

ОТЗЫВ

официального оппонента Пятова Павла Николаевича на диссертацию Бишлер Людмилы Владимировны на тему «Вычисление средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса и изучение их свойств», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

В диссертации Бишлер Л.В. R-матричный формализм используется для вычисления корреляторов (средних значений петель Вильсона) в трехмерной квантовой топологической калибровочной теории Черна-Саймонса. С математической точки зрения эти корреляторы являются инвариантами узлов и зацеплений, которыми являются соответствующие контуры. Вычисление значений этих инвариантов, а также исследование полученных ответов представляет собой сложную задачу. В диссертации представлены результаты, связанные с решением этой задачи в различных случаях.

Актуальность. Теория квантовых групп сформировалась при развитии квантового метода обратной задачи рассеяния. Квантованные универсальные обертывающие алгебры Ли были открыты независимо В. Дринфельдом и М.Джимбо, и стали важной математической конструкцией, которая активно используется в современной теоретической физике.

В теории квантовых алгебр Ли важную роль играют представления группы кос, называемые R-матрицами. Они удовлетворяют уравнению Янга-Бакстера и могут использоваться для вычисления инвариантов узлов и зацеплений. Такие инварианты определили Н. Решетихин и В. Тураев. Их называют квантовыми инвариантами узлов. Они связаны с неприводимыми конечномерными представлениями квантованных универсальных обертывающих алгебр Ли. Квантовые инварианты узлов нашли применение в различных областях теоретической физики: конформных теориях поля, теориях топологических струн и в калибровочной теории поля – теории Черна-Саймонса.

Одним из примеров семейств таких квантовых инвариантов являются полиномы Джонса. Первоначально они были открыты В. Джонсом при исследовании алгебр фон Неймана. Выяснение их связи с решениями уравнения Янга-Бакстера послужило толчком в развитии общего метода построения квантовых инвариантов узлов.

Э. Виттен предложил физическое описание полинома Джонса. Он показал, что средние значения петель Вильсона в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой $SU(2)$ совпадают с полиномами Джонса. Так была установлена связь полинома Джонса с топологической калибровочной теорией.

Позже было показано, что корреляторы в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой $SU(N)$ совпадают с квантовыми инвариантами узлов, связанными с квантовой алгеброй $U_q(sl_N)$. Эти инварианты называют цветными полиномами ХОМФЛИ-ПТ. Таким образом, теория Черна-Саймонса является замечательным примером калибровочной теории, в которой проявляются симметрии квантовых алгебр, и безусловно заслуживает внимательного изучения. Корреляторы этой теории имеют приложения в различных моделях теоретической физики, что делает их вычисление важной задачей. Таким образом, актуальность данной диссертационной работы не подлежит сомнению.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, и двух приложений. Объем диссертации - 188 страниц, включая 29 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 178 наименований.

Во **введении** аргументируется актуальность исследования и делается обзор литературы по теме. Приводятся цели и задачи исследования, а также положения, выносимые на защиту. Раскрывается новизна, личный вклад автора, а также научная и практическая значимость исследования.

В **первой главе** подробно рассматривается метод вычисления инвариантов узлов с использованием R-матриц, предложенный Н. Решетихиным и В. Тураевым. Также, в этой главе дается описание оригинальных результатов исследования, посвященного связи R-матриц с совпадающими собственными значениями и соответствующих им матриц Рака. Показывается, что в некоторых случаях такие матрицы Рака можно привести к блочно-диагональному виду, и приводятся конкретные примеры. На основе этих результатов выдвигается гипотеза, которая аккумулирует особенности рассмотренных примеров.

Во **второй главе** диссертации обсуждается дифференциальное разложение вильсоновских средних.

Первая часть главы посвящена вычислению полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов, в том числе узлов-мутантов с дополнительной симметрией,

которые не различаются некоторыми прямоугольными представлениями квантовой алгебры $U_q(sl_N)$. В результатах главы приводится общая структура разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями в представлении [3,1] для некоторых случаев, а затем проводится их экстраполяция. Для этих же узлов и узлов-мутантов Х. Мортон получил ответы для полиномов ХОМФЛИ-ПТ в представлении [4,2] квантовых алгебр $U_q(sl_3)$ и $U_q(sl_4)$.

Во второй части главы излагается гипотеза о дифференциальном разложении и оригинальные результаты, связанные с ней. Важной особенностью этой гипотезы является зависимость от характеристики узла, называемой его дефектом. Дефект узла можно определить как степень его полинома Александра. Результаты автора связаны с развитием дифференциального разложения узлов с дефектом один и дефектом два. Для демонстрации универсальности дифференциального разложения и применимости этой гипотезы к различным узлам подробно строится дифференциальное разложение трехмостового узла с нулевым дефектом 9.46 в представлении [2,2]. Для семейства узлов с дефектом 1 было найдено преобразование, которое связывает коэффициенты дифференциального разложения для этих узлов с коэффициентами твистованных узлов.

Для построения дифференциального разложения узлов с дефектом два, использовались ответы, полученные для узлов-мутантов. В результате накладываются ограничения на форму дифференциального разложения узлов с дефектом 2.

