Invariants of colored links / Y. Akutsu, T. Deguchi, T. Ohtsuki // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 1992. — Vol. 01, no. 02. — P. 161—184. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216592000094>.
66. *Murakami, J.* Colored Alexander invariants and cone-manifolds / J. Murakami // Osaka Journal of Mathematics. — 2008. — Vol. 45, no. 2. — P. 541—564.
67. *Rosso, M.* Quantum Groups at a Root of 1 and Tangle Invariants / M. Rosso // International Journal of Modern Physics B. — 1993. — Vol. 07, 20n21. — P. 3715—3726. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217979293003462>.

68. *Abdesselam, B.* Representations of  $U_q(\mathfrak{sl}(N))$  at roots of unity / B. Abdesselam, D. Arnaudon, A. Chakrabarti // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1995. — Vol. 28, no. 19. — P. 5495—5507. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/28/19/007>.
69. *Klimyk, A.* Quantum Groups and Their Representations / A. Klimyk, K. Schmüdgen. — Springer Berlin Heidelberg, 1997. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-60896-4>.
70. Colored HOMFLY polynomials of knots presented as double fat diagrams / A. Mironov [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2015. — Vol. 2015, no. 7. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2015\)109](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2015)109).
71. *Mironov, A.* Universal Racah matrices and adjoint knot polynomials: Arborescent knots / A. Mironov, A. Morozov // Physics Letters B. — 2016. — Vol. 755. — P. 47—57. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2016.01.063>.
72. Tabulating knot polynomials for arborescent knots / A. Mironov [et al.] // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2017. — Vol. 50, no. 8. — P. 085201. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/aa5574>.
73. *Gu, J.* A Note on Colored HOMFLY Polynomials for Hyperbolic Knots from WZW Models / J. Gu, H. Jockers // Communications in Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 338, no. 1. — P. 393—456. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-015-2322-z>.
74. *Alexander, J. W.* A Lemma on Systems of Knotted Curves / J. W. Alexander // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1923. — Vol. 9, no. 3. — P. 93—95. — URL: <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.9.3.93>.
75. *Mironov, A.* Character expansion for HOMFLY polynomials. II. Fundamental representation. Up to five strands in braid / A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov // Journal of High Energy Physics. — 2012. — Vol. 2012, no. 3. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2012\)034](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2012)034).
76. Colored HOMFLY Polynomials as Multiple Sums over Paths or Standard Young Tableaux / A. Anokhina [et al.] // Advances in High Energy Physics. — 2013. — Vol. 2013. — P. 1—12. — URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/931830>.

77. *Mironov, A.* Character expansion for HOMFLY polynomials I: Integrability and difference equations / A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov // Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind. — 2012. — P. 101—118. — URL: [http://dx.doi.org/10.1142/9789814412551\\_0003](http://dx.doi.org/10.1142/9789814412551_0003).
78. *Anokhina, A.* On R-matrix approaches to knot invariants / A. Anokhina. — 2014. — URL: <https://arxiv.org/abs/1412.8444>.
79. *Zodinmawia.*  $SU(N)$  quantum Racah coefficients and non-torus links / Zodinmawia, P. Ramadevi // Nuclear Physics B. — 2013. — Vol. 870, no. 1. — P. 205—242. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2012.12.020>.
80. *Zodinmawia.* Reformulated invariants for non-torus knots and links / Zodinmawia, P. Ramadevi. — 2012. — URL: <https://arxiv.org/abs/1209.1346>.
81. *Racah, G.* Theory of Complex Spectra. II / G. Racah // Physical Review. — 1942. — Vol. 62, no. 9/10. — P. 438—462. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.62.438>.
82. *Louck, J.* Angular Momentum Theory / J. Louck // Springer Handbook of Atomic, Molecular, and Optical Physics. — 2006. — P. 9—74. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-26308-3\\_2](http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-26308-3_2).
83. *Sachs, R. G.* Group Theory And its application to the quantum mechanics of atomic spectra / R. G. Sachs // Science. — 1959. — Vol. 130, no. 3382. — P. 1106—1107. — URL: <http://dx.doi.org/10.1126/science.130.3382.1106.b>.
84. *Carter, J. S.* The Classical and Quantum 6j-symbols, Volume 43 / J. S. Carter, D. E. Flath, M. Saito. — Princeton University Press, 1996. — URL: <http://dx.doi.org/10.1515/9780691234670>.
85. *Ландау, Л. Д.* Курс теоретической физики / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1976. — Квантовая механика. Нерелятивистская теория.
86. *Ponsot, B.* Clebsch–Gordan and Racah–Wigner Coefficients for a Continuous Series of Representations of  $U_q \mathfrak{sl}_2$  / B. Ponsot, J. Teschner // Communications in Mathematical Physics. — 2001. — Vol. 224, no. 3. — P. 613—655. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/PL00005590>.

87. *Groenevelt, W.* Wilson Function Transforms Related to Racah Coefficients / W. Groenevelt // *Acta Applicandae Mathematicae*. — 2006. — Vol. 91, no. 2. — P. 133—191. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s10440-006-9024-7>.
88. Eigenvalue hypothesis for Racah matrices and HOMFLY polynomials for 3-strand knots in any symmetric and antisymmetric representations / H. Itoyama [et al.] // *International Journal of Modern Physics A*. — 2013. — Vol. 28, 03n04. — P. 1340009. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X13400095>.
89. Eigenvalue hypothesis for multistrand braids / S. Dhara [et al.] // *Physical Review D*. — 2018. — Vol. 97, no. 12. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.126015>.
90. *Cromwell, P. R.* Knots and Links / P. R. Cromwell. — 2004. — URL: <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511809767>.
91. *Mironov, A.* Towards effective topological field theory for knots / A. Mironov, A. Morozov // *Nuclear Physics B*. — 2015. — Vol. 899. — P. 395—413. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2015.08.005>.
92. *Ramadevi, P.* Knot invariants from rational conformal field theories / P. Ramadevi, T. Govindarajan, R. Kaul // *Nuclear Physics B*. — 1994. — Vol. 422, no. 1/2. — P. 291—306. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(94\)00102-2](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(94)00102-2).
93. *Mironov, A.* Evolution method and “differential hierarchy” of colored knot polynomials / A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov // *AIP Conference Proceedings*. — 2013. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4828688>.
94. *Mironov, A.* On colored HOMFLY polynomials for twist knots / A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov // *Modern Physics Letters A*. — 2014. — Vol. 29, no. 34. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732314501831>.
95. Evolution method and HOMFLY polynomials for virtual knots / L. Bishler [et al.] // *International Journal of Modern Physics A*. — 2015. — Vol. 30, no. 14. — P. 1550074. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X15500748>.

96. *Morozov, A.* On possible existence of HOMFLY polynomials for virtual knots / A. Morozov, A. Morozov, A. Morozov // *Physics Letters B.* — 2014. — Vol. 737. — P. 48—56. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2014.08.014>.
97. *Kononov, Y.* On rectangular HOMFLY for twist knots / Y. Kononov, A. Morozov // *Modern Physics Letters A.* — 2016. — Vol. 31, no. 38. — P. 1650223. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732316502230>.
98. *Morozov, A.* HOMFLY for twist knots and exclusive Racah matrices in representation [333] / A. Morozov // *Physics Letters B.* — 2018. — Vol. 778. — P. 426—434. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2018.01.062>.
99. Super-A-polynomials for twist knots / S. Nawata [et al.] // *Journal of High Energy Physics.* — 2012. — Vol. 2012, no. 11. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11\(2012\)157](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11(2012)157).
100. *Morozov, A.* Factorization of differential expansion for non-rectangular representations / A. Morozov // *Modern Physics Letters A.* — 2018. — Vol. 33, no. 12. — P. 1850062. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732318500621>.
101. *Dunfield, N. M.* The Superpolynomial for Knot Homologies / N. M. Dunfield, S. Gukov, J. Rasmussen // *Experimental Mathematics.* — 2006. — Vol. 15, no. 2. — P. 129—160.
102. HOMFLY and superpolynomials for figure eight knot in all symmetric and antisymmetric representations / H. Itoyama [et al.] // *Journal of High Energy Physics.* — 2012. — Vol. 2012, no. 7. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2012\)131](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2012)131).
103. *Arthamonov, S. B.* Differential hierarchy and additional grading of knot polynomials / S. B. Arthamonov, A. D. Mironov, A. Y. Morozov // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2014. — Vol. 179, no. 2. — P. 509—542. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11232-014-0159-9>.
104. Differential expansion for link polynomials / C. Bai [et al.] // *Physics Letters B.* — 2018. — Vol. 778. — P. 197—206. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2018.01.026>.

105. *Kononov, Y.* On the defect and stability of differential expansion / Y. Kononov, A. Morozov // JETP Letters. — 2015. — Vol. 101, no. 12. — P. 831—834. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364015120127>.
106. *Kitaev, A.* Fault-tolerant quantum computation by anyons / A. Kitaev // Annals of Physics. — 2003. — Vol. 303, no. 1. — P. 2—30. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0003-4916\(02\)00018-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0003-4916(02)00018-0).
107. Topological quantum computation / M. Freedman [et al.] // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2002. — Vol. 40, no. 1. — P. 31—38. — URL: <http://dx.doi.org/10.1090/S0273-0979-02-00964-3>.
108. Towards topological quantum computer / D. Melnikov [et al.] // Nuclear Physics B. — 2018. — Vol. 926. — P. 491—508. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2017.11.016>.
109. *Kolganov, N.* Large  $k$  topological quantum computer / N. Kolganov, S. Mironov, A. Morozov. — 2021. — URL: <https://arxiv.org/abs/2105.03980>.
110. Non-Abelian anyons and topological quantum computation / C. Nayak [et al.] // Reviews of Modern Physics. — 2008. — Vol. 80, no. 3. — P. 1083—1159. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1083>.
111. *Palumbo, G.* Non-Abelian Chern-Simons theory from a Hubbard-like model / G. Palumbo, J. K. Pachos // Physical Review D. — 2014. — Vol. 90, no. 2. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.027703>.
112. *Hui, A.* Non-Abelian fermionization and fractional quantum Hall transitions / A. Hui, M. Mulligan, E.-A. Kim // Physical Review B. — 2018. — Vol. 97, no. 8. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.97.085112>.
113. On the block structure of the quantum  $\mathcal{R}$ -matrix in the three-strand braids / L. Bishler [et al.] // International Journal of Modern Physics A. — 2018. — Vol. 33, no. 17. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X18501051>.
114. *Bishler, L.* Perspectives of differential expansion / L. Bishler, A. Morozov // Physics Letters B. — 2020. — Vol. 808. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135639>.
115. Distinguishing Mutant knots / L. Bishler [et al.] // Journal of Geometry and Physics. — 2021. — Vol. 159. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2020.103928>.



116. Difference of Mutant Knot Invariants and Their Differential Expansion / L. Bishler [et al.] // JETP Letters. — 2020. — Vol. 111, no. 9. — P. 494—499. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364020090015>.
117. *Bishler, L.* Invariants of knots and links at roots of unity / L. Bishler, A. Mironov, A. Morozov // Journal of Geometry and Physics. — 2023. — Vol. 185. — P. 104729. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2022.104729>.
118. *Bishler, L.* Overview of Knot Invariants at Roots of Unity / L. Bishler // JETP Letters. — 2022. — July. — Vol. 116, no. 3. — P. 185—191. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364022601294>.
119. Rolfsen knot table [Электронный ресурс]. — 2009. — URL: [http://katlas.org/wiki/The\\_Rolfsen\\_Knot\\_Table](http://katlas.org/wiki/The_Rolfsen_Knot_Table) (дата обр. 12.10.2022).
120. *Morozov, A.* Chern–Simons theory in the temporal gauge and knot invariants through the universal quantum R-matrix / A. Morozov, A. Smirnov // Nuclear Physics B. — 2010. — Vol. 835, no. 3. — P. 284—313. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2010.03.012>.
121. Colored knot polynomials: HOMFLY in representation  $[2, 1]$  / A. Mironov [et al.] // International Journal of Modern Physics A. — 2015. — Vol. 30, no. 26. — P. 155—169. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X15501699>.
122. HOMFLY polynomials in representation  $[3, 1]$  for 3-strand braids / A. Mironov [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2016. — Vol. 2016, no. 9. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09\(2016\)134](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09(2016)134).
123. Quantum Racah matrices and 3-strand braids in irreps  $R$  with  $|R| = 4$  / A. Mironov [et al.] // JETP Letters. — 2016. — Vol. 104, no. 1. — P. 56—61. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364016130038>.
124. *Shakirov, S.* Quantum Racah matrices and 3-strand braids in representation  $[3, 3]$  / S. Shakirov, A. Sleptsov // Journal of Geometry and Physics. — 2021. — Vol. 166. — P. 104273. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104273>.

125. Racah coefficients and extended HOMFLY polynomials for all 5-, 6- and 7-strand braids / A. Anokhina [et al.] // Nuclear Physics B. — 2013. — Vol. 868, no. 1. — P. 271—313. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2012.11.006>.
126. *Kawagoe, K.* On the formulae for the colored HOMFLY polynomials / K. Kawagoe // Journal of Geometry and Physics. — 2016. — Vol. 106. — P. 143—154. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.02.012>.
127. *Anokhina, A.* Cabling procedure for the colored HOMFLY polynomials / A. Anokhina, A. Morozov // Theor.Math.Phys. — 2014. — Vol. 178. — P. 1—58.
128. Процедура каблирования для раскрашенных полиномов ХОМФЛИ / А. С. Анохина [и др.] // Теоретическая и Математическая Физика. — 2014. — Т. 178, № 1. — С. 3—68. — URL: <http://dx.doi.org/10.4213/tmf8588>.
129. *Mariño, M.* Framed knots at large  $N$  / M. Mariño, C. Vafa // Contemp. Math. — 2002. — Vol. 310. — P. 185—204. — arXiv: [hep-th/0108064](http://arxiv.org/abs/hep-th/0108064).
130. *Borhade, P.*  $U(N)$  framed links, three-manifold invariants, and topological strings / P. Borhade, P. Ramadevi, T. Sarkar // Nuclear Physics B. — 2004. — Vol. 678, no. 3. — P. 656—681. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2003.11.023>.
131. *Mariño, M.* Enumerative geometry and knot invariants / M. Mariño // Infinite Dimensional Groups and Manifolds. — 2004. — URL: <http://dx.doi.org/10.1515/9783110200010.27>.
132. *Sklyanin, E. K.* Quantum inverse problem method. I / E. K. Sklyanin, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev // Theoretical and Mathematical Physics. — 1979. — Vol. 40, no. 2. — P. 688—706. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01018718>.
133. *Takhtadzhyan, L. A.* The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model / L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev // Russian Mathematical Surveys. — 1979. — Vol. 34, no. 5. — P. 11—68. — URL: <http://dx.doi.org/10.1070/RM1979v034n05ABEH003909>.

134. *Reshetikhin, N. Y.* Quantization of Lie groups and Lie algebras / N. Y. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev // Algebra i Analiz. — 1990. — Vol. 1, no. 1. — P. 193—225. — URL: <https://www.mathnet.ru/eng/aa/v1/i1/p178>.
135. *Sudbery, A.* Canonical differential calculus on quantum general linear groups and supergroups / A. Sudbery // Physics Letters B. — 1992. — Vol. 284, no. 1/2. — P. 61—65. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(92\)91925-Y](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(92)91925-Y).
136. *Manin, Y. I.* Quantum Groups and Noncommutative Geometry / Y. I. Manin. — Springer International Publishing, 2018. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-97987-8>.
137. *Wess, J.* Covariant differential calculus on the quantum hyperplane / J. Wess, B. Zumino // Nuclear Physics B - Proceedings Supplements. — 1991. — Vol. 18, no. 2. — P. 302—312. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0920-5632\(91\)90143-3](http://dx.doi.org/10.1016/0920-5632(91)90143-3).
138. *Isaev, A.* Quantum group gauge theories and covariant quantum algebras / A. Isaev, Z. Popowicz // Physics Letters B. — 1993. — Vol. 307, no. 3/4. — P. 353—361. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)90232-7](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(93)90232-7).
139. *Isaev, A. P.* R-matrix approach to the differential calculus on quantum groups / A. P. Isaev // Physics of Particles and Nuclei. — 1997. — Т. 28, вып. 3.
140. *Isaev, A.* GLq(N)-covariant quantum algebras and covariant differential calculus / A. Isaev, P. Pyatov // Physics Letters A. — 1993. — Vol. 179, no. 2. — P. 81—90. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90654-I](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(93)90654-I).
141. *Isaev, A. P.* Covariant differential complexes on quantum linear groups / A. P. Isaev, P. N. Pyatov // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1995. — Vol. 28, no. 8. — P. 2227—2246. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/28/8/015>.
142. *Faddeev, L. D.* The Differential Calculus on Quantum Linear Groups / L. D. Faddeev, P. N. Pyatov // Fifty Years of Mathematical Physics. — 2016. — P. 510—522. — URL: [http://dx.doi.org/10.1142/9789814340960\\_0036](http://dx.doi.org/10.1142/9789814340960_0036).

143. *Isaev, A.* On quantum matrix algebras satisfying the Cayley - Hamilton - Newton identities / A. Isaev, O. Ogievetsky, P. Pyatov // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1999. — Vol. 32, no. 9. — P. L115—L121. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/32/9/002>.
144. *Hlavatý, L.* Quantum integrability of non-ultralocal models through baxterization of quantized braided algebra / L. Hlavatý, A. Kundu // International Journal of Modern Physics A. — 1996. — Vol. 11, no. 12. — P. 2143—2165. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X96001085>.
145. *Gurevich, D. I.* Cayley–Hamilton theorem for quantum matrix algebras of  $GL(m|n)$  type / D. I. Gurevich, P. N. Pyatov, P. A. Saponov // St. Petersburg Mathematical Journal. — 2006. — Vol. 17, no. 1. — P. 119—135. — URL: <http://dx.doi.org/10.1090/S1061-0022-06-00895-8>.
146. *Pyatov, P.* Raise and peel models of fluctuating interfaces and combinatorics of Pascal's hexagon / P. Pyatov // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2004. — Vol. 2004, no. 09. — P09003. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2004/09/P09003>.
147. *Gier, J. de.* Punctured plane partitions and the  $q$ -deformed Knizhnik–Zamolodchikov and Hirota equations / J. de Gier, P. Pyatov, P. Zinn-Justin // Journal of Combinatorial Theory, Series A. — 2009. — Vol. 116, no. 4. — P. 772—794. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcta.2008.11.008>.
148. *Klimyk, A.* Quantum Groups and Their Representations / A. Klimyk, K. Schmüdgen. — Springer Berlin Heidelberg, 1997. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-60896-4>.
149. *Isaev, A. P.* Lectures on Quantum Groups and Yang-Baxter Equations / A. P. Isaev. — 2022. — URL: <https://arxiv.org/abs/2206.08902>.
150. *Rosso, M.* On the invariants of torus knots derived from quantum groups / M. Rosso, V. Jones // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 1993. — Vol. 02, no. 01. — P. 97—112. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216593000064>.
151. *Labastida, J. M. F.* Polynomial Invariants for Torus Knots and Topological Strings / J. M. F. Labastida, M. Mariño // Communications in Mathematical Physics. — 2001. — Vol. 217, no. 2. — P. 423—449. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s002200100374>.

152. *Brini, A.* Torus Knots and Mirror Symmetry / A. Brini, M. Mariño, B. Eynard // Annales Henri Poincaré. — 2012. — Vol. 13, no. 8. — P. 1873—1910. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00023-012-0171-2>.
153. *Jockers, H.* Torus Knots and the Topological Vertex / H. Jockers, A. Klemm, M. Soroush // Letters in Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 104, no. 8. — P. 953—989. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11005-014-0687-0>.
154. *N.Vilenkin.* Representation of Lie groups and Special Functions / N.Vilenkin, A.Klymik. — Kluwer academic publisher, 1993.
155. *Mironov, A.* On 6j-symbols for symmetric representations of  $U_q(su_N)$  / A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov // JETP Letters. — 2017. — Vol. 106, no. 10. — P. 630—636. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364017220040>.
156. *Arnold, P.* Landau-Pomeranchuk-Migdal effect in sequential bremsstrahlung: From large-  $N$  QCD to  $N = 3$  via the  $SU(N)$  analog of Wigner 6- $j$  symbols / P. Arnold // Physical Review D. — 2019. — Vol. 100, no. 3. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.034030>.
157. *Mironov, A.* Colored HOMFLY polynomials for the pretzel knots and links / A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov // Journal of High Energy Physics. — 2015. — Vol. 2015, no. 7. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2015\)069](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2015)069).
158. Colored knot polynomials for arbitrary pretzel knots and links / D. Galakhov [et al.] // Physics Letters B. — 2015. — Vol. 743. — P. 71—74. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2015.02.029>.
159. *Nawata, S.* Colored HOMFLY polynomials from Chern-Simons theory / S. Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2013. — Vol. 22, no. 13. — P. 1350078. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216513500788>.
160. *Nawata, S.* Colored HOMFLY-PT polynomials that distinguish mutant knots / S. Nawata, P. Ramadevi, V. K. Singh // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2017. — Vol. 26, no. 14. — P. 1750096. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216517500961>.

