

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н.
ЛЕБЕДЕВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Ильин Антон Сергеевич

Стохастический транспорт в изотропных потоках

Специальность 1.3.3– теоретическая физика

диссертация на соискание учёной степени

доктора физико–математических наук

Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТРАНСПОРТА	
• Транспорт тензора.....	38
• Транспорт скаляра, вектора и ко-вектора.....	38
ГЛАВА 2. МОДЕЛЬ КАЗАНЦЕВА-КРАЙЧНАНА	
• Описание модели.....	40
• Уравнение Казанцева-Крайчнана для пассивного скалярного поля....	41
• Уравнение Казанцева-Крайчнана для пассивного магнитного поля....	43
ГЛАВА 3. МЕТОД ОБОБЩЕННОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ	
• Последовательность предельных переходов в СДУ.....	45
• Представление Фейнмана-Каца для параболического уравнения.....	46
• Обобщенное стохастическое квантование.....	52
• Максимальный инкремент.....	54
ГЛАВА 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КАЗАНЦЕВА-КРАЙЧНАНА	
• Пассивный скаляр.....	55
• Пассивное магнитное поле.....	58
• Порог генерации в модели Вайштейна-Кичатинова.....	69
ГЛАВА 5. МЕТОД КВАЗИЛАГРАНЖЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ЗАДАЧАХ ТРАНСПОРТА	
• Локализованное возмущение.....	61
• Квазилагранжева система координат.....	61
• Уравнения транспорта в Бетчелоровском приближении.....	62
ГЛАВА 6. ЛИНЕЙНЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ СИСТЕМЫ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ШУМОМ	

• Матрица эволюции.....	64
• Дискретные произведения независимых матриц.....	65
а.) Некоммутативный закон больших чисел.....	65
б.) Ляпуновский спектр и обобщенные ляпуновские показатели произведения изотропно распределенных матриц.....	68
• Некоммутативная теория больших уклонений для континуальных произведений случайных матриц.....	71
а.) Локальная куммулянтная функция.....	74
б.) Низкочастотный предел и функция Крамера.....	76
в.) Некоммутативная теория больших уклонений.....	78
г.) Инфинитезимальные переменные Ивасава.....	80
д.) Функциональный Якобиан.....	80
е.) Изотропные системы.....	84
ж.) Эффективный дельта-процесс.....	90
ГЛАВА 7. ОТКЛОНЕНИЕ ОТ ГАУССОВОЙ СТАТИСТИКИ. V3-МОДЕЛЬ	
• Трехмерные изотропные T-неинвариантные потоки.....	92
• V3-модель.....	93
ГЛАВА 8. ЭВОЛЮЦИЯ СКАЛЯРНОГО ЛОКАЛИЗОВАННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ	
• Общий случай	96
• Локализованное возмущение в модели Казанцева-Крайчнана.....	97
• Локализованное возмущение в V3-модели.....	98
ГЛАВА 9. СКАЛЯРНОЕ ЛОКАЛИЗОВАННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ В СИСТЕМЕ РЕАКЦИЯ-ДИФфузия	
• Введение.....	99
• Фронт реакции.....	100
• Качественное описание.....	102
• Пассивный скаляр с неограниченным рождением.....	107

- Скаляр с рождением и насыщением.....108
- Эволюция популяции.....109
- Поведение пассивной примеси вблизи точки насыщения.....113

ГЛАВА 10. ТОПОЛОГИЯ МАГНИТНЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

- Этапы эволюции магнитных флуктуаций.....116
- Энергетическое соответствие.....117
- Эволюция магнитного локализованного возмущения на бэтчелоровском этапе.....119
- a.) Этап вмороженности.....120
- б.) Диффузионный этап.....122
- Эволюция магнитного локализованного возмущения на постбэтчелоровском этапе.....123
- Бетчелоровская эволюция высших моментов однородных флуктуаций.....126

ГЛАВА 11. ЛОКАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ d-МЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

- Гиперповерхности и перемежаемость128
- Стохастическая эволюция в касательных пространствах.....132
- Статистика тензора градиентов.....133
- Изотропная мера в пространстве матриц.....135
- Лемма о симметрии куммулянтной функции.....137
- Стохастические интегралы.....138
- Явные вычисления для $d=3$139

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....142

ЛИТЕРАТУРА.....147

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ФОРМУЛА ФУРУТЦЫ-НОВИКОВА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

- Конечномерная формула ФН.....151
- Бесконечномерная формула ФН.....153
- Регуляризация.....154

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ТЕОРИЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ И ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ

- Низкочастотная асимптотика кумулянтного функционала.....156
- Функция Крамера (rate function).....158
- Одномерное мультипликативное блуждание.....159
- Одномерное аддитивное блуждание.....160
- Перемежаемость мультипликативного блуждания.....162

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ЯКОБИАН И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

- Линейная σ - дискретизация.....165
- Дискретизация Ито.....165
- Дискретизация $\sigma = -1/2$167
- Регуляризация с помощью выделения бесследового подпространства.....168

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Стохастический поток – это случайное гладкое векторное поле, заданное в 3х-мерном евклидовом пространстве \mathbb{E}^3 . Каждая реализация такого поля порождает семейство гладких отображений \mathbb{E}^3 в себя. Такое семейство формально описывает континуальную совокупность «вмороженных жидких частиц», движущихся в потоке. Наиболее важным приложением для этой абстрактной математической конструкции является теория турбулентности, последовательное построение которой по мнению многих авторов является последней нерешенной задачей классической физики [32].

Сама по себе эта задача очень сложна, поэтому большое значения имеют различные модели, позволяющие приблизиться к ее решению. К таким моделям можно, например, отнести т.н. турбулентность «без давления» Бюргерса [33], [61].

Другие важные модели приходят из теории турбулентного транспорта, где поток считается заданным стохастическим полем и изучается эволюция вспомогательных пассивных (т.е. не влияющих на поток) полей, которые могут диффундировать и одновременно переноситься стохастическим потоком. Важность таких моделей для теории турбулентности состоит, например, в том, что, с их помощью были получены теоретические доказательства существования аномального скейлинга для пассивных скалярных и векторных полей и показано, что, вообще говоря, он никак не связан с каскадом турбулентного потока [34], [35].

Однако, не следует думать, что турбулентный транспорт является лишь «полигоном» для теории турбулентности. Важнейшее практическое значение теории турбулентного транспорта заключается, например, в объяснении природы мелкомасштабных магнитных полей у астрофизических объектов: звезд, галактик, галактических кластеров и т.д. [19], [49]. Хорошо известно, что материя, из которой состоят эти объекты (электрически нейтральная плазма), часто допускает описание

в рамках магнитной гидродинамики [17], более того, если мы интересуемся лишь возможностью генерации, на начальном этапе эволюции можно считать, что магнитное поле мало и не оказывает обратного влияния на среду. Формальная постановка задачи такова: среда представляет собой однородную и изотропную проводящую жидкость, в которой возбуждены турбулентные пульсации различных масштабов, на фоне этой жидкости эволюционирует «пассивное» магнитное поле.

Уравнение эволюции при этом имеет вид

$$\partial_t B^p + (u^k \partial_k) B^p - (B^k \partial_k) u^p - \kappa \partial^2 B^p = 0,$$

где

$u^k(r, t)$ — случайное поле скоростей потока,

$B^k(r, t)$ — вектор магнитной индукции,

$\kappa = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ — коэффициент магнитной диффузии,

σ — проводимость жидкости, c — скорость света.

Основной вопрос теперь можно сформулировать так: каковы должны быть условия на поле скоростей и коэффициент магнитной диффузии, чтобы флуктуации магнитного поля становились неустойчивыми и происходил их экспоненциальный рост (это явление называется турбулентным динамо)?

В случае бесконечной проводимости (нулевой диффузии) и гладкого поля скоростей ответ дается теоремой Альфвена, линии индукции магнитного поля оказываются вморожены в поток, при этом длина вмороженной линии в гладком потоке экспоненциально растет, вместе с ней растет и вектор магнитной индукции. Однако, наличие сколь угодно малой диффузии может в корне поменять ситуацию; теперь линии индукции уже не вморожены, из-за диффузионного перезамыкания генерация поля может быть подавлена. На этот эффект впервые обратил внимание

Дж. Бэтчелор [6]. Таким образом для ответа на вопрос о возможности динамо необходимо подробно исследовать стохастическое уравнение, определяющее эволюцию магнитных флуктуаций.

Другой важной задачей теории турбулентного транспорта является теория пассивного скаляра [34], [39]. В качестве скалярного поля, может выступать поле температуры, поле пассивной примеси, концентрация бактерий и т.д. Простейшее уравнение, описывающее эволюцию такого поля, имеет вид

$$(\partial_t + \vec{u} \cdot \vec{\partial} - \kappa \partial^2) \phi = 0.$$

Это уравнение описывает затухание плотности скаляра в процессе молекулярной диффузии и турбулентной адвекции. По аналогии с теорией стохастической турбулентности Навье-Стокса можно рассмотреть уравнение с внешней накачкой

$$(\partial_t + \vec{u} \cdot \vec{\partial} - \kappa \partial^2) \phi = f,$$

где накачка f определяет рождение и смерть частиц в системе (или потока подводимого извне тепла, в случае поля температуры). В отличие от уравнения без накачки, для такого уравнения существует статистически стационарное случайное решение $\phi(\vec{r}, t)$. Анализ такого решения демонстрирует многие нетривиальные свойства, в частности, весьма неожиданно оказалось, что аномальный скейлинг присутствует даже в гауссовой модели поля скоростей [34]. Таким образом стало понятно, что он, вообще говоря, никак не связан с каскадом в самом турбулентном потоке.

С задачами турбулентного транспорта связана еще одна классическая проблема: изучение явления перемежаемости [27]. Как известно, с точки зрения теории случайных процессов, классическая термодинамика имеет дело с аддитивными шумами, для которых, в силу центральной предельной теоремы, всегда работает приближение гауссовости и дельта-коррелированности, причем флуктуации

наблюдаемых малы в термодинамическом пределе. Однако, многие явления в естественной природе, экономике и даже в социологии, являются мультипликативными, в том смысле, что наблюдаемые представляются не как сумма независимых случайных величин, а как их произведение. Характерным свойством таких систем является перемежаемость; наблюдаемые в них определяются экспоненциально редкими, но чрезвычайно сильными флуктуациями. Простейшей мультипликативной системой является стохастический поток, эволюцию которого можно представить как последовательность композиций случайных отображений. По этой причине стохастические потоки являются естественным инструментом для изучения явления перемежаемости.

Современное состояние исследований. Первой успешной попыткой построения самосогласованной теории динамо в однородном и изотропном потоке с ненулевой диффузией принадлежит А. Казанцеву [12] и Р. Крайчнану [13]. В качестве модельного потока они выбрали гауссово, дельта-коррелированное по времени однородное и изотропное случайное поле.

$$\langle u_i(r, t) u_j(r', t') \rangle = D_{ij}(r - r') \delta(t - t'),$$

Условие изотропии и несжимаемости диктует, что тензор D_{ij} зависит от одной скалярной функции $K(r)$:

$$D_{ij}(r) = 2K(r)\delta_{ij} - rK'(r)(\delta_{ij} - n_i n_j), \quad n_i = r_i/r.$$

Позднее [23] С. Вайнштейн и Л. Кичатинов определили эту скалярную функцию соотношением

$$K(0) - K(r) = S_2(r),$$

где

$$S_2(r) = \int dt \left\langle \left(\left(\vec{V}(r, t) - \vec{V}(0, 0) \right) \vec{n} \right)^2 \right\rangle -$$

интегральная структурная функция реального (не модельного) потока $V(r, t)$, с ненулевым корреляционным временем, зависящем от масштаба $\tau_c(r)$ и определенным так, что $S_2(r) = \tau_c(r)s_2(r)$, где $s_2(r)$ - одновременная колмогоровская структурная функция потока $V(r, t)$:

$$s_2(r) = \left\langle \left(\left(\vec{V}(r, t) - \vec{V}(0, 0) \right) \vec{n} \right)^2 \right\rangle.$$

Сам Казанцев с помощью развитой им диаграммной техники получил замкнутое уравнение, связывающее парный коррелятор магнитных флуктуаций с функцией $S_2(r)$. Это уравнение теперь называется уравнением Казанцева. Современный способ его вывода основывается не на диаграммной технике, а на более удобном формализме, который впервые применил Е. Новиков для вывода закона Колмогорова в рамках функционального подхода к теории однородной и изотропной турбулентности [10]. С точки зрения теории стохастических процессов, это своеобразное «континуальное интегрирование по частям» которое позволяет «расщеплять» корреляции гауссового, дельта-коррелированного шума с его аналитическими функционалами. Известно обобщения этого формализма на случай негауссовых и не дельта-коррелированных шумов [47]. Ответ получается в результате некоторого остроумного «пересуммирования» ряда Тейлора для аналитического функционала; он имеет вид бесконечного функционального ряда из средних значений вариационных производных, со связными корреляционными функциями шума, в качестве коэффициентных функций.

Уравнение Казанцева является однородным параболическим уравнением, его традиционный анализ заключается в замене переменных, благодаря которой оно сводится к евклидовому уравнению Шредингера с массой, зависящей от пространственной переменной. Наличие отрицательных уровней энергии говорит об экспоненциальном росте начальных флуктуаций. Известно, что для степенной интегральной структурной функции $S_2(r) \sim r^\xi$, с показателем скейлинга $\xi > 1$,

уравнение Казанцева имеет растущие моды [12]. Например, при большом числе Прандтля (малой диффузии), когда определяющую роль играет поведение $S_2(r)$ на вязком масштабе турбулентности, где $\xi = 2$, модель Казанцева-Крайчнана предсказывает экспоненциальный рост магнитных флуктуаций. Для расчетов в рамках теории Казанцева при малом числе Прандтля и большом числе Рейнольдса необходимо знать поведение интегральной структурной функции в инерционном интервале турбулентного потока. В рамках модели Вайнштейна-Кичатинова, эффективный показатель скейлинга интегральной структурной функции $S_2(r)$ в инерционном интервале турбулентности полагается равным $\xi = 4/3$. Это число получается из предположения о колмогоровского скейлинге структурной функции $s_2(r) \sim r^{2/3}$ и о колмогоровском скейлинге корреляционного времени $\tau_c(r) \sim r^{2/3}$. Так как $4/3 > 1$ теория Казанцева здесь также предсказывает экспоненциальный рост флуктуаций. Заметим, что получение точных аналитических результатов в этих моделях связано с предположениями о возможности выделения главного масштаба, с постоянным скейлингом. Однако это, во всяком случае, не верно при конечных числах Прандтля и Рейнольдса. Поэтому аналитическое описание процесса генерации магнитного поля в этих случаях часто сталкивается с техническими сложностями [57].

С другой стороны, для обычного евклидова уравнения Шредингера с фиксированной массой давно существует формализм, упрощающий поиск и анализ вакуумного решения (нулевой моды). Он носит название «стохастического квантования» [20], [28], [48] и сводится к установлению связи между уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова для некоторого нелинейного стохастического уравнения Ланжевена и евклидовым уравнением Шредингера. Возникает естественное желание найти аналогичную связь с параболическим уравнением Казанцева.

Несмотря на успешное применение модели Казанцева-Крайчнана для объяснения природы мелкомасштабного динамо, есть причины, по которым она не может считаться до конца удовлетворительной. Дело в том, что задача динамо имеет дело с мультипликативным шумом; из простейших одномерных примеров известно, что для таких систем «не работает центральная предельная теорема», в том смысле, что влияние высших куммулянтов шума не исчезает при $t \rightarrow \infty$. Между тем, реалистичные модели поля скорости, соответствующие потоку Навье-Стокса, должны быть, конечно, негауссовыми. В этом смысле гауссова модель поля скоростей не является асимптотически точной при $t \rightarrow \infty$.

Для того, чтобы работать с негауссовыми гладкими полями скорости существует альтернативный формализм, он носит название «метод квази-лагранжевых траекторий». Впервые он был представлен в работе В. Белиничера и В. Львова [26], и далее нашел широкое применение в различных моделях турбулентности [50], [52]-[56]. Этот метод позволяет следить за «вмороженной» эволюцией или за эволюцией локализованных возмущений транспортируемого поля (т.н. блобов) при малой диффузии и на начальном, вязком этапе, пока размер возмущения не превышает Колмогоровского диссипативного масштаба потока и можно пользоваться линейным разложением поля скоростей вблизи центра блоба. В работе [40] авторы используют это же приближение для описания эволюции безграничных однородных и изотропных мелкомасштабных флуктуаций, однако, в такой постановке метод требует более тщательного обоснования, так как не ясно, почему в таких условиях можно пользоваться линейным разложением. Идея такого обоснования была уже у Х. Моффата и П. Саффмана [9] которые, собственно, и ввели понятие «блоб», рассмотрев на качественном уровне начальный этап развития однородных и изотропных флуктуаций как эволюцию ансамбля невзаимодействующих блобов. Далее, на примере простейшей модели эта же идея развивается И. Колоколовым [65].

Полное и последовательное обоснование метода «стохастической декомпозиции» дано в нашей работе [72].

Задача транспорта на вязком этапе сводится к описанию эволюции флага замороженного репера, подверженного случайным линейным преобразованиям, т.е. к описанию совместной эволюции последовательности вложенных друг в друга гиперграней репера s_k .

Например, в работе [39] было показано, что однородные и изотропные флуктуации слабо диффузного скалярного поля в 3d-несжимаемом потоке на вязком этапе эволюции можно представить в виде

$$\varphi^2(t) \sim \min\{s_1^{-1}(t), s_2^{-1}(t)\},$$

а, в работах [40], [66], найдено выражение для однородных и изотропных мелкомасштабных флуктуаций магнитного поля в среде с высокой проводимостью, которое также содержит элементы флага:

$$B^2(t) \sim \min\left\{\frac{s_1^2(t)}{s_2(t)}; \frac{s_2^2(t)}{s_1(t)}\right\}.$$

Поэтому изучение эволюции замороженного флага полезно для решения большого круга задач стохастического транспорта.

Человеческий опыт говорит, что для лучшего понимания какого-либо явления, имеет смысл рассмотреть его в максимальной общности, поэтому, в дальнейшем, мы не будем ограничиваться 2d и 3d-потоками и будем говорить об эволюции флага в любых размерностях. Движение замороженного в поток репера следует описывать с помощью т.н. оператора эволюции P , он действует в касательных пространствах d -мерного евклидова пространства \mathbb{E}^d и, с математической точки зрения, является дифференциалом потока (матрицей Якоби).

Уравнение для оператора эволюции имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \mathcal{A}(x, t)P(x, t),$$

где $\mathcal{A}(x, t)$ – тензор градиентов скорости потока, вычисленный вдоль траектории замороженной частицы, с начальной координатой x . Для несжимаемых, изотропных и стационарных потоков, $\mathcal{A}(x, t)$ является стационарным изотропным матричным процессом, его статистика не зависит от x . Таким образом, уравнение эволюции является стохастическим дифференциальным уравнением со стационарным матричным мультипликативным шумом.

Главными величинами, необходимыми для описания стохастической эволюции замороженного флага являются его характеристические корреляторы

$$\langle s_1^{m_1}(t) \dots s_d^{m_d}(t) \rangle.$$

Их вычисление для заданной статистики поля скоростей должно проходить в два этапа:

1.) По известной статистике поля скоростей находится статистика $\mathcal{A}(x, t)$.
2.) По известной статистике $\mathcal{A}(x, t)$ находятся характеристические корреляторы.

Аналитическое решение 1.) возможно лишь для «максимально стохастических потоков», когда скорости в разные моменты времени независимы. В нашей работе [75] показано, что такие потоки являются асимптотически точными, во всяком случае, для систем с большими числами Прандтля. В других случаях их можно считать, если и не асимптотически точными, то достаточно реалистичными моделями поля скоростей.

Формальное решение задачи 2.) также хорошо известно, это т.н. мультипликативный интеграл Вольтерра [30], континуальное произведение матриц, или, в квантово-механической терминологии, Т-экспонента:

$$P(t) = \mathcal{T} \left\{ e^{\int_0^t \mathcal{A}(\tau) d\tau} \right\} = \prod_{\tau=0}^t (1 + \mathcal{A}(\tau) d\tau).$$

Это решение никак не ограничено предположениями о корреляционном времени процесса $\mathcal{A}(\tau)$, однако, из-за некоммутативности матричного произведения, получение информации о характеристических корреляторах из него является в общем случае открытой математической проблемой.

Первое соображение, позволяющее судить о характере непрерывной эволюции флага, состоит в следующем: если разбить время эволюции на большое число N одинаковых непересекающихся интервалов, размер которых, тем не менее превышает характерное корреляционное время потока, то мультипликативный интеграл Вольтерра от стационарного случайного матричного процесса $\mathcal{A}(x, t)$ приближенно можно представить в виде произведения одинаково распределенных случайных независимых матриц, равных интегралу Вольтера по каждому интервалу:

$$P(t) = \prod_{k=1}^N Q_k, \text{ где } Q_k = \prod_{\tau=t_{k-1}}^{t_k} (1 + \mathcal{A}(\tau) d\tau).$$

Описание предельных свойств таких произведений является классической математической проблемой, рассмотренной Г. Ферстенбергом [8] и В. Тутубалиным [16]. Они описали некоторые предельные свойства случайного флага, в частности, доказали «некоммутативный закон больших чисел», утверждающий, что с вероятностью единица существует набор неслучайных чисел

$$\lambda_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \frac{s_k(N)}{s_{k-1}(N)},$$

который называется ляпуновским спектром.

Другое определение ляпуновского спектра было дано В. Оселедцем в его работе, посвященной мультипликативной эргодической теореме [14], С. Молчанов и В. Тутубалин [22] показали, что оба определения совпадают.

Явное вычисление Ляпуновского спектра изотропно распределенных матриц было впервые проделано Н. Ньюманом [25], который показал, в этом случае

$$\lambda_k = \left\langle \ln \frac{s_k(1)}{s_{k-1}(1)} \right\rangle.$$

Несмотря на то, что качественные свойства эволюция флага становятся ясны из решения задачи в дискретном времени, остаётся не ясно, как найти точное решение задачи 2.), иными словами, как определить статистику матриц Q_k , по известной статистике $\mathcal{A}(x, t)$.

Для решения этой задачи необходимо перейти к описанию флага в непрерывном времени. Явное выражение для ляпуновского спектра в непрерывном времени для изотропных, гауссовых и дельта-коррелированных потоков было получено в работе П. Баксендэйла и Т. Е. Харрисса [24], в рамках регуляризации Ито. Позже этот результат был повторен А. Гамбой и И. Колоколовым [36], [43] в рамках теоретико-полевого подхода с использованием регуляризации Стратоновича.

Оказалось, что в несжимаемом случае оба способа регуляризации дают одинаковые ответы

$$\lambda_k = 2D \left(\frac{d+1}{2} - k \right).$$

Однако, в сжимаемом случае ответы оказываются разными. Заметим, что регуляризацию Стратоновича следует считать более корректной с физической точки зрения. Это связано с так называемой теоремой Вонга-Закаи [11], из которой следует что регуляризация Стратоновича соответствует предельному переходу, в котором рассматривается шум с конечным корреляционным временем, которое в конце вычислений стремится к нулю.

Подводя итог, можно сказать, что программа явного вычисления характеристических корреляторов замороженного флага по статистике поля

скоростей потока была в полной мере решена лишь для гауссовой модели Крайчнана.

Однако известно, что реальный турбулентный поток является негауссовым. Например, в трехмерной модели Крайчнана $\lambda_2 = 0$, в то время, как численные эксперименты [29] показывают, что в турбулентности Навье-Стокса $\lambda_2/\lambda_1 \approx 0.25$. Таким образом, исследование негауссовых потоков представляется очень важной задачей.

Перейдем теперь еще к одной важной особенности процессов, происходящих в стохастических потоках - перемежаемости. С этим явлением оказываются связаны некоторые специфические законы сохранения. Из теоремы Оселедца известно, что площади граней замороженного флага в среднем экспоненциально растут, однако, всегда существуют экспоненциально редкие лагранжевы траектории, вдоль которых некоторые площади убывают. Это происходит из-за мультипликативности процесса переноса в потоке. В результате, достаточно высокие отрицательные степени $\langle s_k^{-m_k}(t) \rangle$ должны расти. Граничные показатели M_k соответствуют так называемым «стохастическим интегралам движения» $\langle s_k^{-M_k}(t) \rangle = 1$. Я.Б. Зельдовичем, А.А. Рузмайкиным, С.А. Молчановым и Д.Д. Соколовым в работе [21] был найден универсальный (т.е. независимый от свойств потока) асимптотический стохастический интеграл движения

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle s_1^{-d}(N) \rangle = 1.$$

Позднее Г. Фалькович и А. Фришман [58] показали, что этот закон является на самом деле не асимптотическим, а точным, кроме того, он остается таковым даже в нестационарных несжимаемых потоках. Нахождение других стохастических интегралов для сжимаемых и несжимаемых потоков, крайне важно для понимания динамики замороженных структур, так как их существование накладывает сильные ограничения на возможный вид характеристических корреляторов флага [76].

В математической традиции явление перемежаемости в системах с мультипликативным шумом обычно связывают с теорией больших уклонений [51]. Основной вопрос этой теории – связь эргодического среднего (т.е. средних по времени) $\bar{\xi}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt$ и матожидания $\langle \xi \rangle$ (т.е. среднего по ансамблю) некоторого стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Еще Крамер показал [3], что при некоторых, вполне естественных требованиях (сводящихся, в сущности, к конечности корреляционного времени) плотность вероятности эргодического среднего случайного процесса имеет вид

$$\mathcal{P}(\bar{\xi}) \sim e^{-TJ(\bar{\xi})},$$

где J - функция Крамера (rate function), выпуклая функция с минимумом в матожидании $\langle \xi \rangle$.

Из этого, в первую очередь, следует собственно эргодичность, т.е. сходимость по вероятности эргодического среднего к матожиданию, при $T \rightarrow \infty$, и центральная предельная теорема, т.е. утверждение о гауссовости малых отклонений $\bar{\xi}(T)$ от $\langle \xi \rangle$. Но, что более важно, функция Крамера позволяет оценивать вероятности экспоненциально редких событий, когда при больших, но конечных T разность $\bar{\xi}(T) - \langle \xi \rangle$ не мала. В системах с мультипликативным шумом именно такие события определяют наблюдаемые величины [15].

В теории стохастического транспорта, соответствующие эргодические средние называются обобщенными ляпуновскими показателями (finite time Lyapunov exponents) [31] и определяются как

$$\bar{\xi}_k(T) = \frac{1}{T} \ln \frac{s_k(T)}{s_{k-1}(T)}.$$

Их совместная функция Крамера оказывается важнейшей характеристикой потока, она связана преобразованием Лежандра с нормированным на T логарифмом

характеристических корреляторов флага и ее нахождение крайне полезно для описания стохастической эволюции флага.

Еще одной темой, затронутой в диссертации, является поведение систем типа «реакция-диффузия», помещенных в турбулентный поток. Обычные уравнения типа «реакция-диффузия» описывают эволюцию одно- или многокомпонентных скалярных полей с локальным нелинейным взаимодействием и диффузией. Они естественным образом возникают при описании процессов реакции в химии, биологии, экологии, теории горения, плазме, ядерной физике и т.д. Одним из наиболее известных примеров является уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова (Фишера-КПП) [1], [2]. Важной особенностью этих систем является наличие бегущих волн, соответствующих переходу между различными фазовыми состояниями. Что будет, если такую систему погрузить в вязкий случайный поток?

Вязкая эволюция скалярных локализованных возмущений без самодействия изучалась в работе [39]. Авторами было обнаружено явление насыщения инкрементов высших моментов поля; оно возникает благодаря сильной перемежаемости: высшие моменты плотности определяются экспоненциально редкими событиями, когда объем скалярного «блоба» сохраняется, в результате инкремент убывания моментов плотности оказывается равен инкременту убывания вероятности таких событий.

Интересно рассмотреть влияние турбулентного переноса на скорость реакции и на распространение волны «переключения», с одной стороны, и влияние динамической нелинейности на свойства статистических моментов плотности, с другой.

Цели диссертационной работы.

Настоящая диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Развитие формализма, аналогичного «стохастическому квантованию», который бы упрощал анализ асимптотики решений уравнения Казанцева-Крайчнана для конечных чисел Прандтля и Рейнольдса.
2. Дальнейшее развитие метода Лагранжевых траекторий для негауссовых потоков.
3. Дальнейшее развитие теории больших уклонений для эргодических средних наблюдаемых величин, эволюционирующих в негауссовых гладких изотропных потоках.
4. Развитие методов, позволяющих судить об эволюции локализованных возмущений магнитного поля (блобов) на инерционном этапе.
5. Изучение характера эволюции систем типа реакция-диффузия в гладких стохастических потоках.
6. Описание геометрии гладких гиперповерхностей, эволюционирующих в d -мерных изотропных потоках.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие

Задачи:

1. Найти условия на коэффициентные функции параболического уравнения, при выполнении которых существует замена переменных, сводящее его к уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова для некоторого вспомогательного нелинейного стохастического уравнения Ланжевена.
2. Проанализировать с этой точки зрения уравнения Казанцева-Крайчнана для пассивного вектора и пассивного скаляра.
3. Определить инкременты затухания (роста) для различных интегральных структурных функций потока.