В третьей главе описывается метод построения инвариантов узлов с помощью универсальной R-матрицы, в случае, когда параметр квантования универсальной обертывающей алгебры $U_q(sl_N)$ совпадает с рациональным корнем единицы. С точки зрения теории узлов этот случай интересен, поскольку он позволяет получить инварианты, которые зависят от большего числа переменных. Именно такое значение параметра q характерно для теории Черна-Саймонса, так что интерес к этим инвариантам обусловлен и с физической точки зрения.

В главе сначала рассматриваются разнообразные неприводимые конечномерные представления квантовой алгебры $U_q(sl_N)$ в режиме, когда параметр квантования q совпадает с корнем единицы: циклические, полуматричные и нильпотентные представления. Показано, что R-матрица для циклических и полуматричных представлений существует, однако удовлетворяет условиям, при которых возможно построение лишь тривиальных инвариантов узлов. Для нильпотентных представлений с

параметрами были вычислены универсальные R-матрицы и определены соответствующие инварианты узлов.

В этой главе также обсуждаются особенности применения метода Решетихина-Тураева при вычислении инвариантов в корнях из единицы. Для этого используется взаимно-однозначное соответствие между узлами и (1,1)-сплетениями – узлами, нить которых разорвана в одном месте. Вычисление инвариантов таких сплетений позволяет получить нетривиальные инварианты, тогда как прямолинейное применение R-матричной техники дает нулевые ответы. В отличие от узлов, (1,1)-сплетение для зацеплений можно получать несколькими разными способами. Поэтому для определения инварианта зацепления необходимо добиться эквивалентности этих способов, что достигается с использованием дополнительного нормировочного коэффициента, который автор приводит в общем случае для квантовой алгебры $U_q(sl_N)$.

Определенные таким образом инварианты в корнях из единицы вычисляются для нескольких узлов и зацеплений. Получившиеся ответы анализируются, приводятся связи с полиномами ХОМФЛИ-ПТ и Александра. Инвариант для зацепления Хопфа приводится в общем случае для произвольной алгебры $U_q(sl_N)$ и при произвольном значении корня из единицы q .

В заключении представлены основные результаты работы.

Достоверность результатов диссертации подтверждается детальным описанием всех этапов работы, их логической непротиворечивостью. Все представленные к защите результаты корректно сформулированы, **обоснованы** и являются **новыми**. Диссертация вносит существенный вклад в исследование вильсоновских средних и их групповых свойств в теории Черна-Саймонса.

Результаты диссертации отражены в 6 статьях, которые опубликованы в известных журналах, индексируемых Web of Science и входящих в список ВАК. Результаты докладывались на международной конференции, а также на пяти российских конференциях и на семинарах в ФИАН, МИАН и МФТИ. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

При чтении диссертации возникли следующие **замечания**:

1. В первой главе диссертации неоднократно упоминается гипотеза о собственных значениях, однако ее точная формулировка в тексте не приводится.

2. После знакомства с третьей главой диссертации возникает вопрос, есть ли преимущества инвариантов в корнях из единицы по сравнению с полиномами ХОМФЛИ-ПТ с точки зрения различения узлов? Являются ли они более сильными инвариантами и различают ли узлы-мутанты?

Эти замечания однако не снижают общей высокой оценки представленной диссертационной работы, а скорее являются предложениями по ее дальнейшему совершенствованию.

Таким образом диссертация Бишлер Л.В. удовлетворяет всем требованиям к кандидатским диссертациям, установленным Положением о присуждении ученых степеней, утвержденным постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 года, а ее автор, Бишлер Людмила Владимировна, заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

Официальный оппонент

доктор физико-математических наук,
профессор Национального исследовательского
университета «Высшая школа экономики»,
заместитель декана по работе с абитуриентами

Пятов Павел Николаевич

Адрес: 119048, Москва, ул. Усачева д. 6

Телефон: +7 (495) 772 95 90 *12743

e-mail: pyatov@hse.ru

Подпись заверяется

30 января 2024 года

СПЕЦИАЛИСТ
ПО ПЕРСОНАЛУ
КИСННМ.

Список основных работ по теме защищаемой диссертации в рецензируемых научных изданиях за последние 5 лет (не более 15)

1. Ogievetsky O., Pyatov P. N. «Cayley–Hamilton theorem for symplectic quantum matrix algebras» / Journal of Geometry and Physics. Vol. 165, article 104211 (2021), <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104211>
2. Ogievetsky O., Pyatov P. N. «Quantum Matrix Algebras of BMW type: Structure of the Characteristic Subalgebra» / Journal of Geometry and Physics vol. 162, article 104086 (2021), <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2020.104086>
3. Pyatov P. N., Trofimova A. «Representations of finite-dimensional quotient algebras of the 3-string braid group» / Moscow Mathematical Journal vol. 21, no. 2, p.427-442 (2021), <http://doi.org/10.17323/1609-4514-2021-21-2-427-442>
4. Pavel Pyatov, Povolotsky A. M., Rittenberg V. «Large deviations of avalanches in the raise and peel model» / Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment vol. 2018, no. 053107, p. 1-26 (2018), <http://doi.org/10.1088/1742-5468/aabc7a>