161. *Dunfield, N. M.* The Superpolynomial for Knot Homologies / N. M. Dunfield, S. Gukov, J. Rasmussen // *Experimental Mathematics*. — 2006. — Vol. 15, no. 2. — P. 129—160.
162. *Morozov, A. Y.* The KNTZ trick from arborescent calculus and the structure of the differential expansion / A. Y. Morozov // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2020. — Vol. 204, no. 2. — P. 993—1019. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0040577920080036>.
163. *Morozov, A.* Extension of KNTZ trick to non-rectangular representations / A. Morozov // *Physics Letters B*. — 2019. — Vol. 793. — P. 464—468. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2019.05.016>.
164. *Morozov, A.* Differential expansion and rectangular HOMFLY for the figure eight knot / A. Morozov // *Nuclear Physics B*. — 2016. — Vol. 911. — P. 582—605. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2016.08.027>.
165. *Morozov, A.* Factorization of differential expansion for antiparallel double-braid knots / A. Morozov // *Journal of High Energy Physics*. — 2016. — Vol. 2016, no. 9. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09\(2016\)135](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09(2016)135).
166. *Morozov, A.* On moduli space of symmetric orthogonal matrices and exclusive Racah matrix for representation  $R = [3,1]$  with multiplicities / A. Morozov // *Physics Letters B*. — 2017. — Vol. 766. — P. 291—300. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2017.01.032>.
167. *Morozov, A.* Generalized hypergeometric series for Racah matrices in rectangular representations / A. Morozov // *Modern Physics Letters A*. — 2018. — Vol. 33, no. 04. — P. 1850020. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732318500207>.
168. *Morozov, A.* On exclusive Racah matrices for rectangular representations / A. Morozov // *Physics Letters B*. — 2019. — Vol. 793. — P. 116—125. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2019.04.034>.
169. *Morozov, A.* Pentad and triangular structures behind the Racah matrices / A. Morozov // *The European Physical Journal Plus*. — 2020. — Vol. 135, no. 2.

170. Cyclotomic expansions of HOMFLY-PT colored by rectangular Young diagrams / M. Kameyama [et al.] // Letters in Mathematical Physics. — 2020. — Vol. 110, no. 10. — P. 2573—2583. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11005-020-01318-5>.
171. Superpolynomials for torus knots from evolution induced by cut-and-join operators / P. Dunin-Barkowski [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2013. — Vol. 2013, no. 3. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2013\)021](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2013)021).
172. *Mironov, A. D.* Genus expansion of HOMFLY polynomials / A. D. Mironov, A. Y. Morozov, A. V. Sleptsov // Theoretical and Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 177, no. 2. — P. 1435—1470. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11232-013-0115-0>.
173. *Mironov, A.* On genus expansion of knot polynomials and hidden structure of Hurwitz tau-functions / A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov // The European Physical Journal C. — 2013. — Vol. 73, no. 7. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2492-9>.
174. On genus expansion of superpolynomials / A. Mironov [et al.] // Nuclear Physics B. — 2014. — Vol. 889. — P. 757—777. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2014.11.003>.
175. *Kauffman, L.* Knots, Abstract Tensors and the Yang-Baxter Equation, In “Knots, Topology and Quantum Field Theories”, edited by L. Lussana / L. Kauffman. — World Scientific, 1989. — P. 179—334.
176. *Gómez, C.* New  $R$ -matrices associated with finite dimensional representations of  $U_q(sl(2))$  at roots of unity / C. Gómez, M. Ruiz-Altaba, G. Sierra // Physics Letters B. — 1991. — Vol. 265, no. 1/2. — P. 95—98. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(91\)90020-Q](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(91)90020-Q).
177. Anomaly in RTT relation for DIM algebra and network matrix models / H. Awata [et al.] // Nuclear Physics B. — 2017. — Vol. 918. — P. 358—385. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2017.03.003>.
178. *Willettts, S.* A unification of the ADO and colored Jones polynomials of a knot / S. Willettts. — 2020. — URL: <https://arxiv.org/abs/2003.09854>.

## Список рисунков

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 1.1  | Неузел, зацепление Хопфа и трилистник . . . . .  | 19  |
| 1.2  | Движения Рейдемейстера . . . . .   | 19  |
| 1.3  | Типы пересечений на диаграмме узла . . . . .   | 24  |
| 1.4  | Способы смены направления нити на диаграмме узла . . . . .   | 24  |
| 1.5  | Выделение пересечений и мест смены направлений нити<br>относительно оси $y$ на диаграмме узла $3_1$ (трилистника) . . . . .  | 24  |
| 1.6  | Связь операторов смены направления нити . . . . .  | 25  |
| 1.7  | Связь пересечений $R_2$ , $R_3$ и $R_4$ с пересечением $R_1 := \mathcal{R}$ . . . . .  | 26  |
| 1.8  | Движения Рейдеместера с выделенными элементами диаграмм . . . . .  | 28  |
| 1.9  | Способы замыкания косы: параллельный и плетенка . . . . .  | 37  |
| 1.10 | Коса торического узла $T[4, 3]$ . . . . .  | 38  |
| 1.11 | Представление трилистника в виде двухнитевой косы . . . . .  | 38  |
| 1.12 | Замыкание косы . . . . .   | 39  |
| 1.13 | Узлы: трилистник (узел $3_1$ ), восьмерка (узел $4_1$ ) и узел $5_1$ в виде кос . . . . .  | 39  |
| 1.14 | Зацепления: зацепление Хопфа (зацепление $L_2a_1$ ), зацепление<br>Уайтхеда (зацепление $L_5a_1$ ), кольца Борромео (зацепление $L_6a_4$ ) и<br>зацепление $L_7a_1$ в виде кос . . . . . | 39  |
| 2.1  | Простейшие семейства узлов: торические узлы $T[2, n]$ (узлы в виде<br>двухнитевых кос), твистованные узлы и узлы двойных кос . . . . .   | 67  |
| 2.2  | Крендельные узлы . . . . .   | 67  |
| 2.3  | Замыкание косы двухмостового узла и двухмостовой узел $7_6$ . . . . .  | 68  |
| 2.4  | Пример схемы диаграммы древесного узла. Строительными<br>блоками таких узлов являются четырехнитевые косы. . . . .   | 68  |
| 2.5  | Крендельный узел $9_{46} = (\bar{3}, -\bar{3}, 3)$ . . . . .   | 78  |
| 2.6  | Процедура мутации . . . . .  | 95  |
| 2.7  | Узлы-мутанты Киношиты-Терасаки и Конвея . . . . .  | 95  |
| 2.8  | Процедура мутации, предложенная Мортонем . . . . .   | 97  |
| 2.9  | Мутанты Мортоня $(1, 3, 3, -3, -3) - (1, 3, -3, 3, -3)$ и<br>$(3, 3, 3, -3, -3) - (3, 3, -3, 3, -3)$ . . . . .   | 97  |
| 3.1  | Зацепление Хопфа, трилистник и $(1, 1)$ -сплетения, которые им<br>соответствуют . . . . .  | 112 |



|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 3.2 | Диаграмма трилистника и соответствующего ему $(1,1)$ -сплетения . .  | 118 |
| 3.3 | $(1, 1)$ -сплетения, соответствующие трилистнику, восьмерке и узлу $5_1$   | 119 |
| 3.4 | $(1, 1)$ -сплетения, соответствующие зацеплению Хопфа, зацеплению Уайтхеда, кольцам Борромео и зацеплению $L_7a_1$ . . . . . | 120 |
| 3.5 | Цветное $(1, 1)$ -сплетение, соответствующее зацеплению Хопфа . . . .  | 121 |
| 3.6 | $(1, 1)$ -сплетения зацепления Хопфа и трилистника . . . . .   | 128 |

## Список таблиц

- 1 Матрицы со случайно совпадающими собственными значениями. . . 48
- 2 Таблица общих факторов в разностях узлов-мутантов с 11  
пересечениями в представлениях  $[3, 1]$  и  $[2, 1, 1]$  . . . . . 100
- 3 Неприводимые представления  $U_q(sl_N)$  в корнях из единицы . . . . . 114

## Приложение А

### Полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов

Мы приводим разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ для узлов-мутантов, которые были вычислены в рамках исследования дифференциального разложения узлов с дефектом  $\delta = 2$ . Все ответы получены классическим методом Решетихина-Тураева (см. раздел 1.2). Мы рассматривали два вида мутантов: узлов-мутанты с одиннадцатью пересечениями и узлы-мутанты Мортонa. Первые различаются любыми представлениями с кратностями, например,  $[2, 1]$ ,  $[3, 1]$  и  $[4, 2]$ . В рамках этой диссертационной работы мы приводим ответы для разностей полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями в представлениях  $[3, 1]$  и  $[4, 2]$  для алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_4)$ . Для крендельных узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями были получены полиномы ХОМФЛИ-ПТ от двух переменных ( $A$  и  $q$ ) путем экстраполяции ответов для представлений  $[3, 1]$  алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  с  $N = 3, 4, 5, 6, 7$  и для представлений  $[2, 1, 1]$  алгебр с  $N = 5, 6, 7, 8$ .

#### А.1 Узлы-мутанты с одиннадцатью пересечениями

В этом разделе мы перечисляем результаты для разностей между полиномами ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями в представлении  $[3, 1]$ . Эти узлы делятся на две группы: крендельные и «не-крендельные» узлы. Полиномы крендельных узлов вычисляются более эффективно из-за особенностей метода Решетихина-Тураева. Таким образом, нам удалось найти полиномы, которые зависят от переменных  $A$  и  $q$  для крендельных узлов, а для «не-крендельных» узлов удалось вычислить только разности в алгебрах  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_4)$ . Полный список мутантных узлов с одиннадцатью пересечениями приведен в (2.97). В первом столбце перечислены крендельные узлы.

### A.1.1 Крендельные узлы-мутанты

11a44 – 11a47 Результаты перечислены в разделе 2.11.2.

11a57 – 11a231 Нормированная разность следующая

$$\Delta H_{[3,1]}^{11a57-11a231} = \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned}
&= \{q\}^8 [4]^2 [2] D_4 D_3 D_0 D_{-2} q^{-40} (A^8 q^{86} - A^8 q^{84} - A^6 q^{84} + A^6 q^{82} - 2A^{10} q^{80} + 3A^8 q^{80} \\
&\quad + 2A^{10} q^{78} - 2A^8 q^{78} - 4A^6 q^{78} + 2A^{10} q^{76} + A^8 q^{76} + 3A^6 q^{76} + A^4 q^{76} + A^{12} q^{74} \\
&\quad - 10A^{10} q^{74} - 2A^6 q^{74} + A^4 q^{74} - A^{12} q^{72} + 8A^{10} q^{72} + 7A^8 q^{72} - 4A^6 q^{72} - A^4 q^{72} \\
&\quad - 2A^{12} q^{70} + 3A^{10} q^{70} + 2A^4 q^{70} + 7A^{12} q^{68} - 16A^{10} q^{68} - 8A^8 q^{68} - 2A^6 q^{68} + 6A^4 q^{68} \\
&\quad - 4A^{12} q^{66} + 10A^{10} q^{66} + 16A^8 q^{66} - 8A^6 q^{66} - 8A^4 q^{66} - 2A^2 q^{66} - 8A^{12} q^{64} - 2A^{10} q^{64} \\
&\quad + 9A^8 q^{64} + 9A^6 q^{64} + 15A^4 q^{64} + A^2 q^{64} + 18A^{12} q^{62} - 9A^{10} q^{62} - 24A^8 q^{62} - 28A^6 q^{62} \\
&\quad - 3A^4 q^{62} - 2A^2 q^{62} - 8A^{12} q^{60} + 15A^{10} q^{60} + 36A^8 q^{60} + 9A^6 q^{60} - A^4 q^{60} - 2A^2 q^{60} \\
&\quad - 14A^{12} q^{58} - 34A^{10} q^{58} - 7A^8 q^{58} + 5A^6 q^{58} + 22A^4 q^{58} - A^2 q^{58} + 30A^{12} q^{56} \\
&\quad + 25A^{10} q^{56} - 7A^8 q^{56} - 46A^6 q^{56} - 14A^4 q^{56} - A^2 q^{56} + q^{56} - 21A^{12} q^{54} + 7A^{10} q^{54} \\
&\quad + 49A^8 q^{54} + 26A^6 q^{54} + 10A^4 q^{54} - 9A^2 q^{54} - q^{54} - 4A^{12} q^{52} - 56A^{10} q^{52} - 48A^8 q^{52} \\
&\quad - 18A^6 q^{52} + 36A^4 q^{52} + 6A^2 q^{52} + 2q^{52} + 30A^{12} q^{50} + 53A^{10} q^{50} + 35A^8 q^{50} - 44A^6 q^{50} \\
&\quad - 36A^4 q^{50} - 10A^2 q^{50} - 33A^{12} q^{48} - 22A^{10} q^{48} + 56A^8 q^{48} + 52A^6 q^{48} + 41A^4 q^{48} \\
&\quad - 8A^2 q^{48} - q^{48} + 15A^{12} q^{46} - 36A^{10} q^{46} - 86A^8 q^{46} - 84A^6 q^{46} + 19A^4 q^{46} + 15A^2 q^{46} \\
&\quad + 5q^{46} + 14A^{12} q^{44} + 55A^{10} q^{44} + 80A^8 q^{44} + 10A^6 q^{44} - 35A^4 q^{44} - 31A^2 q^{44} - 4q^{44} \\
&\quad - 27A^{12} q^{42} - 53A^{10} q^{42} + 13A^8 q^{42} + 36A^6 q^{42} + 73A^4 q^{42} + 12A^2 q^{42} + 4q^{42} + 23A^{12} q^{40} \\
&\quad + 7A^{10} q^{40} - 41A^8 q^{40} - 111A^6 q^{40} - 29A^4 q^{40} - 4A^2 q^{40} + 2q^{40} - 6A^{12} q^{38} + 21A^{10} q^{38} \\
&\quad + 70A^8 q^{38} + 49A^6 q^{38} + 13A^4 q^{38} - 22A^2 q^{38} - 4q^{38} - 6A^{12} q^{36} - 37A^{10} q^{36} - 20A^8 q^{36} \\
&\quad - 16A^6 q^{36} + 47A^4 q^{36} + 14A^2 q^{36} + 6q^{36} + 12A^{12} q^{34} + 9A^{10} q^{34} + 5A^8 q^{34} - 49A^6 q^{34} \\
&\quad - 23A^4 q^{34} - 13A^2 q^{34} - q^{34} - 8A^{12} q^{32} + 3A^{10} q^{32} + 35A^8 q^{32} + 16A^6 q^{32} + 13A^4 q^{32} \\
&\quad - 14A^2 q^{32} - q^{32} + 3A^{12} q^{30} - 13A^{10} q^{30} - 9A^8 q^{30} - 19A^6 q^{30} + 41A^4 q^{30} + 11A^2 q^{30} \\
&\quad + 5q^{30} + 2A^{12} q^{28} + A^{10} q^{28} - A^8 q^{28} - 33A^6 q^{28} - 18A^4 q^{28} - 15A^2 q^{28} - 2q^{28} - 2A^{12} q^{26} \\
&\quad + 3A^{10} q^{26} + 30A^8 q^{26} + 21A^6 q^{26} + 18A^4 q^{26} - 7A^2 q^{26} + A^{12} q^{24} - 12A^{10} q^{24} - 11A^8 q^{24} \\
&\quad - 29A^6 q^{24} + 15A^4 q^{24} + 8A^2 q^{24} + 4q^{24} + 8A^{10} q^{22} + 12A^8 q^{22} - 13A^6 q^{22} - 8A^4 q^{22} \\
&\quad - 12A^2 q^{22} - 2q^{22} - 4A^{10} q^{20} + A^8 q^{20} + 10A^6 q^{20} + 22A^4 q^{20} - A^2 q^{20} + q^{20} - 4A^{10} q^{18} \\
&\quad + A^8 q^{18} - 14A^6 q^{18} - 4A^4 q^{18} - 3A^2 q^{18} + 2q^{18} + 4A^{10} q^{16} + 8A^8 q^{16} - 4A^6 q^{16} + 3A^4 q^{16} \\
&\quad - A^2 q^{16} - q^{16} - 2A^{10} q^{14} - 3A^8 q^{14} - 4A^6 q^{14} + 9A^4 q^{14} - A^2 q^{14} + 2A^8 q^{12} + 2A^4 q^{12} \\
&\quad - 2A^2 q^{12} + q^{12} + A^8 q^{10} - 3A^6 q^{10} - 3A^4 q^{10} - A^2 q^{10} + 2A^8 q^8 + 5A^4 q^8 + A^2 q^8 \\
&\quad - 2A^8 q^6 - 4A^6 q^6 - A^4 q^6 - 2A^2 q^6 + A^8 q^4 + 3A^6 q^4 + 2A^4 q^4 - 2A^6 q^2 - A^4 q^2 + A^4).
\end{aligned}$$

Следующие коэффициенты разложения по родам не различают узлы-мутанты 11a57 и 11a231:

$$\begin{aligned}
\sigma_{[1]} &= -\frac{3A^6-10A^4+12A^2-4}{A^2}, \\
{}_1\sigma_{[2]} &= \frac{(A^2-1)(25A^{10}-79A^8+58A^6+66A^4-112A^2+40)}{A^4}, \\
{}_2\sigma_{[1]} &= -\sigma_{[1]}^3 \frac{6A^6-19A^4+18A^2-4}{A^2}, \\
{}_2\sigma_{[1,1]} &= \sigma_{[1]}^2 \frac{151A^{12}-738A^{10}+1667A^8-2244A^6+1862A^4-880A^2+186}{2A^4}, \\
{}_2\sigma_{[3]} &= -\sigma_{[1]} \frac{(A^2-1)^2(707A^{14}-2756A^{12}+3690A^{10}-1942A^8+2068A^6-4846A^4+4424A^2-1304)}{2A^6}, \\
{}_2\sigma_{[2,2]} &= {}_1\sigma_{[2]}^2, \\
{}_3\sigma_{[2]} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{(A^2-1)(A+1)(2145A^{10}-6535A^8+4866A^6+3722A^4-6144A^2+1960)}{8A^4}, \\
{}_3\sigma_{[2,1]} &= -\sigma_{[1]}^3 \frac{(A^2-1)L_1}{3A^6}, \\
{}_3\sigma_{[4]} &= \sigma_{[1]}^2 \frac{(A^2-1)L_2}{6A^8}, \\
{}_3\sigma_{[2,1,1]} &= ({}_1\sigma_{[2]}) \cdot ({}_2\sigma_{[1,1]}), \\
{}_4\sigma_{[1]} &= -\sigma_{[1]}^7 \frac{4A^6-15A^4+10A^2-1}{A^2}, \\
{}_4\sigma_{[1,1]} &= \sigma_{[1]}^6 \frac{1311A^{12}-5854A^{10}+11406A^8-13180A^6+9671A^4-4268A^2+860}{2A^4}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1,1]} &= 3({}_2\sigma_{[1,1]})^2,
\end{aligned} \tag{A.2}$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= 5628A^{16} - 28810A^{14} + 60313A^{12} - 57482A^{10} - 572A^8 + 65604A^6 - \\
&\quad - 75409A^4 + 38764A^2 - 8008 \\
L_2 &= 36360A^{22} - 241248A^{20} + 663565A^{18} - 957367A^{16} + 748062A^{14} - \\
&\quad - 223682A^{12} - 356686A^{10} + 1032510A^8 - 1445080A^6 + 1127144A^4 - \\
&\quad - 460384A^2 + 76864.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Разница между полиномами узлов-мутантов 11a57 и 11a231 возникает в четверном порядке разложения.

$$\begin{aligned}
{}_4\sigma_{[3]}^{11a57} &= -\sigma_{[1]}^5 \frac{(A^2-1)^2(M_0)}{6A^6}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11a57} &= \sigma_{[1]}^5 \frac{M_1}{6A^6}, \\
{}_4\sigma_{[3,1]}^{11a57} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{M_2}{8A^8}, \\
{}_4\sigma_{[2,2]}^{11a57} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{M_3}{12A^8},
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
{}_4\sigma_{[3]}^{11a231} &= {}_4\sigma_{[3]}^{11a57} - \sigma_{[1]}^5 \frac{12(A^2-1)^7}{A^2}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11a231} &= {}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11a57} + \sigma_{[1]}^5 \frac{24(A^2-1)^7}{A^2}, \\
{}_4\sigma_{[3,1]}^{11a231} &= {}_4\sigma_{[3,1]}^{11a57} + \sigma_{[1]}^5 \frac{12(A^2-1)^7}{A^2}, \\
{}_4\sigma_{[2,2]}^{11a231} &= {}_4\sigma_{[2,2]}^{11a57} - \sigma_{[1]}^5 \frac{32(A^2-1)^7}{A^2},
\end{aligned} \tag{A.5}$$