4. Найти явные решения уравнений, описывающих развитие локализованных возмущений скалярного и магнитного полей в гладком потоке на вязком этапе эволюции.
5. Найти статистику обобщенных ляпуновских экспонент произведений изотропно распределенных случайных матриц в дискретном времени.
6. Для произведений в непрерывном времени, найти замену переменных в пространстве матричных функций и соответствующий функциональный якобиан, позволяющие в явном виде перенести вероятностную меру с компонент лагранжевого тензора градиентов на обобщенные ляпуновские показатели эволюционирующего флага.
7. Построить «некоммутативную теорию больших уклонений» при конечном корреляционном времени, т.е. найти связь функции Крамера компонент лагранжевого тензора градиентов и функции Крамера обобщенных ляпуновских показателей флага.
8. Доказать асимптотическую точность дельта-приближения для матричного уравнения эволюции изотропного флага.
9. Построить дельта-модель поля скоростей, обобщающую гауссову модель Крайчнана на случай T-неинвариантного потока (V3-модель).
10. Провести явные вычисления статистических моментов флага и эволюционирующих полей в рамках V3-модели.
11. Доказать теорему о «стохастической декомпозиции», утверждающую, что однородные и изотропные флуктуации могут быть представлены в виде некогерентной суммы блобов, локализованных в разных точках пространства.
12. Найти связь между плотностью энергии изотропных флуктуаций и энергии изолированного блоба.
13. Выявить топологическую природу турбулентного динамо на инерционном этапе при малой диффузии (больших числах Прандтля).

14. Вычислить моменты скалярного поля с самодействием типа «реакция-диффузия» в гладком случайном изотропном поле скоростей, на вязком этапе эволюции.
15. Объяснить природу насыщения моментов плотности и популяции в разных режимах адвекции.
16. Доказать универсальное свойство симметрии характеристических моментов случайного изотропного флага.
17. Основываясь, на этом свойстве, получить серию точных стохастических интегралов движения случайного флага в изотропном потоке.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Критерий существования стохастического уравнения Ланжевена, для которого уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова заменой переменных может быть сведено к уравнению Казанцева.
2. Новый способ нахождения инкремента роста и затухания решений уравнения Казанцева для скаляра и вектора, в случае произвольной интегральной структурной функции потока.
3. Выражения для характеристических корреляторов произведения случайных, изотропно распределенных матриц в дискретном времени.
4. Связь функции Крамера матричных элементов лагранжевого тензора градиентов и функции Крамера обобщенных ляпуновских показателей в непрерывном времени.
5. Теорема об асимптотической точности дельта-моделей при вычислении характеристических моментов флага.
6. V3-модель T-неинвариантного потока.
7. Выражения для моментов полей, эволюционирующих в V3-потоке.

8. Теорема о стохастической декомпозиции безграничных изотропных флуктуаций.
9. «Энергетическое соответствие», связывающее плотность энергии однородных флуктуаций с энергией блага на вязком и инерционном этапе эволюции.
10. Выявление механизмов мелкомасштабного динамо на вязком и инерционном этапах эволюции. Указание на принципиально разную природу этих механизмов, несмотря на близкий инкремент роста.
11. Описание эволюции локализованного блага на инерционном этапе.
12. Объяснение отличия в характере эволюции 3d и квази-2d флуктуаций.
13. Выражение для моментов скалярной плотности и полной популяции при турбулентной адвекции систем типа «реакция-диффузия».
14. Эффект насыщения инкрементов высших моментов и объяснение его причин.
15. Теорема об универсальных свойствах симметрии характеристических показателей изотропного флага.
16. Универсальные интегралы движения гиперповерхностей в изотропных многомерных потоках.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора

Все результаты, изложенные в данной диссертации, являются оригинальными. Новизна рассматриваемых проблем, а также достоверность результатов привело к существенному продвижению в понимании природы турбулентного динамо, свойств матричных уравнений с изотропным мультипликативным шумом, влияния T-необратимости потока на эффект динамо, особенностей

турбулентной адвекции в системах типа «реакция-диффузия», природы и свойств перемежаемости в изотропных гладких стохастических потоках, геометрической природы лагранжевых интегралов движения гиперповерхностей в многомерных изотропных потоках.

Полученные автором результаты регулярно используются и далее развиваются российскими и зарубежными научными группами. Приведенные в диссертации результаты получены самим автором или при его непосредственном участии и легли в основу научных статей, сделанных в соавторстве с российскими и иностранными коллегами.

Практическая значимость

Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для исследования и описания широкого круга явлений в теории турбулентного переноса, для валидации численного счета в теории турбулентности, для построения различных моделей турбулентности, для описания галактического, солнечного и земного магнетизма, в теории матричных уравнений с мультипликативным шумом, в теории больших уклонений и перемежаемости, при изучении асимптотики временных средних для потоков переноса и схожих систем, в эргодической теории и наконец, в теории лагранжевой турбулентности.

Публикации и апробация работы

Основные результаты по теме диссертации получены в 2015–2023 годах и изложены в 12 публикациях в рекомендованных ВАК периодических изданиях для диссертаций (Phys. Lett. A – 1 статья, УФН – 1 статья, Phys. Scr. – 1 статья, Euro Phys. Lett. – 1 статья, Journ. Stat. Phys. – 2 статьи, Physics of Fluids – 2 статьи, Phys. Rev. E – 4 статьи.)

Результаты работ, которые легли в основу данной диссертации, доклады вались на семинарах и конференциях, проводимых в различных ведущих научных центрах:

На научных сессиях Совета РАН по нелинейной динамике XXVI-XXX, Москва, 2019-22,

на XIII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, СПб 2023,

а также на семинарах ОТФ ФИАН, матфака ВШЭ, Сколтеха и семинаре по проблемам солнечно-земной физики в Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн имени Н. В. Пушкова РАН.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 11 глав и заключения. Для удобства, вспомогательные справочные материалы, а также некоторые технические детали вычислений сосредоточены в 3-х приложениях. Полный объём

диссертации с приложениями составляет 169 страниц с двумя рисунками и одной таблицей. Список литературы содержит 79 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение посвящено обоснованию актуальности исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, обзору научной литературы по изучаемым проблемам, формулировкам целей, задач, а также научной новизны и практической значимости представляемой работы.

В первой главе содержится формальная постановка задач теории турбулентного транспорта.

Вторая глава посвящена более простому, по сравнению с оригинальным, выводу уравнения Казанцева-Крайчана (КК), для транспорта скаляра и вектора в гауссовом и дельта-коррелированном по времени потоке. Это уравнение является дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа и связывает интегральную структурную функцию поля скоростей $S_2(r)$ и инвариантный парный коррелятор транспортируемого поля:

$$\partial_t \phi(r, t) = \left(\frac{4S(r)}{r} + 2S'(r) \right) \phi'(r, t) + 2S(r) \phi''(r, t) - \text{пассивный скаляр}$$

$$\frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} = 2 \left(S''(r) + \frac{4}{r} S'(r) \right) Q(r, t) + \left(2S'(r) + \frac{8}{r} S(r) \right) Q'(r, t) + 2S(r) Q''(r, t) -$$

пассивное магнитное поле,

$$\langle B_i(\vec{x}, t) B_j(\vec{y}, t) \rangle = 2Q(r, t) \delta_{ij} - rQ'(r, t) (\delta_{ij} - n_i n_j),$$

$$S(r) = \kappa + \frac{1}{4} S_2(r), \kappa - \text{коэффициент диффузии.}$$

Смысл повторять заново вывод известного уравнения заключается в том, что способ, представленный в диссертации, далее был обобщен на негауссовы потоки [73], [74], [79].

Третья глава посвящена разработке нового метода нахождения асимптотик уравнения КК. Обычный метод его анализа заключается в сведении к евклидовому уравнению Шредингера с массой, зависящей от масштаба. В настоящей работе предложен альтернативный метод анализа, который основывается на изучении критерия возможности сведения уравнения КК к уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова, описывающего эволюцию плотности вероятности решений некоторого вспомогательного стохастического нелинейного уравнения Ланжевена. Для этого, после обсуждения правильной последовательности предельных переходов в стохастических дифференциальных уравнениях выводится формула Фейнмана-Каца [18], [38], [42] для произвольного однородного параболического уравнения. Эта формула дает представление для соответствующего пропагатора (функции Грина) в виде континуального интеграла по некоторому стохастическому процессу. Из анализа этих представлений для уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова и общего параболического уравнения находится искомый критерий [72], [77]:

Пусть имеется однородное параболическое уравнение общего вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -u(x)\psi(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(x)\psi(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x)\psi(x, t)),$$

где $u(x), \lambda(x), \sigma^2(x)$ - заданные гладкие функции, $\sigma^2(x) > 0$.

Поставим ему в соответствие функцию (эффективный потенциал)

$$2u_{eff}(x) = \frac{2u(x)}{\sigma^2(x)} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} \right) + \left(\frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} \right)^2$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y''(x) = 2u_{eff}(x)y(x).$$

Тогда, если это уравнение имеет неотрицательные на всей оси решения, то с помощью замены

$$\psi(x, t) = e^{\int \frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} dx} y(x) \rho(x, t),$$

параболическое уравнение общего вида преобразуется к уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятности $\rho(x, t)$ ланжевеновской частицы, координата которой удовлетворяет нелинейному уравнению Ланжевена

$$\dot{x}(t) = \sigma^2(x) \frac{d}{dx} \ln(y(x)) - \frac{1}{2} \sigma(x) \frac{\partial}{\partial x} \sigma(x) + \sigma(x) \xi(t),$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(0) \xi(t) \rangle = \delta_\epsilon(t), \epsilon \rightarrow 0.$$

ϵ - корреляционное время гауссова шума $\xi(t)$.

Смысл этого критерия в том, что при условии его выполнения, параболическое уравнение общего вида не будет иметь растущих мод, т.к. полная вероятность ланжевеновской частицы не может расти и равна единице.

Четвертая глава посвящена применению этого формализма для получения асимптотик уравнения КК для пассивного скаляра и вектора (магнитного поля).

Для КК эффективный потенциал принимает вид [72], [77]

$$2u_{eff}(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \ln S(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \ln S(x) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} \ln S(x) \right)^2 - \text{пассивный скаляр}$$

$$2u_{eff}(x) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \ln S(x) - \frac{2}{x} \frac{d}{dx} \ln S(x) - \frac{3}{4} \left(\frac{d}{dx} \ln S(x) \right)^2 + \frac{2}{x^2} \quad \text{пассивное}$$

магнитное поле.

С помощью этих выражений находятся инкременты роста (убывания) решений для различных интегральных структурных функций потока, в частности для модели Вайнштейна-Кичатинова. Эти вычисления являются своеобразным «трамплином»,

позволившим в дальнейшем перейти к применению предложенного формализма для решения задач транспорта в негауссовых потоках [73], [74], [79].

Пятая глава посвящена введению в альтернативный формализм лагранжевых траекторий. В ней определяется квази-лагранжева система координат, и находятся точные решения уравнений транспорта для локализованных возмущений «блобов» на вязком (бетчелоровом) этапе эволюции.

$$\phi(0, t) = \int d^3p \tilde{\phi}(\vec{p}, 0) e^{-\kappa \int_0^t |\hat{P}^{-1}(\tau) \vec{p}|^2 d\tau} \quad \text{-скаляр}$$

$$\vec{B}(0, t) = \int d^3p \hat{P}(t) \vec{\tilde{B}}(\vec{p}, 0) e^{-\kappa \int_0^t |\hat{P}^{-1}(\tau) \vec{p}|^2 d\tau} \quad \text{- магнитное поле}$$

где $\tilde{\phi}(\vec{p}, 0)$ и $\vec{\tilde{B}}(\vec{p}, 0)$ – Фурье образы начальных возмущений соответствующих полей [64],[66].

Эти решения содержат оператор эволюции $\hat{P}(t)$ – случайную матричную функцию, являющуюся дифференциалом (матрицей Якоби) случайного потока, и удовлетворяющую стохастическому уравнению с матричным мультипликативным шумом, в роли которого выступает лагранжев тензор градиентов скорости:

$$\partial_t P(t) = A(t)P(t), P(0) = \hat{1}.$$

Изучению соответствующих матричных уравнений посвящена

Шестая глава. В действительности в физические ответы входят не сами матричные элементы оператора эволюции, а т.н. характеристические моменты случайного флага, которые представляют собой набор всех корреляторов $\langle s_1^{m_1}(t) \dots s_d^{m_d}(t) \rangle$ угловых миноров s_k^2 матрицы Грамма $P^T P$ оператора эволюции P . Эти миноры удобно представить в виде, $s_k = D_1 \dots D_k$, где D_k - диагональные компоненты разложения Ивасава оператора эволюции P .

В начале главы, в качестве «прелюдии» к решению задачи в непрерывном времени, изучается классическая математическая проблема о мультипликативной эволюции в дискретном времени (произведения случайных матриц). С помощью

некоторого обобщения идей Ньюмана вычисляются характеристические моменты флага произведения изотропно распределенных, независимых матриц Q_n . Оказывается, что в изотропном случае, они «не чувствуют» некоммутативность матричного произведения, в том смысле, что для показателей произведения $P(N) = Q_N \dots Q_1$ справедливо равенство [63], [77]

$$\langle D_1^{m_1}(P) \dots D_d^{m_d}(P) \rangle = \sum_{n=1}^N \langle D_1^{m_1}(Q_n) \dots D_d^{m_d}(Q_n) \rangle = \langle D_1^{m_1}(Q_1) \dots D_d^{m_d}(Q_1) \rangle^N.$$

Развитие этой идеи позволяет далее работать с континуальными произведениями (т.е. в непрерывном времени) коррелированных матриц.

Так как формальное решение матричного уравнения для оператора эволюции для каждой гладкой реализации шума представляет собой мультипликативный интеграл Вольтера (или, в квантово-механической терминологии, Т-экспоненту), задача сводится к подходящей замене переменных, и вычисления соответствующего функционального якобиана [62], [75], так, чтобы некоммутативность матричных произведений не создавала сложностей при вычислениях характеристических корреляторов флага. Далее развивается последовательная теория больших уклонений (large deviation) для континуальных некоммутативных произведений изотропно распределенных матриц с ненулевым корреляционным временем и находится связь функции Крамера диагональных элементов лагранжевого тензора градиентов и функции Крамера обобщенных ляпуновских показателей [75]

$$\bar{\xi}_k(T) = \frac{1}{T} \ln(D_k(T)):$$

$$J_{\bar{\xi}_k}(x_1, \dots, x_d) = J_{\bar{A}_{kk}}(x_1, \dots, x_d) + \sum_{k=1}^d \eta_k x_k, \quad \eta_k = \frac{d+1}{2} - k.$$

Тот факт, что такая связь вообще существует, означает, что, в изотропном случае (и только в изотропном), для определения асимптотики характеристических корреляторов флага можно пользоваться моделью негауссового эффективного

дельта-процесса [75]. Этого формализма оказывается достаточно чтобы вычислять моменты замороженных магнитных и скалярных полей на протяжении всей эволюции, а также моменты невмороженных полей при малой диффузии (большом числе Прандтля) на начальном, вязком этапе эволюции.

В седьмой главе рассматривается простейшая модель поля скоростей, обобщающая модель КК и предполагающая отклонение статистики потока от гауссовой. В таком поле связанная корреляционная функция третьего порядка ненулевая; по этой причине эта модель называется V3-моделью [62]. Статистические свойства потока оказываются не инвариантными по отношению к обращению времени, поэтому для описания неравновесной турбулентности Навье-Стокса V3-модель оказывается более реалистичной, чем стандартная гауссова модель КК.

Производящая функция связанных моментов (кумулянтная функция) диагональных компонент лагранжева тензора градиентов в такой модели имеет вид:

$w_{\mathcal{A}}(a, b) = Da + Fb + o(F^2)$, где

$$a = \sum_q \eta_{qq}^2 - \frac{1}{3} (\sum_q \eta_{qq})^2, \quad b = (\sum_q \eta_{qq}^2) (\sum_q \eta_{qq}) - \sum_q \eta_{qq}^3 - \frac{2}{9} (\sum_q \eta_{qq})^3.$$

Первый член здесь соответствует модели Крайчнана, второй описывает временную асимметрию потока.

Выражения для ляпуновского спектра в такой модели имеет вид [62]

$$\lambda_s = 2D(2 - s) + 2F \left(1 - \frac{3}{2} (2 - s)^2 \right), \quad s = 1, 2, 3,$$

поэтому «асимметрия» F такого процесса определяется вторым индексом Ляпунова $\lambda_2 = 2F$.

Его значение известно из численного счета турбулентности Навье-Стокса $\lambda_2/\lambda_1 \approx 0.25$. Это делает возможной привязку модели к реальному турбулентному потоку.

В восьмой главе в рамках V3-модели рассматривается эволюция пассивного скалярного локализованного возмущения (в английской терминологии «blob») на вязком этапе эволюции, вычисляются точные инкременты затухания моментов плотности $\langle \phi^\alpha \rangle \sim e^{-\gamma_\alpha t}$ и исследуется явление насыщения инкрементов высших моментов при $\alpha > 2$ [64].

$$\gamma_\alpha = \begin{cases} \frac{2D}{3} \alpha (3 - \alpha) \left(1 + \frac{1}{3} \left| \frac{F}{D} \right| \left(\frac{3}{2} - \alpha \right) \right), & \alpha \leq \alpha_c \\ 2D \left(\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{4} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{F}{D} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right) + O(F^4), & \alpha_c < \alpha \leq 2 \\ 2D, & \alpha > 2 \end{cases}$$

где $\alpha_c = 3|F/D| + O(F^3)$ - однозначно определяется условием выпуклости γ_α .

Это явление демонстрирует сильную перемежаемость статистики скалярного поля, и связано с тем фактом, что высшие моменты определяются событиями, когда объем блоба (и, поэтому, его плотность) не меняется в процессе адвекции. Вероятность таких сценариев эволюции экспоненциально падает со временем, инкремент этого падения и определяет насыщенные моменты плотности при $\alpha > 2$.

В девятой главе изучается эволюция системы с самодействием типа Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова. Рассматриваются нелинейные динамические и стохастические эффекты, возникающие в системе «реакция-диффузия», помещенной в турбулентный поток. В частности, показана возможность экспоненциального роста популяции (т.е. полного числа частиц), несмотря на динамическое (нелинейное) насыщение их плотности [67].

В десятой главе изучается поведение магнитных возмущений. Показывается, что на вязком этапе магнитное поле локализованного блоба затухает из-за диффузионного перезамыкания силовых линий, однако полная энергия растет! Этот рост происходит за счет экспоненциального роста его объема на вязком этапе [68], [72]. Заметим, что, в рамках простейшей модели, когда тензор градиента

предполагается постоянной, диагональной матрицей и может быть применен анализ Фурье, этот эффект обсуждался в работе [84].

Далее, для изучения безграничных флуктуаций доказывается теорема о «стохастической декомпозиции», которая позволяет представлять безграничные изотропные флуктуации в виде некогерентного наложения блобов [68],[72].

Пусть начальные флуктуации такого поля имеют парный коррелятор вида

$$\langle B_i(\vec{r})B_j(0) \rangle_{i.c.} = \Pi_{ij}D\left(\frac{r}{l}\right),$$

где $D\left(\frac{r}{l}\right)$ – регулярная, быстро убывающая функция, $\Pi_{ij} = \delta_{ij} - \partial^{-2}\partial_i\partial_j$ - проектор на бездивергентные моды, l – начальная корреляционная длина.

Рассмотрим неслучайное начальное магнитное возмущение, поле которого имеет вид

$$b_i(\vec{r}, \vec{r}_0) = l^{3/2}C_j\Pi_{ij}d\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{l}\right)$$

l -размер возмущения, d – также регулярная, быстро убывающая функция (формфактор), \vec{C} – вектор направления.

Идея состоит в том, что случайное однородное поле можно представить как сумму таких локализованных возмущений (блобов) с центрами в разных точках \vec{r}_0 , одинаковой «формы» $d(r)$ и размера l , со случайными, независимыми амплитудами $\vec{C}(\vec{r}_0)$:

$$B_i(\vec{r}) = l^{3/2} \int d\vec{r}_0 C_j(\vec{r}_0) \Pi_{ij} d\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{l}\right),$$

$$\langle C_i(\vec{r}_0)C_j(\vec{r}'_0) \rangle_{i.c.} = \frac{1}{l^3} \delta_{ij} \delta(\vec{r}'_0 - \vec{r}_0).$$

При этом, формфактор d определяется коррелятором однородных флуктуаций:

$$D\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{l}\right) = \int d\vec{r}_0 d\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{l}\right) d\left(\frac{|\vec{r}'-\vec{r}_0|}{l}\right).$$

Из линейности уравнения на $B_i(\vec{r}, t)$ следует, что решение задачи Коши для изотропных безграничных флуктуаций имеет вид суммы эволюционирующих блобов:

$$B_i(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}_0 C_j(\vec{r}_0) b_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$$

где $b_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$ - решение задачи Коши для уравнения

$$\partial_t b_{ij} + (v_k \partial_k) b_{ij} - (b_{kj} \partial_k) v_i = \kappa \partial^2 b_{ij}$$

с неслучайным начальным условием

$$b_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, 0) = l^{3/2} \Pi_{ij} d\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{l}\right).$$

Важным результатом анализа такой декомпозиции оказывается «энергетическое соответствие», которое связывает полную энергию локализованного возмущения, помещенного в поток и плотность энергии однородных и изотропных флуктуаций, помещенных в поток с такой же статистикой [72]:

$$\langle B^2 \rangle l^3 = 3 \langle E_b \rangle.$$

Это точное и универсальное соответствие позволяет описать эволюцию безграничных флуктуаций на вязком этапе. Так как энергия каждого блоба растет, растет и плотность энергии безграничных изотропных возмущений. В рамках V3-модели выражения для моментов имеют вид [68]:

$$\langle B^{2n} \rangle \sim \left\langle \min \left\{ \frac{s_1^{2n}}{s_2^n}, \frac{s_2^{2n}}{s_1^n} \right\} \right\rangle = e^{\gamma_{2n} t},$$

$$\gamma_{2n} = \frac{5}{2} D \left(\left(\frac{4n}{5} + \frac{2n^2}{5} \right) - \frac{3}{80} (n+2)^4 \left(\frac{F}{D} \right)^2 \right) + o(F^2).$$

Таким образом, на диффузионном (но еще вязком) этапе однородные флуктуации растут, это происходит за счет некогерентного наложения экспоненциально вытягивающихся блобов, причем поле каждого отдельного блоба убывает.

С другой стороны, метод стохастической декомпозиции позволяет проследить за эволюцией изолированного возмущения на инерциальном этапе, когда метод квази-лагранжевых траекторий уже не работает, а также пролить свет на топологическую причину экспоненциального роста однородных трехмерных флуктуаций и затухания квази-двумерных флуктуаций.

В самом деле, на инерционном этапе объем блоба постоянен с логорифмической точностью [72], поэтому средний квадрат поля блоба совпадает со средним квадратом безграничного изотропного поля. Так как теория Казанцева предсказывает рост 3d-изотропных возмущений, то поле отдельного блоба также должно расти. Это может происходить только за счет коррелированного самоналожения блоба.

С другой стороны известно, что уравнение Казанцева в квази-2d-мерии не имеет растущих мод [65]. Топологическая причина этого состоит в невозможности коррелированного самоналожения блоба в квази-2d.

Одиннадцатая глава диссертации стоит несколько особняком от остальных глав; она посвящена математической задаче об эволюции замороженных k-мерных гиперповерхностей в d-мерных изотропных стохастических потоках. Строится полное описание эволюции флага «раскрашенных» гиперповерхностей и их поверхностных плотностей.

Показывается, что верно следующее утверждение:

Для любой случайной, изотропно распределенной матрицы Q корреляторы

$$\langle D_1^{m_1+1}(Q) \dots D_d^{m_d+d}(Q) \rangle$$

симметричны относительно перестановок m_k [76].

Это очень интересное свойство случайного изотропного флага. С помощью него удастся завершить доказательство теоремы о связи функции Крамера диагональных элементов лагранжевого тензора градиентов изотропного потока и функции Крамера обобщенных ляпуновских экспонент [75].

Эта задача также оказывается тесно связанной с теорией меры Хаара на вещественной ортогональной группе и ее решение является новым математическим результатом. В контексте теории турбулентного транспорта и лагранжевой турбулентности изучение эволюции таких материальных линий и гиперповерхностей приводит к нахождению серии новых точных интегралов движения.

Для несжимаемых потоков ($s_d = 1$) они имеют вид

$$\langle s_1^{\pi(2)-\pi(1)-1}(t) \dots s_{d-1}^{\pi(d)-\pi(d-1)-1}(t) \rangle = 1,$$

где $\pi(k)$ – произвольная перестановка набора $1, \dots, d$.

Циклическим перестановкам соответствуют d простых интегралов

$$\langle s_k^{-d}(t) \rangle = 1, k = 1, \dots, d.$$

Ранее мы уже отмечали, что только первый из них был известен в литературе [84], [58].

В общем, сжимаемом случае интегралы имеют вид

$$\langle s_1^{\pi(2)-\pi(1)-1}(t) \dots s_{d-1}^{\pi(d)-\pi(d-1)-1}(t) s_d^{d-\pi(d)}(t) \rangle = 1.$$

Подчеркнем еще раз, что важным свойством этих интегралов является универсальность, т.е. независимость от конкретной статистики потока, в том числе

независимость от предположений о дельта-коррелированности по времени, стационарности и несжимаемости.

Полученный результат имеет красивую геометрическую интерпретацию [76], [78]:

Предположим, что мы помещаем в несжимаемый поток равномерно раскрашенную гиперповерхность, размерности $k < d$. В процессе эволюции ее площадь будет экспоненциально расти, а сама она будет всюду плотно заполнять пространство.

Однако из-за мультипликативной перемежаемости рост гиперплощади будет очень неравномерным: всегда будут существовать все более редкие, но очень контрастные области, в которых плотность $\rho_k = s_k^{-1}$ экспоненциально растет. Поэтому достаточно высокие моменты плотности краски («садящиеся» на эти области) также будут расти.

При этом должны существовать критические показатели M_k , такие, что моменты $\langle \rho_k^m(t) \rangle$ растут при $m > M_k$ и убывают при $m < M_k$.

Так как $\rho_k = s_k^{-1}$, то из $\langle s_k^{-d}(t) \rangle = 1$, следует, что все $M_k = d$.

Таким образом, в изотропном случае критические показатели оказываются одинаковыми и равны размерности пространства потока.

В Заключении приведены основные результаты работы.

В работе также есть 4 приложения, в которые вынесены некоторые важные принципиальные и технические вопросы.

ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТРАНСПОРТА

- Транспорт тензора

Самая общая постановка задачи кинематического транспорта в случайном потоке формулируется следующим образом. Пусть задан случайный несжимаемый поток $\vec{u}(\vec{r}, t)$, статистика которого известна. Она может, например, определяться уравнением НС или описываться любой другой удобной моделью.

Кроме поля скоростей задано некоторое начальное гладкое тензорное поле $\Theta(\vec{r}, t)$. Это может быть скалярное поле температуры, пассивной примеси, ко-векторное поле градиента скалярного поля, векторное поле и т.д.

Задача турбулентного транспорта заключается в изучении эволюции такого поля при его переносе (транспортировке) вдоль потока. Уравнение эволюции имеет вид

$$(\partial_t + L_{\vec{u}} - \kappa \partial^2) \Theta(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.1)$$

где $L_{\vec{u}}$ - производная Ли вдоль потока $\vec{u}(\vec{r}, t)$.

κ – некоторый положительный коэффициент.

- Транспорт скаляра, вектора и ко-вектора

Для скалярного поля ϕ производная Ли равна обычной производной вдоль потока

$$L_{\vec{u}} \phi = (u^k \partial_k) \phi \quad (1.2)$$

и уравнение эволюции принимает вид

$$(\partial_t + u^k \partial_k - \kappa \partial^2) \phi = 0. \quad (1.3)$$

Для поля пассивной примеси коэффициент κ имеет физический смысл коэффициента молекулярной диффузии, а, например, для поля температуры - коэффициента теплопроводности.

Задача о транспорте вектора чаще всего встречается в магнитной гидродинамике, где в качестве пассивного вектора выступает магнитное поле, переносимое проводящей жидкостью [17], [44], [49]. Коэффициент κ в этом случае имеет физический смысл коэффициента магнитной диффузии, связанной с проводимостью жидкости σ соотношением $\kappa = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$, где c – скорость света, кроме этого, само магнитное поле является бездивергентным $\partial_k B^k = 0$.