где

$$\begin{aligned}
M_0 &= 64625A^{14} - 233582A^{12} + 298194A^{10} - \\
&\quad - 152101A^8 + 121231A^6 - 267661A^4 + 241916A^2 - 71678, \\
M_1 &= -51842A^{18} + 337308A^{16} - 1034565A^{14} + 2005923A^{12} - 2753070A^{10} + \\
&\quad + 2792872A^8 - 2086847A^6 + 1096939A^4 - 362676A^2 + 56372, \\
M_2 &= 344965A^{24} - 2665432A^{22} + 9074107A^{20} - 17770888A^{18} + \\
&\quad + 22169870A^{16} - 19748036A^{14} + 17699848A^{12} - 22242606A^{10} + \\
&\quad + 27435212A^8 - 23877936A^6 + 13148872A^4 - 4137552A^2 + 569344, \\
M_3 &= 710559A^{24} - 5402308A^{22} + 17459160A^{20} - 29724688A^{18} + \\
&\quad + 24275721A^{16} + 1314912A^{14} - 18557728A^{12} + 3172952A^{10} + \\
&\quad + 27157852A^8 - 37819168A^6 + 24477024A^4 - 8223936A^2 + 1160344.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

11n71 – 11n75 Нормированная разность следующая:

$$\Delta H_{[3,1]}^{11n71-11n75} = \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
&= \{q\}^8 [4]^2 [2] D_4 D_3 D_0 D_{-2} A^{-24} q^{-46} (A^{10} q^{70} - 3A^{10} q^{68} - A^8 q^{68} + 3A^{10} q^{66} + 4A^8 q^{66} - A^{12} q^{64} \\
&\quad - A^{10} q^{64} - 4A^8 q^{64} - 2A^6 q^{64} + 3A^{12} q^{62} + 2A^8 q^{62} + A^6 q^{62} - 2A^{12} q^{60} - 5A^{10} q^{60} + 2A^8 q^{60} - A^6 q^{60} \\
&\quad - 2A^{12} q^{58} + 5A^{10} q^{58} + 5A^8 q^{58} - 2A^6 q^{58} + 4A^{12} q^{56} - 5A^8 q^{56} - 6A^6 q^{56} + A^4 q^{56} + A^{12} q^{54} - 7A^{10} q^{54} \\
&\quad + 7A^8 q^{54} + 4A^6 q^{54} + 4A^4 q^{54} - 5A^{12} q^{52} - 5A^{10} q^{52} + 5A^8 q^{52} - 8A^6 q^{52} - A^4 q^{52} + 4A^{12} q^{50} \\
&\quad + 11A^{10} q^{50} + 11A^8 q^{50} - 8A^6 q^{50} + 3A^4 q^{50} + 2A^{12} q^{48} - 11A^{10} q^{48} - 5A^8 q^{48} - 4A^6 q^{48} + 8A^4 q^{48} \\
&\quad - A^{12} q^{46} - 8A^{10} q^{46} + 5A^8 q^{46} - 11A^6 q^{46} - 2A^2 q^{46} - 3A^{12} q^{44} + 3A^{10} q^{44} + 29A^8 q^{44} - A^6 q^{44} \\
&\quad + 9A^4 q^{44} - 2A^2 q^{44} + 7A^{12} q^{42} - 2A^{10} q^{42} - 5A^8 q^{42} - 28A^6 q^{42} + 6A^4 q^{42} - A^2 q^{42} - A^{12} q^{40} - 6A^{10} q^{40} \\
&\quad + 10A^8 q^{40} - 8A^6 q^{40} + 9A^4 q^{40} - 3A^2 q^{40} - 5A^{12} q^{38} - 16A^{10} q^{38} + 13A^8 q^{38} - 7A^6 q^{38} + 11A^4 q^{38} \\
&\quad - 5A^2 q^{38} + 8A^{12} q^{36} + 9A^{10} q^{36} + 26A^8 q^{36} - 15A^6 q^{36} + 11A^4 q^{36} + q^{36} - 2A^{12} q^{34} - 10A^{10} q^{34} \\
&\quad - 2A^8 q^{34} - 35A^6 q^{34} + A^4 q^{34} - 9A^2 q^{34} - 8A^{10} q^{32} + 15A^8 q^{32} + A^6 q^{32} + 31A^4 q^{32} - A^2 q^{32} + q^{32} \\
&\quad + 2A^{12} q^{30} - 7A^{10} q^{30} + 10A^8 q^{30} - 22A^6 q^{30} + 3A^4 q^{30} - 5A^2 q^{30} + q^{30} + A^{12} q^{28} + 6A^{10} q^{28} + 32A^8 q^{28} \\
&\quad - 14A^6 q^{28} + 5A^4 q^{28} - 9A^2 q^{28} - 2A^{12} q^{26} - 16A^{10} q^{26} - 11A^8 q^{26} - 27A^6 q^{26} + 22A^4 q^{26} + 3A^2 q^{26} \\
&\quad + 2q^{26} + 4A^{12} q^{24} + A^{10} q^{24} + 16A^8 q^{24} - 8A^6 q^{24} + 6A^4 q^{24} - 9A^2 q^{24} - 2A^{12} q^{22} - 5A^{10} q^{22} + 20A^8 q^{22} \\
&\quad + 12A^4 q^{22} - 5A^2 q^{22} + q^{22} + A^{12} q^{20} - 3A^{10} q^{20} - 3A^8 q^{20} - 30A^6 q^{20} + 2A^4 q^{20} - 2A^2 q^{20} + q^{20} \\
&\quad + 2A^{12} q^{18} + 2A^{10} q^{18} + 11A^8 q^{18} + 15A^4 q^{18} - A^2 q^{18} - 2A^{12} q^{16} - 8A^{10} q^{16} + A^8 q^{16} - 8A^6 q^{16} + 4A^4 q^{16} \\
&\quad - 5A^2 q^{16} + A^{12} q^{14} + 4A^{10} q^{14} + 12A^8 q^{14} - 4A^6 q^{14} + 5A^4 q^{14} + q^{14} - 3A^{10} q^{12} - 4A^8 q^{12} - 12A^6 q^{12} \\
&\quad - A^4 q^{12} - 2A^2 q^{12} + 6A^8 q^{10} + 4A^6 q^{10} + 8A^4 q^{10} - 2A^{10} q^8 - 2A^8 q^8 - 7A^6 q^8 - 2A^4 q^8 - 2A^2 q^8 \\
&\quad + 2A^{10} q^6 + 5A^8 q^6 + 2A^6 q^6 + 3A^4 q^6 - A^{10} q^4 - 3A^8 q^4 - 4A^6 q^4 + 2A^8 q^2 + A^6 q^2 + A^4 q^2 - A^6)
\end{aligned}$$

Коэффициенты разложения по родам:

$$\begin{aligned}
\sigma_{[1]} &= \frac{-3A^6+11A^4-9A^2+2}{A^8}, \\
{}_1\sigma_{[2]} &= \frac{-22A^{12}+189A^{10}-596A^8+859A^6-611A^4+208A^2-27}{A^{16}}, \\
{}_2\sigma_{[1]} &= \sigma_{[1]}^3 \frac{-5A^6+18A^4-10A^2+1}{A^8}, \\
{}_2\sigma_{[1,1]} &= \sigma_{[1]}^2 \frac{102A^{12}-1017A^{10}+3366A^8-4985A^6+3715A^4-1358A^2+193}{2A^{16}}, \\
{}_2\sigma_{[3]} &= -\sigma_{[1]} \frac{(A^2-1)^2(344A^{14}-5399A^{12}+26061A^{10}-57177A^8+62463A^6-35363A^4+9947A^2-1100)}{2A^{24}}, \\
{}_2\sigma_{[2,2]} &= {}_1\sigma_{[2]}^2, \\
{}_3\sigma_{[2]} &= -\sigma_{[1]}^4 \frac{958A^{12}-11045A^{10}+39556A^8-60163A^6+44139A^4-15600A^2+2155}{8A^{16}}, \\
{}_3\sigma_{[2,1]} &= \sigma_{[1]}^3 \frac{(A^2-1)L_1}{3A^{24}}, \\
{}_3\sigma_{[4]} &= -\sigma_{[1]}^2 \frac{(A^2-1)L_2}{6A^{32}}, \\
{}_3\sigma_{[2,1,1]} &= ({}_1\sigma_{[2]}) \cdot ({}_2\sigma_{[1,1]}), \\
{}_4\sigma_{[1]} &= -\sigma_{[1]}^7 \frac{-2A^4+10A^2-3}{A^6}, \\
{}_4\sigma_{[1,1]} &= \sigma_{[1]}^6 \frac{471A^{12}-5655A^{10}+20674A^8-31517A^6+23353A^4-8324A^2+1146}{2A^{16}}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1,1]} &= 3({}_2\sigma_{[1,1]})^2,
\end{aligned} \tag{A.8}$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2601A^{16} - 39320A^{14} + 222085A^{12} - 611432A^{10} + 913323A^8 - \\
&\quad - 780548A^6 + 381065A^4 - 98690A^2 + 10500, \\
L_2 &= 12660A^{22} - 284493A^{20} + 2479924A^{18} - 11264618A^{16} + 30345707A^{14} - \\
&\quad - 51744353A^{12} + 57722000A^{10} - 42575683A^8 + 20534306A^6 - \\
&\quad - 6215584A^4 + 1069867A^2 - 79797.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Разность между полиномами ХОМФЛИ-ПТ узлов  $11n71$  и  $11n75$  возникает только в четвертом порядке разложения по родам

$$\begin{aligned}
{}_4\sigma_{[3]}^{11n71} &= -\sigma_{[1]}^5 \frac{(A^2-1)^2(M_0)}{6A^{24}}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11n71} &= \sigma_{[1]}^5 \frac{M_1}{6A^{24}}, \\
{}_4\sigma_{[3,1]} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{M_2}{8A^{32}}, \\
{}_4\sigma_{[2,2]}^{11n71} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{M_3}{12A^{32}}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
{}_4\sigma_{[3]}^{11n75} &= {}_4\sigma_{[3]}^{11n71} - \sigma_{[1]}^5 \frac{12(A^2-1)^7}{A^{20}} \\
{}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11n75} &= {}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11n71} + \sigma_{[1]}^5 \frac{24(A^2-1)^7}{A^{20}} \\
{}_4\sigma_{[3,1]}^{11n75} &= {}_4\sigma_{[3,1]}^{11n71} + \sigma_{[1]}^5 \frac{12(A^2-1)^7}{A^{20}} \\
{}_4\sigma_{[2,2]}^{11n75} &= {}_4\sigma_{[2,2]}^{11n71} - \sigma_{[1]}^5 \frac{32(A^2-1)^7}{A^{20}},
\end{aligned} \tag{A.11}$$

где

$$\begin{aligned}
M_0 &= 15242A^{14} - 304469A^{12} + 1775229A^{10} - 4462140A^8 + \\
&\quad + 5433000A^6 - 3416423A^4 + 1073708A^2 - 133718, \\
M_1 &= -19319A^{18} + 332367A^{16} - 2138175A^{14} + 6995687A^{12} - 13143243A^{10} + \\
&\quad + 15072569A^8 - 10741545A^6 + 4642451A^4 - 1113096A^2 + 113456, \\
M_2 &= 91088A^{24} - 2309849A^{22} + 22425042A^{20} - 115860958A^{18} + \\
&\quad + 363735505A^{16} - 743042116A^{14} + 1025725436A^{12} - 973911821A^{10} + \\
&\quad + 636322140A^8 - 280772446A^6 + 79818757A^4 - 13180446A^2 + 959412, \\
M_3 &= 202368A^{24} - 4744094A^{22} + 44867157A^{20} - 229705244A^{18} + 718595120A^{16} - \\
&\quad - 1465272630A^{14} + 2019700681A^{12} - 1914472278A^{10} + 1248338173A^8 - \\
&\quad - 549522810A^6 + 155807644A^4 - 25655184A^2 + 1861865.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

11n73 – 11n74 Нормированная разность следующая

$$\Delta H_{[3,1]}^{11n73-11n74} = \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
&= \{q\}^8 [4]^2 [2] D_4 D_3 D_0 D_{-2} A^{-10} q^{-44} (A^8 q^{84} - A^8 q^{82} - A^6 q^{82} + 2A^8 q^{80} + A^6 q^{80} - 2A^{10} q^{78} - A^8 q^{78} \\
&\quad - 3A^6 q^{78} + A^{10} q^{76} + 3A^8 q^{76} + 2A^6 q^{76} + A^4 q^{76} - A^{10} q^{74} - 4A^6 q^{74} - A^4 q^{74} + A^{12} q^{72} - 2A^{10} q^{72} \\
&\quad + 4A^8 q^{72} - 2A^6 q^{72} + 3A^4 q^{72} - 2A^6 q^{70} - A^{12} q^{68} - 2A^{10} q^{68} + 7A^8 q^{68} - 2A^6 q^{68} + 2A^4 q^{68} + 2A^{12} q^{66} \\
&\quad - 6A^{10} q^{66} + 5A^8 q^{66} - 9A^6 q^{66} + 2A^4 q^{66} - 2A^2 q^{66} + A^{12} q^{64} + 5A^{10} q^{64} + 5A^8 q^{64} - 3A^6 q^{64} + 3A^4 q^{64} \\
&\quad + 2A^2 q^{64} - 2A^{12} q^{62} - 10A^{10} q^{62} + 2A^8 q^{62} - 6A^6 q^{62} + 6A^4 q^{62} - 3A^2 q^{62} + 4A^{12} q^{60} - 5A^{10} q^{60} \\
&\quad + 15A^8 q^{60} - 10A^6 q^{60} + A^4 q^{60} - 3A^2 q^{60} + 4A^{10} q^{58} + 5A^8 q^{58} - 7A^6 q^{58} + 10A^4 q^{58} + 5A^2 q^{58} - 2A^{12} q^{56} \\
&\quad - 9A^{10} q^{56} + 8A^8 q^{56} - 18A^6 q^{56} - 10A^2 q^{56} + q^{56} + 5A^{12} q^{54} - 10A^{10} q^{54} + 13A^8 q^{54} - 3A^6 q^{54} + 16A^4 q^{54} \\
&\quad + 3A^2 q^{54} - q^{54} - A^{12} q^{52} + 5A^{10} q^{52} + 4A^8 q^{52} - 18A^6 q^{52} + A^4 q^{52} - A^2 q^{52} + q^{52} - A^{12} q^{50} - 10A^{10} q^{50} \\
&\quad + 27A^8 q^{50} - 8A^6 q^{50} + 5A^4 q^{50} - 12A^2 q^{50} + 2q^{50} + 6A^{12} q^{48} - 11A^{10} q^{48} - 4A^8 q^{48} - 19A^6 q^{48} + 20A^4 q^{48} \\
&\quad + 7A^2 q^{48} - 4q^{48} - 4A^{12} q^{46} + 8A^{10} q^{46} + 15A^8 q^{46} - 16A^6 q^{46} + 2A^4 q^{46} - 4A^2 q^{46} + 6q^{46} + 2A^{12} q^{44} \\
&\quad - 17A^{10} q^{44} + 19A^8 q^{44} + 8A^4 q^{44} - 17A^2 q^{44} - 3q^{44} + 4A^{12} q^{42} - 2A^{10} q^{42} + 2A^8 q^{42} - 19A^6 q^{42} \\
&\quad + 19A^4 q^{42} + 17A^2 q^{42} - q^{42} - 4A^{12} q^{40} + 2A^{10} q^{40} + 14A^8 q^{40} - 31A^6 q^{40} - 9A^4 q^{40} - 15A^2 q^{40} + 8q^{40} \\
&\quad + 5A^{12} q^{38} - 13A^{10} q^{38} + 12A^8 q^{38} + 14A^6 q^{38} + 30A^4 q^{38} - 9A^2 q^{38} - 9q^{38} - A^{12} q^{36} + A^{10} q^{36} + A^8 q^{36} \\
&\quad - 26A^6 q^{36} - A^4 q^{36} + 15A^2 q^{36} + 6q^{36} + 23A^8 q^{34} - 9A^6 q^{34} - 2A^4 q^{34} - 21A^2 q^{34} + 2q^{34} + 2A^{12} q^{32} \\
&\quad - 12A^{10} q^{32} - 5A^8 q^{32} - 8A^6 q^{32} + 19A^4 q^{32} + 6A^2 q^{32} - 6q^{32} - A^{12} q^{30} + 6A^{10} q^{30} + 11A^8 q^{30} - 10A^6 q^{30} \\
&\quad + 3A^2 q^{30} + 6q^{30} + A^{12} q^{28} - 7A^{10} q^{28} + 6A^8 q^{28} - 2A^6 q^{28} + 11A^4 q^{28} - 14A^2 q^{28} - 2A^{10} q^{26} + 2A^8 q^{26} \\
&\quad - 10A^6 q^{26} - 6A^4 q^{26} + 2A^2 q^{26} - 4q^{26} + 2A^{10} q^{24} + 6A^8 q^{24} - 6A^6 q^{24} + 11A^4 q^{24} + 7A^2 q^{24} + 5q^{24} \\
&\quad - 5A^{10} q^{22} + A^8 q^{22} - 6A^6 q^{22} + 5A^4 q^{22} - 11A^2 q^{22} - 2q^{22} + 2A^{10} q^{20} + 5A^8 q^{20} + 4A^6 q^{20} + 3A^2 q^{20} \\
&\quad - q^{20} - 2A^{10} q^{18} - A^8 q^{18} - 10A^6 q^{18} - 3A^4 q^{18} - A^2 q^{18} + 3q^{18} + 5A^8 q^{16} + A^6 q^{16} + 8A^4 q^{16} - A^2 q^{16} \\
&\quad - q^{16} - 3A^8 q^{14} - 3A^6 q^{14} - q^{14} + 4A^8 q^{12} + 2A^6 q^{12} + A^4 q^{12} - 2A^2 q^{12} + q^{12} - A^8 q^{10} - 5A^6 q^{10} - A^4 q^{10} \\
&\quad + A^8 q^8 + 2A^6 q^8 + 3A^4 q^8 + 2A^2 q^8 - 2A^6 q^6 - A^4 q^6 - 2A^2 q^6 + A^6 q^4 + A^4 q^4 - A^6 q^2 - A^4 q^2 + A^4)
\end{aligned}$$



Коэффициенты разложения по родам:

$$\begin{aligned}
\sigma_{[1]} &= -\frac{4A^6-11A^4+8A^2-2}{A^4}, \\
{}_1\sigma_{[2]} &= \frac{(A^2-1)(40A^{10}-100A^8+49A^6+39A^4-43A^2+11)}{A^8}, \\
{}_2\sigma_{[1]} &= -\sigma_{[1]}^3 \frac{4A^6-15A^4+12A^2-3}{A^4}, \\
{}_2\sigma_{[1,1]} &= \sigma_{[1]}^2 \frac{186A^{12}-780A^{10}+1391A^8-1364A^6+834A^4-316A^2+57}{2A^8}, \\
{}_2\sigma_{[3]} &= -\sigma_{[1]} \frac{(A^2-1)^2(1304A^{14}-3856A^{12}+3374A^{10}-715A^8+382A^6-1221A^4+862A^2-188)}{2A^{12}}, \\
{}_2\sigma_{[2,2]} &= {}_1\sigma_{[2]}^2, \\
{}_3\sigma_{[2]} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{1960A^{12}-7068A^{10}+7197A^8+1022A^6-6202A^4+3902A^2-811}{8A^8}, \\
{}_3\sigma_{[2,1]} &= -\sigma_{[1]}^3 \frac{(A^2-1)L_1}{3A^{12}}, \\
{}_3\sigma_{[4]} &= \sigma_{[1]}^2 \frac{(A^2-1)L_2}{6A^{16}}, \\
{}_3\sigma_{[2,1,1]} &= ({}_1\sigma_{[2]}) \cdot ({}_2\sigma_{[1,1]}), \\
{}_4\sigma_{[1]} &= -\sigma_{[1]}^7 \frac{A^6-7A^4+6A^2-1}{A^4}, \\
{}_4\sigma_{[1,1]} &= \sigma_{[1]}^6 \frac{860A^{12}-3572A^{10}+6299A^8-6505A^6+4657A^4-2151A^2+444}{2A^8}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1,1]} &= 3({}_2\sigma_{[1,1]})^2,
\end{aligned} \tag{A.14}$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= 8008A^{16} - 34035A^{14} + 55454A^{12} - 37953A^{10} - \\
&\quad -1794A^8 + 23441A^6 - 19524A^4 + 7821A^2 - 1318, \\
L_2 &= 76864A^{22} - 416624A^{20} + 899584A^{18} - 966984A^{16} + 515824A^{14} - 108182A^{12} - \\
&\quad -27394A^{10} + 108904A^8 - 166241A^6 + 120491A^4 - 41987A^2 + 5765.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Разность между полиномами ХОМФЛИ-ПТ узлов  $11n73$  и  $11n74$  возникает только в четвертом порядке разложения по родам

$$\begin{aligned}
{}_4\sigma_{[3]}^{11n73} &= -\sigma_{[1]}^5 \frac{(A^2-1)^2(M_0)}{6A^{12}}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11n73} &= \sigma_{[1]}^5 \frac{M_1}{6A^{12}}, \\
{}_4\sigma_{[3,1]}^{11n73} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{M_1}{8A^{16}}, \\
{}_4\sigma_{[2,2]}^{11n73} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{M_2}{12A^{14}}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
{}_4\sigma_{[3]}^{11n74} &= {}_4\sigma_{[3]}^{11n73} - \sigma_{[1]}^5 \frac{12(A^2-1)^7}{A^{10}}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11n74} &= {}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11n73} + \sigma_{[1]}^5 \frac{24(A^2-1)^7}{A^{10}}, \\
{}_4\sigma_{[3,1]}^{11n74} &= {}_4\sigma_{[3,1]}^{11n73} + \sigma_{[1]}^5 \frac{12(A^2-1)^7}{A^{10}}, \\
{}_4\sigma_{[2,2]}^{11n74} &= {}_4\sigma_{[2,2]}^{11n73} - \sigma_{[1]}^5 \frac{32(A^2-1)^7}{A^{10}},
\end{aligned} \tag{A.17}$$

где

$$\begin{aligned}
M_0 &= 71678A^{14} - 199873A^{12} + 159125A^{10} - 27985A^8 + \\
&\quad + 39961A^6 - 95709A^4 + 65185A^2 - 15038, \\
M_1 &= -56372A^{18} + 318761A^{16} - 812199A^{14} + 1256919A^{12} - 1348127A^{10} + \\
&\quad + 1073031A^8 - 641975A^6 + 277615A^4 - 78107A^2 + 10706, \\
M_2 &= 569344A^{24} - 3743832A^{22} + 10514704A^{20} - 16351858A^{18} + \\
&\quad + 15300989A^{16} - 9101754A^{14} + 4624494A^{12} - 4058058A^{10} + \\
&\quad + 4326923A^8 - 3241646A^6 + 1521394A^4 - 409152A^2 + 48372, \\
M_3 &= 1160344A^{24} - 7454976A^{22} + 19737628A^{20} - 26483656A^{18} + \\
&\quad + 15615111A^{16} + 3694468A^{14} - 11347356A^{12} + 4322244A^{10} + \\
&\quad + 4200568A^8 - 5839116A^6 + 3175256A^4 - 884428A^2 + 104153.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

11n76 – 11n78 Нормированная разность следующая:

$$\Delta H_{[3,1]}^{11n76-11n78} = \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
&= \{q\}^8 [4]^2 [2] D_4 D_3 D_0 D_{-2} A^{-26} q^{-46} \left( -A^{10}q^{74} + 2A^{10}q^{72} + A^8q^{72} - 2A^{10}q^{70} - 3A^8q^{70} + A^{12}q^{68} \right. \\
&\quad + 2A^{10}q^{68} + 3A^8q^{68} + A^6q^{68} - 2A^{12}q^{66} - 3A^{10}q^{66} - 2A^8q^{66} - A^6q^{66} + A^{12}q^{64} + 5A^{10}q^{64} + 2A^8q^{64} \\
&\quad + A^6q^{64} + A^{12}q^{62} - 3A^{10}q^{62} - 7A^8q^{62} - A^{12}q^{60} + 4A^8q^{60} + 6A^6q^{60} - 2A^{12}q^{58} + A^{10}q^{58} - 3A^8q^{58} \\
&\quad - 3A^6q^{58} - 2A^4q^{58} + 4A^{12}q^{56} + 9A^{10}q^{56} - 3A^8q^{56} + 3A^6q^{56} + A^4q^{56} - 4A^{12}q^{54} - 7A^{10}q^{54} - 10A^8q^{54} \\
&\quad + 7A^6q^{54} - 2A^4q^{54} + 2A^{10}q^{52} - A^8q^{52} + 4A^6q^{52} - 5A^4q^{52} + 11A^{10}q^{50} + 3A^8q^{50} + 9A^6q^{50} - 2A^4q^{50} \\
&\quad - A^{10}q^{48} - 26A^8q^{48} - A^6q^{48} - 6A^4q^{48} + A^2q^{48} - 2A^{12}q^{46} + 4A^{10}q^{46} - 3A^8q^{46} + 23A^6q^{46} - 2A^4q^{46} \\
&\quad + A^2q^{46} - 2A^{12}q^{44} + 3A^{10}q^{44} - 8A^8q^{44} + 11A^6q^{44} - 11A^4q^{44} + A^2q^{44} + 2A^{12}q^{42} + 16A^{10}q^{42} - 8A^8q^{42} \\
&\quad + 11A^6q^{42} - 7A^4q^{42} + 5A^2q^{42} - 5A^{12}q^{40} - 5A^{10}q^{40} - 31A^8q^{40} + 7A^6q^{40} - 12A^4q^{40} + 2A^{12}q^{38} \\
&\quad + 11A^{10}q^{38} - 2A^8q^{38} + 36A^6q^{38} - 3A^4q^{38} + 6A^2q^{38} - 3A^{12}q^{36} + 6A^{10}q^{36} - 18A^8q^{36} + 10A^6q^{36} \\
&\quad - 22A^4q^{36} + 3A^2q^{36} - q^{36} + 12A^{10}q^{34} - 12A^8q^{34} + 16A^6q^{34} - 13A^4q^{34} + 3A^2q^{34} - 2A^{12}q^{32} - A^{10}q^{32} \\
&\quad - 27A^8q^{32} + 20A^6q^{32} - 6A^4q^{32} + 9A^2q^{32} - q^{32} + 11A^{10}q^{30} - 7A^8q^{30} + 27A^6q^{30} - 17A^4q^{30} + 2A^2q^{30} \\
&\quad - q^{30} - 2A^{12}q^{28} + 5A^{10}q^{28} - 11A^8q^{28} + 18A^6q^{28} - 15A^4q^{28} + 4A^2q^{28} + 4A^{10}q^{26} - 21A^8q^{26} + 7A^6q^{26} \\
&\quad - 14A^4q^{26} + 7A^2q^{26} - 2q^{26} + 7A^{10}q^{24} - 10A^8q^{24} + 24A^6q^{24} - 5A^4q^{24} + 5A^2q^{24} - 2A^{12}q^{22} - 10A^8q^{22} \\
&\quad + 15A^6q^{22} - 14A^4q^{22} + A^2q^{22} - q^{22} + A^{12}q^{20} + 7A^{10}q^{20} - 4A^8q^{20} + 10A^6q^{20} - 10A^4q^{20} + 7A^2q^{20} - q^{20} \\
&\quad - A^{12}q^{18} - 14A^8q^{18} + 4A^6q^{18} - 9A^4q^{18} + A^2q^{18} + 2A^{10}q^{16} - 2A^8q^{16} + 17A^6q^{16} - A^4q^{16} + 3A^2q^{16} \\
&\quad - 6A^8q^{14} + 2A^6q^{14} - 11A^4q^{14} + A^2q^{14} - q^{14} + 3A^{10}q^{12} + 7A^6q^{12} + 2A^2q^{12} - A^{10}q^{10} - 7A^8q^{10} \\
&\quad - 4A^4q^{10} + A^{10}q^8 + 2A^8q^8 + 7A^6q^8 + 2A^2q^8 - 2A^8q^6 - A^6q^6 - 3A^4q^6 + 2A^6q^4 - A^8q^2 - A^4q^2 + A^6)
\end{aligned}$$

Коэффициенты разложения по родам:

$$\begin{aligned}
\sigma_{[1]} &= \frac{4A^6 - 13A^4 + 10A^2 - 2}{A^8}, \\
{}_1\sigma_{[2]} &= -\frac{(A^2 - 1)(24A^{10} - 212A^8 + 538A^6 - 512A^4 + 199A^2 - 27)}{A^{16}}, \\
{}_2\sigma_{[1]} &= \sigma_{[1]}^3 \frac{8A^6 - 25A^4 + 13A^2 - 1}{A^8}, \\
{}_2\sigma_{[1,1]} &= \sigma_{[1]}^2 \frac{186A^{12} - 1556A^{10} + 4622A^8 - 6314A^6 + 4361A^4 - 1472A^2 + 193}{2A^{16}}, \\
{}_2\sigma_{[3]} &= \sigma_{[1]} \frac{(A^2 - 1)^2 (536A^{14} - 7776A^{12} + 37050A^{10} - 78366A^8 + 80784A^6 - 42409A^4 + 10932A^2 - 1100)}{2A^{24}}, \\
{}_2\sigma_{[2,2]} &= {}_1\sigma_{[2]}^2, \\
{}_3\sigma_{[2]} &= -\sigma_{[1]}^4 \frac{1080A^{12} - 15100A^{10} + 53974A^8 - 78450A^6 + 53599A^4 - 17258A^2 + 2155}{8A^{16}}, \\
{}_3\sigma_{[2,1]} &= -\sigma_{[1]}^3 \frac{(A^2 - 1)L_1}{3A^{24}}, \\
{}_3\sigma_{[4]} &= -\sigma_{[1]}^2 \frac{(A^2 - 1)L_2}{6A^{32}}, \\
{}_3\sigma_{[2,1,1]} &= ({}_1\sigma_{[2]}) \cdot ({}_2\sigma_{[1,1]}), \\
{}_4\sigma_{[1]} &= \sigma_{[1]}^7 \frac{5A^4 - 19A^2 + 6}{A^6}, \\
{}_4\sigma_{[1,1]} &= \sigma_{[1]}^6 \frac{1092A^{12} - 10024A^{10} + 31667A^8 - 43459A^6 + 29131A^4 - 9319A^2 + 1146}{2A^{16}}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1,1]} &= 3({}_2\sigma_{[1,1]})^2,
\end{aligned} \tag{A.20}$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= 4056A^{16} - 63143A^{14} + 343446A^{12} - 892646A^{10} + \\
&\quad + 1249574A^8 - 994727A^6 + 449612A^4 - 107324A^2 + 10500, \\
L_2 &= 20928A^{22} - 468464A^{20} + 4016336A^{18} - 17846224A^{16} + \\
&\quad + 46653488A^{14} - 76550010A^{12} + 81492379A^{10} - 56897251A^8 + \\
&\quad + 25772417A^6 - 7274223A^4 + 1160323A^2 - 79797.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Разность между полиномами ХОМФЛИ-ПТ узлов  $11n76$  и  $11n78$  возникает только в четвертом порядке разложения по родам

$$\begin{aligned}
{}_4\sigma_{[3]}^{11n76} &= -\sigma_{[1]}^5 \frac{(A^2 - 1)^2 (M_0)}{6A^{24}}, \\
{}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11n76} &= \sigma_{[1]}^5 \frac{M_1}{6A^{32}}, \\
{}_4\sigma_{[3,1]}^{11n76} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{M_2}{8A^{32}}, \\
{}_4\sigma_{[2,2]}^{11n76} &= \sigma_{[1]}^4 \frac{M_3}{12A^{32}}
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
{}_4\sigma_{[3]}^{11n78} &= {}_4\sigma_{[3]}^{11n76} - \sigma_{[1]}^5 \frac{12(A^2-1)^7}{A^{22}} \\
{}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11n78} &= {}_4\sigma_{[1,1,1]}^{11n76} + \sigma_{[1]}^5 \frac{24(A^2-1)^7}{A^{22}} \\
{}_4\sigma_{[3,1]}^{11n78} &= {}_4\sigma_{[3,1]}^{11n76} + \sigma_{[1]}^5 \frac{12(A^2-1)^7}{A^{22}} \\
{}_4\sigma_{[2,2]}^{11n78} &= {}_4\sigma_{[2,2]}^{11n76} - \sigma_{[1]}^5 \frac{32(A^2-1)^7}{A^{22}},
\end{aligned} \tag{A.23}$$

где

$$\begin{aligned}
M_0 &= 27590A^{14} - 483519A^{12} + 2704473A^{10} - 6417996A^8 + \\
&\quad + 7229652A^6 - 4146292A^4 + 1182030A^2 - 133718, \\
M_1 &= 47420A^{18} - 671599A^{16} + 3785747A^{14} - 11185230A^{12} + 19281432A^{10} - \\
&\quad - 20432863A^8 + 13487027A^6 - 5399832A^4 + 1199536A^2 - 113456, \\
M_2 &= 179072A^{24} - 4286600A^{22} + 39845868A^{20} - 197296918A^{18} + \\
&\quad + 592263398A^{16} - 1153447498A^{14} + 1512881107A^{12} - 1359694664A^{10} + \\
&\quad + 837470683A^8 - 346895278A^6 + 92207878A^4 - 14186852A^2 + 959412, \\
M_3 &= 314776A^{24} - 7726848A^{22} + 74243884A^{20} - 376217744A^{18} + 1145586248A^{16} - \\
&\quad - 2249457508A^{14} + 2962885794A^{12} - 2666907084A^{10} + 1642050175A^8 - \\
&\quad - 679075832A^6 + 180065934A^4 - 27622484A^2 + 1861865.
\end{aligned} \tag{A.24}$$

### A.1.2 Узлы-мутанты с одиннадцатью пересечениями, которые не представляются в виде кренделей

Мы перечисляем только разности полиномов в представлении  $[3, 1]$  алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_4)$ . Для алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$  разности следующие:

$$\begin{aligned}
\Delta H_{[3,1]}^{11a19-11a25} &= -\{q\}^{13} [8]^2 [7] [6] [4]^2 [3] [2] q^{-57} (q^{48} - q^{46} - 3q^{44} + 5q^{42} - q^{40} - 4q^{38} \\
&\quad + 11q^{36} - 8q^{34} - 5q^{32} + 18q^{30} - 12q^{28} + 2q^{26} + 13q^{24} - 18q^{22} \\
&\quad + 8q^{20} + 7q^{18} - 11q^{16} + 9q^{14} - 2q^{12} - 5q^{10} + 5q^8 - 2q^6 + q^2 - 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta H_{[3,1]}^{11a24-11a26} &= -\{q\}^{13} [8]^2 [7] [6] [4]^2 [3] [2] q^{-31} (q^{48} - q^{46} - 2q^{44} + 5q^{42} - 3q^{40} - 2q^{38} \\
&\quad + 10q^{36} - 13q^{34} - q^{32} + 13q^{30} - 17q^{28} + 7q^{26} + 6q^{24} - 20q^{22} + 12q^{20} \\
&\quad + q^{18} - 9q^{16} + 10q^{14} - 5q^{12} - 3q^{10} + 5q^8 - 2q^6 + q^4 + q^2 - 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta H_{[3,1]}^{11a251-11a253} &= -\{q\}^{13} [8]^2 [7] [6] [4]^2 [3] [2] q^{-17} (q^{48} - q^{46} + 2q^{42} - 4q^{40} + 4q^{38} \\
&\quad + 3q^{36} - 9q^{34} + 9q^{32} - 3q^{30} - 10q^{28} + 18q^{26} - 8q^{24} - 5q^{22} + 15q^{20} \\
&\quad - 13q^{18} + 2q^{16} + 11q^{14} - 9q^{12} + 3q^{10} + 3q^8 - 4q^6 + 2q^4 + q^2 - 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1]}^{11a252-11a254} = & -\{q\}^{13} [8]^2 [7] [6] [4]^2 [3] [2] q^{-43} (q^{48} - q^{46} - q^{44} + 2q^{42} - 4q^{40} + 2q^{38} \\ & + 5q^{36} - 10q^{34} + 6q^{32} + q^{30} - 14q^{28} + 15q^{26} - 3q^{24} - 12q^{22} \\ & + 15q^{20} - 10q^{18} - 4q^{16} + 12q^{14} - 8q^{12} + 4q^8 - 4q^6 + q^4 + q^2 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1]}^{11n34-11n42} = & -\{q\}^{13} [8]^2 [7] [6] [4]^2 [3] [2] q^{-9} (q^{46} - q^{44} + 2q^{40} - 4q^{38} + 2q^{36} \\ & + 3q^{34} - 4q^{32} + 6q^{30} - q^{28} - 3q^{26} + 6q^{24} - 4q^{22} + 4q^{20} + 2q^{18} \\ & - 5q^{16} + 5q^{14} - 2q^{12} - 2q^{10} + 4q^8 - 2q^6 + q^2 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1]}^{11n35-11n43} = & -\{q\}^{13} [8]^2 [7] [6] [4]^2 [3] [2] q^{-89} (2q^{22} + 2q^{16} - q^{14} + 2q^{12} + 3q^{10} \\ & - 2q^8 + q^6 - q^2 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1]}^{11n36-11n44} = & -\{q\}^{13} [8]^2 [7] [6] [4]^2 [3] [2] q^{-37} (q^{22} - q^{20} + q^{16} - 2q^{14} + 3q^{12} \\ & + 2q^{10} - q^8 + 2q^6 + 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1]}^{11n39-11n45} = & -\{q\}^{13} [8]^2 [7] [6] [4]^2 [3] [2] q^{-35} (q^{46} - q^{44} + 2q^{40} - 4q^{38} + q^{34} \\ & - 5q^{32} + 4q^{30} - 3q^{28} - 4q^{26} + 4q^{24} - 6q^{22} + 4q^{20} + 3q^{18} - 7q^{16} \\ & + 6q^{14} - 2q^{12} - 3q^{10} + 5q^8 - 2q^6 + q^2 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1]}^{11n40-11n46} = & -\{q\}^{13} [8]^2 [7] [6] [4]^2 [3] [2] q^{-63} (q^{22} - q^{20} - q^{18} - 3q^{14} + q^{12} - 3q^8 \\ & - q^4 - q^2 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1]}^{11n41-11n47} = & -\{q\}^{13} [8]^2 [7] [6] [4]^2 [3] [2] q^{-63} (q^{22} - q^{20} - q^{18} - 3q^{14} + q^{10} - 3q^8 \\ & - q^4 - q^2 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1]}^{11n151-11n152} = & -\{q\}^{13} [8]^2 [7] [6] [4]^2 [3] [2] q^{-63} (q^{46} - q^{44} + 2q^{40} - 3q^{38} + q^{36} \\ & + 2q^{34} - 4q^{32} + 5q^{30} - q^{28} - 2q^{26} + 5q^{24} - 5q^{22} + 5q^{20} + 4q^{18} \\ & - 6q^{16} + 6q^{14} - 2q^{12} - 3q^{10} + 5q^8 - 2q^6 + q^2 - 1), \end{aligned}$$

Для алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_4)$  разности в представлении  $[3, 1]$  следующие (здесь мы обозначаем его  $[3, 1, 0]$ , потому что в общем случае, диаграммы Юнга, описывающие представления алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_4)$  состоят из трех строк):