Производная Ли векторного поля

$$L_{\vec{u}}B^p = (u^k \partial_k)B^p - (B^k \partial_k)u^p,$$

поэтому уравнение эволюции принимает вид

$$\partial_t B^p + (u^k \partial_k)B^p - (B^k \partial_k)u^p - \kappa \partial^2 B^p = 0. \quad (1.4)$$

Производная Ли для ко-вектора (1-формы) j_k

$$L_{\vec{u}}j_p = (u^k \partial_k)j_p + (j_k \partial_p)u^k,$$

определяет его уравнение эволюции

$$\partial_t j_p + (u^k \partial_k)j_p + (j_k \partial_p)u^k - \kappa \partial^2 j_p = 0 \quad (1.5)$$

Задача о транспорте ко-вектора возникает, например, при описании эволюции градиента скалярного поля $j_k = \partial_k \phi$.

Заметим, что в этом случае уравнение транспорта можно получить простым дифференцированием (1.3).

Уравнения (1.3) - (1.5) – линейные уравнения, в которых поле скоростей выступает в роли мультипликативного шума. Решением задачи Коши для этих уравнений будут случайные поля, определение статистики которых и есть задача теории турбулентного транспорта. Для решения этой задачи прежде всего необходимо задать «руками» статистику поля скоростей.

ГЛАВА 2. МОДЕЛЬ КАЗАНЦЕВА-КРАЙЧНАНА.

- Описание модели

Наиболее известной моделью турбулентного транспорта является модель Казанцева-Крайчнана, в рамках которой поле скоростей предполагается несжимаемым, изотропным, Гауссовым и дельтакоррелированным по времени [28]:

$$\langle u_i(\vec{r}, t) u_j(\vec{0}, 0) \rangle = K_{ij}(\vec{r}) \delta(t) \quad , \quad \partial_i K_{ij}(\vec{r}) = 0 \quad (2.1)$$

Корреляционная функция такого поля скоростей сингулярна, поэтому для работы с такой моделью требуются дополнительные соглашения, связанные с определением интегралов и производных от таких процессов. В математической литературе такое поле обычно представляется как формальная производная от некоторого Винеровского процесса, при этом возникают сложности, связанные с неоднозначностью определения дифференциальных и интегральных операций [42]. Известно, например, что подходы с использованием интеграла Ито и Интеграла Стратоновича могут приводить к разным результатам в случае сжимаемой жидкости. Один из примеров такой неоднозначности рассмотрен в Приложении В. В нашей работе мы будем придерживаться альтернативного подхода, в рамках которого в начале рассматривается регуляризованное поле скоростей с коррелятором

$$\langle u_i(\vec{r}, t) u_j(\vec{0}, 0) \rangle = K_{ij}(\vec{r}) \delta_\epsilon(t),$$

где $\delta_\epsilon(t)$ - некоторая симметричная регулярная функция, стремящаяся к $\delta(t)$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, все промежуточные вычисления прделываются при конечном ϵ , и переход к пределу $\epsilon \rightarrow 0$ происходит в последнюю очередь. В результате не возникает никаких сложностей, связанных с сингулярностью корреляционной

функции. Такая стратегия оказывается особенно удобной при изучении негауссовых моделей турбулентного транспорта [73], [74], [79], когда поле скоростей нельзя представить как производную Винеровского процесса (она является производной более общего процесса Леви). Метод регуляризации для этих случаев подробно описан в работе [73], а также в ПРИЛОЖЕНИИ А.

Вернемся, однако, к гауссовой модели Казанцева-Крайчнана. Условие изотропии и несжимаемости позволяет представить пространственную часть коррелятора в виде

$$K_{ij}(\vec{r}) = 2K(r)\delta_{ij} - rK'(r)(\delta_{ij} - n_i n_j),$$

где скалярная функция K связана с продольной структурной функцией скорости s_2 соотношением

$$s_2 \tau_c = 4(K(0) - K(r)) \equiv S_2, \tau_c \text{ - «физическое» корреляционное время.}$$

Таким образом, вид S_2 полностью определяет уравнение, описывающее эволюцию парного коррелятора пассивного поля.

- Уравнение Казанцева-Крайчнана для пассивного скалярного поля

Получим уравнение для однородного парного коррелятора скаляра

$$\psi(r, t) = \langle \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) \rangle, \quad r = |\vec{x} - \vec{y}|$$

Умножим уравнение транспорта скаляра (1.2) на $\phi(\vec{x}, t)$ и усредним:

$$\langle \phi(\vec{x}, t) \partial_t \phi(\vec{y}, t) \rangle + \langle \vec{u}(\vec{y}, t) \cdot \vec{\partial}_y \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) \rangle - \kappa \partial_y^2 \langle \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) \rangle = 0$$

Пользуясь несжимаемостью $\vec{\partial}_y \cdot \vec{u}(\vec{y}, t) = 0$ перепишем это уравнение так

$$\langle \phi(\vec{x}, t) \partial_t \phi(\vec{y}, t) \rangle + \vec{\partial}_y \langle \vec{u}(\vec{y}, t) \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) \rangle - \kappa \partial_y^2 \langle \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) \rangle = 0$$

Симметризуем его по паре аргументов \vec{x}, \vec{y} :

$$\partial_t \langle \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) \rangle = -\vec{\partial}_y \langle \vec{u}(\vec{y}, t) \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) \rangle + \kappa \partial_y^2 \langle \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) \rangle + \{x \leftrightarrow y\} \quad (2.2)$$

Теперь, для получения замкнутого уравнения нам необходимо расщепить корреляцию

$$\langle \vec{u}(\vec{y}, t) \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) \rangle .$$

Так как нам необходимо расщепить корреляции произведения случайных полей в один и тот же момент времени, возникает сложность связанная с дельтакоррелированностью поля скоростей.

Как мы отмечали, для получения правильного ответа, следует рассмотреть регуляризованный коррелятор

$$\langle u_i(\vec{r}, t) u_j(0, 0) \rangle = K_{ij}(r) \delta_{\tau_c}(t)$$

Тогда, согласно формуле Фурутцы-Новикова [2], [40].

$$\langle u_i(\vec{y}, t) \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) \rangle = \sum_k \int d\vec{r} d\tau K_{ik}(|\vec{r} - \vec{y}|) \delta_{\tau_c}(t - \tau) \left\langle \frac{\delta(\phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t))}{\delta u_k(\vec{r}, \tau)} \right\rangle (2.3)$$

Для вычисления вариационной производной $\frac{\delta \phi(\vec{x}, t)}{\delta u_k(\vec{r}, \tau)}$ запишем (2.3) в интегральной форме

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^t d\tau' \left(-(\vec{u}(\vec{x}, \tau') \cdot \vec{\partial} \phi(\vec{x}, \tau')) + \kappa \partial^2 \phi(\vec{x}, \tau') \right),$$

тогда

$$\frac{\delta \phi(\vec{x}, t)}{\delta u_k(\vec{r}, \tau)} = -\delta(\vec{x} - \vec{r}) \theta(t - \tau) \partial_k \phi(\vec{x}, \tau) - \int_{-\infty}^t d\tau' \left(\vec{u}(\vec{x}, \tau') \cdot \frac{\delta \vec{\partial} \phi(\vec{x}, \tau')}{\delta u_k(\vec{r}, \tau)} \right) + \kappa \int_{-\infty}^t d\tau' \frac{\delta(\partial^2 \phi(\vec{x}, \tau'))}{\delta u_k(\vec{r}, \tau)}.$$

Из условия причинности следует

$$\frac{\delta\phi(\vec{x},\tau')}{\delta u_k(\vec{r},\tau)} = 0, \quad \tau' < \tau,$$

Поэтому

$$\frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta u_k(\vec{r},\tau)} = -\delta(\vec{x} - \vec{r})\theta(t - \tau)\partial_k\phi(\vec{x},\tau) - \int_{\tau}^t d\tau' \left(\vec{u}(\vec{x},\tau') \cdot \frac{\delta\vec{\partial}\phi(\vec{x},\tau')}{\delta u_k(\vec{r},\tau)} \right) +$$

$$\kappa \int_{\tau}^t d\tau' \frac{\delta(\partial^2\phi(\vec{x},\tau'))}{\delta u_k(\vec{r},\tau)}$$

Далее это выражение надо подставить в (2.3) и устремить τ_c к нулю. В результате получим

$$\langle u_i(\vec{y},t)\phi(\vec{x},t)\phi(\vec{y},t) \rangle = \frac{1}{2}(K_{ik}(0) - K_{ik}(r))\partial_k\psi(r,t)$$

Подставляя это выражение в (2.2) получим уравнение для парного коррелятора

$$\partial_t\psi(r,t) = \left(\frac{4S(r)}{r} + 2S'(r) \right) \psi'(r,t) + 2S(r)\psi''(r,t) \quad (2.4)$$

где

$$S(r) = \kappa + \frac{1}{4}S_2(r)$$

Уравнение (2.4) называется уравнением Казанцева-Крайчнана для пассивного скаляра, оно устанавливает связь между 2-ой структурной функцией скорости и парным коррелятором скалярного поля, для Гауссового дельтакоррелированного поля скоростей.

- Уравнение Казанцева-Крайчнана для пассивного магнитного поля.

В этом разделе мы будем интересоваться поведением парного коррелятора магнитного поля

$$\langle B_i(\vec{x},t)B_j(\vec{y},t) \rangle$$

Из бездивергентности и изотропии следует, что

$$\langle B_i(\vec{x}, t) B_j(\vec{y}, t) \rangle = 2\psi(r, t) \delta_{ij} - r\psi'(r, t) (\delta_{ij} - n_i n_j),$$

где $\psi(r, t)$ – некоторая функция r и времени.

Чтобы получить уравнение для нее, умножим (1.4) на $B_j(\vec{y}, t)$, усредним и симметризуем, пользуясь условием однородности, изотропии и бездивергентностью поля скоростей и магнитного поля

$$\begin{aligned} \partial_t \langle B_j(\vec{y}, t) B_i(\vec{x}, t) \rangle &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_k(\vec{x}, t) B_i(\vec{x}, t) B_j(\vec{y}, t) \rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i(\vec{x}, t) B_k(\vec{x}, t) B_j(\vec{y}, t) \rangle \\ &+ \kappa \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \langle B_j(\vec{y}, t) B_i(\vec{x}, t) \rangle + \{x \leftrightarrow y, i \leftrightarrow j\}. \end{aligned}$$

Расщепляя корреляции $\langle u_k(\vec{x}, t) B_i(\vec{x}, t) B_j(\vec{y}, t) \rangle$ так же, как и в случае скаляра, можно получить уравнение для функции $\psi(r, t)$:

$$\frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = 2 \left(S''(r) + \frac{4}{r} S'(r) \right) \psi(r, t) + \left(2S'(r) + \frac{8}{r} S(r) \right) \psi'(r, t) + 2S(r) \psi''(r, t) , \quad (2.5)$$

где, как и раньше

$$S = \kappa + \frac{1}{4} S_2.$$

Уравнение (2.5) носит название уравнения Казанцева-Крайчнана для транспорта магнитного поля, оно устанавливает связь между 2-ой структурной функцией скорости и парным коррелятором магнитного поля, для Гауссового дельтакоррелированного поля скоростей [12].

ГЛАВА 3. МЕТОД ОБОБЩЕННОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ.

Уравнение КК является линейным дифференциальным уравнением в частных производных, параболического типа. Для изучения асимптотики его решений мы применим формализм Фейнмана-Каца [18], [28], [38], [45], [46].

- Последовательность предельных переходов в СДУ

В этой главе мы будем изучать связь пропагатора параболического уравнения с решением некоторого стохастического обыкновенного дифференциального уравнения (СДУ). Поэтому мы должны точно определить, что мы понимаем под решением такого уравнения и в каком порядке следует совершать предельные переходы при определении производных и интегралов [77].

Рассмотрим некоторое формальное выражение, содержащее неизвестную функцию $x(t)$, ее производные, время и заданную функцию $\xi(t)$.

$$F(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x, \xi(t), t) = 0.$$

Предположим также, что оно дополнено некоторыми условиями (начальными или граничными), позволяющими для каждой фиксированной $\xi(t)$ определить однозначное решение $x[\xi, t]$. Таким образом, мы определим некоторое функциональное отображение $\xi(t) \mapsto x(t)$.

Если теперь функции $\xi(t)$ являются реализациями некоторого случайного процесса, то решения $x[\xi, t]$ тоже становятся реализациями случайного процесса, а описанное выше функциональное отображение переносит вероятностную меру из пространства $\{\xi(t)\}$ на $\{x(t)\}$.

Такое определение стохастического дифференциального уравнения основывается на разумном предположении о том, что в реальных физических системах у случайного процесса $\xi(t)$ есть ненулевое корреляционное время и

корреляционные функции можно дифференцировать нужное число раз. Тогда при определении производных и интеграла не возникает особых проблем, так как для процессов с дифференцируемыми корреляционными функциями мера недифференцируемых реализаций нулевая. Иногда, в случае, когда корреляционное время шума оказывается существенно меньше характерных динамических времен уравнения, можно рассмотреть предел дельтакоррелированного шума. Но при этом предполагается вполне определенная последовательность взятия пределов: $dt \ll \epsilon \rightarrow 0$. Однако далее мы увидим, что формализм Фейнмана-Каца предполагает другую последовательность предельных переходов $\epsilon \ll \Delta t \rightarrow 0$. Далее мы обсудим связь между этими двумя последовательностями (подробнее все эти вопросы изложены в [77]).

- Представление Фейнмана-Каца для линейных параболических уравнений.

Рассмотрим прежде линейное параболическое уравнение в частных производных общего вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -u(x)\psi(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(x)\psi(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x)\psi(x, t)), \quad (3.1)$$

где $u(x), \lambda(x), \sigma^2(x)$ - заданные гладкие функции, $\sigma^2(x) > 0$.

Запишем его в операторном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\hat{H}_{\sigma, \lambda, u} \psi(x, t),$$

где $\hat{H}_{\sigma, \lambda, u} = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \circ \hat{\sigma}^2 + \partial_x \circ \hat{\lambda} + \hat{u}$,

$\hat{\sigma}^2, \hat{\lambda}, \hat{u}$ – операторы умножения на функции $\sigma^2(x), u(x), \lambda(x)$,

знак \circ означает композицию.

Нашей ближайшей целью будет получить выражение для его пропагатора $(e^{-\hat{H}_{\sigma,\lambda,u}(t-t_0)})(x, x_0)$ в виде континуального интеграла по некоторой мере, обобщающей меру Винера. Далее мы будем следовать [77].

Рассмотрим сначала случай $u(x) = 0$.

Уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (\lambda(x) \rho(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x) \rho(x, t)) \quad (3.2)$$

является уравнением Фоккера-Планка для стохастической задачи Коши [46]:

$$\dot{x}(t) = \lambda(x) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^2(x) + \sigma(x) \xi(t), \quad (3.3)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(0) \xi(t) \rangle = \delta_\epsilon(t), \epsilon \rightarrow 0.$$

ϵ - корреляционное время шума $\xi(t)$.

Что бы придать точный смысл этому уравнению, запишем его в интегральном виде

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \left(\lambda(x(\tau)) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^2(x(\tau)) + \sigma(x(\tau)) \xi(\tau) \right) d\tau,$$

при этом подразумевая вполне определенную последовательность взятия пределов

$$dt \ll \epsilon \rightarrow 0.$$

Тогда интегралы в этом выражении можно понимать как обычные интегралы Римана.

Пропагатор этой задачи $(e^{-\hat{H}_{\sigma,\lambda,0}(t-t_0)})(x, x_0)$ определяется выражением

$$(e^{-\hat{H}_{\sigma,\lambda,0}(t-t_0)})(x, x_0) = \langle \delta(x - x[\xi]) \rangle_\xi$$

$$\text{где } x[\xi] = x_0 + \int_{t_0}^t \left(\lambda(x(\tau)) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^2(x(\tau)) + \sigma(x(\tau)) \xi(\tau) \right) d\tau.$$

Для его вычисления разобьем интервал $[t_0, t]$ на N частей, длительностью $\Delta t = \frac{t-t_0}{N}$, при этом $dt \ll \epsilon \ll \Delta t \rightarrow 0$

Тогда

$$x = x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma(x(\tau)) \xi(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\lambda(x(\tau)) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^2(x(\tau)) \right) dt, \\ t_N = t. \quad (3.4)$$

Так как функция $x(\tau)$ в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ остаётся непрерывной, для последней суммы (3.4) справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\lambda(x(\tau)) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^2(x(\tau)) \right) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\lambda(x_k) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^2(x_k) \right) \Delta t + o(1), \\ x_k = x(t_k).$$

С первой суммой (3.4) ситуация оказывается сложнее, так как, при $\epsilon \ll \Delta t$ в ней под знаком интеграла стоит «быстро осциллирующая» на масштабе Δt функция $\xi(\tau)$. Чтобы сделать правильную оценку рассмотрим набор Винеровских случайных процессов

$$\Delta y_k(t) = \int_{t_k}^t \xi(\tau) d\tau.$$

При каждом t и t_k их можно представить в виде

$$\Delta y_k(t) = \varepsilon_k \sqrt{t - t_k}, \text{ где } \varepsilon_k \text{ – некоторые гауссовы случайные величины, с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда для } t \in [t_k, t_{k+1}]$$

$$x(t) = x_k + \sigma(x_k) \Delta y_k(t) + o(\sqrt{\Delta t}), \text{ поэтому}$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma(x(\tau)) \xi(\tau) d\tau = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma(x_k + \sigma(x_k) \Delta y_k(\tau)) \xi(\tau) d\tau + o(\Delta t).$$

Это выражение можно записать в виде интеграла Стильеса по непрерывному процессу $\Delta y_k(\tau)$

$$\int_0^{\Delta y_k(t_{k+1})} \sigma(x_k + \sigma(x_k)\Delta y_k(\tau))d\Delta y_k(\tau) + o(\Delta t).$$

$$\text{Далее } \sigma(x_k + \sigma(x_k)\Delta y_k(\tau)) = \sigma(x_k) + \sigma(x_k)\sigma'(x_k)\Delta y_k(\tau) + o((\Delta y_k)^2),$$

поэтому интеграл $\int_0^{\Delta y_k(t_{k+1})} \sigma(x_k + \sigma(x_k)\Delta y_k(\tau))d\Delta y_k(\tau)$ можно оценить как

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta y_k(t_{k+1})} \sigma(x_k + \sigma(x_k)\Delta y_k(\tau))d\Delta y_k(\tau) = \\ & = \sigma(x_k) \int_0^{\Delta y_k(t_{k+1})} d\Delta y_k(\tau) + \sigma(x_k)\sigma'(x_k) \int_0^{\Delta y_k(t_{k+1})} \Delta y_k(\tau)d\Delta y_k(\tau) + o((\Delta y_k)^2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_0^{\Delta y_k(t_{k+1})} \sigma(x_k + \sigma(x_k)\Delta y_k(\tau))d\Delta y_k(\tau) = \sigma(x_k)\Delta y_k + \sigma(x_k)\sigma'(x_k)\frac{\Delta y_k^2}{2} + o(\Delta t).$$

где $\Delta y_k \equiv \Delta y_k(t_{k+1})$.

Эти величины можно представить в виде

$$\Delta y_k = \varepsilon_k \sqrt{\Delta t},$$

где ε_k – гауссовы независимые случайные величины, с нулевым средним и единичной дисперсией.

Подставляя эти оценки в (3.5), получим

$$\begin{aligned} x = x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \sigma(x_k)\varepsilon_k \sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma(x_k)\sigma'(x_k)\varepsilon_k^2 \Delta t + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\lambda(x_k) - \right. \\ \left. \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^2(x_k) \right) \Delta t + o(1). \end{aligned}$$

Вторая сумма в этом равенстве при $\Delta t \rightarrow 0$ сходится (в среднеквадратичном) к величине

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma(x_k)\sigma'(x_k)\langle \varepsilon_k^2 \rangle \Delta t = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma(x_k)\sigma'(x_k)\Delta t.$$

Доказательство элементарно и опирается на тот факт, что величины x_k и ε_p независимы при $p > k$, мы не будем его здесь приводить (см. например [77]).

В итоге

$$x = x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda(x_k) \Delta t + \sum_{k=0}^{N-1} \sigma(x_k) \varepsilon_k \sqrt{\Delta t} + o(1).$$

Для инфинитезимальной эволюции тогда получим формальное выражение

$$x_1 - x_0 = \lambda(x_0) \Delta t + \sigma(x_0) \varepsilon \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t). \quad (3.5)$$

Его формальность состоит в том, что оно становится верным только после суммирования (интегрирования).

Из (3.5) следует выражение для инфинитезимального пропагатора

$$(e^{-\hat{H}_{\sigma, \lambda, 0} \Delta t})(x_1, x_0) = \langle \delta(x_1 - x_0 - \lambda(x_0) \Delta t - \sigma(x_0) \varepsilon \sqrt{\Delta t}) \rangle_{\varepsilon}.$$

Плотность вероятности случайной величины ε равна

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}}, \text{ поэтому}$$

$$\begin{aligned} (e^{-\hat{H}_{\sigma, \lambda, 0} \Delta t})(x_1, x_0) &= \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) \delta(x_1 - x_0 - \lambda(x_0) \Delta t - \sigma(x_0) \varepsilon \sqrt{\Delta t}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2(x_0)\Delta t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2(x_0)} \frac{(x_1 - x_0 - \lambda(x_0)\Delta t)^2}{\Delta t}}. \end{aligned}$$

Производя свертку n инфинитезимальных пропагаторов, получим выражение для конечного пропагатора

$$(e^{-\hat{H}_{\sigma, \lambda, 0}(t-t_0)})(x, x_0) = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \int (Dx)_{\sigma} e^{-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^2(x_k)}{2\sigma^2(x_k)} \Delta t + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda(x_k)}{\sigma^2(x_k)} (x_{k+1} - x_k)},$$

$$t_n \equiv t, x_n \equiv x,$$

где $(Dx)_\sigma = dx_1 \dots dx_{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2(x_k)} \left(\frac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t}\right)^2 \Delta t}}{(2\pi\sigma^2(x_k)\Delta t)^{\frac{1}{2}}}$.

Сумма $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^2(x_k)}{2\sigma^2(x_k)} \Delta t$ в пределе перейдет в обычный интеграл, а $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda(x_k)}{\sigma^2(x_k)} (x_{k+1} - x_k)$ в интеграл Ито по случайному процессу с функционалом ПЛОТНОСТИ

$$\wp_\sigma[x_\tau] = \prod_{\tau \in (t_0, t]} \frac{1}{(2\pi\sigma^2(x_\tau)\Delta\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-\int_{t_0}^t \frac{\dot{x}_\tau^2}{2\sigma^2(x_\tau)} d\tau}, \quad \dot{x}_\tau = \frac{x(\tau+d\tau) - x(\tau)}{d\tau},$$

$$\epsilon \ll d\tau \rightarrow 0$$

Согласно формуле интегрирования Ито [46]

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda(x_k)}{\sigma^2(x_k)} (x_{k+1} - x_k) \rightarrow \int_{x_0}^x \frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} dx - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\frac{\lambda(x_\tau)}{\sigma^2(x_\tau)} \right)' \sigma^2(x_\tau) dt,$$

поэтому окончательное выражение для пропагатора уравнения (3.2) примет вид

$$\begin{aligned} (e^{-\hat{H}_{\sigma, \lambda, 0}(t-t_0)})(x, x_0) = \\ e^{\int_{x_0}^x \frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} dx} \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t)=x} \prod_{\tau \in (t_0, t)} dx_\tau \wp_\sigma[x_\tau] e^{-\int_{t_0}^t \left(\frac{\lambda^2(x_\tau)}{2\sigma^2(x_\tau)} + \left(\frac{\lambda(x_\tau)}{2\sigma^2(x_\tau)} \right)' \sigma^2(x_\tau) \right) d\tau} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для получения выражения для пропагатора уравнения (3.1) воспользуемся операторной формулой [28]

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{\hat{A}}{n}} e^{\frac{\hat{B}}{n}} \right)^n.$$

Пропагатор оператора $e^{-\hat{u}(t-t_0)}$ равен

$$(e^{-\hat{u}(t-t_0)})(x, x_0) = \delta(x - x_0) e^{-u(x_0)(t-t_0)},$$

поэтому, для инфинитезимального пропагатора оператора $e^{-\hat{H}_{\sigma, \lambda, u}\Delta t} = e^{-\hat{H}_{\sigma, \lambda, u}\Delta t} e^{-\hat{u}\Delta t}$ получим

$$(e^{-\hat{H}_{\sigma,\lambda,u}\Delta t})(x, x_0) = \int dx_1 (e^{-\hat{H}_{\sigma,\lambda,0}\Delta t})(x, x_1) (e^{-\hat{u}\Delta t})(x_1, x_0) = \\ \frac{1}{(2\pi\sigma^2(x_0)\Delta t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2(x_0)} \frac{(x_1-x_0-\lambda(x_0)\Delta t)^2}{\Delta t} - u(x_0)\Delta t}$$

Тогда, повторяя выкладки, приведшие к (3.6) получим выражение для полного пропагатора параболического уравнения общего вида (3.1)

$$(e^{-\hat{H}_{\sigma,\lambda,u}(t-t_0)})(x, x_0) = \\ = e^{\int_{x_0}^x \frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} dx} \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t)=x} \prod_{\tau \in (t_0, t)} dx_\tau \wp_\sigma[x_\tau] e^{-\int_{t_0}^t \left(\frac{\lambda^2(x_\tau)}{2\sigma^2(x_\tau)} + \left(\frac{\lambda(x_\tau)}{2\sigma^2(x_\tau)} \right)' \sigma^2(x_\tau) + u(x_\tau) \right) d\tau} \quad (3.7)$$

в виде континуального интеграла по мере с функционалом плотности $\wp_\sigma[x_\tau]$.

- Обобщенное стохастическое квантование.

Представление (3.7) позволяет развить формализм, позволяющий судить о наличии или отсутствии растущих решений параболических уравнений общего вида (3.1) [72], [77]. Этот формализм является естественным обобщением известного формализма «стохастического квантования» [20], [48], который позволяет находить вакуумный уровень энергии евклидового уравнения Шредингера.

Основной факт, на который будет опираться дальнейшее изложение, состоит в том, что, если определить функцию $\mu(x)$ с помощью уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)} \right) + \left(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)} \right)^2 = \frac{2u(x)}{\sigma^2(x)} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} \right) + \left(\frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} \right)^2, \quad (3.8)$$

пропагаторы уравнения (3.1) и уравнения (3.2) будут связаны соотношением

$$(e^{-\hat{H}_{\sigma,\lambda,u}(t-t_0)})(x, x_0) = e^{\int_{x_0}^x \frac{\lambda(x)-\mu(x)}{\sigma^2(x)} dx} (e^{-\hat{H}_{\sigma,\mu,0}(t-t_0)})(x, x_0) \quad (3.9)$$

Этот факт следует просто из сравнения выражений (3.6) и (3.7).

Определим обобщенные Ланжевеновские потенциалы с помощью выражений

$$\frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} = -\frac{d}{dx}\varphi_\lambda, \quad \frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)} = -\frac{d}{dx}\varphi_\mu, \quad \varphi_\lambda(x_0) = \varphi_\mu(x_0) = 0 \quad (3.10)$$

Тогда соотношение (3.9) примет вид

$$(e^{-\hat{H}_{\sigma,\lambda,\mu}(t-t_0)})(x, x_0) = e^{\varphi_\mu(x)-\varphi_\lambda(x)}(e^{-\hat{H}_{\sigma,\mu,0}(t-t_0)})(x, x_0). \quad (3.11)$$

Легко видеть, что пропагатор уравнения (3.2) имеет стационарную асимптотику при $t \rightarrow \infty$, это аналог распределения Больцмана:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-\hat{H}_{\sigma,\mu,0}(t-t_0)})_{x,x_0} = \frac{\rho_0}{\sigma^2(x)} e^{-2\varphi_\mu(x)}, \quad (3.12)$$

где ρ_0 определяется из условия нормировки

$$\rho_0 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\varphi_\mu(x)}}{\sigma^2(x)} dx \right)^{-1}.$$

Таким образом уравнение (3.2) не имеет растущих асимптотик. Возвращаясь к уравнению (3.1), можно сделать заключение, что оно также не имеет растущих асимптотик, если у уравнения (3.11) существует хотя бы одно решение на всей оси.

Уравнение (3.11) с помощью введения новой функции

$$y(x) = \exp(-\varphi_\mu(x)),$$

можно привести к виду

$$y''(x) = 2u_{eff}(x)y(x), \quad (3.13)$$

где

$$2u_{eff}(x) = \frac{2u(x)}{\sigma^2(x)} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} \right) + \left(\frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} \right)^2 = \frac{2u(x)}{\sigma^2(x)} + (\varphi'_\lambda)^2 - \varphi''_\lambda. \quad (3.14)$$

Тогда отсутствие решений (3.8) без особенностей равносильно отсутствию всюду строго положительных решений (3.13).

- Максимальный инкремент.

Изложенный выше формализм может быть применен к поиску значения асимптотического инкремента γ решений уравнения (3.1) (аналог вакуумного уровня u уравнения Шредингера).

$$\psi(x, t) \sim e^{\gamma t}$$

С этой целью добавим член $-\Gamma\psi$ в правую часть (3.1).

Эффективный потенциал для модифицированного таким образом уравнения примет вид

$$2u_{eff}(x) = \frac{2(u(x)+\Gamma)}{\sigma^2(x)} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} \right) + \left(\frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} \right)^2 = \frac{2(u(x)+\Gamma)}{\sigma^2(x)} + (\varphi'_\lambda)^2 - \varphi''_\lambda \quad (3.15)$$

Далее следует искать значения Γ , при которых существует строго положительное решение уравнения (3.13) с модифицированным эффективным потенциалом. Нижняя граница множества таких Γ и будет инкрементом γ .

ГЛАВА 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КАЗАНЦЕВА-КРАЙЧНАНА.

Применим теперь результаты, полученные в предыдущей главе к изучению асимптотического поведения решений уравнения КК. Такой подход, с одной стороны позволяет получить ранее известные разрозненные результаты в рамках единого подхода, а с другой – изучить новые, ранее не известные свойства асимптотических решений уравнения КК.

- Пассивный скаляр.

Рассмотрим уравнение КК, описывающее эволюцию парного коррелятора пассивного скаляра (2.4).

$$\partial_t \psi(r, t) = \left(\frac{4S(r)}{r} + 2S'(r) \right) \psi'(r, t) + 2S(r) \psi''(r, t), \quad S(r) = \kappa + \frac{1}{4} S_2(r)$$

κ - коэффициент молекулярной диффузии.

$S_2(r)$ - продольная структурная функция скорости.

Известно, что турбулентное поле скоростей имеет два масштаба, внешний интегральный масштаб L и колмогоровский «вязкий» масштаб η .

При этом

$$S_2(r) = \frac{4D}{3} r^2, \quad r \ll r_v$$

$$S_2(r) \sim r^\zeta, \quad \zeta < 2, \quad r_v \ll r \ll L$$

$$S_2(r) \sim r^0, \quad L \ll r$$

В теории турбулентного транспорта появляется еще один «диффузионный» масштаб r_d , который соответствует области, в которой молекулярная диффузия играет главную роль. Из соображений размерности можно определить его как $r_d = \sqrt{\kappa/D}$.

Определим безразмерные координаты и время

$$x = r/r_d, \quad \mu = r_v/r_d, \quad l = L/r_d, \quad \tau = Dt. \quad (4.1)$$

Параметры l и μ связаны с общеупотребительными числами Прандтля (Pr) и Рейнольдса (Re) соотношениями

$$\mu = Pr^{1/2},$$

$$l = Pr^{1/2} Re^{3/4},$$

$$\frac{L}{r_v} = \frac{l}{\mu} = Re^{3/4}.$$

В новых переменных уравнение КК для пассивного скаляра примет вид

$$\partial_\tau \psi(x, \tau) = \left(\frac{4S(x)}{x} + 2S'(x) \right) \psi'(x, \tau) + 2S(x) \psi''(x, \tau), \quad S(x) = 1 + \frac{1}{4} S_2(x) \quad (4.2)$$

$$S_2(x) = \frac{4}{3} x^2, \quad x \ll \mu$$

$$S_2(x) \sim x^{\xi_2}, \quad \xi_2 < 2, \quad \mu \ll x \ll l$$

$$S_2(x) \sim x^0, \quad l \ll x.$$

Чтобы вычислить максимальный инкремент затухания добавим член $-\Gamma\psi$, т.е. рассмотрим модифицированное уравнение

$$\partial_\tau \psi(x, \tau) = -\Gamma\psi + \left(\frac{4S(x)}{x} + 2S'(x) \right) \psi'(x, \tau) + 2S(x) \psi''(x, \tau)$$

Эффективный потенциал для такого уравнения равен

$$2u_{eff}(x) = \frac{\Gamma}{2S(x)} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \ln S(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \ln S(x) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} \ln S(x) \right)^2$$

Рассмотрим сначала случай $\mu = \infty$. Такое приближение называется Бэтчелоровским, в главе 10 мы покажем, что оно описывает начальный этап

эволюции мелкомасштабных статистически однородных флуктуаций пассивного поля при больших числах Прандтля.

Тогда, при $x \gg 1$, $S(x) \approx \frac{1}{3}x^2$

и

$$2u_{eff}(x) \approx \frac{2 + \frac{3}{2}\Gamma}{x^2}$$

Общее решение уравнения (3.13) для такого потенциала имеет асимптотику

$$y(x) = Ax^{\alpha_1} + Bx^{\alpha_2},$$

где

α_1, α_2 - корни уравнения

$$\alpha(\alpha - 1) = 2 + \frac{3}{2}\Gamma$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} + \Gamma\right)}, \alpha_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} + \Gamma\right)}$$

Видно, что при $\Gamma < -\frac{3}{2}$ решение не может быть всюду положительным, поэтому

$\gamma = -\frac{3}{2}D$ это точный инкремент затухания пассивного скаляра в Бэтчелоровском режиме.

Однако этот режим является лишь промежуточной асимптотикой.

В самом деле, пусть теперь $\mu < \infty$. Тогда

$$S(r) \sim r^{2-\varepsilon} \text{ при } x \gg \mu.$$

Эффективный потенциал имеет асимптотику

$$2u_{eff}(x) \sim \frac{\Gamma}{x^{2-\varepsilon}}$$

Легко показать, что решение (3.13) для такого потенциала при $\varepsilon > 0$ не может быть всюду положительным, поэтому максимальный инкремент затухания $\gamma = 0$, т.е. затухание скаляра в дальней асимптотике имеет степенной характер [34].

- Пассивное магнитное поле

Уравнение КК для пассивного магнитного поля (2.5) в безразмерных переменных (4.1) имеет вид

$$\partial_{\tau}\psi(x, \tau) = 2 \left(S''(x) + \frac{4}{x} S'(x) \right) \psi(x, \tau) + \left(2S'(x) + \frac{8}{r} S(x) \right) \psi'(x, \tau) + 2S(x)\psi''(x, \tau) \quad (4.3)$$

Для определения максимального инкремента роста вновь добавим член $-\gamma\psi$.

Эффективный потенциал примет вид

$$2u_{eff}(x) = \frac{\Gamma}{2S(x)} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \ln S(x) - \frac{2}{x} \frac{d}{dx} \ln S(x) - \frac{3}{4} \left(\frac{d}{dx} \ln S(x) \right)^2 + \frac{2}{x^2} \quad (4.4)$$

Для Бэтчелоровского режима ($\mu = \infty$)

$$2u_{eff}(x) = \frac{\left(\frac{3(\Gamma - \frac{5}{2})}{2} - \frac{1}{4} \right)}{x^2}$$

и максимальный инкремент роста оказывается равен

$$\gamma = \frac{5}{2} D \quad .$$

Этот результат согласуется с [12].

При $\mu < \infty$ возникает лишь небольшая поправка к бэтчелоровскому инкременту

$$\gamma = \frac{5}{2} D - O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Эта ситуация разительно отличается от той, которую мы наблюдали в случае пассивного скаляра, когда учет инерционного интервала кардинально менял

характер эволюции и приводил к исчезновению экспоненциально затухающей моды.

- Порог генерации в модели Вайнштейна-Кичатинова.

Модель Вайнштейна-Кичатинова (ВК) — это феноменологическая модель, призванная учесть зависимость корреляционного времени от масштаба в инерционном интервале турбулентного потока [23]. В рамках этой модели поле скоростей по-прежнему считается Гауссовым и дельтакоррелированным, при этом, зависимость корреляционного времени от масштаба определяет эффективный показатель скейлинга структурной функции в инерционном интервале:

$$\zeta = 4/3,$$

что соответствует Колмогоровскому скейлингу $s_2(x) \sim x^{2/3}$, $\tau_c(x) \sim x^{2/3}$.

Тогда можно предложить следующую модельную форму для безразмерной структурной функции поля скоростей:

$$S_2(x) = \frac{4}{3} \frac{x^2}{\left(1 + \left(\frac{x}{\mu}\right)^{2/3}\right) \left(1 + \left(\frac{x}{l}\right)^{4/3}\right)}, \quad S(x) = 1 + \frac{1}{4} S_2(x). \quad (4.5)$$

На Колмогоровском масштабе $x \ll \mu$ $S_2(x) \sim x^2$,

в инерционном интервале $\mu \ll x \ll l$ $S_2(x) \sim x^{4/3}$,

и при $l \ll x$ $S_2(x) \sim const.$

Подставляя (4.5) в (4.4), можно получить выражения для эффективного потенциала модели ВК, однако, в явном виде оно довольно громоздкое.

Развитый выше формализм позволяет, в частности, вывести т.н. кривую устойчивости, т.е. границу генерации магнитного поля.

Легко показать, что для $\zeta > 1$ при $l = \infty$ инкремент роста магнитного поля положительный для любых μ . Однако при уменьшении l настанет момент, когда инкремент станет нулем. Зависимость $l_0(\mu)$, при котором инкремент роста нулевой, называется кривой устойчивости.

Для его нахождения, в соответствии с вышеизложенным формализмом, надо подставить значение $\gamma = 0$ в эффективный потенциал (4.4) и при каждом μ искать значение l_0 такое, что при $l < l_0$ уравнение (3.13) имеет всюду положительное решение, а при $l > l_0$ любое решение (3.13) пересекает ноль. Анализ решений уравнения (3.13) в рамках подхода обобщенного стохастического квантования со специальным видом структурной функции (4.5) даёт зависимость

$$l_0(\mu) \approx \frac{160}{\sqrt{\mu}}, \text{ при } \mu \ll 1.$$

Таким образом, кривая устойчивости магнитного поля в модели ВК при малых μ носит характер скейлинга. Подчеркнем, что выбор структурной функции, отличной от (4.5) может повлиять только на коэффициент и не меняет показатель скейлинга. Это соотношение позволяет написать связь между числами Рейнольдса и Прандтля, соответствующих порогу генерации в модели ВК:

$$Re Pr = const, Pr \ll 1.$$

ГЛАВА 5. МЕТОД КВАЗИЛАГРАНЖЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ЗАДАЧАХ ТРАНСПОРТА.

- Локализованное возмущение

До сих пор мы рассматривали эволюцию статистически однородных и изотропных возмущений. Однако интересно также рассмотреть эволюцию локализованных в пространстве возмущений. Для изучения эволюции возмущений, локализованных на колмогоровском масштабе оказывается удобен метод квазилагранжевых траекторий [26]. Он позволяет вычислять моменты локализованных возмущений магнитного поля и пассивной примеси произвольных порядков и не ограничиваться гауссовой статистикой поля скоростей.

Рассмотрим эволюцию возмущения, имеющего размер $l \ll r_v$.

- Квазилагранжева система координат

Выберем произвольную начальную точку \vec{r}_0 и перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с этой точкой в потоке (квазилагранжева система):

$$\dot{\vec{r}}_0(t) = \vec{v}(\vec{r}_0(t), t), \vec{r}_0(0) = \vec{r}_0$$

Уравнение транспорта не изменится, если сделать замену переменных и функций

$$\vec{x}(\vec{r}, t) = \vec{r} - \vec{r}_0(t),$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{r}_0(t), t) = \vec{u}(\vec{x}, t) - \text{ скорость потока в новой системе отсчета.}$$

Для транспорта скаляра получим уравнение

$$\partial_t \phi(\vec{x}, t) + (\vec{u} \cdot \vec{\partial}) \phi(\vec{x}, t) = \kappa \partial^2 \phi(\vec{x}, t),$$

Для транспорта магнитного поля

$$\partial_t \vec{B}(\vec{x}, t) + (\vec{u} \cdot \vec{\partial}) \vec{B}(\vec{x}, t) - (\vec{B}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\partial}) \vec{u} = \kappa \partial^2 \vec{B}(\vec{x}, t)$$

Так как $\vec{u}(0, t) = 0$, то на временах, пока размер возмущения остается существенно меньше колмогоровского масштаба, можно положить

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \hat{A}(t)\vec{x}, \quad (5.1)$$

где $A_{ij}(t) = \partial_j v_i(\vec{r}_0(t), t)$ – бесследовый тензор градиента скорости вдоль траектории.

Такое поле скоростей будем называть Бэтчелоровским полем [50].

- Уравнения транспорта в Бэтчелоровском приближении

Уравнения транспорта примут вид

$$\partial_t \phi(\vec{x}, t) + (\hat{A}(t)\vec{x} \cdot \vec{\partial})\phi(\vec{x}, t) = \kappa \partial^2 \phi(\vec{x}, t) \quad (5.2)$$

для скаляра и

$$\partial_t \vec{B}(\vec{x}, t) + (\hat{A}(t)\vec{x} \cdot \vec{\partial})\vec{B}(\vec{x}, t) = \hat{A}(t)\vec{B}(\vec{x}, t) + \kappa \partial^2 \vec{B}(\vec{x}, t) \quad (5.3)$$

для магнитного поля.

Это линейные стохастические дифференциальные уравнения, в которых тензор градиентов $\hat{A}(t)$ выступает в роли мультипликативного шума.

Их решения легко получить с помощью преобразования Фурье.

Определим матрицу $\hat{P}(t)$ с помощью уравнения

$$\partial_t P(t) = A(t)P(t), P(0) = \hat{1}. \quad (5.4)$$

Тогда для значений полей в центрах возмущений будут справедливы выражения [18],[19]:

$$\phi(0, t) = \int d^3 p \tilde{\phi}(\vec{p}, 0) e^{-\kappa \int_0^t |\hat{P}^{-1}(\tau)\vec{p}|^2 d\tau} \quad (5.5)$$

$$\vec{B}(0, t) = \int d^3 p \hat{P}(t)\tilde{\vec{B}}(\vec{p}, 0) e^{-\kappa \int_0^t |\hat{P}^{-1}(\tau)\vec{p}|^2 d\tau}, \quad (5.6)$$

где $\tilde{\phi}(\vec{p}, 0)$ и $\tilde{\vec{B}}(\vec{p}, 0)$ – Фурье образы начальных возмущений соответствующих полей.

Таким образом, для описания эволюции возмущений необходимо знать как устроены решения матричного стохастического уравнения (5.4). Подробному изучению свойств решения такого уравнения посвящена следующая глава.

ГЛАВА 6. ЛИНЕЙНЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ СИСТЕМЫ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ШУМОМ.

- Матрица эволюции

Предметом исследования в этой главе будут конечномерные линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка со случайными коэффициентами, вида

$$\partial_t x_k(t) = A_{kp}(t)x_p(t), k = 1, \dots, d \quad (6.1)$$

где $A_{kp}(t)$ – стационарный случайный $d \times d$ -матричный процесс, который выступает в роли мультипликативного шума.

Формальное решение (6.1) можно записать с помощью матрицы эволюции P :

$$x_k(t) = P_{kp}(t)x_p(0), \quad (6.2)$$

которая удовлетворяет матричному уравнению

$$\partial_t P(t) = A(t)P(t), P(0) = \hat{1}, \quad (6.3)$$

Для каждой непрерывной реализации $A(t)$ существует хорошо определенное решение уравнения (6.3) известное как мультипликативный интеграл Вольтерра [30] или в квантово-механической терминологии Т-экспонента.

$$P(t) = \prod_{\tau=0}^t (1 + A(\tau)d\tau).$$

По этой причине решения (6.2) можно интерпретировать как континуальные произведения случайных матриц. В качестве прелюдии к континуальной задаче мы рассмотрим стохастические свойства дискретных произведений случайных матриц.

- Дискретные произведения случайных матриц.

а.) Некоммутативный закон больших чисел

Обычный закон больших чисел в мультипликативной форме гласит, что последовательность $\frac{\ln P_N}{N}$, где $P_N = \prod_{k=1}^N q_k$ - произведение случайных, положительных, независимых, одинаково распределенных чисел q_k , сходится с вероятностью единица к $\langle \ln q_k \rangle$.

Доказательство этого утверждения тривиально: для коммутирующих величин $\ln \prod_{k=1}^N q_k = \sum_{k=1}^N \ln q_k$, поэтому оно сразу следует из обычного закона больших чисел. Формулировка аналогичного утверждения для произведений матриц наталкивается на большие сложности, связанные с некоммутативностью матричного произведения.

В самом деле, пусть $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \dots$ - последовательность случайных матриц $n \times n$ с неотрицательным детерминантом. Рассмотрим их произведение

$$\hat{P}_N = \prod_{k=1}^N \hat{Q}_k = \hat{Q}_k \dots \hat{Q}_1.$$

В некоммутативном случае

$$\ln \prod_{k=1}^N \hat{Q}_k \neq \sum_{k=1}^N \ln \hat{Q}_k,$$

поэтому напрямую сформулировать закон больших чисел для матричных элементов невозможно.

Корме того, вычисление моментов произведения $\hat{Q}_1 \hat{Q}_2 \dots$ оказывается также весьма затруднительным из-за невозможности перегруппировать сомножители:

$$\left(\prod_{k=1}^N (\hat{Q}_k) \right)^\mu \neq \prod_{k=1}^N (\hat{Q}_k)^\mu.$$

Поэтому даже для независимых матриц, в общем случае, среднее от степеней произведения не равно произведению средних степеней:

$$\langle \left(\prod_{k=1}^N (\hat{Q}_k) \right)^\mu \rangle \neq \prod_{k=1}^N \langle (\hat{Q}_k)^\mu \rangle.$$

Однако, оказывается, что некоммутативный закон больших чисел все же можно сформулировать, но не для матричных элементов, а введя специальные координаты в многообразии $n \times n$ - матриц.

Один из возможных способов, это рассмотреть разложение Ивасава для действительных $d \times d$ матриц:

$$Q = R(Q)D(Q)Z(Q),$$

где $Z \in SLT(d)$ - верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали, $D \in diag(d)$ - диагональная матрица с неотрицательными элементами D_1, \dots, D_d , которые мы будем называть диагональными координатами Ивасава матрицы Q , и $R \in O(d)$ - ортогональная матрица поворота $RR^T = \hat{1}$.

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & z_{12} & \dots & z_{1d} \\ 0 & 1 & \dots & z_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_d \end{pmatrix}, D_1 > 0, \dots, D_d > 0.$$

Рассмотрим флаг поливекторов E_i , составленный из векторов стандартного базиса \vec{e}_k :

$$E_1 = \vec{e}_1$$

$$E_2 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

...

$$E_d = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \dots \wedge \vec{e}_d$$

Тогда

1. верхнетреугольная матрица \hat{Z} сохраняет поливекторы $\hat{Z}E_i = E_i$
2. Диагональная матрица умножает каждый такой поливектор на произведение

$$\delta_1 \dots \delta_k: \hat{D}E_k = D_1 \dots D_k E_k$$

3. Ортогональная матрица R совершает ортогональный поворот с сохранением нормы $\|RE_k\| = \|E_k\|$.

Таким образом, k -ая диагональная координата Ивасавы матрицы \hat{Q} имеет геометрический смысл отношения площадей k и $k-1$ - мерных параллелограммов:

$$D_1 = |\hat{Q}\vec{e}_1|, \dots, D_k = \frac{\|\hat{Q}E_k\|}{\|\hat{Q}E_{k-1}\|}, \dots$$

В этих координатах матричный закон больших чисел (ЗБЧ) и центральную предельную теорему (ЦПТ) можно сформулировать следующим образом:

Теорема [35]:

Пусть $\hat{P}_N = \prod_{k=1}^N \hat{Q}_k$ - произведение недиагональных, одинаково распределенных, независимых матриц, с неотрицательным определителем, и $\hat{P}_N = R(\hat{P}_N)D(\hat{P}_N)Z(\hat{P}_N)$ - его разложение Ивасавы.

Тогда, оказывается, что экспоненциальному росту подвержены только диагональные координаты Ивасавы:

1. С вероятностью 1 существуют пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln D_j(\hat{P}_N)}{N} = \lambda_j, \text{ при этом они оказываются упорядочены } \lambda_1 > \dots > \lambda_n.$$

Набор этих неслучайных чисел называется спектром Ляпунова.

2. Отклонения $\frac{\ln D_j(\hat{P}_N) - N\lambda_j}{\sqrt{N}}$ при $N \rightarrow \infty$ сходятся по распределению к гауссовому случайному вектору.
3. Матрица Z стабилизируется, т.е. с вероятностью 1 существует случайный предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z(P_N) = Z_\infty.$$

4. Матрица R не стабилизируется и совершает случайные блуждания в компактной группе ортогональных матриц (именно из-за этого факта

матричные элементы \hat{Q} являются плохими переменными для формулировки предельных теорем).

Из-за некоммутативности сомножителей вычисление ляпуновского спектра оказывается сложной задачей. Аналитическое выражение известно для небольшого числа распределений, в частности, для изотропного.

б.) Ляпуновский спектр и обобщенные ляпуновские показатели произведения изотропно распределенных матриц

Распределение $n \times n$ действительных матриц \hat{Q} называется изотропным, если для любой ортогональной матрицы $\hat{O} \in O(d)$ и для любой функции $F(\hat{Q})$ ее среднее значение $\langle F(\hat{Q}) \rangle = \langle F(\hat{O}^T \hat{Q} \hat{O}) \rangle$. В частности, так как якобиан такого преобразования равен 1, то сохраняется и плотность вероятности матричных элементов: $\rho_{\hat{Q}}(\hat{X}) = \rho_{\hat{Q}}(\hat{O}^T \hat{X} \hat{O})$. Поэтому изотропная плотность вероятности должна зависеть только от инвариантов присоединённого представления $O(d)$, таких, как $tr \hat{X}$, $tr \hat{X}^2$, $tr \hat{X} \hat{X}^T$ и т.д.

Оказывается, что, несмотря на некоммутативность, переменные Ивасава для изотропно распределенных матриц ведут себя так же, как в коммутативном случае [63].

Пусть $\hat{P}_N = \prod_{k=1}^N \hat{Q}_k$ - произведение изотропно распределенных, независимых матриц.

Тогда

1. Моменты диагональных координат Ивасава произведения матриц равны произведениям моментов диагональных координат Ивасава сомножителей:

$$\left\langle \left(D_j(\hat{P}_N) \right)^\mu \right\rangle = \left\langle \left(D_j(\hat{Q}) \right)^\mu \right\rangle^N$$

2. Закон больших чисел: С вероятностью 1 нормированные на N отношения логарифмов диагональных координат Ивасава произведения стремятся к средним логарифмам координат Ивасава сомножителей:

$$\lambda_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln D_j(\hat{P}_N) = \langle \ln D_j(\hat{Q}) \rangle$$

3. Центральная Предельная Теорема.

Нормированные отклонения логарифмов координат Ивасава $\frac{\ln D_j(\hat{P}_N) - \lambda_j N}{\sqrt{N}}$ при $N \rightarrow \infty$ распределены по нормальному закону с дисперсиями

$$\langle (\ln D_j(\hat{Q}) - \lambda_j)^2 \rangle.$$

Докажем эту теорему для максимальной диагональной координаты Ивасава $D_1 = |\hat{P}_N \vec{e}_1|$, доказательство для остальных координат проводится аналогично.

$$D(\hat{P}_N) = |\hat{Q}_N \dots \hat{Q}_1 \vec{e}_1|$$

Обозначим по индукции $\vec{x}_k = \hat{Q} \vec{x}_{k-1}$, $\vec{x}_0 = \vec{e}_1$ и проделаем следующий трюк [25]:

Запишем выражение для максимальной диагональной координаты Ивасава и ее моментов в виде:

$$D(\hat{P}_N) = \frac{|\hat{Q}_N \dots \hat{Q}_1 \vec{x}_0|}{|\vec{x}_0|} = \frac{|\hat{Q}_N \vec{x}_{N-1}|}{|\vec{x}_0|} = \frac{|\hat{Q}_N \vec{x}_{N-1}|}{|\vec{x}_{N-1}|} \frac{|\vec{x}_{N-1}|}{|\vec{x}_{N-2}|} \dots \frac{|\vec{x}_3|}{|\vec{x}_2|} \frac{|\vec{x}_2|}{|\vec{x}_1|} \frac{|\vec{x}_1|}{|\vec{x}_0|} =$$

$$\frac{|\hat{Q}_N \vec{x}_{N-1}|}{|\vec{x}_{N-1}|} \frac{|\hat{Q}_{N-1} \vec{x}_{N-2}|}{|\vec{x}_{N-2}|} \dots \frac{|\hat{Q}_1 \vec{x}_0|}{|\vec{x}_0|}$$

Такое представление позволяет избавиться от некоммутативности сомножителей и перенести степень внутрь знака произведения:

$$\langle (D(\hat{P}_N))^\mu \rangle = \left\langle \prod_{k=1}^N \left(\frac{|\hat{Q}_k \vec{x}_{k-1}|}{|\vec{x}_{k-1}|} \right)^\mu \right\rangle_{Q_N \dots Q_1}$$

Усреднение этого выражения происходит по всем \hat{Q}_k . Однако вынести знак произведения за скобки пока нельзя, так как \vec{x}_{k-1} зависят от $\hat{Q}_{k-1}, \dots, \hat{Q}_1$.

Единственное, что мы можем сделать, это передвинуть одну скобку и записать

$$\left\langle \left(D(\hat{P}_N) \right)^\mu \right\rangle = \left\langle \left\langle \left(\frac{|\hat{Q}_N \vec{x}_{N-1}|}{|\vec{x}_{N-1}|} \right)^\mu \right\rangle_{Q_N} \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{|\hat{Q}_k \vec{x}_{k-1}|}{|\vec{x}_{k-1}|} \right)^\mu \right\rangle_{Q_{N-1} \dots Q_1}$$

Рассмотрим теперь отдельно усреднение

$$\left\langle \left(\frac{|\hat{Q}_N \vec{x}_{N-1}|}{|\vec{x}_{N-1}|} \right)^\mu \right\rangle_{Q_N}$$

Из независимости \vec{x}_{N-1} и \hat{Q}_N и изотропии следует, что вместо \vec{x}_{N-1} в эту величину можно подставить любой другой вектор \vec{x} , в том числе и начальный \vec{e} . После этого, выражение в скобке перестанет зависеть от $\hat{Q}_{N-1} \dots \hat{Q}_1$ и мы получим факторизованное выражение

$$\left\langle \left(D(\hat{P}_N) \right)^\mu \right\rangle = \langle |\hat{Q}_N \vec{e}|^\mu \rangle_{Q_N} \left\langle \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{|\hat{Q}_k \vec{x}_{k-1}|}{|\vec{x}_{k-1}|} \right)^\mu \right\rangle_{Q_{N-1} \dots Q_1}$$

Повторяя эту процедуру, в итоге получим первый пункт теоремы:

$$\left\langle \left(D(\hat{P}_N) \right)^\mu \right\rangle = \prod_{k=1}^N \langle |\hat{Q}_k \vec{e}|^\mu \rangle_{Q_k} = \left\langle \left(D(\hat{Q}) \right)^\mu \right\rangle^N.$$

Для доказательства закона больших чисел рассмотрим отношение

$$\lambda_N = \frac{\ln \delta(\hat{P}_N)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{|\hat{Q}_k \vec{x}_{k-1}|}{|\vec{x}_{k-1}|} \text{ и вычислим для него куммулянтную функцию}$$

$$w_{\lambda_N}(\mu) = \ln \left\langle \exp \left(\frac{\mu}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{|\hat{Q}_k \vec{x}_{k-1}|}{|\vec{x}_{k-1}|} \right) \right\rangle = \ln \left\langle \prod_{k=1}^N \exp \left(\frac{\mu}{N} \ln \frac{|\hat{Q}_k \vec{x}_{k-1}|}{|\vec{x}_{k-1}|} \right) \right\rangle.$$

Используя изотропию, можно, как и раньше, факторизовать это выражение и далее использовать ход доказательства обычного закона больших чисел:

$$w_{\lambda_N}(\mu) = \ln \prod_{k=1}^N \left\langle \exp \left(\frac{\mu}{N} \ln D(Q_k) \right) \right\rangle_{Q_k} =$$

$$N \ln \left\langle \exp \left(\frac{\mu}{N} \ln D(Q) \right) \right\rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu \langle \ln D(Q) \rangle$$

Таким образом, мы доказали, что существует предел (по вероятности) [17]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln D(\hat{P}_N)}{N} = \langle \ln D(Q) \rangle. \quad (6.4)$$

Доказательство ЦПТ поводится аналогично.

ПРИМЕР [63].

Вычислим ляпуновский спектр для произведения независимых изотропно раскрученных случайных унимодулярных 2×2 матриц вида

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

где a - константа, а угол φ равномерно распределен на $[0, 2\pi)$.

Согласно (6.4) для вычисления Ляпуновского спектра нам необходимо найти $\ln D(Q)$.

Имеем

$$\ln D(Q) = \ln |\hat{Q} \vec{e}_1| = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{ch} a + \cos 2\varphi \operatorname{sh} a).$$

Далее

$$\langle D(Q) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \ln(\operatorname{ch} 2a + \cos 2\varphi \operatorname{sh} 2a) = \ln(\operatorname{ch} a).$$

Таким образом, Ляпуновский спектр имеет вид

$$\lambda_{1,2} = \pm \ln(\operatorname{ch} a).$$

- Некоммутативная теория больших уклонений для континуальных произведений случайных матриц.

Будем, как и в дискретном случае интересоваться асимптотическим поведением норм базисных поливекторов

$$E_1 = \|P\vec{e}_1\|$$

$$E_2 = \|P\vec{e}_1 \wedge P\vec{e}_2\|$$

...

$$E_d = \|P\vec{e}_1 \wedge \dots \wedge P\vec{e}_d\|$$

при $t \rightarrow \infty$, где оператор эволюции P удовлетворяет (6.3).