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1,0]}^{11a19-11a25} = & -\{q\}^{11} [8]^2 [7] [4]^3 [2]^2 q^{-97} (q^{104} + q^{102} - 2q^{100} + 3q^{96} - 2q^{94} + 2q^{92} \\ & + 7q^{90} - 6q^{88} - q^{86} + 5q^{84} - 4q^{82} + 6q^{80} + 10q^{78} - 8q^{76} + q^{74} - q^{72} \\ & - 4q^{70} + 14q^{66} + 2q^{64} - 23q^{62} + 14q^{60} - 11q^{58} - 10q^{56} + 16q^{54} \\ & + 11q^{52} - 21q^{50} + 7q^{48} + 2q^{46} - 22q^{44} + 26q^{42} + q^{40} - 8q^{38} + 6q^{36} \\ & + q^{34} - 15q^{32} + 6q^{30} + 14q^{28} - 10q^{26} - 4q^{24} + 11q^{22} - 9q^{20} - 5q^{18} \\ & + 10q^{16} - 6q^{12} + 4q^{10} - 3q^6 + 2q^4 + q^2 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1,0]}^{11a24-11a26} = & \{q\}^{11} [8]^2 [7] [4]^3 [2]^2 q^{-61} (q^{104} - 3q^{100} + 3q^{98} + 3q^{96} - 7q^{94} + 4q^{92} \\ & + 4q^{90} - 14q^{88} + 6q^{86} + 7q^{84} - 9q^{82} + 7q^{80} + 2q^{78} - 10q^{76} + 2q^{74} \\ & + 10q^{72} - 2q^{68} + 19q^{66} - 24q^{64} - 9q^{62} + 18q^{60} - 7q^{58} - 10q^{56} \\ & + 17q^{54} - 8q^{52} - 35q^{50} + 24q^{48} - 7q^{46} + 13q^{42} - q^{40} - 12q^{38} \\ & + 2q^{36} + 6q^{34} - 2q^{32} + 10q^{30} + 4q^{28} - 10q^{26} - 3q^{24} + 5q^{22} - 5q^{20} \\ & + 2q^{18} + 6q^{16} - 4q^{14} - 4q^{12} + 3q^{10} - q^8 + 2q^4 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1,0]}^{11a251-11a253} = & \{q\}^{11} [8]^2 [7] [4]^3 [2]^2 q^{-43} (q^{104} - q^{100} + q^{98} - 2q^{94} + 3q^{92} + q^{90} \\ & - 5q^{88} - q^{86} + 2q^{84} - 4q^{82} + 3q^{80} + 5q^{78} - 2q^{76} - 5q^{74} + 2q^{72} \\ & - 3q^{70} + 4q^{68} + 5q^{66} + 3q^{64} - 10q^{62} + 4q^{58} - 20q^{56} + 27q^{54} \\ & - 13q^{50} + 7q^{48} + 7q^{46} - 15q^{44} + 11q^{42} + 17q^{40} - 13q^{38} + 5q^{36} \\ & - 5q^{32} + 5q^{28} - 2q^{26} - 6q^{24} + 6q^{22} - 6q^{20} - 5q^{18} + 11q^{16} - 5q^{14} \\ & - 3q^{12} + 6q^{10} - 2q^8 - 2q^6 + 3q^4 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1,0]}^{11a252-11a254} = & -\{q\}^{11} [8]^2 [7] [4]^3 [2]^2 q^{-79} (q^{104} + q^{102} - 3q^{94} + q^{92} + 2q^{90} - q^{88} \\ & - 2q^{86} - q^{84} - 7q^{82} - 2q^{80} + 2q^{78} + 2q^{74} - 3q^{72} - 4q^{70} - 6q^{68} \\ & + 6q^{66} + 6q^{62} - 2q^{60} + 7q^{58} - 15q^{56} + 2q^{54} + 17q^{52} - 15q^{50} \\ & + 11q^{48} + 4q^{46} - 10q^{44} - 4q^{42} + 11q^{40} - 8q^{38} + 2q^{36} + 8q^{34} \\ & - 12q^{32} + q^{30} + 7q^{28} - 6q^{26} - 3q^{24} + 9q^{22} - 14q^{18} + 14q^{16} + q^{14} \\ & - 12q^{12} + 9q^{10} + q^8 - 6q^6 + 3q^4 + q^2 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1,0]}^{11n34-11n42} = & \{q\}^{11} [8]^2 [7] [4]^3 [2]^2 q^{-33} (q^{102} - q^{98} + 2q^{90} - q^{88} + 2q^{86} - 2q^{84} \\ & - 5q^{82} + 3q^{80} + 2q^{78} - 6q^{76} + 8q^{74} - 5q^{72} - 6q^{70} + 6q^{68} - 8q^{66} \\ & + 5q^{64} + 6q^{62} - 5q^{60} + q^{58} + 7q^{56} - 7q^{54} + 4q^{52} + 4q^{50} + 3q^{48} \\ & - q^{46} + 3q^{44} - q^{40} - q^{38} + 2q^{36} - 3q^{34} + 5q^{32} - q^{30} - 6q^{28} + 6q^{26} \\ & - 5q^{24} - q^{22} + 4q^{20} - q^{16} + q^{14} - 2q^{12} + q^{10} + q^4 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1,0]}^{11n35-11n43} = & -\{q\}^{11} [8]^2 [7] [4]^3 [2]^2 q^{-161} (2q^{92} + q^{90} + 2q^{86} + q^{84} - 4q^{82} + 2q^{80} \\ & + 2q^{78} - 3q^{76} - 4q^{74} + q^{72} - 8q^{70} - 9q^{68} + 3q^{66} - 2q^{64} - 2q^{62} \\ & - 2q^{60} + q^{58} - 8q^{56} + 5q^{54} + 4q^{52} + 3q^{50} + 6q^{48} + 4q^{46} - 10q^{44} \\ & + 2q^{42} + 10q^{40} - 6q^{38} + 2q^{36} + 9q^{34} - 5q^{32} - 13q^{30} + 11q^{28} + q^{26} \\ & - 4q^{24} + q^{22} + 6q^{20} - 7q^{18} - 3q^{16} + 4q^{14} - 2q^{10} + q^8 - q^4 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1,0]}^{11n36-11n44} = & \{q\}^{11} [8]^2 [7] [4]^3 [2]^2 q^{-97} (q^{96} - q^{94} - q^{92} + 2q^{90} - 2q^{86} + 3q^{84} \\ & - 6q^{80} - 2q^{78} + 6q^{76} - 5q^{74} - q^{72} + 5q^{70} - 7q^{66} + 5q^{64} + 10q^{62} \\ & - 2q^{60} + 4q^{58} + 5q^{56} - 6q^{52} + 6q^{50} - 3q^{48} - q^{46} - 3q^{44} - 4q^{42} \\ & - 7q^{40} + 2q^{38} - 5q^{36} - 4q^{34} + 2q^{32} - 4q^{28} + q^{26} + 4q^{24} - 5q^{22} \\ & + 2q^{18} - q^{14} + 2q^{12} - q^{10} + q^4 + q^2 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1,0]}^{11n39-11n45} = & -\{q\}^{11} [8]^2 [7] [4]^3 [2]^2 q^{-69} (q^{102} + q^{100} + q^{98} + q^{96} - q^{92} + q^{90} - 4q^{88} \\ & + q^{84} - 7q^{82} - 2q^{80} + q^{78} - 11q^{76} + 5q^{72} - 9q^{70} + 10q^{68} + 2q^{66} - 7q^{64} \\ & + 7q^{62} + 2q^{60} - 6q^{58} + 12q^{56} + 3q^{54} - 3q^{52} - 6q^{50} + 4q^{48} - 7q^{46} - 2q^{44} \\ & + 10q^{42} - 3q^{40} - 3q^{38} - 3q^{34} - 4q^{32} + 13q^{30} - 6q^{28} + 3q^{26} + 2q^{24} - 6q^{22} \\ & - q^{20} + 3q^{18} + q^{16} + q^{14} - 3q^{12} + 2q^{10} - q^8 - 2q^6 + 2q^4 + q^2 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1,0]}^{11n40-11n46} = & \{q\}^{11} [8]^2 [7] [4]^3 [2]^2 q^{-125} (q^{92} - 2q^{90} - q^{88} + 2q^{86} - q^{84} - 2q^{82} \\ & + 5q^{80} + 2q^{78} - 5q^{76} + q^{74} + 8q^{72} - 7q^{70} + 8q^{66} - 2q^{64} - 13q^{62} \\ & + q^{60} + q^{58} - 11q^{56} + 2q^{54} + 5q^{52} - 4q^{50} - 6q^{48} + 6q^{46} - q^{44} \\ & + 10q^{42} + 8q^{40} + 6q^{38} + q^{36} + 6q^{34} - 4q^{32} + 4q^{30} + 7q^{28} - 4q^{24} \\ & - 3q^{22} - 2q^{20} - 7q^{18} + q^{16} + q^{14} - q^{12} - 3q^{10} - q^6 + q^2 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1,0]}^{11n41-11n47} = & -\{q\}^{11} [8]^2 [7] [4]^3 [2]^2 q^{-133} (q^{96} - q^{92} - q^{90} - q^{88} - 4q^{86} - 2q^{80} - 3q^{78} \\ & + q^{76} + 7q^{70} + 5q^{68} + 6q^{66} + 2q^{64} + 7q^{62} + 2q^{60} + 5q^{58} + 2q^{54} - q^{52} - 2q^{50} \\ & - 7q^{48} - 3q^{46} - q^{44} - 7q^{42} - 3q^{40} + 4q^{38} + q^{36} - 7q^{34} + 4q^{32} + 2q^{30} \\ & - q^{28} - q^{26} + 9q^{24} - 2q^{22} - 3q^{20} + q^{16} - 2q^{14} + 2q^{12} - q^6 - q^4 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{[3,1,0]}^{11n151-11n152} = & -\{q\}^{11} [8]^2 [7] [4]^3 [2]^2 q^{-105} (q^{102} + q^{100} + q^{98} + q^{96} + q^{94} + 2q^{90} - q^{88} \\ & + q^{86} + 2q^{84} - 2q^{82} - q^{80} + 4q^{78} - 4q^{76} - q^{74} + 6q^{72} - 4q^{70} + 5q^{68} \\ & + 3q^{66} - 2q^{64} + q^{60} - 4q^{58} + 2q^{56} + 3q^{54} + q^{52} - 13q^{50} + 5q^{48} - 3q^{46} \\ & - 10q^{44} + 13q^{42} + 2q^{40} - 7q^{38} + 4q^{36} - 9q^{32} + 15q^{30} - 4q^{28} + 5q^{24} \\ & - 6q^{22} - 3q^{20} + 3q^{18} + q^{16} - 2q^{12} + 2q^{10} - q^8 - 2q^6 + 2q^4 + q^2 - 1). \end{aligned}$$

## A.2 Узлы-мутанты X. Мортонa

В [30] X. Мортон предложил узлы-мутанты, которые не различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлениях  $[2, 1]$  и  $[3, 1]$ . Мы вычислили полиномы этих узлов в представлении  $[4, 2]$  алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_3)$ :

$$\mathcal{H}_{[4,2]}^{K(1,3,3,-3,-3)} = \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned}
&= q^{-176} (2q^{260} + 2q^{258} - 33q^{256} + 34q^{254} + 178q^{252} - 368q^{250} - 377q^{248} + 1634q^{246} - 346q^{244} - 4372q^{242} \\
&\quad + 4606q^{240} + 7208q^{238} - 16060q^{236} - 4034q^{234} + 36039q^{232} - 17354q^{230} - 56286q^{228} + 70226q^{226} \\
&\quad + 51653q^{224} - 153296q^{222} + 16712q^{220} + 231322q^{218} - 176128q^{216} - 230524q^{214} + 402206q^{212} \\
&\quad + 69864q^{210} - 595275q^{208} + 275168q^{206} + 609430q^{204} - 721862q^{202} - 333770q^{200} + 1090134q^{198} \\
&\quad - 232242q^{196} - 1173822q^{194} + 952727q^{192} + 827252q^{190} - 1577202q^{188} - 41986q^{186} + 1806129q^{184} \\
&\quad - 989298q^{182} - 1415202q^{180} + 1881766q^{178} + 424748q^{176} - 2210770q^{174} + 827248q^{172} + 1763276q^{170} \\
&\quad - 1827329q^{168} - 688476q^{166} + 2158594q^{164} - 582342q^{162} - 1699331q^{160} + 1545580q^{158} + 644296q^{156} \\
&\quad - 1820666q^{154} + 571278q^{152} + 1289220q^{150} - 1410774q^{148} - 187296q^{146} + 1471058q^{144} - 944128q^{142} \\
&\quad - 723268q^{140} + 1531430q^{138} - 438059q^{136} - 1294416q^{134} + 1430022q^{132} + 376580q^{130} - 1804580q^{128} \\
&\quad + 790062q^{126} + 1423672q^{124} - 1720608q^{122} - 456044q^{120} + 2054310q^{118} - 717936q^{116} - 1670956q^{114} \\
&\quad + 1645228q^{112} + 739780q^{110} - 1987752q^{108} + 349532q^{106} + 1679918q^{104} - 1182402q^{102} \\
&\quad - 934636q^{100} + 1523786q^{98} + 90481q^{96} - 1381578q^{94} + 572164q^{92} + 925426q^{90} - 916515q^{88} \\
&\quad - 365652q^{86} + 936548q^{84} - 120410q^{82} - 714695q^{80} + 418512q^{78} + 383452q^{76} - 498038q^{74} \\
&\quad - 78751q^{72} + 411684q^{70} - 114772q^{68} - 255384q^{66} + 187499q^{64} + 109102q^{62} - 178500q^{60} - 6664q^{58} \\
&\quad + 130887q^{56} - 50396q^{54} - 71346q^{52} + 68422q^{50} + 17189q^{48} - 55690q^{46} + 17148q^{44} + 27498q^{42} \\
&\quad - 25937q^{40} - 2652q^{38} + 17084q^{36} - 8174q^{34} - 4927q^{32} + 7230q^{30} - 1564q^{28} - 2712q^{26} + 2279q^{24} \\
&\quad - 42q^{22} - 964q^{20} + 546q^{18} + 80q^{16} - 242q^{14} + 98q^{12} + 28q^{10} - 42q^8 + 12q^6 + 4q^4 - 4q^2 + 1),
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{[4,2]}^{K(1,3,-3,3,-3)} = \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned}
&= q^{-176} (2q^{260} + 2q^{258} - 33q^{256} + 32q^{254} + 182q^{252} - 364q^{250} - 389q^{248} + 1636q^{246} - 332q^{244} - 4386q^{242} \\
&\quad + 4592q^{240} + 7232q^{238} - 16046q^{236} - 4066q^{234} + 36039q^{232} - 17302q^{230} - 56316q^{228} + 70160q^{226} \\
&\quad + 51725q^{224} - 153268q^{222} + 16602q^{220} + 231352q^{218} - 176012q^{216} - 230604q^{214} + 402118q^{212} \\
&\quad + 70004q^{210} - 595225q^{208} + 274978q^{206} + 609462q^{204} - 721654q^{202} - 333934q^{200} + 1089982q^{198} \\
&\quad - 231994q^{196} - 1173804q^{194} + 952465q^{192} + 827364q^{190} - 1576990q^{188} - 42182q^{186} + 1806009q^{184} \\
&\quad - 989044q^{182} - 1415192q^{180} + 1881506q^{178} + 424884q^{176} - 2210584q^{174} + 827026q^{172} + 1763228q^{170} \\
&\quad - 1827117q^{168} - 688568q^{166} + 2158456q^{164} - 582218q^{162} - 1699313q^{160} + 1545480q^{158} + 644350q^{156} \\
&\quad - 1820616q^{154} + 571214q^{152} + 1289270q^{150} - 1410720q^{148} - 187396q^{146} + 1471076q^{144} - 944004q^{142} \\
&\quad - 723406q^{140} + 1531338q^{138} - 437847q^{136} - 1294464q^{134} + 1429800q^{132} + 376766q^{130} - 1804444q^{128} \\
&\quad + 789802q^{126} + 1423682q^{124} - 1720354q^{122} - 456164q^{120} + 2054114q^{118} - 717724q^{116} - 1670844q^{114} \\
&\quad + 1644966q^{112} + 739798q^{110} - 1987504q^{108} + 349380q^{106} + 1679754q^{104} - 1182194q^{102} \\
&\quad - 934604q^{100} + 1523596q^{98} + 90531q^{96} - 1381438q^{94} + 572076q^{92} + 925346q^{90} - 916399q^{88} \\
&\quad - 365622q^{86} + 936438q^{84} - 120382q^{82} - 714623q^{80} + 418446q^{78} + 383422q^{76} - 497986q^{74} \\
&\quad - 78751q^{72} + 411652q^{70} - 114758q^{68} - 255360q^{66} + 187485q^{64} + 109088q^{62} - 178486q^{60} - 6662q^{58} \\
&\quad + 130875q^{56} - 50392q^{54} - 71342q^{52} + 68420q^{50} + 17189q^{48} - 55690q^{46} + 17148q^{44} + 27498q^{42} \\
&\quad - 25937q^{40} - 2652q^{38} + 17084q^{36} - 8174q^{34} - 4927q^{32} + 7230q^{30} - 1564q^{28} - 2712q^{26} + 2279q^{24} \\
&\quad - 42q^{22} - 964q^{20} + 546q^{18} + 80q^{16} - 242q^{14} + 98q^{12} + 28q^{10} - 42q^8 + 12q^6 + 4q^4 - 4q^2 + 1),
\end{aligned}$$



$$\mathcal{H}_{[4,2]}^{K(3,3,3,-3,-3)} = \quad (A.27)$$

$$\begin{aligned}
&= q^{-224} (q^{360} - 4q^{358} + 4q^{356} + 10q^{354} - 34q^{352} + 20q^{350} + 72q^{348} - 138q^{346} - 16q^{344} + 310q^{342} \\
&\quad - 244q^{340} - 402q^{338} + 712q^{336} + 372q^{334} - 1532q^{332} - 88q^{330} + 3262q^{328} - 1654q^{326} - 5720q^{324} \\
&\quad + 6986q^{322} + 6213q^{320} - 16046q^{318} - 1710q^{316} + 26244q^{314} - 5631q^{312} - 41046q^{310} + 12314q^{308} \\
&\quad + 81556q^{306} - 36520q^{304} - 178644q^{302} + 146308q^{300} + 334408q^{298} - 465493q^{296} - 468484q^{294} \\
&\quad + 1150112q^{292} + 360242q^{290} - 2340225q^{288} + 433340q^{286} + 4037846q^{284} - 2670544q^{282} \\
&\quad - 5807194q^{280} + 7375420q^{278} + 6275234q^{276} - 15363550q^{274} - 2663146q^{272} + 26094820q^{270} \\
&\quad - 9072316q^{268} - 35947130q^{266} + 32644571q^{264} + 36806610q^{262} - 67836284q^{260} - 16898720q^{258} \\
&\quad + 105829269q^{256} - 34087626q^{254} - 126833206q^{252} + 115834368q^{250} + 104537961q^{248} \\
&\quad - 208873260q^{246} - 18994612q^{244} + 274285216q^{242} - 127096019q^{240} - 266307492q^{238} \\
&\quad + 298827574q^{236} + 154374240q^{234} - 434578153q^{232} + 55958950q^{230} + 466975202q^{228} \\
&\quad - 314192552q^{226} - 352180388q^{224} + 534508418q^{222} + 96603368q^{220} - 624569134q^{218} \\
&\quad + 231782467q^{216} + 526789274q^{214} - 519579704q^{212} - 254387438q^{210} + 653096500q^{208} \\
&\quad - 101680452q^{206} - 573703278q^{204} + 406866430q^{202} + 311322091q^{200} - 543598890q^{198} \\
&\quad + 25439908q^{196} + 465334382q^{194} - 296967930q^{192} - 217198918q^{190} + 393237346q^{188} \\
&\quad - 83335734q^{186} - 281351288q^{184} + 296349164q^{182} + 21676308q^{180} - 321427448q^{178} \\
&\quad + 256841758q^{176} + 145450302q^{174} - 415812894q^{172} + 149853428q^{170} + 373458623q^{168} \\
&\quad - 427868780q^{166} - 141788952q^{164} + 562943090q^{162} - 184027047q^{160} - 495855304q^{158} \\
&\quad + 473735728q^{156} + 253251492q^{154} - 619464075q^{152} + 71702848q^{150} + 576465752q^{148} \\
&\quad - 362987516q^{146} - 373520784q^{144} + 528968530q^{142} + 93009306q^{140} - 534010924q^{138} \\
&\quad + 167765164q^{136} + 403253988q^{134} - 335360250q^{132} - 202178336q^{130} + 382316172q^{128} \\
&\quad + 4209788q^{126} - 326333954q^{124} + 137168594q^{122} + 212249810q^{120} - 201307340q^{118} \\
&\quad - 88867556q^{116} + 197291808q^{114} - 8557035q^{112} - 151006562q^{110} + 65086952q^{108} + 90678850q^{106} \\
&\quad - 83183526q^{104} - 37075452q^{102} + 74881760q^{100} + 297232q^{98} - 54080147q^{96} + 18518878q^{94} \\
&\quad + 31702548q^{92} - 23493018q^{90} - 13965685q^{88} + 20437088q^{86} + 2798020q^{84} - 14389206q^{82} \\
&\quad + 2648316q^{80} + 8498708q^{78} - 4297918q^{76} - 4089610q^{74} + 3955322q^{72} + 1337292q^{70} \\
&\quad - 2855370q^{68} + 71930q^{66} + 1702773q^{64} - 579796q^{62} - 824984q^{60} + 603516q^{58} + 290120q^{56} \\
&\quad - 448178q^{54} - 21588q^{52} + 272736q^{50} - 85540q^{48} - 130108q^{46} + 103152q^{44} + 32976q^{42} - 74561q^{40} \\
&\quad + 15712q^{38} + 33814q^{36} - 24968q^{34} - 5116q^{32} + 15026q^{30} - 5184q^{28} - 4236q^{26} + 4434q^{24} \\
&\quad - 488q^{22} - 1508q^{20} + 936q^{18} + 70q^{16} - 342q^{14} + 140q^{12} + 32q^{10} - 50q^8 + 14q^6 + 4q^4 - 4q^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{[4,2]}^{K(3,3,-3,3,-3)} = \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned}
&= q^{-224} (q^{360} - 4q^{358} + 4q^{356} + 10q^{354} - 34q^{352} + 20q^{350} + 72q^{348} - 138q^{346} - 16q^{344} + 310q^{342} \\
&\quad - 244q^{340} - 402q^{338} + 712q^{336} + 372q^{334} - 1532q^{332} - 88q^{330} + 3262q^{328} - 1654q^{326} - 5720q^{324} \\
&\quad + 6986q^{322} + 6213q^{320} - 16050q^{318} - 1694q^{316} + 26236q^{314} - 5685q^{312} - 40942q^{310} + 12300q^{308} \\
&\quad + 81336q^{306} - 36176q^{304} - 178638q^{302} + 145624q^{300} + 335198q^{298} - 465163q^{296} - 470174q^{294} \\
&\quad + 1151194q^{292} + 361906q^{290} - 2343139q^{288} + 433050q^{286} + 4042176q^{284} - 2672732q^{282} \\
&\quad - 5812242q^{280} + 7381556q^{278} + 6279224q^{276} - 15375256q^{274} - 2661586q^{272} + 26110802q^{270} \\
&\quad - 9085188q^{268} - 35960444q^{266} + 32670283q^{264} + 36807406q^{262} - 67868858q^{260} - 16880474q^{258} \\
&\quad + 105858333q^{256} - 34125590q^{254} - 126847776q^{252} + 115888014q^{250} + 104526667q^{248} \\
&\quad - 208932038q^{246} - 18948124q^{244} + 274328738q^{242} - 127175563q^{240} - 266311642q^{238} \\
&\quad + 298919598q^{236} + 154326598q^{234} - 434651303q^{232} + 56049902q^{230} + 467003602q^{228} \\
&\quad - 314302732q^{226} - 352152610q^{224} + 534608570q^{222} + 96522298q^{220} - 624630076q^{218} \\
&\quad + 231898621q^{216} + 526788072q^{214} - 519696188q^{212} - 254320760q^{210} + 653172258q^{208} \\
&\quad - 101787656q^{206} - 573712780q^{204} + 406970878q^{202} + 311270327q^{200} - 543662396q^{198} \\
&\quad + 25523362q^{196} + 465340776q^{194} - 297046330q^{192} - 217154820q^{190} + 393280264q^{188} \\
&\quad - 83407332q^{186} - 281341402q^{184} + 296414322q^{182} + 21615798q^{180} - 321450744q^{178} \\
&\quad + 256926136q^{176} + 145412396q^{174} - 415878428q^{172} + 149941582q^{170} + 373469877q^{168} \\
&\quad - 427970746q^{166} - 141737046q^{164} + 563018648q^{162} - 184124613q^{160} - 495878622q^{158} \\
&\quad + 473848612q^{156} + 253214828q^{154} - 619559787q^{152} + 71790780q^{150} + 576515518q^{148} \\
&\quad - 363101554q^{146} - 373509168q^{144} + 529072640q^{142} + 92943950q^{140} - 534074386q^{138} \\
&\quad + 167857042q^{136} + 403266080q^{134} - 335448126q^{132} - 202147764q^{130} + 382379546q^{128} \\
&\quad + 4153932q^{126} - 326364116q^{124} + 137231296q^{122} + 212247014q^{120} - 201360042q^{118} \\
&\quad - 88840398q^{116} + 197323046q^{114} - 8593833q^{112} - 151014648q^{110} + 65119542q^{108} + 90670756q^{106} \\
&\quad - 83204940q^{104} - 37060444q^{102} + 74891744q^{100} + 281966q^{98} - 54081465q^{96} + 18530790q^{94} \\
&\quad + 31698584q^{92} - 23500000q^{90} - 13959907q^{88} + 20439454q^{86} + 2793184q^{84} - 14388740q^{82} \\
&\quad + 2651130q^{80} + 8497364q^{78} - 4299080q^{76} - 4088474q^{74} + 3955612q^{72} + 1336582q^{70} \\
&\quad - 2855314q^{68} + 72302q^{66} + 1702627q^{64} - 579934q^{62} - 824870q^{60} + 603534q^{58} + 290070q^{56} \\
&\quad - 448168q^{54} - 21578q^{52} + 272732q^{50} - 85540q^{48} - 130108q^{46} + 103152q^{44} + 32976q^{42} - 74561q^{40} \\
&\quad + 15712q^{38} + 33814q^{36} - 24968q^{34} - 5116q^{32} + 15026q^{30} - 5184q^{28} - 4236q^{26} + 4434q^{24} \\
&\quad - 488q^{22} - 1508q^{20} + 936q^{18} + 70q^{16} - 342q^{14} + 140q^{12} + 32q^{10} - 50q^8 + 14q^6 + 4q^4 - 4q^2 + 1)
\end{aligned}$$