Выражения для E_k снова можно получить, используя разложение Ивасава

$$P = RDZ, \quad (6.5)$$

Тогда значения базисных поливекторов E_k равны произведениям диагональных элементов D :

$$E_k = D_1 \dots D_k.$$

Самую грубую информацию о E_k дает мультипликативная эргодическая теорема Оселедца [14], из которой следует, что с вероятностью единица существуют пределы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln E_k}{T} = \lambda_1 + \dots + \lambda_k,$$

где

$$\lambda_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln D_k}{T}, \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$$

-Ляпуновские экспоненты (ЛЭ).

Полная информация об асимптотическом поведении E_k и их взаимных корреляциях содержится в обобщенных Ляпуновских экспонентах (ОЛЭ) [31]:

$$L(m_1, \dots, m_d) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle (D_1)^{m_1} \dots (D_d)^{m_d} \rangle}{T}, \quad (6.6)$$

При этом, например

$$\lambda_k = \frac{\partial}{\partial m_k} L(0).$$

Получение точных выражений для ОЛЭ будет нашей основной задачей.

Наиболее изучен случай, когда $A_{kp}(t)$ представляет собой Гауссовый, изотропный, бесследовый дельта-процесс. Для такого процесса известны точные выражения для ЛЭ и ОЛЭ [24], [25]. Из-за того, что такой процесс везде разрывной, для придания смысла уравнению (6.3) необходимы некоторые стохастические соглашения; известные результаты получены в рамках соглашения Стратоновича [36], [37]. [43].

Однако мультипликативные случайные процессы, возникающие в теории турбулентности, турбулентного транспорта и других физических приложениях стохастического анализа, являются, как правило, негауссовыми и имеют ненулевое время корреляции. Для таких систем «ЦПТ не работает», в том смысле, что, на больших временах, все связанные корреляторы $A_{kp}(t)$ дают вклад одинакового порядка в ЛЭ и ОЛЭ. Поэтому для вычисления этих величин следует пользоваться принципами теории больших уклонений [51], которая является стохастическим аналогом низкочастотного предела в КТП и квантовой механике [28]. Такие процессы имеют достаточное число непрерывных реализаций, поэтому уравнение (6.2) имеет хорошо определенное решение в виде мультипликативного интеграла Вольтерра, и мы можем не использовать никаких стохастических соглашений и оставаться в рамках обычного анализа.

Такой подход позволит получить точные ЛЭ и ОЛЭ для изотропных систем и показать, что они целиком определяются функцией Крамера диагональных элементов A_{kk} , во всяком случае для процессов, удовлетворяющих принципам больших уклонений [75].

а.) Локальная кумулянтная функция.

В этом и следующем разделе мы на примере простейшего одномерного уравнения с мультипликативным шумом покажем, почему при анализе его асимптотики оказываются недостаточно идеологии ЦПТ и необходима теория больших уклонений.

Рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение с мультипликативным шумом вида

$$\partial_t x(t) = \xi(t)x(t), \quad x(0) = 1 \quad (6.7)$$

где $\xi(t)$ – непрерывный, стационарный случайный процесс. Мы будем предполагать, что $\xi(t)$ удовлетворяет принципам больших уклонений (см. Приложение Б). Это значит, что плотность вероятности временного среднего $\bar{\xi} = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt$ имеет вид

$$\rho(\bar{\xi}) \sim e^{-Tj(\bar{\xi})}, \text{ где } j(\bar{\xi}) \text{ - функция Крамера [3], [51].}$$

С другой стороны, пусть

$$\langle \xi(t_1) \dots \xi(t_n) \rangle_c = W^{(n)}(t_1 - t_2, \dots, t_1 - t_n) \quad (6.8)$$

- регулярные быстро убывающие на бесконечности связанные корреляционные функции, которые определяются как коэффициентные функции в функциональном разложении Маклорена для куммулянтного функционала

$$W[\eta(t)] = \ln \langle e^{\int dt \eta(t) \xi(t)} \rangle,$$

$$W[\eta(t)] = \sum_n \frac{1}{n!} \int W^{(n)}(t_1 - t_2, \dots, t_1 - t_n) \eta(t_1) \dots \eta(t_n) dt_1 \dots dt_n. \quad (6.9)$$

Для каждой непрерывной реализации $\xi(t)$ решение (6.7) легко получить в явном виде

$$x(T) = e^{\int_0^T \xi(t) dt} \quad (6.10)$$

Будем интересоваться поведением моментов $\langle x^m(T) \rangle$ при $T \rightarrow \infty$,

$$\langle x^m(T) \rangle = \langle e^{m \int_0^T \xi(t) dt} \rangle.$$

Несложно заметить, что

$$\langle e^{m \int_0^T \xi(t) dt} \rangle = e^{W[mI_{[0,1]}(\frac{t}{T})]},$$

где $I_{[0,1]}$ – индикаторная функция отрезка $[0,1]$.

Подставляя $\mu(t) = mI_{[0,1]}(\frac{t}{T})$ в (6.9), получим (подробнее см. Приложение Б.)

$$\langle x^m(T) \rangle \sim e^{Tw(m)}, \quad (6.11)$$

в том смысле, что существуют пределы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle x^m(T) \rangle}{T} = w(m) \quad (6.12)$$

где

$$w(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} w^{(n)} \frac{\eta^n}{n!}. \quad (6.13)$$

$$w^{(n)} = \int dt_2 \dots dt_n W^{(n)}(t_1 - t_2 \dots t_1 - t_n). \quad (6.14)$$

Таким образом, асимптотика моментов $\langle x^m(T) \rangle$ не зависит от вида связанных корреляторов $W^{(n)}$ и определяется только интегралами (6.14). Функция $w(\eta)$ называется локальной куммулянтной функцией. Она связана с функцией Крамера преобразованием Лежандра [51]

$$j(\bar{\xi}) = \sup_{\eta} (\eta \bar{\xi} - w(\eta)).$$

б.) Низкочастотный предел и функция Крамера.

Рассмотрим теперь альтернативный способ определения асимптотики моментов (6.7).

Связным корреляционным функциям (6.8) соответствует функционал плотности вероятности

$$\wp[\xi] \sim e^{-S[\xi]},$$

где действие $S[\xi]$ равно интегралу от некоторого, вообще говоря, нелокального Лагранжиана \mathcal{L} , содержащего в общем случае производные всех порядков

$$S[\xi(t)] = \int dt \mathcal{L}(\xi, \partial_t \xi, \partial_t^2 \xi, \dots), \quad (6.15)$$

(Однако, например, процессу Орнштейна-Уленбека с коррелятором

$$W^{(2)}(t_1 - t_2) = \frac{1}{2} e^{-|t_1 - t_2|} \text{ соответствует локальный Лагранжиан } \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_t \xi)^2 + \frac{1}{2} \xi^2.)$$

Производящий функционал корреляционных функций тогда можно записать в виде интеграла Фейнмана-Каца [28]

$$e^{W[\eta(t)]} \sim \int D\xi e^{-\int dt (\mathcal{L}(t) - \eta(t)\xi(t))}. \quad (6.16)$$

Вычислим значения $e^{W[\eta(t)]}$ на «медленных» функциях $\eta\left(\frac{t}{T}\right)$ (т.н. низкочастотный предел). Для этого сделаем рескэйлинг времени, положив $t = \tau T$ и совершим замену переменных функционального интегрирования, определив «быстрый» процесс ξ_T , такой, что

$$\xi(t) = \xi_T(\tau), \quad \partial_t^n \xi(t) = \frac{1}{T^n} \partial_\tau^n \xi_T(\tau).$$

Подставляя эти соотношения в (6.16), получим

$$e^{W[\eta(\frac{t}{T})]} \sim \int D\xi_T e^{-T \int d\tau (\mathcal{L}_T(\tau) - \eta(\tau)\xi_T(\tau))}, \quad (6.18)$$

где $\mathcal{L}_T(\tau)$ - Лагранжиан «быстрого» процесса

$$\mathcal{L}_T(\tau) = \mathcal{L}\left(\xi_T, \frac{1}{T} \partial_\tau \xi_T, \frac{1}{T^2} \partial_\tau^2 \xi_T, \dots\right).$$

Так как ξ_T является немой переменной функционального интегрирования, далее мы будем опускать у нее индекс T .

При $T \rightarrow \infty$ в «древесном приближении» заменим \mathcal{L}_T на функцию

$$\mathcal{L}(\xi, 0, 0, \dots), \quad (6.19)$$

и оценим интеграл (6.18) методом перевала

$$\int D\xi e^{-T \int d\tau (\mathcal{L}_T(\tau) - \eta(\tau)\xi(\tau))} \sim e^{-T \int d\tau (\mathcal{L}(\xi_s(\tau), 0, 0, \dots) - \eta(\tau)\xi_s(\tau))}, \quad (6.20)$$

где $\xi_s(\tau)$ -точка минимума функционала $\int d\tau (\mathcal{L}(\xi, 0, 0, \dots) - \eta(\tau)\xi(\tau))$.

Эта точка определяется из уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\xi, 0, 0, \dots)}{\partial \xi} = \eta(\tau). \quad (6.21)$$

Разрешая его и подставляя ξ_s в (6.20), получим

$$e^{W[\eta(\frac{t}{T})]} \sim e^{T \int w(\eta(\tau)) d\tau}, \quad (6.22)$$

где

$$w(\eta) = \sup_{\xi} (\eta\xi - \mathcal{L}(\xi, 0, 0, \dots)) \quad (6.23)$$

является преобразованием Лежандра функции $\mathcal{L}(\xi, 0, 0, \dots)$. Так как квадрат преобразования Лежандра – тождественное преобразование, функция Крамера $j(\xi)$ совпадает с $\mathcal{L}(\xi, 0, 0, \dots)$.

Вычислим теперь еще раз моменты (6.11), пользуясь интегралом Фейнмана-Каца

$$\langle e^{m \int_0^T \xi(t) dt} \rangle \sim \int D\xi e^{-\int dt (\mathcal{L} - m \int_{[0,1]}(\frac{t}{T}) \xi(t))}.$$

Производя рескейлинг времени, получим

$$\int D\xi e^{-\int dt (\mathcal{L} - m \int_{[0,1]}(\frac{t}{T}) \xi(t))} \sim e^{T \int w(m \int_{[0,1]}(\tau) d\tau)} = e^{T w(m)}$$

Таким образом, мы видим, что $w(\eta)$ из (6.13) совпадает с $w(\eta)$ из (6.23) и оба способа определения локальной куммулянтной функции эквивалентны.

в.) Некоммутативная теория больших уклонений.

Рассмотрим теперь матричное уравнение (6.3), где $A(t)$ – стационарный непрерывный матричный процесс, имеющий связные корреляторы

$$\langle A_{i_1 j_1}(t_1) \dots A_{i_n j_n}(t_n) \rangle_c = W_{i_1 j_1 \dots i_n j_n}^{(n)}(t_1 - t_2, \dots, t_1 - t_n), \quad (6.24)$$

которым соответствует некоторый нелокальный Лагранжиан

$$\mathcal{L}_A(A, \partial_t A, \partial_t^2 A, \dots). \quad (6.25)$$

Для каждой непрерывной реализации $A(t)$ существует хорошо определенное решение уравнения (6.3).

Однако, из-за некоммутативности сомножителей при $d \geq 2$ оно мало пригодно для анализа в рамках теории больших уклонений, так как решение не выражается через эргодические средние \bar{A} . Чтобы сделать возможным такой анализ, для каждой непрерывной реализации A , для которой существует P^{-1} , запишем уравнение (6.3) в виде $A = (\partial_t P) P^{-1}$.

После несложных вычислений получим

$$A = R(\xi + \zeta + \theta)R^{-1}, \quad (6.25)$$

где случайные матрицы

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_d \end{pmatrix},$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_{12} & \dots & \zeta_{1d} \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.26)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_{21} & \dots & -\theta_{d1} \\ \theta_{21} & 0 & \dots & -\theta_{d2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{d1} & \theta_{d2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

определяются уравнениями

$$\xi = (\partial_t D) D^{-1}$$

$$\zeta = D(\partial_t Z) Z^{-1} D^{-1}$$

$$\theta = R^{-1}(\partial_t R)$$

откуда

$$\partial_t D = \xi D \quad (6.27)$$

$$\partial_t Z = D^{-1} \zeta D Z \quad (6.28)$$

$$\partial_t R = R \theta \quad (6.29)$$

Из (6.27) следует, что диагональные координаты Ивасавы D_k удовлетворяют одномерным уравнениям типа (6.7). Таким образом, для нахождения GLEs достаточно вычислить локальную кумулянтную функцию величин ξ :

$$\langle e^{\int dt \left(\mu_k \left(\frac{t}{T} \right) \xi_k(t) \right)} \rangle \sim e^{T \int d\tau w_\xi(\eta(\tau))}. \quad (6.30)$$

Тогда

$$L(m_1, \dots, m_d) = w_\xi(m_1, \dots, m_d), \quad \lambda_k = \frac{\partial}{\partial \eta_k} w_\xi(0). \quad (6.31)$$

г.) Инфинитезимальные переменные Ивасавы

Обозначим матрицу, стоящую в круглых скобках разложения (6.25), как X и будем называть ее матричные элементы инфинитезимальными переменными Ивасавы:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1d} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{d1} & X_{d2} & \dots & X_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \varsigma_{12} - \theta_{21} & \dots & \varsigma_{1d} - \theta_{d1} \\ \theta_{21} & \xi_2 & \dots & \varsigma_{2d} - \theta_{d2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{d1} & \theta_{d2} & \dots & \xi_3 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

Тогда (6.25) можно считать функциональной заменой переменных

$$X \mapsto A = R[X]XR^{-1}[X]. \quad (6.33)$$

Зависимость R от X здесь определяется соотношением (6.29).

Диагональная часть инфинитезимальных переменных Ивасавы это в точности $\xi(t)$, поэтому для решения задачи нам нужно найти вероятностную меру $X(t)$.

д.) Функциональный якобиан

Функционалы плотности вероятности X и A связаны обычным соотношением

$$\wp_X[X] = \wp_A[A[X]]\mathfrak{J}_0[X], \quad \text{где}$$

$$\mathfrak{J}_0[X] = \text{Det} \left(\frac{\delta A_{ij}(t)}{\delta X_{kp}(t')} \right) - \text{функциональный якобиан преобразования (6.33)}$$

Здесь мы вычислим этот якобиан с помощью формальных континуальных выкладок [16]. В приложении В приведено строгое вычисление, основанное на дискретизации уравнения эволюции.

$\frac{\delta A_{ij}(t)}{\delta X_{kp}(t')}$ является функциональной матрицей с набором непрерывных и дискретных

индексов. Чтобы вычислить ее определитель введем матричные мультииндексы:

$$(i, j) \equiv \alpha; (k, p) \equiv \beta, \dots \alpha, \beta \dots = 1 \dots d^2.$$

В дальнейшем все такие мультииндексы будем обозначать греческими буквами.

Преобразование (6.33) тогда представится в виде:

$$A_\alpha = \mathfrak{R}_{\alpha\beta}[X]X_\beta, \quad (6.34)$$

где \mathfrak{R} - $d^2 \times d^2$ -матрица, соответствующая оператору умножения матрицы X на R^T слева и на R справа:

$$\mathfrak{R}X = RXR^T,$$

$$\mathfrak{R}_{(ij),(kp)} = R_{ik}R_{jp} \quad (6.35)$$

Дифференцируя (6.34) по $X(t')$, получим выражение для функциональной матрицы Якоби:

$$\frac{\delta A_\alpha(t)}{\delta X_\beta(t')} = \mathfrak{R}_{\alpha\beta}(t)\delta(t-t') + \frac{\delta \mathfrak{R}_{\alpha\gamma}(t)}{\delta X_\beta(t')}X_\gamma(t) \quad (6.36)$$

Заметим теперь, что в силу причинного характера зависимости R от X $R[X, t]$ не зависит от $X(t')$ при $t < t'$. Поэтому функциональная матрица (6.36) оказывается блочной треугольной матрицей

$$\left(\frac{\delta A_\alpha(t)}{\delta X_\beta(t')} \right) = 0, t < t' \quad (6.37)$$

и её функциональный определитель представляется в виде бесконечного произведения определителей $d^2 \times d^2$ блоков, стоящих на диагонали $t = t'$:

$$\mathfrak{Z}_0[X] = Det \left(\frac{\delta A_\alpha(t)}{\delta X_\beta(t')} \right) = \prod_t det \left(\frac{\delta A_\alpha(t)}{\delta X_\beta(t)} \right) \quad (6.38)$$

Рассмотрим теперь $det \left(\frac{\delta A_\alpha(t)}{\delta X_\beta(t)} \right)$. В силу (6.36)

$$det \left(\frac{\delta A_\alpha(t)}{\delta X_\beta(t)} \right) = det \left(\mathfrak{R}_{\alpha\beta}(t)\delta(0) + \frac{\delta \mathfrak{R}_{\alpha\gamma}(t)}{\delta X_\beta(t)}X_\gamma(t) \right)$$

Выбирая регуляризацию в виде $\delta(0) \equiv (dt)^{-1}$, и опуская несущественные (но расходящиеся) множители, получим:

$$\det\left(\frac{\delta A_\alpha(t)}{\delta X_\beta(t)}\right) = \det\left(\mathfrak{R}_{\alpha\beta}(t) + \frac{\delta \mathfrak{R}_{\alpha\gamma}(t)}{\delta X_\beta(t)} X_\gamma(t) dt\right) \quad (6.39)$$

Заметим, что $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ - ортогональная матрица:

$$\mathfrak{R}_{\mu\alpha} \mathfrak{R}_{\mu\beta} = R_{ik} R_{jp} R_{im} R_{jn} = \delta_{km} \delta_{pn} \equiv \delta_{\alpha\beta} \quad (6.40)$$

Ее детерминант равен единице, поэтому можно внести \mathfrak{R}^T под знак определителя в (6.39) и получить:

$$\det\left(\frac{\delta A_\alpha(t)}{\delta X_\beta(t)}\right) = \det\left(\delta_{\alpha\beta} + \mathfrak{R}_{\mu\alpha} \frac{\delta \mathfrak{R}_{\mu\gamma}}{\delta X_\beta} X_\gamma dt\right) \quad (6.41)$$

Если теперь вспомнить, что

$$\det(\hat{1} + Bdt) = e^{tr \ln(\hat{1} + Bdt)} = e^{tr Bdt} \quad ,$$

то

$$\det\left(\frac{\delta A_\alpha(t)}{\delta X_\beta(t)}\right) = e^{\mathfrak{R}_{\mu\alpha} \frac{\delta \mathfrak{R}_{\mu\gamma}}{\delta X_\alpha} X_\gamma dt} .$$

Подставляя это выражение в (6.38), получим:

$$\mathfrak{Z}_0[X] = \exp(\int G dt), \quad (6.42)$$

$$G = \mathfrak{R}_{\mu\alpha} \frac{\delta \mathfrak{R}_{\mu\gamma}}{\delta X_\alpha} X_\gamma \quad (6.43)$$

Для вычисления G , перейдем от мультииндексов к обычным индексам.

Согласно определению (6.35):

$$G = R_{ik} R_{jp} \frac{\delta(R_{in} R_{jm})}{\delta X_{kp}} X_{mn} \quad (6.44)$$

Теперь нам необходимо вычислить вариационную производную $\frac{\delta R(t)}{\delta X_{kp}(t)}$ при совпадающих временах t .

Заметим, что из определения матрицы X (6.32) следует, что $\frac{\delta R(t)}{\delta X_{kp}(t)} = 0$, если $k \leq p$ и $\frac{\delta R(t)}{\delta X_{kp}(t)} = \frac{\delta R(t)}{\delta \theta_{kp}(t)}$, если $k > p$.

Зависимость R от θ определяется мультипликативным интегралом.

$$R[X, t] = \prod_{\tau=0}^t (1 + \theta(\tau) d\tau),$$

Вариационная производная $\frac{\delta}{\delta \theta_{kp}(t')}$ действует так

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \theta_{kp}(t')} R[X, t] &= \frac{\delta}{\delta \theta_{kp}(t')} \prod_{\tau=0}^t (1 + \theta(\tau) d\tau) \\ &= \int_0^t d\tau' \prod_{\tau=0}^{\tau'} (1 + \theta(\tau) d\tau) \frac{\delta \theta(\tau')}{\delta \theta_{kp}(t')} \prod_{\tau=\tau'}^t (1 + \theta(\tau) d\tau) = \\ &= \int_0^t d\tau' \prod_{\tau=t}^{\tau'} (1 + \theta(\tau) d\tau) \hat{j}_{kp} \delta(\tau' - t') \prod_{\tau=\tau'}^0 (1 + \theta(\tau) d\tau), \end{aligned}$$

$$\text{где } (\hat{j}_{kp})_{ij} \equiv \left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta_{kp}} \right)_{ij} = \delta_{ki} \delta_{pj} - \delta_{kj} \delta_{pi}, k > p.$$

При совпадающих временах $t = t'$ полагая $\int_0^t d\tau \delta(\tau - t) = 1/2$, получим окончательно:

$$\frac{\delta R(t)}{\delta X_{kp}(t)} = \frac{\hat{j}_{kp} R}{2}, k > p, \frac{\delta R(t)}{\delta X_{kp}(t)} = 0, \quad k \leq p \quad (6.45)$$

Вернемся теперь к вычислению следа (6.44).

Подставляя в него (6.45), получим выражение, из которого выпадает R [16]:

$$\mathfrak{S}_0[X] = e^{\int dt \operatorname{tr}(\eta_0 X(t))}, \quad (6.46)$$

где

$$(\eta_0)_{kp} = \left(\frac{d+1}{2} - k\right) \delta_{kp}. \quad (6.47)$$

Отсюда следует, что действие $S_X[X]$ имеет вид

$$S_X[X] = - \int \text{tr}(\eta_0 X) dt + S_A[RXR^{-1}]. \quad (6.48)$$

Пользуясь соотношением

$$\partial(R(t)F(t)R^{-1}(t)) = R(t)(D_t F(t))R^{-1}(t), \text{ где } D_t F = \partial_t F + [\theta, F]$$

из (6.48) получим Лагранжиан \mathcal{L}_X :

$$\mathcal{L}_X = -\text{tr}(\eta_0 X) + \mathcal{L}_A(RXR^{-1}, R(D_t X)R^{-1}, R(D_t^2 X)R^{-1}, \dots), \quad (6.49)$$

К сожалению, в общем случае это выражение все еще не позволяет вычислить ОЛЭ, потому что оно содержит неудобный интеграл Вольтерра вращательных степеней свободы $R[X, t] = \prod_{\tau=0}^t (1 + \theta(\tau)d\tau)$.

Однако для изотропных случайных процессов A этот интеграл исчезает, и задача решается до конца.

е.) Изотропные системы

Пусть вероятностная мера процесса $A(t)$ не меняется при ортогональных преобразованиях $A(t) \mapsto OA(t)O^{-1}$, где O - не зависящая от времени ортогональная матрица.

К таким процессам приводят, например задачи турбулентного транспорта в изотропных случайных d -мерных потоках.

Тогда Лагранжиан \mathcal{L}_A будет суммой инвариантных мономов, содержащей различные произведения следов произведений A, A^T и их производных:

$$\text{tr}(\dots A \dots A^T \dots \partial_t^p A \dots \partial_t^q A^T \dots) \dots \text{tr}(\dots). \quad (6.50)$$

В этом случае нелокальный оператор R уйдет из Лагранжиана (6.49), но производные «удлинятся» согласно правилу:

$$\partial_t A \mapsto \partial_t X + [\theta, X] \equiv D_t X$$

$$\partial_t^p A \mapsto D_t^p X$$

Таким образом, мы видим, что функции Крамера j_A , вообще говоря, недостаточно для определения функции Крамера j_X , а необходим полный Лагранжиан \mathcal{L}_A . Можно сформулировать формальное правило:

(*) j_X будет определяться точным нелокальным Лагранжианом \mathcal{L}_A , в котором каждая A и A^T заменяется на X и X^T , а на месте каждой p -ой производной стоят не нули, как в j_A , а коммутатор p -ой степени $[\theta, \dots, [\theta, X]]$.

К счастью, далее мы покажем, что в функцию Крамера j_ξ диагональных элементов ξ эти члены не дают вклад.

Гауссов случай

Для простоты, рассмотрим сначала Гауссов непрерывный процесс, с нулевыми средними

$$\langle A_{ij}(t) \rangle = 0$$

и изотропным коррелятором

$$\langle A_{ij}(t_1) A_{kp}(t_2) \rangle_c = D_{ijkp} \Phi(t_1 - t_2),$$

где

$$D_{ijkp} = -a\delta_{ij}\delta_{kp} + b\delta_{ik}\delta_{jp} + c\delta_{ip}\delta_{jk}, \quad a, b, c \text{ - некоторые константы.}$$

$\Phi(t)$ - некоторая регулярная, достаточно быстро убывающая на бесконечности функция,

$$\int \Phi(t) dt = 1.$$

Лагранжиан такого процесса несложно получить, выполняя континуальное обратное преобразование Фурье производящего функционала. В результате

$$\mathcal{L}_A(A) = \frac{1}{2} A_{ij} D_{ijkp}^{-1} \tilde{\Phi}^{-1}(i\partial_t) A_{kp},$$

где

$$D^{-1}_{ijkp} D_{kqrp} = \delta_{iq} \delta_{jr},$$

$$\tilde{\Phi}^{-1}(i\partial_t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_{2n} \partial_t^{2n},$$

C_{2n} - коэффициенты разложения в ряд Маклорена функции $\tilde{\Phi}^{-1}(\omega)$, $\tilde{\Phi}(\omega)$ – Фурье образ $\Phi(t)$.

Удобно перекинуть производные и преобразовать \mathcal{L}_A к виду:

$$\mathcal{L}_A(A) = \frac{1}{2} A_{ij} D_{ijkp}^{-1} A_{kp} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_{2n} (\partial_t^n A_{ij}) D_{ijkp}^{-1} (\partial_t^n A_{kp})$$

Тогда для функции Крамера и локальной куммулянтной функции А-переменных получим

$$j_A(A) = \frac{1}{2} A_{ij} D_{ijkp}^{-1} A_{kp} \tag{6.51}$$

$$w_A(\eta) = \frac{1}{2} \eta_{ij} D_{ijkp} \eta_{kp} \tag{6.52}$$

Из формального правила (*) следует выражение для функции Крамера X-переменных

$$j_X(X) = -tr(\eta_0 X) + j_A(X) + \delta j(X), \tag{6.53}$$

где

$$\delta j(X) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_{2n} [\theta, \dots, [\theta, X]]_{ij} D_{ijkp}^{-1} [\theta, \dots, [\theta, X]]_{kp} \tag{6.54}$$

- негауссова поправка.

Для определения локальной куммулянтной функции $w_X(\mu)$ необходимо совершить преобразование Лежандра функции Крамера (6.53). Для этого надо решить систему уравнений, определяющую точку минимума X_S

$$\frac{\partial j_X(X_S)}{\partial X_{qr}} = \eta_{qr}, \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_X}{\partial X_{qr}} = & -(\eta_0)_{qr} + D_{qrkp}^{-1} X_{kp} - \\ & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_{2n} \frac{\partial}{\partial X_{qr}} [\theta, \dots, [\theta, X]]_{ij} D_{ijkp}^{-1} [\theta, \dots, [\theta, X]]_{kp} \end{aligned} \quad (6.55)$$

В общем случае эту систему разрешить сложно, однако для вычисления ОЛЭ нам достаточно вычислить локальной куммулянтной функции $w_\xi(\mu)$ только диагональных переменных $X_{kk} = \xi_k$, поэтому в правую часть (6.54) достаточно поставить диагональную матрицу $\eta = \text{diag}\{\eta_k\}$:

$$\frac{\partial j_X(X_S)}{\partial X_{qr}} = \frac{\partial j_X(X_S)}{\partial \theta_{qr}} = 0, \quad q > r; \quad \frac{\partial j_X(X_S)}{\partial X_{qr}} = 0, \quad q < r; \quad \frac{\partial j_X(X_S)}{\partial X_{qq}} = \frac{\partial j_X(X_S)}{\partial \xi_q} = \eta_q \quad (6.56)$$

Так как нелинейная часть (6.55) содержит θ в качестве сомножителя, система (6.56) имеет диагональное решение

$$(X_S)_{qr} = (\theta_S)_{qr} = 0, \quad q > r; \quad (X_S)_{qr} = 0, \quad q < r;$$

$$(X_S)_{qq} = (\xi_S)_q = -a \text{tr} \eta + (b + c)(\eta_q + (\eta_0)_q),$$

которое обращает в ноль негауссово слагаемое (6.55).

Таким образом, функция Крамера j_ξ диагональных элементов $\xi_k = X_{kk}$ определяется только гауссовой функцией Крамера j_α диагональных элементов $\alpha_k = A_{kk}$:

$$j_\xi(\xi) = -\text{tr}(\eta_0 \xi) + j_\alpha(\xi), \quad (6.57)$$

Преобразование Лежандра дает выражение для локальной куммулянтной функции ξ в виде

$$w_{\xi}(\eta) = w_{\alpha}(\eta + \eta_0),$$

где

$$w_{\alpha}(\eta) = -\frac{a}{2}(tr\eta)^2 + \frac{b+c}{2}tr\eta^2$$

- локальная кумулянтная функция α . Однако, это выражение имеет неправильную нормировку. Правильное выражение находится из условия $\langle 1 \rangle = 1$, $w_{\xi}(0) = 0$:

$$w_{\xi}(\eta) = w_{\alpha}(\eta + \eta_0) - w_{\alpha}(\eta_0) = (b+c)tr(\eta_0\eta) - \frac{a}{2}(tr\eta)^2 + \frac{b+c}{2}tr\eta^2,$$

Из (6.31) тогда следуют выражения для ОЛЭ и ЛЭ Гауссовых непрерывных процессов

$$L(m_1, \dots, m_d) = (b+c) \sum_{k=1}^d \left(\frac{d+1}{2} - k \right) m_k + \frac{1}{2} \sum_{k,p=1}^d \left((b+c)\delta_{kp} - a \right) m_k m_p,$$

$$\lambda_k = (b+c) \left(\frac{d+1}{2} - k \right) \quad (6.58)$$

Матричные процессы, возникающие в теории турбулентного транспорта в несжимаемых бездивергентных потоках, удовлетворяют дополнительному условию бесследовости

$$trA = 0.$$

В этом случае коэффициенты a, b, c связаны условием $b+c-ad=0$, откуда для ОЛЭ и ЛЭ гауссовых бесследовых систем получим

$$L(m_1, \dots, m_d) = ad \sum_{k=1}^d \left(k - \frac{d+1}{2} \right) m_k + \frac{1}{2} a \sum_{k,p=1}^d (d\delta_{kp} - 1) m_k m_p$$

$$\lambda_k = ad \left(\frac{d+1}{2} - k \right) \quad (6.59)$$

Негауссов случай

Вернемся теперь к общему случаю. Сразу видно, что, если все инвариантные мономы (6.50) содержат больше, чем одну производную, или производную

порядка больше 1, система (6.54) также будет иметь диагональное решение (6.56), так как все такие члены после дифференцирования по $\frac{\partial}{\partial X_{qr}}$ будут содержать θ в качестве множителя. Вопрос может возникнуть только, если в Лагранжиане \mathcal{L}_A будет присутствовать член типа

$$tr(\dots A \dots A^T \dots \partial_t A),$$

который даст вклад в функцию Крамера j_X

$$tr(\dots X \dots X^T \dots [\theta, X]).$$

Его дифференцирование по $\frac{\partial}{\partial X_{qr}}$ дает «опасный» член в уравнение на точку минимума, который уже не содержит θ в качестве множителя:

$$tr(\dots X \dots X^T \dots [I_{qr}, X]),$$

$$\text{где } (I_{qr})_{ij} = \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial X_{qr}} = \begin{cases} \delta_{iq} \delta_{jr} - \delta_{ir} \delta_{jq}, & q > r \\ 0, & q \leq r \end{cases}$$

Однако, легко видеть, что он тоже обращается в ноль, если $X_s = \text{diag}\{\xi_s\}$.

Таким образом, мы показали, что любому изотропному Лагранжиану \mathcal{L}_A соответствует функция Крамера j_X , имеющая диагональную точку минимума ξ_s .

Поэтому, и в этом общем негауссовом, но изотропном случае, функция Крамера j_ξ диагональных элементов ξ матрицы X определяется только функцией Крамера j_α диагональных элементов матрицы A :

$$j_\xi(\xi) = -tr(\eta_0 \xi) + j_\alpha(\xi), \quad (6.60)$$

откуда следует выражение для нормированной локальной кумулянтной функции ξ :

$$w_\xi(\eta) = w_\alpha(\eta + \eta_0) - w_\alpha(\eta_0) \quad (6.61)$$

и замкнутые выражения для ОЛЭ и ЛЭ произвольных непрерывных изотропных процессов:

$$\begin{aligned}
 L(m_1, \dots, m_d) &= \\
 &= w_\alpha \left(m_1 + \frac{d+1}{2} - 1, \dots, m_d + \frac{d+1}{2} - d \right) - w_\alpha \left(\frac{d+1}{2} - 1, \dots, \frac{d+1}{2} - d \right), \\
 \lambda_k &= \frac{\partial}{\partial \eta_k} w_\alpha \left(\frac{d+1}{2} - 1, \dots, \frac{d+1}{2} - d \right)
 \end{aligned} \tag{6.62}$$

ж.) Эффективный дельта-процесс

Переформулируем результаты, полученные в предыдущих параграфах в виде, удобном для физических приложений.

Для изотропной системы (6.1) с регулярными, быстро падающими на бесконечности связными корреляторами (6.24) ОЛЭ определяются только интегралами

$$w_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = \int dt_2 \dots dt_n W_{i_1 i_1 \dots i_n i_n}^{(n)}(t_1 - t_2, \dots, t_1 - t_n), \tag{6.63}$$

и, по формуле (6.61), явным образом выражаются через локальную кумулянтную функцию диагональных элементов матрицы А

$$w_\alpha(\eta_1, \dots, \eta_d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} w_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_n}.$$

Таким образом, для каждой изотропной системы (6.1) существует семейство случайных процессов A_ε , со связными корреляционными функциями

$$\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} W_{i_1 j_1 \dots i_n j_n}^{(n)} \left(\frac{t_1 - t_2}{\varepsilon}, \dots, \frac{t_1 - t_n}{\varepsilon} \right),$$

которые приводят к одинаковым ОЛЭ. Поэтому можно перейти к формальному пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ и определить «эффективный дельта-процесс» A_0 с сингулярными корреляционными функциями

$$\Delta_{ij\dots kp}^{(n)} = w_{ij\dots kp}^{(n)} \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_1 - t_n).$$

Несмотря на свой формальный характер, такой процесс оказывается очень удобным для практических вычислений, возникающих при решении задач теории турбулентности, турбулентного транспорта, кинематического динамо и др., потому что позволяет эффективно расщеплять корреляции и получать замкнутые уравнения для моментов [73], [74].

Заметим, что полученные нами значения ОЛЭ (6.59) для Гауссовых изотропных бесследовых процессов совпадают с хорошо известными выражениями, полученными в рамках формализма Стратоновича [36], [43] для дельтакоррелированных процессов, в рамках которого $A(t)$ имеет смысл обобщенной производной от винеровского матричного процесса $W(t)$, а дифференциальное уравнение (6.1) интерпретируется как стохастическое уравнение $dP(t) = dW(t) \circ P(t)$.

Таким образом, для таких процессов предельный дельта-процесс является не формальным, и имеет вполне строгий смысл.

Подчеркнем, что использование эффективного дельтапроцесса для вычисления ОЛЭ возможно только для изотропных шумов. Для неизотропных шумов ОЛЭ будут зависеть не только от интегралов (6.63) но и от конкретного вида связных корреляционных функций. Более того, даже в изотропном случае эффективный дельта-процесс не будет давать правильную асимптотику для недиагональных элементов разложения Ивасава. Таким образом, возможность его использования для вычисления E_k является нетривиальной особенностью изотропных систем.

ГЛАВА 7. ОТКЛОНЕНИЕ ОТ ГАУССОВОЙ СТАТИСТИКИ. V3-МОДЕЛЬ.

- Трехмерные изотропные T-неинвариантные потоки

Из формулы (6.58) следует, что в 3d-мерной модели Казанцева-Крайчнана ЛЭ обладают симметрией

$$\lambda_1 = -\lambda_3, \lambda_2 = 0. \quad (7.1)$$

Легко показать, что это свойство ЛЭ выполняется не только для Гауссовых, но и для всех стационарных процессов с нулевыми корреляционными функциями нечетного порядка [72]. В свою очередь, это означает инвариантность вероятностной меры процесса $A(t)$ относительно преобразования

$$A(t) \mapsto -A(t),$$

которое можно интерпретировать как изменение направления времени. Таким образом, свойство (7.1) оказывается справедливым для любых обратимых по времени стационарных случайных процессов [59].

Для задач, возникающих в теории турбулентности, турбулентного транспорта и, в частности, кинематического динамо, большое значение имеют модели с T-неинвариантной статистикой поля скоростей и тензора деформации. Например, хорошо известно, что эволюция гидродинамического потока, описываемая уравнением Навье-Стокса, приводит к т.н. каскаду - потоку энергии из больших масштабов через инерционный интервал в вязкий масштаб, с последующей диссипацией [32]. Этот процесс нарушает симметрию относительно обращения времени и соотношение (7.1). Известный численный результат [29] состоит в том, что для однородного и изотропного турбулентного течения Навье-Стокса отношение $\lambda_2/\lambda_1 \approx 0.25$, в то время как для гауссовых процессов λ_2 строго равно нулю.

Простейшей моделью, учитывающей этот факт является V3-модель, предложенная нами в [62], к описанию которой мы переходим.

- V3-модель

В общем случае, из условий несжимаемости и изотропии следует, что 3-мерная локальная кумулянтная функция должна иметь вид [71]

$$w_\alpha(\eta) = w(a, b),$$

где

$$a = \sum_q \eta_{qq}^2 - \frac{1}{3} (\sum_q \eta_{qq})^2, \quad b = (\sum_q \eta_{qq}^2)(\sum_q \eta_{qq}) - \sum_q \eta_{qq}^3 - \frac{2}{9} (\sum_q \eta_{qq})^3.$$

Рассмотрим теперь случайный изотропный матричный процесс, у которого функция Крамера имеет вид

$$j_A(A) = \frac{1}{2} A_{ij} D_{ijkp}^{-1} A_{kp} + \varepsilon \alpha \text{tr}(\hat{A}^3) + \varepsilon^2 \beta \text{tr}(\hat{A}^4), \quad (7.2)$$

где ε – малый параметр, а моном четвертой степени $\text{tr}(\hat{A}^4)$ обеспечивает выпуклость функции Крамера. Совершая преобразование Лежандра, получим выражение для изотропной локальной кумулянтной функции

$$w(a, b) = Da + \varepsilon Fb + o(\varepsilon) \quad (7.3)$$

Коэффициент εF называется коэффициентом асимметрии (по времени) процесса. Известно, что ряд для негауссовой локальной кумулянтной функции должен содержать бесконечное число слагаемых [4]. В противном случае, соответствующая плотность вероятности не будет положительно определена. Однако, в V3-модели все мономы, степени выше 3 оказываются порядка $o(\varepsilon)$, поэтому ими можно пренебречь. Иначе, можно сказать, что вклад областей с отрицательной вероятностью в моменты оказывается порядка $o(\varepsilon)$.

Локальная кумулянтная функция (7.3) определяет корреляционный тензор эффективного дельта-процесса $\langle A_{ss}(t_1)A_{pp}(t_2)A_{qq}(t_3) \rangle \sim \delta(t_1 - t_2)\delta(t_1 - t_3)$.

Например

$$\langle A_{11}(t_1)A_{11}(t_2)A_{11}(t_3) \rangle = -\frac{4}{3}\varepsilon F \delta(t_1 - t_2)\delta(t_1 - t_3). \quad (7.4)$$

Из общей формулы (6.62) легко получить выражение для ЛЭ V3-модели [62]:

$$\lambda_s = 2D(2 - s) + 2\varepsilon F \left(1 - \frac{3}{2}(2 - s)^2\right), s = 1, 2, 3 \quad (7.5)$$

Первый член в (7.5) представляет гауссов вклад, второй – кубическую негауссову поправку. Таким образом, в этой модели $\lambda_2 \neq 0$, и она лучше подходит для описания турбулентного потока, чем модель Казанцева-Крайчнана. Уравнение (7.5) позволяет связать λ_2 с коэффициентом асимметрии

$$\varepsilon F = \lambda_2/2,$$

и, кроме этого, получить оценку для потока Навье-Стокса

$$\varepsilon F/D \approx 0.22.$$

Для связанного парного коррелятора получим [62]:

$$D_{sq} = 2D \left(\delta_{sq} - \frac{1}{3}\right) + 2\varepsilon F(s + q - 4) \left(1 - \frac{3}{2}\delta_{sq}\right) \quad (7.6)$$

В заключение обсудим условия, при которых можно ограничиваться кубическим членом в разложении (7.3).

Хорошо известно [31], что в самом общем случае индексы Ляпунова должны быть упорядочены:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3.$$

Сравнивая это неравенство с (7.5) получим необходимое условие:

$$|\varepsilon F| < \frac{2D}{3}$$

Если это неравенство не выполняется, то соответствующая плотность вероятности содержит слишком большие области с отрицательной вероятностью, поэтому, для устранения этой неприятности необходимо учитывать следующие члены разложения кумулянтной функции.

ГЛАВА 8. ЭВОЛЮЦИЯ СКАЛЯРНОГО ЛОКАЛИЗОВАННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

- Общий случай

Вернемся к выражению (5.5), описывающему эволюцию скалярного возмущения на Бэтчелоровском этапе эволюции.

Так как нас будет интересовать эволюция поля лишь с точностью до предэкспоненты, достаточно считать начальный профиль возмущения гауссовым и сферически симметричным

$$\tilde{\phi}(\vec{p}, 0) = e^{-L_0^2 p^2}. \quad (8.1)$$

Тогда интеграл (5.5) легко вычислить в явном виде, при этом выражение для плотности скаляра в центре локализованного возмущения примет вид

$$\phi(0, t) = \left(\det \hat{\Theta}(t) \right)^{-1/2}, \quad (8.2)$$

где

$$\hat{\Theta}(t) = L_0^2 \hat{1} + \kappa \int_0^t \hat{P}^{-1T}(\tau) \hat{P}^{-1}(\tau) d\tau. \quad (8.3)$$

Далее нас будет интересовать случай достаточно больших чисел Прандтля, так что $\kappa/r_v^2 \ll \lambda_1$. Тогда, согласно результатам главы 7, матричные элементы \hat{P} успеют выйти на экспоненциальный рост за время, существенно меньшее диффузионного размытия возмущения. Поэтому интеграл в (8.3) при $t \gg \lambda_1^{-1}$ можно заменить на выражение под знаком интеграла и получить оценку

$$\hat{\Theta}(t) \sim L_0^2 \hat{1} + \kappa \hat{P}^{-1T}(t) \hat{P}^{-1}(t).$$

Представляя оператор эволюции в виде разложения Ивасава $\hat{P} = RDZ$ и учитывая характер эволюции его различных компонент, получим

$$\phi(0, t) \sim \prod_{k=1}^3 \min\{D_k^{-1}, 1\} \quad (8.4)$$

Согласно (6.27)

$$D_k = e^{\int_0^t \xi_k(\tau) d\tau} = e^{t\bar{\xi}_k(\tau)},$$

поэтому для вычисления моментов $\langle \phi^\alpha \rangle$ необходимо знать вид плотности вероятности $\bar{\xi}_k(\tau)$, которая связана с функцией Крамера

$$\rho \sim e^{-tj(\bar{\xi})}.$$

Как было показано в главе 6, в изотропном случае она однозначно связана с функцией Крамера диагональных элементов матрицы $\alpha_k(\tau) = A_{kk}(\tau)$ (см. (6.57)).

Таким образом

$$\langle \phi^\alpha \rangle \sim \int d\bar{\xi} e^{-t(j_\alpha(\bar{\xi}) - \text{tr}(\eta_0 \bar{\xi}))} \prod_{k=1}^3 \min\{e^{-t\alpha \bar{\xi}_k(\tau)}, 1\} \quad (8.5)$$

Далее мы получим явный вид моментов в моделях Казанцева-Крайчнана и V3-модели.

- Локализованное возмущение в модели Казанцева-Крайчнана

Локальная кумулянтная функция диагональных элементов тензора градиентов в модели Казанцева-Крайчнана имеет вид

$$w_\alpha(\eta) = D \left(\sum_q \eta_{qq}^2 - \frac{1}{3} (\sum_q \eta_{qq})^2 \right).$$

Совершая преобразование Лежандра этой функции, можно получить выражение для функции Крамера $j_\alpha(\bar{\xi})$. Затем интеграл (8.5) можно взять с помощью метода стационарной фазы и получить для моментов выражение [39]

$$\langle \phi^\alpha \rangle \sim e^{-\gamma_\alpha t},$$

где

$$\gamma_\alpha = \begin{cases} 2D\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right), & \alpha \leq 2 \\ 2D, & \alpha > 2 \end{cases} \quad (8.6)$$

Тот факт, что моменты при $\alpha > 2$ выходят на константу, называется насыщением [32]. Физическая причина этого явления связана с перемежаемостью процесса турбулентной диффузии (см. Приложение Б). В следующей главе мы более подробно изучим это явление.

- Локализованное возмущение в V3-модели

Локальная кумулянтная функция диагональных элементов тензора градиентов в V3-модели имеет вид

$$w_\alpha(\eta) = D \left(\sum_q \eta_{qq}^2 - \frac{1}{3} (\sum_q \eta_{qq})^2 \right) + \varepsilon F \left((\sum_q \eta_{qq}^2) (\sum_q \eta_{qq}) - \sum_q \eta_{qq}^3 - \frac{2}{9} (\sum_q \eta_{qq})^3 \right)$$

Аналогичные вычисления дают для инкремента убывания [67]

$$\gamma_\alpha = \begin{cases} \frac{2D}{3} \alpha (3 - \alpha) \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} \left| \frac{F}{D} \right| \left(\frac{3}{2} - \alpha \right) \right), & \alpha \leq \alpha_c \\ 2D \left(\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{4} \right) + \frac{3}{16} \varepsilon^2 \left(\frac{F}{D} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right) + O(\varepsilon^4), & \alpha_c < \alpha \leq 2 \\ 2D, & \alpha > 2 \end{cases} \quad (8.7)$$

где $\alpha_c = 3\varepsilon|F/D| + O(\varepsilon^3)$ - однозначно определяется условием выпуклости γ_α .

Таким образом, негауссовы слагаемые в куммулянтной функции поля скоростей приводит к тому, что возникает дополнительная точка излома α_c производной кривой γ_α , а сам инкремент затухания увеличивается по сравнению с Гауссовым.

ГЛАВА 9. СКАЛЯРНОЕ ЛОКАЛИЗОВАННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ В СИСТЕМЕ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ.

В этой части мы рассмотрим задачу об эволюции возмущения пассивной диффузионной примеси, размножающейся в турбулентном потоке.

- Введение

Уравнения типа «реакция-диффузия» описывают эволюцию одно- или многокомпонентных скалярных полей с локальным нелинейным взаимодействием и диффузией. Они естественным образом возникают при описании процессов реакции в химии, биологии, экологии, теории горения, плазме, ядерной физике и т.д. Одним из наиболее известных примеров является уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова (Фишера-КПП) [1], [2]. Важной особенностью этих систем является наличие бегущих волн, соответствующих переходу между различными фазовыми состояниями. В этой главе мы рассмотрим влияние турбулентного переноса на скорость реакции и на распространение волны “переключения”. Физическая картина этого процесса такова: начальное возмущение скалярного поля растягивается в процессе турбулентной адвекции, при этом молекулярная диффузия препятствует его сжатию в поперечном направлении. Таким образом, его объем экспоненциально растет. Так как самодействие скалярного поля приводит к его насыщению, рост объема возмущения — это единственный способ увеличить популяцию. В масштабах, превышающих колмогоровский вязкий масштаб, т.е. в “инерционном интервале”, объем увеличивается по степенному закону. Напротив, возмущения, меньшие, чем колмогоровский масштаб, растут экспоненциально; растет ли популяция или нет, зависит от соотношения между скоростью реакции и скоростью турбулентного растяжения. Далее мы покажем, что в некоторых режимах размер популяции экспоненциально быстро увеличивается, несмотря на насыщение скалярной плотности. Примечательно, что значение коэффициента диффузии не

влияет на количественный результат, хотя роль диффузии очень важна. Этот эффект аналогичен «быстрому динамо» магнитного поля в проводящей турбулентной среде.

- Фронт реакции

Пусть снова L_0 - начальный размер возмущения.

Его эволюция в общем случае определяется размножением, молекулярной диффузией и переносом, таким образом, что концентрация примеси n описывается нелинейным уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \vec{u} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} n = \kappa \Delta n + \sigma n \Phi \left(1 - \frac{n}{n_{max}} \right) \quad (9.1)$$

где, как и ранее, $\vec{u}(\vec{r}, t)$ -случайное поле скорости турбулентного потока, κ - коэффициент молекулярной диффузии, σ - коэффициент размножения и $\Phi(x)$ - функция, описывающая насыщение и остановку размножения примеси при $n = n_{max}$

$$\Phi(1) = 1, \Phi(0) = 0$$

Прежде, чем изучать общий случай, рассмотрим эволюцию возмущения в отсутствии турбулентного потока $\vec{v}(\vec{r}, t) = 0$ и насыщения n_{max} .

$$\frac{\partial}{\partial t} n = \kappa \Delta n + \sigma n \quad (9.2)$$

Пусть, для определенности, начальное распределение плотности имеет Гауссов вид

$$n_0(\vec{r}) = n_0 e^{-\frac{r^2}{2\kappa t_0}}, \kappa t_0 \equiv L_0^2$$

Тогда решение уравнения (9.2)

$$n(\vec{r}, t) = n_0 (2\pi\kappa t_0)^{3/2} \frac{e^{-\frac{r^2}{2\kappa(t+t_0)} + \sigma t}}{(2\pi\kappa(t+t_0))^{3/2}}, \quad (9.3)$$

Видно, что концентрация во всех точках экспоненциально (с инкрементом σ) растет. При этом популяция (полное число частиц примеси)

$$N(t) = \int d\vec{r} n(\vec{r}, t)$$

также экспоненциально растет

$$N(t) = N_0 e^{\sigma t}, N_0 = \int d\vec{r} n(\vec{r}, 0) \sim n_0 L_0^3.$$

Рассмотрим теперь уравнение с нелинейным динамическим насыщением

$$\frac{\partial}{\partial t} n = \kappa \Delta n + \sigma n \Phi \left(1 - \frac{n}{n_{max}} \right) \quad (9.4)$$

Ясно, что концентрация экспоненциально быстро (за время $t_\sigma \sim \frac{1}{\sigma} \ln(n_{max}/n_0)$) достигнет насыщения, при этом рост популяции будет происходить за счет расширения границ возмущения.

Поскольку концентрация вблизи границы мала, для приближенной оценки этого эффекта можно использовать линейное уравнение (9.2).

Из вида его решения

$$n \sim e^{-\frac{r^2}{2\kappa t} + \sigma t}$$

Следует, что движение границы L определяется уравнением

$$-\frac{L^2}{2\kappa t} + \sigma t = const, \text{ откуда}$$

$$L \sim (\sigma\kappa)^{1/2} t$$

Таким образом, размер популяции при $t > t_\sigma$ будет расти лишь степенным образом

$$N \sim n_{max}(\sigma\kappa)^{3/2}t^3.$$

В турбулентном потоке эволюция популяции определяется тремя конкурирующими процессами: молекулярной диффузией, процессом переноса случайным полем скоростей потока и размножением. В случае, когда масштаб возмущения L существенно больше вязкого колмогоровского масштаба η расстояние между жидкими частицами на противоположных краях возмущения в среднем растет степенным образом [41]. В этом случае концентрация примеси быстро выходит на насыщение и рост популяции также принимает степенной характер. Однако для масштабов, меньших Колмогоровского, стохастическое разбегание траекторий носит экспоненциальный характер. Как будет показано в дальнейшем, это приводит к экспоненциальному росту объема возмущения, и экспоненциальному росту популяции на временах, превышающих время динамического насыщения t_σ . При этом концентрация может как экспоненциально падать, так и выходить на насыщение в зависимости от соотношения инкрементов рождения частиц и турбулентного растяжения.

- Качественное описание

Прежде всего, напомним решение задачи о турбулентном транспорте пассивного скаляра без размножения.

Как отмечалось, наибольший интерес представляет случай, когда масштаб возмущения не превышает вязкого колмогоровского масштаба $L \ll \eta$. На этом масштабе поле скоростей потока можно считать линейной функцией координат, и эволюция возмущения описывается уравнением (5.2). Его формальное решение мы уже обсуждали, теперь приведем качественное объяснение предыдущих результатов.

Из (5.2) следует, что характерный масштаб, на котором играют роль процессы молекулярной диффузии

$$r_d = \sqrt{\kappa/\lambda} \quad (9.4)$$

где $\lambda \sim \sqrt{\langle A^2 \rangle}$.

Будем предполагать, что начальный размер возмущения $L_0 \gg r_d$. В этом случае на начальном этапе диффузионным членом в (5.2) можно пренебречь. Уравнение (5.2) превратится в линейное дифференциальное уравнение первого порядка, характеристики которого являются решением уравнения:

$$\frac{d}{dt} r_i = A_{ij} r_j \quad (9.5)$$

Свойства оператора эволюции уравнения (9.5), мы изучали в главе 6.

Рассмотрим сначала более простой случай плоского течения $d = 2$.

В этом случае, диагональная (в смысле разложения Ивасава) часть матрицы эволюции определяется временным средним

$$\bar{\xi}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \xi(t) dt, \langle \xi \rangle = \lambda, \langle (\xi - \lambda)^2 \rangle = D$$

$$\hat{D} = \text{diag}\{e^{-\bar{\xi}(t)t}, e^{\bar{\xi}(t)t}\}.$$

Согласно общим принципам теории больших уклонений (см. приложение Б), плотность вероятности

$\rho(\bar{\xi}, t) \sim e^{-tj(\bar{\xi}-\lambda)}$, где $j(x)$ - функция Крамера. В общем случае это некоторая выпуклая функция. Для случайных процессов, удовлетворяющих условиям ЦПТ функция Крамера квадратична в окрестности нуля. В частности, если $\xi(t)$ - Гауссов шум, то

$$\rho(\bar{\xi}, t) \sim e^{-t \frac{(\bar{\xi}-\lambda)^2}{2D}} \quad (9.6)$$

$D = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi(t)\xi(0) - \lambda^2 \rangle dt$ - дисперсия.

Далее, вместо того чтобы решать уравнение (5.2), мы будем следовать некоторым качественным соображениям, которые, тем не менее, приводят к точным ответам.

Из свойств матрицы эволюции, которые мы обсуждали в главе 6 следует, что эволюция возмущения на начальном этапе экспоненциальном вытягивании вдоль одного из направлений и экспоненциальном сжатии вдоль другого со случайным инкрементом $\bar{\xi}(t)$.

При этом, в силу несжимаемости потока, объем возмущения не меняется, поэтому концентрация скаляра в центре также остается постоянной. Однако, по прошествии времени

$$t_{tr} \sim \frac{1}{\lambda} \ln \frac{L_0}{r_d}$$

сжатие возмущения прекратится, достигнув диффузионного масштаба. Вытягивание вдоль другого направления при этом приведет к экспоненциальному росту его объема.

В результате, с логарифмической точностью можно записать следующее выражение для объема возмущения:

$$V \approx (r_d + (L_0 - r_d)e^{\bar{\xi}t})(r_d + (L_0 - r_d)e^{-\bar{\xi}t}).$$

При $t \rightarrow \infty$ это выражение принимает вид

$$V \sim e^{|\bar{\xi}|t} \tag{9.7}$$

Откуда получим выражение для концентрации в центре

$$n \sim e^{-|\bar{\xi}|t}$$

Таким образом, концентрация в центре экспоненциально затухает со случайным инкрементом $|\bar{\xi}|$.

Как и ранее, нас будут интересовать инкременты затухания статистических моментов концентрации

$$\gamma_\alpha = -\frac{\ln\langle n^\alpha \rangle}{t} \text{ при больших } t_{tr} \ll t \ll t_\eta = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\eta}{L_0}.$$

Время t_η определяет момент выхода возмущения за пределы вязкого масштаба. В этот момент экспоненциальное растяжение прекращается, и эволюция плотности принимает степенной характер.

Для вычисления моментов концентрации $\langle n^\alpha \rangle$ необходимо знать плотность вероятности $\rho(\bar{\xi}, t)$.

В общем случае она определяется статистикой матричного процесса $A(t)$. Рассмотрим для определенности 2d-модель Казанцева-Крайчнана:

$$\langle A_{ij}(t)A_{kp}(0) \rangle = D \left(\delta_{ik}\delta_{jp} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kp} \right) \delta(t)$$

Тогда, согласно результатам главы 6

$$\rho(\bar{\xi}, t) \sim e^{-t\frac{(\bar{\xi}-\lambda)^2}{2D}}, \lambda = D \quad (9.8)$$

$$\langle n^\alpha \rangle \sim \int e^{-t\frac{(\bar{\xi}-\lambda)^2}{2D} - \alpha|\bar{\xi}|t} d\bar{\xi}$$

При $t \rightarrow \infty$ этот интеграл с логарифмической точностью можно оценить с помощью метода перевала.