### А.3 Разности полиномов узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями в представлении [4, 2]

Мы приводим здесь разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ в представлении [4, 2] квантовой алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_4)$  крендельных узлов-мутантов с 11 пересечениями.

$$\begin{aligned}
H_{[4,2]}^{11a57-11a231} = & \{q\}^{11} [10] [8] [5]^2 [4] [2]^4 q^{-76} (q^{240} - q^{238} - 4q^{236} + 10q^{234} - 3q^{232} \\
& - 23q^{230} + 43q^{228} - 15q^{226} - 63q^{224} + 125q^{222} - 83q^{220} - 93q^{218} \\
& + 300q^{216} - 305q^{214} - 79q^{212} + 655q^{210} - 783q^{208} - 36q^{206} + 1317q^{204} \\
& - 1612q^{202} + 6q^{200} + 2355q^{198} - 2883q^{196} + 290q^{194} + 3443q^{192} \\
& - 4524q^{190} + 1392q^{188} + 3405q^{186} - 5732q^{184} + 3796q^{182} + 705q^{180} \\
& - 4746q^{178} + 6388q^{176} - 4891q^{174} + 145q^{172} + 6319q^{170} - 10679q^{168} \\
& + 8452q^{166} + 1285q^{164} - 12851q^{162} + 16545q^{160} - 7259q^{158} - 9199q^{156} \\
& + 19412q^{154} - 14395q^{152} - 1322q^{150} + 14540q^{148} - 16161q^{146} \\
& + 7681q^{144} + 3623q^{142} - 11563q^{140} + 13414q^{138} - 8137q^{136} - 2517q^{134} \\
& + 12603q^{132} - 15037q^{130} + 7258q^{128} + 6034q^{126} - 15382q^{124} \\
& + 13490q^{122} - 1585q^{120} - 10826q^{118} + 13367q^{116} - 5067q^{114} - 5045q^{112} \\
& + 8197q^{110} - 4337q^{108} - 513q^{106} + 2197q^{104} - 1944q^{102} + 1745q^{100} \\
& - 1257q^{98} - 275q^{96} + 1918q^{94} - 2118q^{92} + 462q^{90} + 1520q^{88} - 2006q^{86} \\
& + 599q^{84} + 1499q^{82} - 2018q^{80} + 325q^{78} + 1822q^{76} - 1909q^{74} - 46q^{72} \\
& + 1849q^{70} - 1466q^{68} - 275q^{66} + 1364q^{64} - 854q^{62} - 319q^{60} + 764q^{58} \\
& - 312q^{56} - 293q^{54} + 344q^{52} - 16q^{50} - 249q^{48} + 117q^{46} + 89q^{44} - 149q^{42} \\
& + 16q^{40} + 83q^{38} - 40q^{36} - 40q^{34} + 36q^{32} + 25q^{30} - 35q^{28} - q^{26} + 35q^{24} \\
& - 9q^{22} - 15q^{20} + 13q^{18} + 7q^{16} - 10q^{14} - q^{12} + 7q^{10} - 2q^8 - 3q^6 + 2q^4 - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta H_{[4,2]}^{11n71-11n75} = & -\{q\}^{11} [10] [8] [5]^2 [4] [2]^4 q^{-234} (q^{206} - 3q^{204} - q^{202} + 9q^{200} - 12q^{198} \\
& - q^{196} + 15q^{194} - 21q^{192} + 17q^{190} + 3q^{188} - 35q^{186} + 74q^{184} \\
& - 34q^{182} - 99q^{180} + 209q^{178} - 73q^{176} - 210q^{174} + 338q^{172} - 65q^{170} \\
& - 319q^{168} + 348q^{166} - 44q^{164} - 224q^{162} + 162q^{160} - 50q^{158} - 2q^{156} \\
& - 43q^{154} - 96q^{152} + 157q^{150} - 44q^{148} - 248q^{146} + 356q^{144} \\
& - 152q^{142} - 255q^{140} + 677q^{138} - 502q^{136} - 222q^{134} + 1196q^{132} \\
& - 1242q^{130} + 267q^{128} + 1157q^{126} - 1506q^{124} + 823q^{122} + 385q^{120} \\
& - 1141q^{118} + 1207q^{116} - 701q^{114} - 188q^{112} + 1076q^{110} - 1497q^{108} \\
& + 871q^{106} + 325q^{104} - 1584q^{102} + 1618q^{100} - 537q^{98} - 1090q^{96} \\
& + 1827q^{94} - 1308q^{92} - 138q^{90} + 1211q^{88} - 1361q^{86} + 687q^{84} \\
& + 269q^{82} - 796q^{80} + 883q^{78} - 505q^{76} + 23q^{74} + 523q^{72} - 691q^{70} \\
& + 525q^{68} + 53q^{66} - 498q^{64} + 494q^{62} - 117q^{60} - 216q^{58} + 225q^{56} \\
& - 54q^{54} - 85q^{52} + 23q^{50} + 37q^{48} - 59q^{46} - 6q^{44} + 45q^{42} - 49q^{40} \\
& + 22q^{38} + 4q^{36} - 22q^{34} + 33q^{32} - 23q^{30} + 4q^{28} + 24q^{26} - 22q^{24} \\
& + 7q^{22} + 9q^{20} - 11q^{18} + 3q^{16} + q^{14} - q^8 + q^6 - q^4 - q^2 + 1) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta H_{[4,2]}^{11n73-11n74} = & \{q\}^{11} [10] [8] [5]^2 [4] [2]^4 q^{-142} (q^{226} + q^{224} - q^{222} + q^{220} + 3q^{218} - 3q^{216} \\
& - 3q^{214} + 6q^{212} - q^{210} - 12q^{208} + 5q^{206} + 11q^{204} - 25q^{202} - 16q^{200} \\
& + 41q^{198} - 18q^{196} - 66q^{194} + 77q^{192} + 25q^{190} - 124q^{188} + 68q^{186} \\
& + 113q^{184} - 143q^{182} - 24q^{180} + 224q^{178} - 79q^{176} - 216q^{174} + 324q^{172} \\
& + 55q^{170} - 436q^{168} + 355q^{166} + 240q^{164} - 629q^{162} + 285q^{160} + 429q^{158} \\
& - 678q^{156} + 71q^{154} + 569q^{152} - 503q^{150} - 275q^{148} + 572q^{146} - 85q^{144} \\
& - 561q^{142} + 244q^{140} + 596q^{138} - 762q^{136} - 266q^{134} + 1239q^{132} \\
& - 770q^{130} - 811q^{128} + 1782q^{126} - 856q^{124} - 955q^{122} + 1795q^{120} \\
& - 732q^{118} - 866q^{116} + 1329q^{114} - 354q^{112} - 519q^{110} + 309q^{108} \\
& + 303q^{106} - 65q^{104} - 868q^{102} + 962q^{100} + 337q^{98} - 1682q^{96} + 1297q^{94} \\
& + 546q^{92} - 1905q^{90} + 1311q^{88} + 441q^{86} - 1460q^{84} + 879q^{82} + 344q^{80} \\
& - 788q^{78} + 258q^{76} + 273q^{74} - 98q^{72} - 340q^{70} + 248q^{68} + 356q^{66} \\
& - 645q^{64} + 163q^{62} + 529q^{60} - 611q^{58} + 23q^{56} + 507q^{54} - 393q^{52} \\
& - 122q^{50} + 394q^{48} - 172q^{46} - 187q^{44} + 258q^{42} - 32q^{40} - 161q^{38} \\
& + 120q^{36} + 35q^{34} - 94q^{32} + 22q^{30} + 51q^{28} - 39q^{26} - 19q^{24} + 39q^{22} \\
& - 11q^{20} - 20q^{18} + 21q^{16} - q^{14} - 12q^{12} + 8q^{10} + q^8 - 4q^6 + 2q^4 + q^2 - 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta H_{[4,2]}^{11n76-11n78} = & \{q\}^{11} [10] [8] [5]^2 [4] [2]^4 q^{-234} (q^{202} - q^{200} - q^{198} + 3q^{196} - 4q^{194} - 4q^{192} \\
& + 14q^{190} - 12q^{188} - 9q^{186} + 31q^{184} - 26q^{182} - 17q^{180} + 56q^{178} \\
& - 36q^{176} - 25q^{174} + 77q^{172} - 26q^{170} - 65q^{168} + 95q^{166} + 24q^{164} \\
& - 136q^{162} + 102q^{160} + 85q^{158} - 202q^{156} + 101q^{154} + 92q^{152} - 210q^{150} \\
& + 65q^{148} + 47q^{146} - 108q^{144} - 38q^{142} + 7q^{140} + 111q^{138} - 239q^{136} \\
& - 8q^{134} + 356q^{132} - 410q^{130} + 54q^{128} + 478q^{126} - 429q^{124} + 131q^{122} \\
& + 376q^{120} - 314q^{118} + 187q^{116} + 169q^{114} - 71q^{112} - 12q^{110} + 114q^{108} \\
& + 92q^{106} - 293q^{104} + 85q^{102} + 259q^{100} - 547q^{98} + 134q^{96} + 194q^{94} \\
& - 402q^{92} + 2q^{90} + 114q^{88} - 114q^{86} - 141q^{84} + 61q^{82} + 181q^{80} \\
& - 304q^{78} + 106q^{76} + 335q^{74} - 462q^{72} + 239q^{70} + 299q^{68} - 464q^{66} \\
& + 274q^{64} + 202q^{62} - 360q^{60} + 232q^{58} + 18q^{56} - 80q^{54} + 16q^{52} - 12q^{50} \\
& + 115q^{48} - 178q^{46} + 14q^{44} + 184q^{42} - 226q^{40} + 27q^{38} + 165q^{36} \\
& - 155q^{34} - 36q^{32} + 134q^{30} - 58q^{28} - 69q^{26} + 101q^{24} - 12q^{22} - 62q^{20} \\
& + 47q^{18} + 2q^{16} - 25q^{14} + 18q^{12} + 3q^{10} - 8q^8 + 2q^6 + q^4 - 2q^2 + 1).
\end{aligned}$$

## Приложение Б

### Инварианты узлов в корнях из единицы

В этом разделе мы приводим ответы для инвариантов в корнях из единицы, которые были определены в разделе 3.3 для нильпотентных представлений с параметрами квантовой алгебры  $U_q(sl_N)$ , когда параметр квантования равен корню из единицы.

#### Б.1 Полиномы $P_{m,N}^{\mathcal{K}}$ узлов

В случае узлов мы опускаем нормировочный коэффициент 3.17.

#### Б.1.1 Полиномы узлов в представлении $W_{m,2}(\lambda)$ квантовой алгебры $U_q(sl_2)$

##### Трилистник (узел $3_1$ )

$$\begin{aligned} P_{2,2}^{3_1}(\lambda) &= \lambda^2 - 1 + \lambda^{-2}, \\ P_{3,2}^{3_1}(\lambda, q) &= q^{-1}\lambda^{-4}(\lambda^6 - 2\lambda^4 + (\lambda^8 - \lambda^6 + \lambda^4 + \lambda^2 - 1)q + 1), \\ P_{4,2}^{3_1}(\lambda, q) &= -q^{-6}\lambda^{-6}(\lambda^{10} - \lambda^8 - 2\lambda^6 + \lambda^4 + \lambda^2 + (\lambda^{12} - \lambda^8 + \lambda^6 + \lambda^4 - 1)q^2), \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

$$\begin{aligned} P_{5,2}^{3_1}(\lambda, q) &= -q^{-8}\lambda^{-8}(\lambda^{12} - \lambda^{10} - 2\lambda^8 + \lambda^6 + \lambda^2 + (\lambda^{14} - \lambda^{10} + \lambda^8 + \lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1)\lambda^2 q^3 + \\ &\quad + (\lambda^{12} - 2\lambda^{10} + \lambda^6 + \lambda^2 - 1)q^2 + (\lambda^{14} - 2\lambda^{12} + \lambda^8 + \lambda^4 - \lambda^2)q), \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

$$\begin{aligned} P_{6,2}^{3_1}(\lambda, q) &= q^{-10}\lambda^{-10}(\lambda^2(\lambda^{18} - \lambda^{14} + 2\lambda^{10} + 3\lambda^8 - 2\lambda^4 - \lambda^2 - 1) + \\ &\quad + (-\lambda^{20} - \lambda^{18} + \lambda^{16} + 2\lambda^{14} - 3\lambda^{10} - 2\lambda^8 + \lambda^4 + \lambda^2 + 1)q^2), \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

$$\begin{aligned} P_{7,2}^{3_1}(\lambda, q) &= -q^{-12}\lambda^{-12}(\lambda^4(\lambda^{14} - \lambda^{12} - \lambda^{10} - 2\lambda^8 + \lambda^6 + \lambda^4 + 1) - \\ &\quad - (-\lambda^{24} + \lambda^{18} - \lambda^{16} - 2\lambda^{14} - \lambda^{10} + \lambda^8 + \lambda^6 + \lambda^4)q^5 + \\ &\quad + (\lambda^{18} - 2\lambda^{16} + \lambda^{12} + \lambda^4 - \lambda^2)q^4 + \lambda^4(\lambda^{18} - \lambda^{16} - 2\lambda^{14} + \lambda^{12} + \lambda^{10} + \lambda^8 + \lambda^4 - \\ &\quad - \lambda^2 - 1)q^3 + (\lambda^4 - 1)^2(\lambda^{10} - \lambda^8 - \lambda^4 - 1)q^2 + \lambda^4(\lambda^{16} - 2\lambda^{14} + \lambda^{10} + \lambda^6 + \lambda^2 - 2)q). \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

Восьмерка (узел 4<sub>1</sub>)

$$\begin{aligned}
P_{2,2}^{4_1}(\lambda) &= -\lambda^2 + 3 - \lambda^{-2}, \\
P_{3,2}^{4_1}(\lambda, q) &= q^{-2}\lambda^{-4}(\lambda^8 - 5\lambda^4 + 3\lambda^2 + (-3\lambda^6 + 5\lambda^4 - 1)q), \\
P_{4,2}^{4_1}(\lambda, q) &= \lambda^{-6}(\lambda^2(-3\lambda^8 + 7\lambda^4 - 3) - (\lambda^{12} - 6\lambda^8 + 6\lambda^4 - 1)q^2), \\
P_{5,2}^{4_1}(\lambda, q) &= -\lambda^{-8}(\lambda^2(6\lambda^{10} - 10\lambda^6 - \lambda^4 + \lambda^2 + 3) + \lambda^2(\lambda^{14} - 6\lambda^{10} - \lambda^8 + 9\lambda^4 - 3)q^3 + \\
&\quad + (5\lambda^{12} - 8\lambda^{10} + \lambda^4 + 3\lambda^2 - 1)q^2 + \lambda^2(3\lambda^{12} - 5\lambda^{10} - \lambda^8 + \lambda^4 + 5\lambda^2 - 3)q), \\
P_{6,2}^{4_1}(\lambda, q) &= -q^{-8}\lambda^{-10}(\lambda^{20} + 3\lambda^{18} - 12\lambda^{14} - 14\lambda^{12} + 14\lambda^8 + 12\lambda^6 - 3\lambda^2 + \\
&\quad + (-3\lambda^{18} - 7\lambda^{16} + 14\lambda^{12} + 15\lambda^{10} - 12\lambda^6 - 7\lambda^4 + 1)q^2 - 1), \\
P_{7,2}^{4_1}(\lambda, q) &= q^{-6}\lambda^{-12}((6\lambda^{16} + 3\lambda^{14} - 3\lambda^{10} - 19\lambda^8 - 2\lambda^6 + 2\lambda^4 + 11\lambda^2 + 1)\lambda^4 - \\
&\quad - (\lambda^{16} + 11\lambda^{14} + 2\lambda^{12} - 2\lambda^{10} - 19\lambda^8 - 3\lambda^6 + 3\lambda^2 + 6)\lambda^4 q^5 + \\
&\quad + (\lambda^{18} - 2\lambda^{10} - 2\lambda^8 - 16\lambda^6 + 14\lambda^4 + 2\lambda^2 + 2)\lambda^6 q^4 - \\
&\quad - (3\lambda^{16} + 13\lambda^{14} - 18\lambda^{10} - 3\lambda^8 - 2\lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 + 3)\lambda^2 q^3 + \\
&\quad + (3\lambda^{16} + \lambda^{14} + 2\lambda^{12} - 2\lambda^{10} - 3\lambda^8 - 18\lambda^6 + 13\lambda^2 + 3)\lambda^6 q^2 + \\
&\quad + (-2\lambda^{18} - 2\lambda^{16} - 14\lambda^{14} + 16\lambda^{12} + 2\lambda^{10} + 2\lambda^8 - 1)q).
\end{aligned} \tag{Б.5}$$

Узел 5<sub>1</sub>

$$\begin{aligned}
P_{2,2}^{5_1}(\lambda) &= q^4 - q^2 + 1 - q^{-2} + q^{-4}, \\
P_{3,2}^{5_1}(\lambda, q) &= q^{-1}\lambda^{-8}(\lambda^{10} + \lambda^{16}q - \lambda^{14}q^2 + \lambda^{12}(q - 2) - \lambda^8q + \lambda^6q^2 + \lambda^4(q + 1) - \lambda^2q^2 - 1), \\
P_{4,2}^{5_1}(\lambda, q) &= q^2\lambda^{-12}(-\lambda^{22} + \lambda^{20} + \lambda^{18} - \lambda^{16} + \lambda^{14} - \lambda^{10} - \lambda^8 - \lambda^6 + \lambda^4 + \lambda^2 + \\
&\quad + (-\lambda^{24} + \lambda^{20} - \lambda^{18} + \lambda^{14} - \lambda^{12} - \lambda^{10} + \lambda^6 + \lambda^4 - 1)q^2), \\
P_{5,2}^{5_1}(\lambda, q) &= -q^2\lambda^{-16}((\lambda^{24} - \lambda^{22} - \lambda^{20} + \lambda^{18} - \lambda^{16} + \lambda^{12} + \lambda^{10} + \lambda^8 - \lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1)\lambda^4 + \\
&\quad + (\lambda^{32} - \lambda^{28} + \lambda^{26} + \lambda^{18} - 2\lambda^{14} - \lambda^8 + \lambda^6 + \lambda^2)q^3 + \\
&\quad + (\lambda^{28} - 2\lambda^{26} + \lambda^{24} - \lambda^{20} + \lambda^{18} + \lambda^{14} - \lambda^{10} + \lambda^8 - 2\lambda^6 + \lambda^4)q^2 + \\
&\quad + (\lambda^{30} - 2\lambda^{28} + \lambda^{26} - \lambda^{22} + \lambda^{20} + \lambda^{16} - \lambda^{14} - \lambda^{12} + \lambda^{10} - 2\lambda^8 + \lambda^6 + 1)q), \\
P_{6,2}^{5_1}(\lambda, q) &= q^2\lambda^{-20}(\lambda^{40} - \lambda^{36} + \lambda^{32} + \lambda^{30} + \lambda^{26} - 2\lambda^{22} - 3\lambda^{20} + 2\lambda^{16} + \lambda^{14} - \lambda^{10} + \lambda^8 + \lambda^6 - \\
&\quad - (\lambda^{40} + \lambda^{38} - \lambda^{36} - \lambda^{34} + \lambda^{26} + 2\lambda^{24} - 3\lambda^{20} - 2\lambda^{18} + \lambda^{14} - \lambda^{10} + \lambda^6 + \lambda^4 + \lambda^2)q^2 - 1), \\
\end{aligned} \tag{Б.6}$$

$$\begin{aligned}
P_{7,2}^{5_1}(\lambda, q) &= q^2\lambda^{-24}(\lambda^{48}(-q^5) + \lambda^{22}(-q^5 + q + 1) - \lambda^6(q^5 + 1) + q^5 - q^4 - \lambda^{46}q^3 - \lambda^{18}q^3(q + 1) + \\
&\quad + q^3 + \lambda^{44}q(q^2 - 1) + \lambda^{36}(-q^2 + q + 1) + \lambda^{16}q(q^2 - q - 1) - \lambda^8(q^2 - 1) - q^2 + \\
&\quad + \lambda^{32}q^3(q^2 - q - 1) + \lambda^{24}(q^3 + q^2 + 1) + \lambda^4q^3(q^2 - 1) + \lambda^{26}(q^5 + q^4 + q^2) + \\
&\quad + \lambda^{28}(q^5 + q^3 - q^2 + q - 2) + \lambda^{38}(-q^4 + q^3 + q^2) + \lambda^{34}q(-2q^4 + q^3 - q^2 + q - 1) + \\
&\quad + \lambda^{12}(2q^4 - q^3 + q^2 - q + 1) + \lambda^{10}(-q^4 + q^3 + q^2) + \lambda^{42}(q^5 - q^4 + q^3 - q^2 + 2q - 1) - \\
&\quad - \lambda^{40}(q^5 - 2q^4 + q^3 - q^2 + q - 1) + \lambda^{20}(-2q^5 + q^4 - 2q^3 + q^2 - q + 1) + \\
&\quad + \lambda^{14}(q^5 - q^4 + q^3 - q^2 + 2q - 2) - \lambda^{30}q(q + 1) - \lambda^2q + q - 1.
\end{aligned} \tag{Б.7}$$

(Б.9)

## Б.1.2 Полиномы узлов в представлении $W_{m,3}(\lambda_1, \lambda_2)$ квантовой алгебры $U_q(sl_3)$

### Трилистник (узел $3_1$ )

$$P_{2,3}^{3_1}(\lambda_1, \lambda_2) = ((\lambda_1^8 - \lambda_1^6 + \lambda_1^4)\lambda_2^8 + (-\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 + \lambda_1^2)\lambda_2^6 + (\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^4 + (\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^2 + \lambda_1^4 - \lambda_1^2 + 1),$$

$$\begin{aligned} P_{3,3}^{3_1}(\lambda_1, \lambda_2, q) = & q^{-2}\lambda_1^{-8}\lambda_2^{-8}(\lambda_1^6 + \lambda_1^8\lambda_2^{16}(\lambda_1^6 + \lambda_1^8q^2 - \lambda_1^4(q+1) + \lambda_1^2q^2 + 1) + \\ & + \lambda_1^6\lambda_2^{14}(\lambda_1^{10} - 2\lambda_1^6 + 3\lambda_1^4 - (2\lambda_1^8 - 3\lambda_1^6 + \lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 - 1)q - 1) - \lambda_1^4\lambda_2^{12}(\lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} - 5\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 + \\ & + 3\lambda_1^4 - 3\lambda_1^2 + (\lambda_1^{12} - 3\lambda_1^{10} + 2\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 - 5\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 1)q + 1) + \lambda_1^2\lambda_2^{10}(\lambda_1^{14}q^2 - \lambda_1^{12}(q-3) - \\ & - 2\lambda_1^{10}(q+1) + 4\lambda_1^8q - 4\lambda_1^6q^2 - 2\lambda_1^4(q+1) + \lambda_1^2(3q-2) + 1) + \lambda_2^8(\lambda_1^{16} - 3\lambda_1^{12} + 4\lambda_1^{10} - 7\lambda_1^8 + 5\lambda_1^4 + \\ & + (-2\lambda_1^{14} + 5\lambda_1^{12} - 4\lambda_1^{10} + \lambda_1^8 + 4\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)q - 1) + \lambda_2^6(\lambda_1^{14}q^2 - \lambda_1^{12}(q-3) - \\ & - 2\lambda_1^{10}(q+1) + 4\lambda_1^8q - 4\lambda_1^6q^2 - 2\lambda_1^4(q+1) + \lambda_1^2(3q-2) + 1) - \\ & - \lambda_2^4(\lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} - 5\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 + 3\lambda_1^4 - 3\lambda_1^2 + (\lambda_1^{12} - 3\lambda_1^{10} + 2\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 - 5\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 1)q + 1) + \\ & + \lambda_2^2(\lambda_1^{10} - 2\lambda_1^6 + 3\lambda_1^4 - (2\lambda_1^8 - 3\lambda_1^6 + \lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 - 1)q - 1) + \lambda_1^8q^2 - \lambda_1^4(q+1) + \lambda_1^2q^2 + 1), \end{aligned} \quad (B.10)$$

$$\begin{aligned} P_{4,3}^{3_1}(\lambda_1, \lambda_2) = & \lambda_1^{-12}\lambda_2^{-12}(\lambda_1^{12}(\lambda_1^{12} - \lambda_1^8 + \lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 1)\lambda_2^{24} + \lambda_1^{10}(-2\lambda_1^{12} + \lambda_1^{10} + 3\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 + 1)\lambda_2^{22} - \\ & - \lambda_1^8(\lambda_1^{16} - \lambda_1^{14} - 3\lambda_1^{12} + 3\lambda_1^{10} + 3\lambda_1^8 - 3\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 1)\lambda_2^{20} + \\ & + \lambda_1^6(\lambda_1^{18} + 3\lambda_1^{16} - 3\lambda_1^{14} - 4\lambda_1^{12} + 5\lambda_1^{10} + 2\lambda_1^8 - 4\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 + 2)\lambda_2^{18} + \\ & + \lambda_1^4(\lambda_1^{20} - 2\lambda_1^{18} - 3\lambda_1^{16} + 5\lambda_1^{14} - 8\lambda_1^{10} + 5\lambda_1^6 + 3\lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^{16} + \\ & + (-2\lambda_1^{22} + 3\lambda_1^{20} + 2\lambda_1^{18} - 8\lambda_1^{16} + 4\lambda_1^{14} + 10\lambda_1^{12} - 2\lambda_1^{10} - 5\lambda_1^8 - 3\lambda_1^6 + \lambda_1^4 + \lambda_1^2)\lambda_2^{14} - \\ & - (\lambda_1^{24} - 3\lambda_1^{20} + 4\lambda_1^{18} - 10\lambda_1^{14} + 5\lambda_1^{12} + 10\lambda_1^{10} - 4\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4 + 1)\lambda_2^{12} + \\ & + \lambda_1^2(\lambda_1^{20} - \lambda_1^{18} - 3\lambda_1^{16} + 5\lambda_1^{14} - 2\lambda_1^{12} - 10\lambda_1^{10} + 4\lambda_1^8 + 8\lambda_1^6 + 2\lambda_1^4 - 3\lambda_1^2 - 2)\lambda_2^{10} + \\ & + (-\lambda_1^{20} + 2\lambda_1^{18} + 3\lambda_1^{16} - 5\lambda_1^{14} + 8\lambda_1^{10} - 5\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^8 + \\ & + (2\lambda_1^{18} - 2\lambda_1^{16} - 3\lambda_1^{14} + 4\lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} - 5\lambda_1^8 - 4\lambda_1^6 + 3\lambda_1^4 + 3\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^6 - \\ & - (\lambda_1^{16} - \lambda_1^{14} - 3\lambda_1^{12} + 3\lambda_1^{10} + 3\lambda_1^8 - 3\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 1)\lambda_2^4 + \lambda_1^2(\lambda_1^{12} - 2\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 + \\ & + 3\lambda_1^4 - \lambda_1^2 - 2)\lambda_2^2 - \lambda_1^{12} + \lambda_1^8 - \lambda_1^6 - \lambda_1^4 + q^2(-\lambda_1^{14}(\lambda_1^8 - \lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 1)\lambda_2^{24} + \\ & + \lambda_1^{12}(-\lambda_1^{12} + 2\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 2)\lambda_2^{22} + \\ & + \lambda_1^8(\lambda_1^{16} + 2\lambda_1^{14} - 2\lambda_1^{12} - 3\lambda_1^{10} + 4\lambda_1^8 + 3\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^{20} + \\ & + \lambda_1^6(2\lambda_1^{18} - 2\lambda_1^{16} - 3\lambda_1^{14} + 4\lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} - 5\lambda_1^8 - 4\lambda_1^6 + 3\lambda_1^4 + 3\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^{18} + \\ & + (-\lambda_1^{24} - 3\lambda_1^{22} + 4\lambda_1^{20} + 2\lambda_1^{18} - 6\lambda_1^{16} + 2\lambda_1^{14} + 6\lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} - 4\lambda_1^8 - 3\lambda_1^6 + \lambda_1^4)\lambda_2^{16} + \\ & + \lambda_1^4(-\lambda_1^{20} + \lambda_1^{18} + 3\lambda_1^{16} - 5\lambda_1^{14} + 2\lambda_1^{12} + 10\lambda_1^{10} - 4\lambda_1^8 - 8\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 + 3\lambda_1^2 + 2)\lambda_2^{14} + \\ & + 2\lambda_1^2(\lambda_1^{20} - \lambda_1^{18} - 2\lambda_1^{16} + 3\lambda_1^{14} - 2\lambda_1^{12} - 5\lambda_1^{10} + 2\lambda_1^8 + 3\lambda_1^6 + 2\lambda_1^4 - \lambda_1^2 - 1)\lambda_2^{12} + \\ & + (-2\lambda_1^{20} + 3\lambda_1^{18} + 2\lambda_1^{16} - 8\lambda_1^{14} + 4\lambda_1^{12} + 10\lambda_1^{10} - 2\lambda_1^8 - 5\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 1)\lambda_2^{10} + \\ & + (\lambda_1^{20} + 3\lambda_1^{18} - 4\lambda_1^{16} - 2\lambda_1^{14} + 6\lambda_1^{12} - 2\lambda_1^{10} - 6\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + 4\lambda_1^4 + 3\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^8 - \\ & - (\lambda_1^{18} + 3\lambda_1^{16} - 3\lambda_1^{14} - 4\lambda_1^{12} + 5\lambda_1^{10} + 2\lambda_1^8 - 4\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 + 2)\lambda_2^6 + \\ & + (\lambda_1^{16} + 2\lambda_1^{14} - 2\lambda_1^{12} - 3\lambda_1^{10} + 4\lambda_1^8 + 3\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^4 + \\ & + (-2\lambda_1^{12} + \lambda_1^{10} + 3\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 + 1)\lambda_2^2 + \lambda_1^{10} - \lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + \lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 1) \end{aligned} \quad (B.11)$$

### Восьмерка (узел 4<sub>1</sub>)

$$\begin{aligned}
P_{2,3}^{4_1}(\lambda_1, \lambda_2) = & \lambda_1^{-4}\lambda_2^{-4}((\lambda_1^8 - 3\lambda_1^6 + \lambda_1^4)\lambda_2^8 - 3\lambda_1^2(\lambda_1^6 - 4\lambda_1^4 + 4\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^6 + \\
& + (\lambda_1^8 - 12\lambda_1^6 + 25\lambda_1^4 - 12\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^4 + 3(\lambda_1^6 - 4\lambda_1^4 + 4\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^2 + \lambda_1^4 - 3\lambda_1^2 + 1).
\end{aligned} \tag{Б.12}$$

$$\begin{aligned}
P_{3,3}^{4_1}(\lambda_1, \lambda_2) = & q^{-2}\lambda_1^{-8}\lambda_2^{-8}(\lambda_1^{10}(\lambda_1^6 - 5\lambda_1^2 + 3)\lambda_2^{16} - 3\lambda_1^6(4\lambda_1^8 - 8\lambda_1^6 + 4\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^{14} + \\
& + \lambda_1^4(-5\lambda_1^{12} + 24\lambda_1^{10} - 72\lambda_1^6 + 57\lambda_1^4 - 5)\lambda_2^{12} + 3\lambda_1^4(\lambda_1^{12} - 24\lambda_1^8 + 40\lambda_1^6 - 24\lambda_1^2 + 8)\lambda_2^{10} + \\
& + (-12\lambda_1^{14} + 57\lambda_1^{12} - 163\lambda_1^8 + 120\lambda_1^6 - 12\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^8 + 3\lambda_1^2(\lambda_1^{12} - 24\lambda_1^8 + 40\lambda_1^6 - 24\lambda_1^2 + 8)\lambda_2^6 + \\
& + (-5\lambda_1^{12} + 24\lambda_1^{10} - 72\lambda_1^6 + 57\lambda_1^4 - 5)\lambda_2^4 - 3(4\lambda_1^8 - 8\lambda_1^6 + 4\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^2 + \lambda_1^2(\lambda_1^6 - 5\lambda_1^2 + 3) - \\
& - (\lambda_1^8(3\lambda_1^6 - 5\lambda_1^4 + 1)\lambda_2^{16} + 3\lambda_1^8(\lambda_1^8 - 4\lambda_1^6 + 8\lambda_1^2 - 4)\lambda_2^{14} + \lambda_1^4(-5\lambda_1^{12} + 57\lambda_1^8 - 72\lambda_1^6 + 24\lambda_1^2 - 5)\lambda_2^{12} + \\
& + 3(8\lambda_1^{14} - 24\lambda_1^{12} + 40\lambda_1^8 - 24\lambda_1^6 + \lambda_1^2)\lambda_2^{10} + \lambda_1^2(\lambda_1^{14} - 12\lambda_1^{12} + 120\lambda_1^8 - 163\lambda_1^6 + 57\lambda_1^2 - 12)\lambda_2^8 + \\
& + 3(8\lambda_1^{12} - 24\lambda_1^{10} + 40\lambda_1^6 - 24\lambda_1^4 + 1)\lambda_2^6 + (-5\lambda_1^{12} + 57\lambda_1^8 - 72\lambda_1^6 + 24\lambda_1^2 - 5)\lambda_2^4 + \\
& + 3\lambda_1^2(\lambda_1^8 - 4\lambda_1^6 + 8\lambda_1^2 - 4)\lambda_2^2 + 3\lambda_1^6 - 5\lambda_1^4 + 1)q).
\end{aligned} \tag{Б.13}$$

### Узел 5<sub>1</sub>

$$\begin{aligned}
P_{2,3}^{5_1}(\lambda_1, \lambda_2) = & \lambda_1^{-8}\lambda_2^{-8}(\lambda_1^8(\lambda_1^8 - \lambda_1^6 + \lambda_1^4 - \lambda_1^2 + 1)\lambda_2^{16} - \lambda_1^6(\lambda_1^{10} - 2\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^{14} + \\
& + \lambda_1^4(\lambda_1^{12} - 2\lambda_1^{10} + \lambda_1^8 - \lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^{12} - \lambda_1^2(\lambda_1^2 - 1)^3(\lambda_1^8 + \lambda_1^6 + \lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 1)\lambda_2^{10} + \\
& + (\lambda_1^{16} - 2\lambda_1^{14} + \lambda_1^{12} + \lambda_1^8 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^8 + (\lambda_1^2 - 1)^3(\lambda_1^8 + \lambda_1^6 + \lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 1)\lambda_2^6 + \\
& + (\lambda_1^{12} - 2\lambda_1^{10} + \lambda_1^8 - \lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^4 + (\lambda_1^{10} - 2\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^2 + \\
& + \lambda_1^8 - \lambda_1^6 + \lambda_1^4 - \lambda_1^2 + 1).
\end{aligned} \tag{Б.14}$$