Точка перевала определяется выражением

$$\bar{\xi}^* = \lambda(1 - \alpha), \alpha \leq 1$$

$$\bar{\xi}^* = 0, \alpha > 1$$

Таким образом, при $\alpha \leq 1$ основной вклад в момент $\langle n^\alpha \rangle$ дают случайные события, когда инкремент $\bar{\xi}^*$ меньше своего среднего значения λ на $\lambda\alpha$.

$$V^* \sim e^{(1-\alpha)\lambda t}$$

При этом вероятность таких инкрементов в соответствии с теорией больших уклонений (см. приложение Б) также экспоненциально падает со временем,

$$\rho(\bar{\xi}^*, t) = e^{-\frac{\lambda\alpha^2}{2}t} \quad (\text{как и всех показателей, кроме среднего значения } \langle \bar{\xi} \rangle = \lambda).$$

Поэтому моменты убывают как

$$\langle n^\alpha(t) \rangle \sim e^{-\alpha\bar{\xi}^*t} \rho(\bar{\xi}^*, t) = e^{(-\alpha + \frac{\alpha^2}{2})\lambda t}$$

Откуда

$$\gamma_\alpha = \lambda(\alpha - \alpha^2), \alpha < 1 \quad (9.9)$$

Если $\alpha \geq 1$, $\bar{\xi}^* = 0$

$$V^* \sim 1, \quad \rho(\bar{\xi}^*, t) \sim e^{-\frac{\lambda}{2}t}$$

$$\langle n^\alpha(t) \rangle \sim e^{-\frac{\lambda}{2}t}$$

$$\gamma_\alpha = \frac{\lambda}{2}, \alpha \geq 1 \quad (9.10)$$

В этом состоит физическая причина насыщения высших моментов, которое мы обсуждали в главе 8.

Таким образом, эффект насыщения инкрементов концентрации при $\alpha \geq 1$ связан с тем, что наибольший вклад в средние величины $\langle n^\alpha(t) \rangle$ дает редкий случай, когда инкремент роста объема возмущения равен нулю. При этом инкремент падения концентрации также равен нулю. Однако, вероятность таких событий экспоненциально убывает со временем, поэтому моменты концентрации также экспоненциально убывают с инкрементами, независимыми от α .

- Пассивный скаляр с неограниченным рождением

Формально уравнение эволюции пассивного скаляра с неограниченным размножением получается из (9.1), если положить параметр насыщения концентрации $n_{max} = \infty$. Однако, такая же ситуация возникает, если рассматривать эволюцию на временах $t \ll \frac{1}{\sigma} \ln \frac{n_{max}}{n_0}$.

В случае, если предельная плотность n_{max} достигается позже выхода возмущения за пределы Колмогоровского масштаба, то на временах $t \ll \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\eta}{L_0} \ll \frac{1}{\sigma} \ln \frac{n_{max}}{n_0}$ эволюция концентрации описывается линейным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} n + A_{ij}(t) r_i \frac{\partial}{\partial r_j} n = \kappa \Delta n + \sigma n \quad (9.11)$$

Решения этого уравнения имеют вид

$n = \tilde{n} e^{\sigma t}$, где \tilde{n} - решение уравнения (5.2), описывающее экспоненциальное затухание пассивного скаляра в отсутствии размножения.

В центре концентрация имеет вид

$$n = n_0 e^{\sigma t - |\bar{\xi}| t} \quad (9.12)$$

Таким образом, эволюция n определяется конкуренцией экспоненциального роста с неслучайным инкрементом σ и экспоненциального затухания со случайным инкрементом $|\bar{\xi}(t)|$.

Для инкрементов $\sigma_\alpha = \frac{\ln \langle n^\alpha \rangle}{t}$ получаются выражения

$$\sigma_\alpha = (\sigma - \lambda) \alpha + \lambda \alpha^2, \alpha < 1 \quad (9.13)$$

$$\sigma_\alpha = \sigma \alpha - \frac{\lambda}{2}, \alpha \geq 1 \quad (9.14)$$

Видно, что при $\sigma > \lambda$ все инкременты положительны.

Это означает, что для всех α наибольший вклад в моменты дают события, когда размножение доминирует над падением концентрации от увеличения объема.

При $\sigma < \lambda$ ситуация интереснее:

1. Если $\alpha < (\lambda - \sigma)/\lambda$ инкременты отрицательны. Это означает, что основной вклад в эти моменты дают события, когда размножение не может компенсировать падение концентрации от увеличения объема.
2. Для $(\lambda - \sigma)/\lambda < \alpha < 1$ инкременты положительны. Это означает, что они определяются событиями, в которых размножение доминирует над падением концентрации при росте объема.
3. При $\alpha \geq 1$ инкременты также положительны и линейно растут с ростом α . Это соответствует событию, когда объем мало меняется со временем и рост концентрации происходит с максимальным показателем.

- Скаляр с рождением и насыщением

Рассмотри теперь наиболее интересный случай, когда

$$\frac{1}{\sigma} \ln \frac{n_{max}}{n_0} \ll t \ll \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\eta}{L_0} \quad (9.15)$$

В этом случае, экспоненциальный рост концентрации запрещен нелинейным слагаемым с насыщением.

Поэтому с логарифмической точностью можно записать следующее асимптотическое выражение для концентрации в центре

$$n \sim e^{(\sigma - |\bar{\xi}|)\theta(|\bar{\xi}| - \sigma)t} \quad (9.16)$$

Усредняя (9.16) по случайному полю скоростей, можно получить выражения для инкрементов.

При $\sigma > \lambda$ падение концентрации за счет увеличения объема не способно компенсировать рождение.

В самом деле, если $\sigma \geq \lambda$, то перевальная точка $\bar{\xi}^* = \lambda$

Из (9.16) тогда немедленно следует, что в этом случае все инкременты σ_α равны нулю. Это означает, что концентрация достигает насыщения n_{max} и далее не растет и не убывает.

При $\sigma < \lambda$ ситуация иная:

1. Если $\alpha < (\lambda - \sigma)/\lambda$ то $\bar{\xi}^* = \lambda(1 - \alpha) > \sigma$

Это означает, что основной вклад в эти моменты дают события, когда размножение не может компенсировать падение концентрации за счет увеличения объема. В этом случае инкременты $\sigma_\alpha = (\sigma - \lambda)\alpha + \lambda\alpha^2$

2. Для $\alpha \geq (\lambda - \sigma)/\lambda$ $\bar{\xi}^* = \sigma$. Это означает, что размножение компенсируется падением концентрации из-за роста объема, поэтому концентрация не растет.

Однако вероятность таких показателей $\rho(\bar{\xi}^*, t) \sim e^{-\frac{(\lambda-\sigma)^2}{2\lambda}t}$ экспоненциально убывает, инкременты $\sigma_\alpha = \frac{(\lambda-\sigma)^2}{2\lambda}$ выходят на насыщение.

Итак, для $\sigma > \lambda$ показатели $\sigma_\alpha = 0$,

для $\sigma < \lambda$

$$\sigma_\alpha = (\sigma - \lambda)\alpha + \lambda\alpha^2 \quad \text{при } \alpha < (\lambda - \sigma)/\lambda \quad (9.17)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{(\lambda - \sigma)^2}{2\lambda} \quad \text{при } \alpha \geq (\lambda - \sigma)/\lambda$$

- Эволюция популяции

Рассмотрим теперь важный вопрос об эволюции полного числа частиц

$$N(t) = \int d^3r n(r, t) \sim n(0, t)V(t)$$

Из (9.16) и (9.7) имеем

$$N \sim e^{((\sigma - |\bar{\xi}|)\theta(|\bar{\xi}| - \sigma) + |\bar{\xi}|)t} \quad (9.18)$$

Тогда

$$\langle N^\alpha \rangle \sim \int e^{((\sigma - |\bar{\xi}|)\theta(|\bar{\xi}| - \sigma) + |\bar{\xi}|)t} e^{-t \frac{(\bar{\xi} - \lambda)^2}{2D}}$$

И для инкремента $k_\alpha = \frac{\ln \langle N^\alpha \rangle}{t}$ получим при $\sigma < \lambda$

$$\mu_\alpha = \sigma \alpha.$$

Это означает, что, несмотря на динамическое насыщение концентрации, турбулентное растяжение приводит к экспоненциальному росту популяции на временах, существенно превышающих время динамического насыщения. Популяция растет с максимально возможным инкрементом σ .

При $\sigma > \lambda$

$$\mu_\alpha = \begin{cases} \lambda(\alpha + \alpha^2), & \alpha \leq \frac{\sigma - \lambda}{\lambda} \\ \sigma\alpha - \frac{(\sigma - \lambda)^2}{2\lambda}, & \alpha > \frac{\sigma - \lambda}{\lambda} \end{cases}$$

Для нулевого инкремента получим

$$k_0 \equiv \left\langle \frac{\ln N}{t} \right\rangle = \min\{\lambda, \sigma\} \quad (9.19)$$

Полученный результат означает, что на временах $t \ll \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\eta}{L_0}$ популяция экспоненциально растет (несмотря на нелинейность и насыщение) и за время выхода за пределы колмогоровского масштаба вырастет в $K = \left(\frac{\eta}{L_0}\right)^{k_0}$ раз. Эта величина в условиях (9.15) может существенно превысить рост популяции в $K_\sigma = \left(\frac{n_{max}}{n_0}\right)^\sigma$ раз, который происходит в отсутствие турбулентного растяжения объема.

Перейдем теперь к строгому обсуждению общего d – мерного случая.

Эволюции примеси в d -мерном турбулентном потоке на вязких масштабах описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} n + A_{ij}(t)r_i \frac{\partial}{\partial r_j} n = \kappa \Delta n + \sigma n \Phi \left(1 - \frac{n}{n_{max}} \right) \quad (9.20)$$

Выделяя и него линейную часть, запишем

$$\frac{\partial}{\partial t} n + A_{ij}(t)r_i \frac{\partial}{\partial r_j} n = \kappa \Delta n + \sigma n + o \left(\frac{n}{n_{max}} \right), \quad (9.21)$$

Для каждой реализации матричного процесса A решение уравнения (9.20) является функционалом A . Для тех реализаций, которые ведут к экспоненциальному затуханию концентрации, нелинейность мала и ее можно отбросить. Экспоненциально растущие решения линейного уравнения следует просто заменить на константы. Подобный трюк даст точные выражения для инкрементов затухания концентрации.

Согласно этой программе, рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} n + A_{ij}(t)r_i \frac{\partial}{\partial r_j} n = \kappa \Delta n + \sigma n \quad (9.22)$$

Его решение будет отличаться от решения (8.4) на множитель $e^{\sigma t}$

$$n(t) = n_0 e^{\sigma t} \prod_{k=1}^d \min\{D_k^{-1}, 1\}, \quad (9.23)$$

С точностью до предэкспоненты

$$n \sim e^{-(|\bar{\xi}_1| + \dots + |\bar{\xi}_d| - \sigma)t} \quad (9.24)$$

Средние моменты тогда

$$\langle n^\alpha \rangle \sim \langle e^{-\alpha(|\bar{\xi}_1| + \dots + |\bar{\xi}_d| - \sigma)t} \rangle = \int d\bar{\xi}_1 \dots d\bar{\xi}_n \rho(\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n, t) e^{-\alpha(|\bar{\xi}_1| + \dots + |\bar{\xi}_d| - \sigma)t} \quad (9.25)$$

Как мы отмечали ранее, функция распределения $\rho(\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n, t)$ определяется функцией Крамера процесса $A(t)$. В качестве примера мы вновь рассмотрим 3d-модель Казанцева-Крайчнана.

$$\langle A_{ij}(t)A_{kp}(0) \rangle = D \left(\delta_{ik}\delta_{jp} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kp} \right) \delta(t) \quad (9.26)$$

Ляпуновский спектр и плотность инкрементов для этого случая имеют вид

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{-\lambda, 0, \lambda\}, \lambda = 2D$$

$$\rho(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, t) \sim e^{-t \frac{(\bar{\xi}_1 - \lambda_1)^2 + (\bar{\xi}_2 - \lambda_2)^2 + (\bar{\xi}_3 - \lambda_3)^2}{2\Delta}} \delta(\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_3), \Delta = \frac{4D}{3}$$

Пользуясь техникой вычисления интегралов, подробно изложенной в [67], для $\sigma_\alpha = \frac{\ln \langle n^\alpha \rangle}{t}$ получим:

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} (\sigma - \lambda)\alpha + \frac{\lambda\alpha^2}{4}, & \alpha \leq 2 \\ \sigma\alpha - \lambda, & \alpha > 2 \end{cases} \quad (9.27)$$

Формально, выражения (9.27) определяют поведения инкрементов линейной задачи (9.22). Однако, как мы уже отмечали, они остаются верны и в нелинейном случае, если рассматривать времена

$$\frac{1}{\lambda} \ln \frac{L_0}{r_d} \ll t \ll \min \left\{ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\eta}{L_0}, \frac{1}{\sigma} \ln \frac{n_0}{n_{max}} \right\}$$

Действительно, на этих временах никакие реализации $n(t)$ не успеют достигнуть n_{max} , поэтому эволюция моментов будет описываться линейным уравнением (9.22).

Другая ситуация возникает, если

$$\frac{1}{\sigma} \ln \frac{n_0}{n_{max}} \ll t \ll \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\eta}{L_0}$$

В этом случае часть реализаций успеет выйти на нелинейный режим. Для получения точных выражений для инкрементов затухания вместо (9.24) достаточно записать следующее выражение для концентрации:

$$n = n_0 e^{-(|\bar{\xi}_1| + \dots + |\bar{\xi}_d| - \sigma)\theta(|\bar{\xi}_1| + \dots + |\bar{\xi}_d| - \sigma)t} \quad (9.28)$$

Вновь, для определенности рассмотрим модель Казанцева-Крайчнана и, пользуясь техникой усреднения, развитой в [67] получим точные значения инкрементов:

При $\sigma > \lambda$ $\sigma_\alpha = 0$.

Как и в рассмотренном ранее двумерном случае, это означает, что за время $t \sim \frac{1}{\sigma - \lambda} \ln \frac{n_0}{n_{max}}$ концентрация достигает насыщения n_{max} и далее не растет и не убывает.

При $\sigma < \lambda$

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} (\sigma - \lambda)\alpha + \frac{\lambda\alpha^2}{4}, & \alpha \leq 2\left(1 - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \\ (\sigma - \lambda), & \alpha > 2\left(1 - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \end{cases} \quad (9.29)$$

- Поведение пассивной примеси вблизи точки насыщения

Ранее мы рассматривали промежуточные асимптотики поведения плотности примеси. Однако ясно, что турбулентный поток способен препятствовать росту концентрации только на временах экспоненциального растяжения объема. По прошествии достаточно большого времени, динамическое рождение все равно приведет к тому, что примесь выйдет на насыщение n_{max} , заполнив собой все пространство.

При этом любые отклонения от n_{max} будут экспоненциально затухать. Представляет интерес вопрос: как наличие турбулентного течения может повлиять на этот процесс?

В этой связи рассмотрим следующую постановку задачи.

Обозначим $\delta n(\vec{r}, t) = n(\vec{r}, t) - n_{max}$ - малые отклонение концентрации от насыщенного значения.

Из (6.1) следует, что уравнение, описывающее эволюцию примеси вблизи n_{max} по форме будет совпадать с линейным уравнением (6.3), с той лишь разницей, что инкремент рождения будет отрицательный:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n + A_{ij}(t) r_i \frac{\partial}{\partial r_j} \delta n = \kappa \Delta \delta n - \tilde{\sigma} \delta n \quad (9.30)$$

$$\tilde{\sigma} = \sigma \Phi'(0)$$

Предположим, что в начальный момент времени эти флуктуации представляют собой Гауссово однородное и изотропное случайное поле с корреляционной длиной $r_d \ll l_0 \ll \eta$ и парным коррелятором

$$\langle \delta n(\vec{r}, 0) \delta n(0, 0) \rangle_0 = e^{-\frac{r^2}{2l_0}}.$$

Такое поле можно представить, как некогерентное наложение множества локализованных возмущений с характерными размерами $L_0 \sim l_0$, разбросанных во всем пространстве (подробнее о такой постановке мы будем разговаривать позднее). В силу линейности уравнения (9.30) их эволюция будет протекать независимо, а средняя плотность распределения будет связана с плотностью в отдельном возмущении соотношением: $\langle \delta n^2 \rangle_0 = \delta n_{blob}$. Таким образом, инкременты затухания случайных, однородных флуктуаций будут получаться из инкрементов отдельного возмущения простой заменой $\alpha \rightarrow \alpha/2$. Формулы для последних примут вид:

$$(\sigma_{blob})_{\alpha} = \begin{cases} -(\tilde{\sigma} + \lambda)\alpha + \frac{\lambda\alpha^2}{4}, & \alpha \leq 2 \\ -(\tilde{\sigma}\alpha + \lambda), & \alpha > 2 \end{cases}$$

Откуда, для инкрементов затухания статистически однородных флуктуаций

получим:

$$\sigma_{\alpha} = \begin{cases} -(\tilde{\sigma} + \lambda)\frac{\alpha}{2} + \frac{\lambda\alpha^2}{16}, & \alpha \leq 4 \\ -\left(\tilde{\sigma}\frac{\alpha}{2} + \lambda\right), & \alpha > 4 \end{cases}$$

Заметим, что эти инкременты вновь относятся к промежуточной асимптотике

$$\frac{1}{\lambda} \ln \frac{l_0}{r_d} \ll t \ll \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\eta}{l_0}$$

На временах $t > \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\eta}{l_0}$ экспоненциальное увеличение объемов возмущений закончится и инкременты затухания флуктуаций вокруг насыщенного значения будут целиком определяться динамикой рождения вблизи n_{max} :

$$\sigma_{\alpha} = -\tilde{\sigma}\frac{\alpha}{2}.$$

ГЛАВА 10. ТОПОЛОГИЯ МАГНИТНЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ.

- Этапы эволюции магнитных флуктуаций

В этой главе речь пойдет о локализованных возмущениях магнитного поля [60] и природе турбулентного динамо при больших числах Прандтля.

Мы будем одновременно говорить о локализованных возмущениях и о статистически однородных, безграничных флуктуациях магнитного поля. Эволюцию мелкомасштабных флуктуаций магнитного поля при больших числах Прандтля можно разбить на три этапа [44]

1. $t < t_v$ (этап вмороженности)
2. $t_v < t < t_{in}$ (диффузионный этап)
3. $t > t_{in}$ (инерционный этап)

Характер решений уравнения КК можно представить в виде таблицы

	3D	2D
Вмороженность	Поле экспоненциально растёт	Поле экспоненциально растёт
Диффузия	Поле экспоненциально растёт с меньшим инкрементом	Поле экспоненциально растёт с меньшим инкрементом
Инерционный этап	Поле продолжает экспоненциально расти	Поле затухает степенным образом

В этой главе мы установим физические (и, отчасти, топологические) причины такого поведения решений.

- Энергетическое соответствие

Пусть начальные флуктуации такого поля имеют вид

$$\langle B_i(\vec{r})B_j(0) \rangle_{i.c.} = \Pi_{ij}D\left(\frac{r}{l}\right), \quad (10.1)$$

где $D\left(\frac{r}{l}\right)$ – регулярная, быстро убывающая функция, $\Pi_{ij} = \delta_{ij} - \partial^{-2}\partial_i\partial_j$ - проектор на бездивергентные моды, l – начальная корреляционная длина.

Рассмотрим магнитное возмущение, поле которого в начальный момент имеет вид

$$b_i(\vec{r}, \vec{r}_0) = l^{3/2}C_j\Pi_{ij}d\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{l}\right) \quad (10.2)$$

l -размер возмущения, d – также регулярная, быстро убывающая функция (формфактор), \vec{C} – вектор направления.

Идея состоит в том, что случайное однородное поле можно представить как сумму локализованных возмущений с центрами в разных точках \vec{r}_0 , одинаковой «формы» $d(r)$ и размера l , со случайными, независимыми амплитудами $\vec{C}(\vec{r}_0)$:

$$B_i(\vec{r}) = l^{3/2} \int d\vec{r}_0 C_j(\vec{r}_0) \Pi_{ij} d\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{l}\right), \quad (10.3)$$

$$\langle C_i(\vec{r}_0)C_j(\vec{r}'_0) \rangle_{i.c.} = \frac{1}{l^3} \delta_{ij} \delta(\vec{r}'_0 - \vec{r}_0). \quad (10.4)$$

При этом, формфактор d определяется коррелятором однородных флуктуаций:

$$D\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{l}\right) = \int d\vec{r}_0 d\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{l}\right) d\left(\frac{|\vec{r}'-\vec{r}_0|}{l}\right) \quad (10.5)$$

Из линейности уравнения (1.4) на $B_i(\vec{r}, t)$ следует, что решение задачи Коши с начальным условием (10.2)

имеет вид

$$B_i(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}_0 C_j(\vec{r}_0) b_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \quad (10.6)$$

Где $b_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$ - решение задачи Коши для уравнения

$$\partial_t b_{ij} + (v_k \partial_k) b_{ij} - (b_{kj} \partial_k) v_i = \kappa \partial^2 b_{ij}$$

с начальным условием

$$b_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, 0) = l^{3/2} \Pi_{ij} d \left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{l} \right)$$

Возводя (10.6) в квадрат и усредняя по случайным амплитудам $C_j(\vec{r}_0)$ (т.е. по начальному распределению), получим

$$\langle B^2(\vec{r}, t) \rangle_{i.c.} = \frac{1}{l^3} \int d\vec{r}_0 tr b b^T(\vec{r}, \vec{r}_0, t).$$

Рассмотрим теперь полное среднее, включающее усреднение по реализациям поля скоростей.

$$\langle B^2(\vec{r}, t) \rangle = \int d\vec{r}_0 \langle tr b b^T(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \rangle_v.$$

Для однородного и изотропного потока выражение $\langle tr b b^T(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \rangle_v$ должно зависеть от $|\vec{r} - \vec{r}_0|$, поэтому интегрирование по \vec{r}_0 можно заменить на интегрирование по \vec{r} :

$$\langle B^2(t) \rangle = \langle \int d\vec{r} tr b b^T(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \rangle_v.$$

Рассмотрим теперь среднюю по реализациям поля скоростей энергию эволюционирующего «единичного возмущения» с амплитудой $|\vec{C}| = 1$:

$$\langle E_b(t) \rangle_v = \left\langle \int d\vec{r} \left(C_j(\vec{r}_0) b_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \right)^2 \right\rangle_v = C(\vec{r}_0) \langle \int d\vec{r} b b^T(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \rangle_v C^T(\vec{r}_0)$$

Тензор $\langle \int d\vec{r} b b^T(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \rangle_v$ в силу изотропии и однородности потока не зависит от \vec{r}_0 и может быть равен только $\langle \int d\vec{r} t r b b^T(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \rangle_v \frac{\delta_{ij}}{3}$, откуда следует, что $\langle E_b(t) \rangle_v = \frac{1}{3} \langle \int d\vec{r} t r b b^T(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \rangle_v$

Таким образом, средний по потоку и начальным условиям квадрат однородных и изотропных флуктуаций магнитного поля оказывается пропорционален средней по потоку энергии «единичного возмущения».

$$\langle B^2 \rangle l^3 = 3 \langle E_b \rangle$$

Это равенство мы будем называть «энергетическим соответствием». Оно позволяет исследовать эволюцию локализованных возмущений с помощью методов, развитых для однородных флуктуаций, и наоборот.

С точностью до предэкспоненты можно положить

$$E_b \sim b^2 V,$$

где b^2 - поле в центре, V - его объем.

Таким образом, энергетическое соотношение связывает поле и объем с квадратом поля соответствующих однородных флуктуаций.

$$\langle B^2 \rangle \sim \langle b^2 V \rangle.$$

- Эволюция магнитного локализованного возмущения на бетчелоровском этапе

Рассмотрим эволюцию блага, первоначально имеющего размер $r_d < l \ll r_v$.

Снова перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с центром возмущения в потоке (квази-лагранжева система):

$$\vec{x}(\vec{r}, t) = \vec{r} - \vec{r}_0(t).$$

$$\dot{\vec{r}}_0(t) = \vec{v}(\vec{r}_0(t), t), \vec{r}_0(0) = \vec{r}_0$$

Уравнение транспорта примет вид (5.3)

$$\partial_t \vec{b} + (\hat{A}(t)\vec{x} \cdot \vec{\partial})\vec{b} = \hat{A}(t)\vec{b} + \kappa \partial^2 \vec{b}$$

Диффузионный член в этих уравнениях играет роль на масштабе

$$r_d = \sqrt{\kappa/D}, \quad D \sim \langle A^2 \rangle.$$

Пока размер возмущения остается больше r_d диффузионным членом можно пренебречь. Этот этап назовем этапом «вмороженности».

а.) Этап вмороженности

На этом этапе уравнение эволюции возмущения имеет вид

$$\partial_t \vec{b} + (\hat{A}(t)\vec{x} \cdot \vec{\partial})\vec{b} = \hat{A}(t)\vec{b}$$

Для описания эволюции объема, занимаемого возмущением на этапе вмороженности достаточно рассмотреть уравнение характеристик.

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \hat{A}(t)\vec{x}$$

Его решение мы изучали в главе 6.

$$\vec{x}(t) = \hat{P}(t)\vec{x}(0), \quad \text{где} \quad \hat{P}(t) = T \exp \int_0^t \hat{A}(t) dt - \text{оператор эволюции.}$$

Рассмотрим, как обычно, разложение Ивасава оператора эволюции

$$\hat{P}(t) = R(t)D(t)Z(t), \quad R \in O(3), Z \in SLT(3) \quad D = \text{diag}\{D_1, D_2, D_3\},$$

$$D_1 D_2 D_3 = 1$$

Как упоминалось в главе 6, диагональные компоненты Ивасава имеют ясный геометрический смысл, напомним его:

$$D_1 = \|\hat{P}(t)\vec{e}_1\| - \text{эволюция нормы вектора.}$$

$D_1 D_2 = \|\hat{P}(t)\vec{e}_1 \wedge \hat{P}(t)\vec{e}_2\|$ -эволюция площади.

$D_1 D_2 D_3 = \|\hat{P}(t)\vec{e}_1 \wedge \hat{P}(t)\vec{e}_2 \wedge \hat{P}(t)\vec{e}_3\|$ -эволюция объема. Для несжимаемых потоков он остается единицей.

Напомним основные результаты главы 6, касающиеся асимптотического поведения компонент $D_i(t)$:

С вероятностью единица существуют пределы

$$\frac{\ln D_i(t)}{t} \xrightarrow{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \ln D_i(t) \rangle}{t} = \lambda_i, \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Это позволяет качественно описать эволюцию магнитного локализованного возмущения на этапе вмороженности. Ее характер определяется знаком λ_2 .

$\lambda_2 < 0$ -«филамент»

$\lambda_2 > 0$ -«блин»

Запишем уравнение эволюции поля на этапе вмороженности:

$$\partial_t \vec{b} + (\hat{A}(t)\vec{x} \cdot \vec{\partial})\vec{b} = \hat{A}(t)\vec{b}$$

Легко видеть, что поле в центре удовлетворяет уравнению вида (6.1)

$$\partial_t \vec{b}(0, t) = \hat{A}(t)\vec{b}(0, t)$$

Это в точности уравнение для характеристик, характер его решений мы знаем:

$$b^2 \sim D_1^2, \quad \langle \ln \|\vec{b}\| \rangle \sim \lambda_1 t.$$

Объём на этапе вмороженности сохраняется, поэтому, в силу энергетического соответствия $\langle B^2 \rangle \sim \langle b^2 V \rangle$ и однородные флуктуации должны расти с тем же инкрементом.

$$\langle B^2 \rangle \sim \langle D_1^2 \rangle.$$

Перейдем теперь к обсуждению поведения возмущения в диффузионном режиме.

б.) Диффузионный режим

Так как эволюция возмущения на этапе замороженности состоит в схлопывании вдоль одного или двух направлений обязательно наступит момент, когда его толщина достигнет диффузионного масштаба. Начиная с этого момента толщина возмущения перестает убывать. Однако, вдоль других направлений продолжается экспоненциальное вытягивание, поэтому его объем начинает экспоненциально расти:

$V \sim r_d^2 D_1$ - для филамента.

$V \sim r_d D_1 D_2$ – для блина.

При этом силовые линии устроены так, что на поверхности снизу и сверху они направлены в одну сторону, вдоль направления вытягивания, а внутри возмущения в обратную сторону. Поэтому возникают сильные градиенты и поле начинает убывать из-за диффузионного перезамыкания. Чтобы выяснить характер такого затухания воспользуемся уравнением (5.6).

Будем для определенности рассматривать экспоненциальную форму начального возмущения

$$d\left(\frac{r}{l}\right) = e^{-\left(\frac{r}{l}\right)^2}.$$

Тогда, из (5.6), получим выражение для поля в центре [19], [21]

$$b^2 \sim \exp(-2|\ln D_2|).$$

Таким образом, мы видим, что на диффузионном этапе поле локализованного возмущения начинает экспоненциально затухать. Это происходит из-за того, что при «сплющивании» силовые линии приближаются друг к другу с противоположным знаком.

Однако, для средней энергии возмущения $\langle E_b \rangle \sim \langle b^2 V \rangle$ за счет экспоненциального роста объема получается экспоненциальный рост [68], [72]

$$\langle E_b \rangle \sim \begin{cases} \langle D_1/D_2 \rangle, & \text{"блин"} \\ \langle D_2/D_3 \rangle, & \text{"филамент"} \end{cases} \quad (10.7)$$

Из энергетического соответствия отсюда следует, что квадрат поля однородных флуктуаций растет с тем же инкрементом.