$$\begin{aligned}
P_{3,3}^{5_1}(\lambda_1, \lambda_2) = & -q^{-4}\lambda_1^{-16}\lambda_2^{-16}(\lambda_1^{16}(q\lambda_1^{16} - q^2\lambda_1^{14} + (q-2)\lambda_1^{12} + \lambda_1^{10} - q\lambda_1^8 + q^2\lambda_1^6 + (q+1)\lambda_1^4 - \\
& - q^2\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^{32} - \lambda_1^{14}(-\lambda_1^{18} + 2\lambda_1^{16} - \lambda_1^{14} - \lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} - 2\lambda_1^8 - \lambda_1^6 + 3\lambda_1^4 + \\
& + q(\lambda_1^{18} - 2\lambda_1^{14} + 3\lambda_1^{12} - 2\lambda_1^{10} + 3\lambda_1^6 - \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1) - 1)\lambda_2^{30} + \\
& + \lambda_1^{12}(-2\lambda_1^{20} + \lambda_1^{18} + 3\lambda_1^{16} - 4\lambda_1^{14} + 3\lambda_1^{12} + \lambda_1^{10} - 5\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 + 3\lambda_1^4 - 3\lambda_1^2 + \\
& + q(\lambda_1^{20} + 2\lambda_1^{18} - 5\lambda_1^{16} + 2\lambda_1^{14} + 2\lambda_1^{12} - 3\lambda_1^{10} + 3\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 - 5\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 1) + 1)\lambda_2^{28} - \\
& - q^2\lambda_1^{10}(q\lambda_1^{22} + (3-2q)\lambda_1^{20} - 2(q+1)\lambda_1^{18} + (4q-2)\lambda_1^{16} - 2(q-2)\lambda_1^{14} - (2q+1)\lambda_1^{12} + \\
& + (3q-2)\lambda_1^{10} - 2(q-2)\lambda_1^8 - 2(q+1)\lambda_1^6 + (4q-2)\lambda_1^4 + (3-2q)\lambda_1^2 - 1)\lambda_2^{26} - \\
& - \lambda_1^8((2\lambda_1^{20} - 3\lambda_1^{18} - 2\lambda_1^{16} + 6\lambda_1^{14} - \lambda_1^{12} - 3\lambda_1^{10} + 3\lambda_1^8 - 3\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 + 5\lambda_1^2 - 2)\lambda_1^2 + \\
& + q(\lambda_1^{24} - 2\lambda_1^{22} - 2\lambda_1^{20} + 4\lambda_1^{18} - 3\lambda_1^{16} - 2\lambda_1^{14} + 4\lambda_1^{12} - \lambda_1^{10} - 3\lambda_1^8 + 4\lambda_1^6 - 3\lambda_1^4 + 1))\lambda_2^{24} + \\
& + \lambda_1^6(q^2\lambda_1^{26} + 2\lambda_1^{24} + (1-3q)\lambda_1^{22} + (q-3)\lambda_1^{20} + (2q+1)\lambda_1^{18} + (2-4q)\lambda_1^{16} + 2(q-2)\lambda_1^{14} + \\
& + 2(q+1)\lambda_1^{12} + (2-4q)\lambda_1^{10} + (q-3)\lambda_1^8 + (2q+1)\lambda_1^6 + (1-3q)\lambda_1^4 + 2q^2\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^{22} + \\
& + \lambda_1^4(\lambda_1^{28} + \lambda_1^{26} - 5\lambda_1^{24} + \lambda_1^{22} + 3\lambda_1^{20} - 4\lambda_1^{18} + 5\lambda_1^{16} + 3\lambda_1^{14} - 9\lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} + 3\lambda_1^8 - 3\lambda_1^6 + \\
& + 3\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + q(\lambda_1^{28} - 3\lambda_1^{26} + 3\lambda_1^{24} + 2\lambda_1^{22} - 4\lambda_1^{20} + 2\lambda_1^{18} + 4\lambda_1^{16} - 7\lambda_1^{14} + 5\lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} - \\
& - 4\lambda_1^8 + \lambda_1^6 + 2\lambda_1^4 - 3\lambda_1^2 + 1) - 2)\lambda_2^{20} - \lambda_1^2(-\lambda_1^{30} + 3\lambda_1^{28} - 2\lambda_1^{26} - 2\lambda_1^{24} + 3\lambda_1^{22} - 2\lambda_1^{20} - \\
& - 3\lambda_1^{18} + 8\lambda_1^{16} - 4\lambda_1^{14} - 3\lambda_1^{12} + 4\lambda_1^{10} - \lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + 4\lambda_1^4 - \lambda_1^2 + q(\lambda_1^{30} - \lambda_1^{28} - 2\lambda_1^{26} + \\
& + 4\lambda_1^{24} - \lambda_1^{22} - 2\lambda_1^{20} + 7\lambda_1^{18} - 4\lambda_1^{16} - 4\lambda_1^{14} + 7\lambda_1^{12} - 2\lambda_1^{10} - 2\lambda_1^8 + 4\lambda_1^6 -
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -2\lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1) - 1)\lambda_2^{18} + q(q^2\lambda_1^{32} + 2\lambda_1^{30} - (3q+2)\lambda_1^{28} + (4q-2)\lambda_1^{26} - 3(q-2)\lambda_1^{24} - \\
& -2(q+1)\lambda_1^{22} + (9q-4)\lambda_1^{20} - 4(q-2)\lambda_1^{18} - (6q+5)\lambda_1^{16} + (8q-4)\lambda_1^{14} + (9-5q)\lambda_1^{12} - \\
& -2(q+1)\lambda_1^{10} + (6q-3)\lambda_1^8 - 2(q-2)\lambda_1^6 - (3q+2)\lambda_1^4 + 2q^2\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^{16} - \\
& -q^2(\lambda_1^{30} - (2q+1)\lambda_1^{28} + (4q-2)\lambda_1^{26} - 2(q-2)\lambda_1^{24} - (2q+1)\lambda_1^{22} + (4q-2)\lambda_1^{20} + \\
& +(7-4q)\lambda_1^{18} - 4(q+1)\lambda_1^{16} + (8q-4)\lambda_1^{14} + (7-4q)\lambda_1^{12} - 2(q+1)\lambda_1^{10} + (3q-2)\lambda_1^8 - \\
& -2(q-2)\lambda_1^6 - 2(q+1)\lambda_1^4 + (3q-2)\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^{14} + (\lambda_1^{28} + \lambda_1^{26} - 5\lambda_1^{24} + \lambda_1^{22} + 3\lambda_1^{20} - 4\lambda_1^{18} + \\
& +5\lambda_1^{16} + 3\lambda_1^{14} - 9\lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} + 3\lambda_1^8 - 3\lambda_1^6 + 3\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + q(\lambda_1^{28} - 3\lambda_1^{26} + 3\lambda_1^{24} + 2\lambda_1^{22} - 4\lambda_1^{20} + \\
& +2\lambda_1^{18} + 4\lambda_1^{16} - 7\lambda_1^{14} + 5\lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} - 4\lambda_1^8 + \lambda_1^6 + 2\lambda_1^4 - 3\lambda_1^2 + 1) - 2)\lambda_2^{12} + (q^2\lambda_1^{26} + 2\lambda_1^{24} + \\
& +(1-3q)\lambda_1^{22} + (q-3)\lambda_1^{20} + (2q+1)\lambda_1^{18} + (2-4q)\lambda_1^{16} + 2(q-2)\lambda_1^{14} + 2(q+1)\lambda_1^{12} + \\
& +(2-4q)\lambda_1^{10} + (q-3)\lambda_1^8 + (2q+1)\lambda_1^6 + (1-3q)\lambda_1^4 + 2q^2\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^{10} + q^8(-\lambda_1^{24} + 2\lambda_1^{22} + \\
& +2\lambda_1^{20} - 4\lambda_1^{18} + 3\lambda_1^{16} + 2\lambda_1^{14} - 4\lambda_1^{12} + \lambda_1^{10} + 3\lambda_1^8 - 4\lambda_1^6 + 3\lambda_1^4 + q(\lambda_1^{24} - 5\lambda_1^{20} + 2\lambda_1^{18} + 3\lambda_1^{16} - \\
& -3\lambda_1^{14} + \lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} - 6\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 + 2\lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1) - 1)\lambda_2^8 + (\lambda_1^{22} + \lambda_1^{20} - 4\lambda_1^{18} + 2\lambda_1^{16} + 2\lambda_1^{14} - \\
& -3\lambda_1^{12} + \lambda_1^{10} + 2\lambda_1^8 - 4\lambda_1^6 + 2\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + q(-3\lambda_1^{20} + 2\lambda_1^{18} + 2\lambda_1^{16} - 4\lambda_1^{14} + \lambda_1^{12} + 2\lambda_1^{10} - 4\lambda_1^8 + \\
& +2\lambda_1^6 + 2\lambda_1^4 - 3\lambda_1^2 + 1) - 1)\lambda_2^6 + (-2\lambda_1^{20} + \lambda_1^{18} + 3\lambda_1^{16} - 4\lambda_1^{14} + 3\lambda_1^{12} + \lambda_1^{10} - 5\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 + 3\lambda_1^4 - \\
& -3\lambda_1^2 + q(\lambda_1^{20} + 2\lambda_1^{18} - 5\lambda_1^{16} + 2\lambda_1^{14} + 2\lambda_1^{12} - 3\lambda_1^{10} + 3\lambda_1^8 + 2\lambda_1^6 - 5\lambda_1^4 + \lambda_1^2 + 1) + 1)\lambda_2^4 - \\
& -q^2(\lambda_1^{18} - 2q\lambda_1^{16} + (3q-2)\lambda_1^{14} + (3-2q)\lambda_1^{12} - 2\lambda_1^{10} + 2q\lambda_1^8 + (3-2q)\lambda_1^6 - (2q+1)\lambda_1^4 + \\
& +2q^2\lambda_1^2 + 1)\lambda_2^2 + q\lambda_1^{16} - q^2\lambda_1^{14} + (q-2)\lambda_1^{12} + \lambda_1^{10} - q\lambda_1^8 + q^2\lambda_1^6 + (q+1)\lambda_1^4 - q^2\lambda_1^2 - 1).
\end{aligned} \tag{B.15}$$

### Б.1.3 Полиномы узлов в представлении $W_{2,4}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ квантовой алгебры $U_q(sl_4)$

#### Трилистник (узел $3_1$ )

$$\begin{aligned}
P_{2,4}^{3_1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \lambda_1^3\lambda_2^4\lambda_3^3(\lambda_1^8(\lambda_1^4 - \lambda_1^2 + 1)\lambda_3^8(\lambda_3^4 - \lambda_3^2 + 1)\lambda_2^{16} - \\
& -\lambda_1^6(\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 - 1)\lambda_3^6(\lambda_3^6 - 2\lambda_3^4 + 2\lambda_3^2 - 1)\lambda_2^{14} + \\
& +\lambda_1^4\lambda_3^4(\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + (\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_3^8 + (-2\lambda_1^8 + 5\lambda_1^6 - 5\lambda_1^4 + 5\lambda_1^2 - 2)\lambda_3^6 + \\
& +(\lambda_1^8 - 5\lambda_1^6 + 6\lambda_1^4 - 5\lambda_1^2 + 1)\lambda_3^4 + (-2\lambda_1^8 + 5\lambda_1^6 - 5\lambda_1^4 + 5\lambda_1^2 - 2)\lambda_3^2 + 1)\lambda_2^{12} + \\
& +\lambda_1^2(\lambda_1^2 - 1)\lambda_3^2(\lambda_3^2 - 1)((\lambda_1^6 - \lambda_1^4 + \lambda_1^2)\lambda_3^8 + (\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_3^6 + \\
& +(-\lambda_1^8 + \lambda_1^6 + \lambda_1^2 - 1)\lambda_3^4 + (\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_3^2 + \lambda_1^6 - \lambda_1^4 + \lambda_1^2)\lambda_2^{10} + ((\lambda_1^8 - \lambda_1^6 + \lambda_1^4)\lambda_3^{12} + \\
& +(\lambda_1^{10} - 4\lambda_1^8 + 5\lambda_1^6 - 4\lambda_1^4 + \lambda_1^2)\lambda_3^{10} + (\lambda_1^{12} - 4\lambda_1^{10} + 6\lambda_1^8 - 4\lambda_1^6 + 6\lambda_1^4 - 4\lambda_1^2 + 1)\lambda_3^8 - \\
& -(\lambda_1^{12} - 5\lambda_1^{10} + 4\lambda_1^8 + \lambda_1^6 + 4\lambda_1^4 - 5\lambda_1^2 + 1)\lambda_3^6 + (\lambda_1^{12} - 4\lambda_1^{10} + 6\lambda_1^8 - 4\lambda_1^6 + 6\lambda_1^4 - 4\lambda_1^2 + 1)\lambda_3^4 + \\
& +(\lambda_1^{10} - 4\lambda_1^8 + 5\lambda_1^6 - 4\lambda_1^4 + \lambda_1^2)\lambda_3^2 + \lambda_1^8 - \lambda_1^6 + \lambda_1^4)\lambda_2^8 + (\lambda_1^2 - 1)(\lambda_3^2 - 1)((\lambda_1^6 - \lambda_1^4 + \lambda_1^2)\lambda_3^8 + \\
& +(\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_3^6 + (-\lambda_1^8 + \lambda_1^6 + \lambda_1^2 - 1)\lambda_3^4 + (\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_3^2 + \\
& +\lambda_1^6 - \lambda_1^4 + \lambda_1^2)\lambda_2^6 + (\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + (\lambda_1^8 - 2\lambda_1^6 + \lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)\lambda_3^8 + \\
& +(-2\lambda_1^8 + 5\lambda_1^6 - 5\lambda_1^4 + 5\lambda_1^2 - 2)\lambda_3^6 + (\lambda_1^8 - 5\lambda_1^6 + 6\lambda_1^4 - 5\lambda_1^2 + 1)\lambda_3^4 + \\
& +(-2\lambda_1^8 + 5\lambda_1^6 - 5\lambda_1^4 + 5\lambda_1^2 - 2)\lambda_3^2 + 1)\lambda_2^4 - (\lambda_1^6 - 2\lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 - 1)(\lambda_3^6 - 2\lambda_3^4 + 2\lambda_3^2 - 1)\lambda_2^2 + \\
& +(\lambda_1^4 - \lambda_1^2 + 1)(\lambda_3^4 - \lambda_3^2 + 1)).
\end{aligned} \tag{B.16}$$

## Б.2 Инварианты $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}$ зацеплений

Здесь мы перечислили нередуцированные инварианты зацеплений, соответствующие нильпотентным представлениям с параметрами  $W_{m,N}$  для различных  $m$  и  $N$ . Мы вычисляли инварианты для следующих зацеплений: зацепление Хопфа — зацепление  $L_2a_1$ , зацепление Уайтхеда — зацепление  $L_5a_1$ , кольца Борромео — зацепление  $L_6a_4$  и зацепление  $L_7a_1$ .

Инварианты зависят от набора параметров  $\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{N-1}^{(i)}$ , где  $(i)$  перечисляет разные цвета на разных компонентах зацепления. Чтобы упростить выражения для инвариантов ниже, мы используем здесь следующие обозначения:  $\lambda_1^{(i)} = \alpha_i$ ,  $\lambda_2^{(i)} = \beta_i$ ,  $\lambda_3^{(i)} = \gamma_i$ .

### Б.2.1 Зацепление Хопфа

Инварианты зацепления Хопфа ( $L_2a_1$ ) не зависят от параметров  $\lambda_i$  представлений  $W_{m,N}$  и являются комбинациями коэффициента оснащения  $q^{C_2^{\mathcal{U}_q(sl_N)}}$  в представлении  $R_{m,N} = [(N-1)(m-1), \dots, m-1]$  и коэффициента нормировки  $\Xi_{m,N}$  (3.17) в особой точке  $\lambda_i = q^{m-1}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m,N}^{L_2a_1} &= (-1)^{(m-1)\left(\frac{N^2(N-1)}{2} + \delta_{2,N}\right)} q^{-\frac{1}{6}N(N^2-1)(m^2-1)} q^{-\frac{1}{4}N(N-1)m(m-1)} \\ &= q^{-2C_2^{\mathcal{U}_q(sl_N)}} \frac{m^{N(N-1)/2}}{\Xi_{m,N}(\lambda = q^{m-1})}, \end{aligned} \quad (\text{Б.17})$$

где  $\delta_{2,N}$  — символ Кронекера,  $C_2^{\mathcal{U}_q(sl_N)}$  квадратичный оператор Казимира алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  и

$$C_2^{\mathcal{U}_q(sl_N)}(R_{m,N}) = \frac{1}{12}N(N^2-1)(m^2-1) \quad (\text{Б.18})$$

$$\dim(R_{m,N}) = m^{N(N-1)/2} \quad (\text{Б.19})$$

$$\Xi_{m,N}(\lambda = q^{m-1}) = (-1)^{(m-1)\frac{N^2(N-1)}{2}} m^{N(N-1)/2} q^{\frac{1}{4}N(N-1)m(m-1)} \quad (\text{Б.20})$$

## Б.2.2 Остальные зацепления

**Инварианты зацеплений в представлении  $W_{m,2}(\lambda)$  алгебры  $U_q(sl_2)$**

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{2,2}^{L_5^{a_1}} &= \alpha^{-1}\beta^{-1}(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1), \\
\mathcal{P}_{2,2}^{L_6^{a_4}} &= \alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)(\gamma^2 - 1), \\
\mathcal{P}_{2,2}^{L_7^{a_1}} &= \alpha^{-3}\beta^{-1}(\alpha^2 - 1)(\alpha^4 - \alpha^2 + 1)(\beta^2 - 1).
\end{aligned} \tag{Б.21}$$

**Инварианты зацеплений в представлении  $W_{m,3}(\lambda_1, \lambda_2)$  алгебры  $U_q(sl_3)$**

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{2,3}^{L_5^{a_1}} &= -q\alpha_1^{-2}\alpha_2^{-2}\beta_1^{-2}\beta_2^{-2}(\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)(\alpha_2^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)\beta_1^4(\alpha_2^2\beta_2^2 + 1) + \\
&+ \beta_1^2(-(\alpha_1^2 - 1)^2\alpha_2^2(\alpha_2^2 - 1)\beta_2^4 + ((\alpha_2^2 - 1)^2\alpha_1^4 - 2(\alpha_2^4 + 1)\alpha_1^2 + (\alpha_2^2 - 1)^2)\beta_2^2 + \\
&+ (\alpha_1^2 - 1)^2(\alpha_2^2 - 1)) + (1 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)(\alpha_2^2\beta_2^2 + 1)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{2,3}^{L_6^{a_4}} &= -q\alpha_1^{-2}\alpha_2^{-2}\alpha_3^{-2}\beta_1^{-2}\beta_2^{-2}\beta_3^{-2}(\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)(\alpha_2^2 - 1)(\alpha_3^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)(\beta_3^2 - 1) \times \\
&\times \beta_1^4(\alpha_2^2\beta_2^2 + 1)(\alpha_3^2\beta_3^2 + 1) - \beta_1^2((\alpha_1^2 - 1)^2\alpha_2^2(\alpha_2^2 - 1)(\alpha_3^2 - 1)(\beta_3^2 - 1)\beta_2^4(\alpha_3^2\beta_3^2 + 1) + \\
&+ \beta_2^2(-(\alpha_1^2 - 1)^2(\alpha_2^2 - 1)^2\alpha_3^2(\alpha_3^2 - 1)\beta_3^4 + ((\alpha_2^2 - 1)^2(\alpha_3^2 - 1)^2\alpha_1^4 - 2((\alpha_3^2 - 1)^2\alpha_2^4 - \\
&- 2(\alpha_3^4 - 6\alpha_3^2 + 1)\alpha_2^2 + (\alpha_3^2 - 1)^2)\alpha_1^2 + (\alpha_2^2 - 1)^2(\alpha_3^2 - 1)^2)\beta_3^2 + (\alpha_1^2 - 1)^2(\alpha_2^2 - 1)^2(\alpha_3^2 - 1)) + \\
&+ (1 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - 1)(\alpha_3^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)(\beta_3^2 - 1)(\alpha_2^2\beta_2^2 + 1)(\alpha_3^2\beta_3^2 + 1)) - \\
&- (\alpha_1^2 - 1)^2(\alpha_2^2 - 1)(\alpha_3^2 - 1)(\beta_3^2 - 1)(\alpha_3^2\beta_3^2 + 1)),
\end{aligned} \tag{Б.22}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{2,3}^{L_7^{a_1}} &= -q\alpha_1^{-6}\alpha_2^{-2}\beta_1^{-6}\beta_2^{-2}(\alpha_1^6(\alpha_1^6 - 2\alpha_1^4 + 2\alpha_1^2 - 1)(\alpha_2^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)(\alpha_2^2\beta_2^2 + 1)\beta_1^{12} - \\
&- 2\alpha_1^4(\alpha_1^2 - 1)^2(\alpha_1^4 - \alpha_1^2 + 1)(\alpha_2^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)(\alpha_2^2\beta_2^2 + 1)\beta_1^{10} + 2\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)((\alpha_1^8 - 3\alpha_1^6 + \\
&+ 3\alpha_1^4 - 3\alpha_1^2 + 1)\alpha_2^2(\alpha_2^2 - 1)\beta_2^4 - ((\alpha_2^2 - 1)^2\alpha_1^8 - 3(\alpha_2^2 - 1)^2\alpha_1^6 + (3\alpha_2^4 - 8\alpha_2^2 + 3)\alpha_1^4 - \\
&- 3(\alpha_2^2 - 1)^2\alpha_1^2 + (\alpha_2^2 - 1)^2)\beta_2^2 + (-\alpha_1^8 + 3\alpha_1^6 - 3\alpha_1^4 + 3\alpha_1^2 - 1)(\alpha_2^2 - 1))\beta_1^8 + (-\alpha_1^2 - 1)^2 \times \\
&\times (\alpha_1^8 - 4\alpha_1^6 + 3\alpha_1^4 - 4\alpha_1^2 + 1)\alpha_2^2(\alpha_2^2 - 1)\beta_2^4 + ((\alpha_2^2 - 1)^2\alpha_1^{12} - 6(\alpha_2^2 - 1)^2\alpha_1^{10} + \\
&+ 4(3\alpha_2^4 - 7\alpha_2^2 + 3)\alpha_1^8 - 2(7\alpha_2^4 - 12\alpha_2^2 + 7)\alpha_1^6 + 4(3\alpha_2^4 - 7\alpha_2^2 + 3)\alpha_1^4 - 6(\alpha_2^2 - 1)^2\alpha_1^2 + \\
&+ (\alpha_2^2 - 1)^2)\beta_2^2 + (\alpha_1^2 - 1)^2(\alpha_1^8 - 4\alpha_1^6 + 3\alpha_1^4 - 4\alpha_1^2 + 1)(\alpha_2^2 - 1))\beta_1^6 - \\
&- 2(\alpha_1^2 - 1)((\alpha_1^8 - 3\alpha_1^6 + 3\alpha_1^4 - 3\alpha_1^2 + 1)\alpha_2^2(\alpha_2^2 - 1)\beta_2^4 - ((\alpha_2^2 - 1)^2\alpha_1^8 - 3(\alpha_2^2 - 1)^2\alpha_1^6 + \\
&+ (3\alpha_2^4 - 8\alpha_2^2 + 3)\alpha_1^4 - 3(\alpha_2^2 - 1)^2\alpha_1^2 + (\alpha_2^2 - 1)^2)\beta_2^2 + (-\alpha_1^8 + 3\alpha_1^6 - 3\alpha_1^4 + 3\alpha_1^2 - 1) \times \\
&\times (\alpha_2^2 - 1))\beta_1^4 - 2(\alpha_1^2 - 1)^2(\alpha_1^4 - \alpha_1^2 + 1)(\alpha_2^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)(\alpha_2^2\beta_2^2 + 1)\beta_1^2 + \\
&+ (-\alpha_1^6 + 2\alpha_1^4 - 2\alpha_1^2 + 1)(\alpha_2^2 - 1)(\beta_2^2 - 1)(\alpha_2^2\beta_2^2 + 1)),
\end{aligned} \tag{Б.23}$$

### Б.3 Полиномы Александера узлов и зацеплений

Мы перечисляем здесь полиномы Александера узлов и зацеплений, которые мы упоминаем в этой работе. Эти ответы совпадают с выражениями из [119] после замены переменных ( $t \rightarrow \lambda^2$ ).

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{3_1}(\lambda) &= \lambda^2 - 1 + \lambda^{-2}, \\ \mathcal{A}^{4_1}(\lambda) &= -\lambda^2 + 3 - \lambda^{-2}, \\ \mathcal{A}^{5_1}(\lambda) &= \lambda^4 - \lambda^2 + 1 - \lambda^{-2} + \lambda^{-4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{L_2a_1} &= -1, \\ \Delta^{L_5a_1}(\lambda, \mu) &= \frac{(\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1)}{\lambda\mu}, \\ \Delta^{L_6a_4}(\lambda, \mu, \nu) &= \frac{(\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)}{\lambda\mu\nu}, \\ \Delta^{L_7a_1}(\lambda, \mu) &= \frac{(\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)}{\lambda^3\mu}.\end{aligned}$$