Таким образом, рост однородных флуктуаций на диффузионном этапе происходит за счет некогерентного перекрытия экспоненциально вытягивающихся локализованных возмущений, причем поле каждого отдельного локализованного возмущения убывает.

- Эволюция магнитного локализованного возмущения на постбэтчелоровском этапе

Решение уравнения эволюции для магнитного возмущения, вышедшего в результате вытягивания за пределы колмогоровского масштаба, наталкиваются на непреодолимые сложности, так как поле скоростей становится небэтчелоровым, и геометрическая форма возмущения в процессе эволюции претерпевает сложные случайные изменения. Однако энергетическое соответствие позволяет сделать утверждения об эволюции локализованного возмущения, исходя из решения уравнения КК (4.3), которое мы получили в главе (4). Согласно этим результатам, однородные 3d-флуктуации растут с инкрементом

$$\gamma_0 = \frac{5}{2}D - O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

В противоположность этому, 2d-уравнение КК не имеет растущих мод! Это было показано многими авторами [44], [65] и согласуется с 2d-анти-динамо теоремой.

Таким образом, энергия локализованного возмущения после выхода за пределы колмогоровского масштаба продолжает расти с тем же инкрементом в 3D и затухать в 2D.

Чтобы понять физическую (и отчасти, топологическую) причину такого поведения, рассмотрим эволюцию гладкой линии, помещенной в несжимаемый случайный поток $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

В общем случае, линия задается некоторой функцией $\vec{r}(\alpha, t)$, где α – произвольный параметр, нумерующий точки линии.

Функция $\vec{r}(\alpha, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(\alpha, t) = \vec{v}(\vec{r}(\alpha, t), t) \quad (10.8)$$

Вычислим её длину $L(t)$

$$L(t) = \int_{C(t)} dl = \int d\alpha \left\| \frac{\partial \vec{r}(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right\|$$

Найдем теперь уравнение эволюции касательного вектора $\frac{\partial \vec{r}(\alpha, t)}{\partial \alpha}$.

Из (10.8) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial r_i(\alpha, t)}{\partial \alpha} = \frac{\partial v_i(\vec{r}(\alpha, t), t)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\alpha, t)}{\partial \alpha} \equiv A_{ij}(\vec{r}(\alpha, t), t) \frac{\partial r_j(\alpha, t)}{\partial \alpha}$$

Обозначим $X_i(\alpha, t) \equiv \frac{\partial r_i(\alpha, t)}{\partial \alpha}$, $A_{ij}(\alpha, t) \equiv A_{ij}(\vec{r}(\alpha, t), t)$

Параметр α нумерует жидкую частицу, двигающуюся по своей траектории с началом в $r_i(\alpha, 0)$, $A_{ij}(\alpha, t)$ - тензор градиентов вдоль «альфной» траектории.

Длина кривой определяется интегралом

$$L(t) = \int d\alpha \left\| \vec{X}(\alpha, t) \right\|$$

Решение для касательного вектора X имеют вид:

$$\vec{X}(\alpha, t) = \hat{P}(\alpha, t)\vec{X}(\alpha, 0), \quad \hat{P}(\alpha, t) = T \exp \int_0^t \hat{A}(\alpha, t) dt$$

Статистические свойства $\hat{A}(\alpha, t)$ при всех альфах одинаковы, поэтому

$$\langle \|\vec{X}(\alpha, t)\| \rangle = \langle D_1 \rangle \|\vec{X}(\alpha, 0)\|.$$

Откуда, в силу закона больших чисел полная длина изменяется детерминировано:

$$L(t) = \langle D_1 \rangle \|L(0)\|.$$

Таким образом длина достаточно большой линии экспоненциально растет, случайным образом, с инкрементом

$$\ln \langle D_1 \rangle / t.$$

Для площади произвольной гладкой поверхности аналогичные выкладки дают:

$$S(t) = \langle D_2 D_1 \rangle \|S(0)\|,$$

Это означает, что поверхность также подвержена экспоненциальному росту, если $\lambda_2 \geq 0$.

С другой стороны, хорошо известно, что расстояние между любыми точками в инерционной области растет не экспоненциально, а степенным образом [41].

Это значит, что бесконечно тонкие линия и поверхность, движущиеся в случайном потоке оказываются зажаты в сфере, радиус которой растет лишь степенным образом.

В свою очередь, отсюда следует, что в процессе эволюции линия и поверхность всюду плотно и без самопересечений заполняют медленно растущую сферу.

Значит возмущение малой, но конечной толщины r_d , окружающее поверхность или линию будет неизбежно самопересекаться в процессе эволюции, так, что его объем прекратит экспоненциальный рост.

Из уравнения КК и из энергетического соответствия следует, что такие самопересечения приводят к экспоненциальному росту поля локализованного возмущения в 3D и затуханию в 2D.

Топологическая причина динамо, таким образом, заключается в том, что силовые линии магнитного поля возмущения в двумерных потоках могут пересекаться только под углом π , а в трехмерных-под произвольным углом, что дает строгое затухание в 2d и возможность роста в 3d (см. рис. 2 и табл. 1).

- Бэтчелоровская эволюция высших моментов однородных флуктуаций

В предыдущем параграфе в рамках метода квазилагранжевых траекторий мы получили выражение (10.7) для энергии (второго момента) статистически однородного магнитного поля на бэтчелоровском этапе эволюции. Высшие моменты магнитного поля, неусредненного по полю скоростей, определяются выражениями [66]

$$\langle B^{2n} \rangle_{i.c.} \sim \min \left\{ \frac{D_1^{2n}}{D_2^{2n}}, \frac{D_2^{2n}}{D_3^{2n}} \right\}.$$

Для выполнения усреднения по реализациям \vec{u} необходимо, как мы знаем из главы 6, задать функцию Крамера $j_\alpha(\alpha)$ диагональных элементов матрицы градиентов α :

$$\langle B^{2n}(t) \rangle = \int d\alpha \min \{ e^{2n(\alpha_1 - \alpha_2)t}, e^{2n(\alpha_2 - \alpha_3)t} \} e^{-t(j_\alpha(\alpha) - \text{tr}(\eta_0 \alpha))}.$$

Вычисления этих интегралов методом перевала дают замкнутые выражения для инкрементов

$$\gamma_{2n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{\langle B^{2n}(t) \rangle}{t},$$

при условии, что мы знаем статистику диагональных элементов матрицы градиентов.

Для модели Казанцева-Крайчнана

$$\gamma_{2n} = \frac{5}{2} D \left(\frac{4n}{5} + \frac{2n^2}{5} \right). \quad (10.9)$$

При $n = 1$ это выражение, совпадает с инкрементом, полученным из уравнения КК (см. главу 4) в приближении бесконечно большого числа Прандтля.

Аналогичные вычисления в рамках V3-модели [66], [68] дают выражения

$$\gamma_{2n} = \frac{5}{2} D \left(\left(\frac{4n}{5} + \frac{2n^2}{5} \right) - \varepsilon^2 \frac{3}{80} (n+2)^4 \left(\frac{F}{D} \right)^2 \right) + o(\varepsilon^2) \quad (10.10)$$

В частности, инкремент роста энергии

$$\gamma_2 = \frac{5}{2} D \left(1 - \varepsilon^2 \frac{243}{80} \left(\frac{F}{D} \right)^2 \right) + o(\varepsilon^2). \quad (10.11)$$

Это выражение описывает поправку к инкременту роста гауссовой модели Казанцева-Крайчнана. Видно, что неинвариантность стохастического потока относительно обращения времени приводит к уменьшению инкремента роста.

В работе [73] было показано, что в пределе бесконечного числа Прандтля выражение (10.11) также совпадает со значением, которое следует из обобщенного V3-уравнения КК, что является следствием эквивалентности метода квазилагранжевых траекторий и негауссово обобщения теории Казанцева.

ГЛАВА 11. ЛОКАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ d-МЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

• ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ И ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ

Своеобразным геометрическим «окном» в динамику стохастических потоков является картина эволюции линий и, в более общем случае, k-мерных гиперповерхностей, увлекаемых потоком. Динамика растяжений и складок переносимых гиперповерхностей играет важную роль в понимании процессов перемешивания в атмосфере и океане, а также в объяснении природы магнитного динамо в астрофизических объектах.

В процессе эволюции в несжимаемом стационарном потоке k-мерная площадь гиперповерхности испытывает экспоненциальный рост. В то же время, за пределами корреляционного масштаба потока, расстояние между точками поверхности растет как $t^{1/2}$. Таким образом, с течением времени гиперповерхность всюду плотно и без самопересечений заполнит все пространство.

В более общем случае, наша формальная цель будет состоять в понимании статистической картины совместного перемешивания гиперплоскостей различных размерностей.

В случае однородных и изотропных потоков в качестве начальных гиперповерхностей, как и ранее, достаточно выбрать флаг - вложенные друг в друга декартовы гиперплоскости с размерностью от 1 до d-1:

$$E^1 = \{\vec{e}_1\}, E^2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}, \dots, E^{d-1} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{d-1}\},$$

где \vec{e}_k -вектора стандартного ортонормированного базиса касательного пространства в каждой точке A^d .

Пусть x_1, \dots, x_k -декартовы координаты на E^k , ассоциированные со стандартным базисом. Случайное движение гиперповерхности $E^k(t) = \mathcal{L}_t E^k$ можно

рассматривать как непрерывную последовательность вложений начальной гиперплоскости E^k в \mathbb{A}^d . Вложение имеет в момент t вид

$$r = r(t; x_1, \dots, x_k),$$

и определяется для каждого набора x_1, \dots, x_k как решение задачи Коши

$$\partial_t \vec{r} = \vec{u}(r, t), \quad r(s) = x. \quad (11.1)$$

с начальным условием $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$.

В дальнейшем, в качестве координат на движущейся гиперповерхности $E^k(t)$ нам будет удобно брать те же самые x_1, \dots, x_k .

Кроме движения самих точек $x \mapsto r(t; x)$, поток \mathcal{L}_t также индуцирует отображения касательных пространств (дифференциал) $d_x \mathcal{L}_t: T_x \mathbb{A}^d \rightarrow T_{r(t; x)} \mathbb{A}^d$.

Пусть $\vec{l}_k(t; x_1, \dots, x_k) = d_x \mathcal{L}_t(\vec{e}_k)$ – образ вектора \vec{e}_k .

По известному решению $r = r(t; x_1, \dots, x_k)$ легко найти \vec{l}_k :

$$\vec{l}_k(t; x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial \vec{r}(t; x_1, \dots, x_k)}{\partial x_k}, \quad \vec{l}_k(0; x_1, \dots, x_k) = \vec{e}_k.$$

Далее нас будет интересовать эволюция касательных поливекторов (кососимметрических тензоров)

$$\hat{s}_k(t; x_1, \dots, x_k) = \vec{l}_1(t; x_1, \dots, x_k) \wedge \dots \wedge \vec{l}_k(t; x_1, \dots, x_k).$$

Закон эволюции таких поливекторов мы получим позже, сейчас нам важно, что их нормы $\|\hat{s}_k\| = s_k$ определяют элементы k -мерных площадей ds на гиперплоскостях $E^k(t)$.

$$ds = s_k dx_1 \dots dx_k. \quad (11.2)$$

Для лучшего понимания и визуализации процесса растяжения и складок удобно равномерно «покрасить» каждую начальную гиперплоскость и следить за эволюцией поверхностной плотности краски в каждой точке поверхности.

$$\rho_k = s_k^{-1}. \quad (11.3)$$

Так как эволюция является стохастической, полезно изучить поведение моментов плотностей, т.е. матожиданий $\langle \rho_k^m(t; x_1, \dots, x_k) \rangle$. В силу однородности потока они не зависят от x_1, \dots, x_k .

Чтобы связать абстрактное понятие матожидания с конкретными измеримыми величинами рассмотрим некоторый d -мерный шар \mathcal{O}_R радиуса R и его пересечение с начальными гиперплоскостями $E_R^k = \mathcal{O}_R \cap E^k$. Наше предположение о конечности корреляционного масштаба подразумевает, что существуют пределы (например, по вероятности, или в среднеквадратичном смысле), сходящиеся к матожиданиям ρ_k^m :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{S(E_R^k)} \int_{E_R^k} \rho_k^m(t; x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = \langle \rho_k^m(t) \rangle,$$

где $S(E_R^k)$ – k -мерная площадь E_R^k .

Это утверждение является аналогом обычного закона больших чисел и может считаться определением случайного поля с конечным корреляционным масштабом.

Вместо интегрирования по x (т.е. в конкретной карте) можно с помощью (11.2) перейти к инвариантному интегрированию по соответствующему куску $E_R^k(t) = \mathcal{L}_t E_R^k$ гиперповерхности $E^k(t)$:

$$\langle \rho_k^m(t) \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{S(E_R^k)} \int_{E_R^k(t)} \rho_k^m s_k^{-1} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{S(E_R^k)} \int_{E_R^k(t)} \rho_k^{m+1} ds.$$

Так как гиперповерхность в процессе эволюции экспоненциально растягивается, средняя плотность краски $\langle \rho_k(t) \rangle$ экспоненциально убывает.

Однако, оказывается, что достаточно высокие моменты, наоборот, растут: всегда существуют такие M_k , что $\langle \rho_k^{M_k} \rangle = const$, а $\langle \rho_k^m \rangle$ экспоненциально растет при $m > M_k$.

Моменты, $\langle \rho_k^{M_k} \rangle$, которые остаются постоянными, называются стохастическими интегралами.

Причина роста моментов при $m > M_k$ состоит в том, что статистика плотности перемежаема: матожидание $\langle \rho_k \rangle$ экспоненциально убывает и поверхность в среднем «бледнеет», но всегда будут существовать редкие сжимающиеся «темные» области (см. рис. 1).

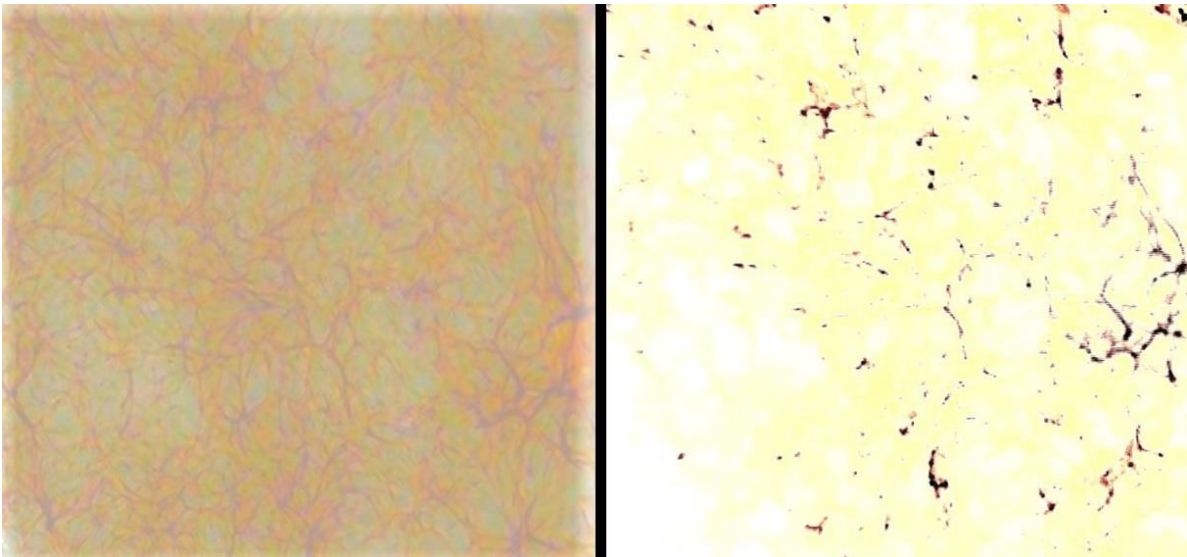


Рис. 1

Количество таких областей экспоненциально убывает со временем, однако, в оставшихся сама плотность ρ_k экспоненциально растет, поэтому, не смотря на их редкость, именно они определяют растущие моменты $\langle \rho_k^m \rangle$, $m > M_k$.

Причина такого поведения моментов состоит в мультипликативности процесса переноса в стохастическом потоке, в том смысле, что эволюцию можно представить как композицию большого числа независимых случайных преобразований:

$$\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_{t,t_{n-1}} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{t_2,t_1} \circ \mathcal{L}_{t_1,0}.$$

Вернемся к нашим поверхностям. На первый взгляд величины M_k зависят от конкретного вида вероятностной меры потока, однако далее мы покажем, что для изотропных потоков они универсальны и определяются размерностью пространства вложения.

$$M_k = d, k = 1, \dots, d - 1.$$

- СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ В КАСАТЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Нашей ближайшей целью будет получение закона эволюции касательного поливектора.

$$\hat{s}_k(t; x) = \vec{l}_1(t; x) \wedge \dots \wedge \vec{l}_k(t; x),$$

$$\vec{l}_k(t; x) = \frac{\partial \vec{r}(t; x)}{\partial x_k},$$

Дифференцируя уравнение движения жидкой частицы (11.1) по x_k , получим уравнение эволюции касательного вектора $\vec{l}_k(x, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}(t; x)}{\partial x_k} = \frac{\partial \vec{u}(t, r(t; x))}{\partial x_j} \frac{\partial r_j(t; x)}{\partial x_k},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{l}_k(t; x) = \mathcal{A}(t; x) \vec{l}_k(t; x), \quad (11.4)$$

где

$\mathcal{A}_{ij}(t; x) \equiv A_{ij}(t, r(t; x))$ - тензор градиентов поля скоростей на на орбитах потока (т.е. на траекториях движущихся жидких частиц).

Он носит название лагранжевого тензора градиентов, а отличии от эйлера тензора градиентов $A_{ij}(t, r)$, вычисляемого в фиксированной точке $r \in \mathbb{A}^d$.

Введем, как и в предыдущих главах, линейный оператор эволюции $P(t; x)$, действующий в касательном пространстве $T_{r(t;x)}\mathbb{A}^d$:

$$\vec{l}_k(t; x) = P(t; x)\vec{l}_k(0; x) = P(t; x)\vec{e}_k.$$

(Это не что иное, как дифференциал диффеоморфизма $d_x L_t$!)

Напомним, что он удовлетворяет линейному матричному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; x) = \mathcal{A}(t; x)P(t; x), P(0; x) = \hat{1}, \quad (11.5)$$

Эволюция нужных нам поливекторов тогда представится в виде

$$\hat{s}_k(t; x) = \vec{l}_1(t; x) \wedge \dots \wedge \vec{l}_k(t; x) = P(t; x)\vec{e}_1 \wedge \dots \wedge P(t; x)\vec{e}_k.$$

Так как для бездивергентного поля скоростей $\text{tr}\mathcal{A} = \text{tr}A = 0$, то из (11.5) следует, что $\det P = 1$.

Другими словами, оператор эволюции принадлежит группе вещественных унимодулярных матриц $SL(d, \mathbb{R})$.

Отсюда, в свою очередь, следует уже не раз упомянутая несжимаемость потока (т.е. сохранение любых d -мерных объемов под действием диффеоморфизмов \mathcal{L}_t).

Обсудим теперь величину $\mathcal{A}(t; x)$.

Ввиду того, что именно она определяет эволюцию касательных пространств, необходимо более подробно остановится на ее свойствах.

- СТАТИСТИКА ТЕНЗОРА ГРАДИЕНТОВ

Рассмотрим сначала более простую Эйлерову случайную функцию $A(r, t)$. При фиксированном r она представляет собой некий стационарный случайный

процесс, причем из однородности следует, что его статистика одинакова для всех r . В частности, плотность вероятности $A(r, t)$, взятая в фиксированный момент времени t в фиксированной точке r

$$\mathcal{P}_A(X) = \langle \delta(X - A(t, r)) \rangle$$

не зависит ни от t ни от r .

Оказывается, что для несжимаемых потоков с конечным корреляционным масштабом, функция $\mathcal{A}(t; x)$ также является стационарной и однородной по начальной координате x случайной функцией, более того, её плотность вероятности в фиксированный момент времени t и в фиксированной точке x

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(X) = \langle \delta(X - \mathcal{A}(t; x)) \rangle$$

совпадает с $\mathcal{P}_A(X)$.

Для доказательства, вместо дельта-функции рассмотрим произвольную измеримую функцию $f(\mathcal{A}(t; x))$ и её матожидание $\langle f(\mathcal{A}(t; x)) \rangle$. Из конечности корреляционного масштаба потока следует что это матожидание можно записать как предел (например, по вероятности).

$$\langle f(\mathcal{A}(t; x)) \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{V(\mathcal{O}_R)} \int_{\mathcal{O}_R} f(\mathcal{A}(t; x)) dx_1 \dots dx_d,$$

где $V(\mathcal{O}_R)$ – объем шара \mathcal{O}_R , который в пределе $R \rightarrow \infty$ охватывает все пространство.

Напомним, что это аналог обычного закона больших чисел.

Заметим также, что это матожидание не зависит от x, t поэтому их можно опустить

$$\langle f(\mathcal{A}(t; x)) \rangle = \langle f(\mathcal{A}) \rangle.$$

Для каждого ω совершим в интеграле переход к новым переменным интегрирования $x \mapsto r(t; x)$, где $r(t; x)$ – траектория жидкой частицы.

Из несжимаемости потока следует, что якобиан такого преобразования равен 1 (вскоре мы это покажем), поэтому $V(\mathcal{O}_R) = V(\mathcal{O}_R(t))$

$$\langle f(\mathcal{A}) \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{V(\mathcal{O}_R)} \int_{\mathcal{O}_R} f(\mathcal{A}(t; x)) dx_1 \dots dx_d =$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{V(\mathcal{O}_R(t))} \int_{\mathcal{O}_R(t)} f(A(t, r)) dr_1 \dots dr_d = \langle f(A) \rangle.$$

Так как это равенство справедливо для любой измеримой функции f , плотности вероятности \mathcal{A} и A должны совпадать:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(X) = \mathcal{P}_A(X).$$

Итак, мы доказали, что Лагранжев тензор градиентов $\mathcal{A}(t; x)$ при каждом фиксированном x является стационарным случайным процессом, и его плотность вероятности в каждый фиксированный момент времени t и в фиксированной начальной точке x совпадает с плотностью вероятности Эйлера тензора градиентов A .

Покажем еще, что для несжимаемых изотропных потоков $\langle \mathcal{A} \rangle = \langle A \rangle = 0$. В самом деле, из условия изотропии и бесследовости следует $\langle A_{ij} \rangle = \frac{1}{d} \langle \text{tr} A \rangle \delta_{ij} = 0$.

- ИЗОТРОПНАЯ МЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ МАТРИЦ

Как мы теперь знаем, оператор эволюции P в любой момент времени является изотропно распределенной случайной матрицей. Это значит, что для $\forall \hat{O} \in O(d)$ и для любой измеримой функции $F(\hat{P})$

$$\langle F(\hat{P}) \rangle = \langle F(O^T \hat{P} O) \rangle.$$

Ближайшая наша цель – научиться конструктивно задавать изотропную меру.

Например, можно задать плотность вероятности в стандартных координатах (матричных элементах) $\rho(P)$. Она изотропна, если

$$\forall R \in O(3), \rho(R^{-1}PR) = \rho(P).$$

Это следует из того факта, что для ортогональных преобразований якобиан присоединённого представления равен 1 и, поэтому $d(R^{-1}PR) = dP$. Однако в этих координатах совершенно не видно, какая плотность вероятности будет изотропной. Чтобы понять, как в общем случае конструктивно задать такую плотность, рассмотрим специальные координаты.

Любую унимодулярную матрицу $P \in SL(d, \mathbb{R})$ можно представить в виде (это следует из т.н. полярного или сингулярного разложения):

$$P = O^{-1}\Lambda\omega O,$$

где $O, \omega \in O(d)$, Λ - диагональная матрица с упорядоченными неотрицательными элементами,

$0 < \Lambda_d \leq \dots \leq \Lambda_1$, $\Lambda_1 \dots \Lambda_d = 1$, элементы Λ_k называются сингулярными числами матрицы P .

С целью экономии символов, будем считать, что буквы O, Λ, ω – это некоторые локальные координаты на соответствующих многообразиях, которые в совокупности являются локальными координатами на $SL(d, \mathbb{R})$.

Тогда произвольная вероятностная мера будет иметь вид $\rho(O, \Lambda, \omega)d\mu(\Lambda)d\mu(\omega)d\mu(O)$, где $d\mu(\Lambda), d\mu(\omega), d\mu(O)$ -элементы объемов в соответствующих координатах на многообразиях диагональных и ортогональных матриц, $\rho(O, \Lambda, \omega)$ - плотность вероятности на $SL(d, \mathbb{R})$.

Выберем $d\mu(O)$ в виде инвариантной меры Хаара: $d\mu_H(RO) = d\mu_H(OR) = d\mu_H(O), \forall R \in O(d)$.

Тогда изотропная плотность $\rho(O, \Lambda, \omega)$ не должна зависеть от координат O . В самом деле

$$\rho(R^{-1}PR)dQ = \rho(RO, \Lambda, \omega)d\mu(\Lambda)d\mu(\omega)d\mu_H(RO) = \\ \rho(RO, \Lambda, \omega)d\mu(\Lambda)d\mu(\omega)d\mu_H(O).$$

Поэтому $\forall R \in O(3)$ $\rho(O, \Lambda, \omega) = \rho(RO, \Lambda, \omega)$ и значит $\rho(O, \Lambda, \omega) = \rho(1, \Lambda, \omega) \equiv \rho(\Lambda, \omega)$

Итак, изотропная мера — это мера, которая в координатах O, Λ, ω имеет вид

$$\rho(\Lambda, \omega)d\mu(\Lambda)d\mu(\omega)d\mu_H(O).$$

Рассмотрим случайный моном вида $D_1^{m_1}(P) \dots D_d^{m_d}(P)$. Его матожидание является некоторой функцией показателей $m_1 \dots m_d$. Нам будет удобно представить ее в виде

$$\langle D_1^{m_1}(P) \dots D_d^{m_d}(P) \rangle = e^{w(m_1, \dots, m_d)}.$$

Функция $w(m_1, \dots, m_d)$ -кумулянтная функция.

- ЛЕММА О СИММЕТРИИ КУМУЛЯНТНОЙ ФУНКЦИИ.

Для изотропных распределений кумулянтная функция имеет вид

$$w(m_1, \dots, m_d) = S(m_1 + \eta_1, \dots, m_d + \eta_d), \quad (11.6)$$

где

$\eta_k = \frac{d+1}{2} - k$ - вполне конкретный набор целых или полуцелых (в зависимости от размерности d) чисел,

$S(n_1, \dots, n_d)$ -некоторая симметричная функция своих аргументов, конкретный вид которой зависит от вероятностного распределения Q [63],[76].

- СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Эта Лемма позволяет найти универсальные стохастические интегралы изотропных потоков. В самом деле, стохастические интегралы соответствуют нулям куммулянтной функции $w(m_1, \dots, m_d)$.

Уравнение $w(m_1, \dots, m_d) = 0$ описывает $d - 1$ мерную поверхность в d мерном пространстве индексов (m_1, \dots, m_d) . Таким образом стохастических интегралов в общем случае бесконечно много, и они, вообще говоря, определяются формой куммулянтной функции, т.е. статистикой потока. Однако сейчас мы докажем, что всегда существуют универсальные интегралы, одни и те же для всех изотропных потоков.

Из симметричности S следует что

$$w(m_1, \dots, m_d) = w(m'_1, \dots, m'_d), \text{ если } m'_k + \eta_k = m_{\pi(k)} + \eta_{\pi(k)} \text{ или } m'_k = m_{\pi(k)} + k - \pi(k),$$

где $\pi(k)$ -произвольная перестановка d элементов. Взяв в качестве m_k нули, получим отсюда

$$w(1 - \pi(1), \dots, d - \pi(d)) = 0,$$

т.к. $w(0) = 0$.

Кроме этого, из условия несжимаемости следует вырождение:

$$w(m_1, \dots, m_d) = w(m_1 + \alpha, \dots, m_d + \alpha), \forall \alpha,$$

Поэтому универсальные нули куммулянтной функции представляют собой $d!$ прямых, параллельных $(1, \dots, 1)$ и проходящих через $d!$ точек $(1 - \pi(1), \dots, d - \pi(d))$.

Вспоминая теперь связь компонент Ивасава с элементами площадей s_k , получим,

$$\langle D_1^{m_1} \dots D_d^{m_d} \rangle = \langle s_1^{m_1-m_2} \dots s_{d-1}^{m_{d-1}-m_d} \rangle,$$

Видно, что для s_k вырождение снимается и получается конечное, по числу перестановок из d элементов, число универсальных стохастических интегралов.

$$\langle (s_1)^{\pi(2)-\pi(1)-1} \dots (s_{d-1})^{\pi(d)-\pi(d-1)-1} \rangle = 1.$$

В частности, циклическим перестановкам соответствую интегралы

$$\langle (s_k)^{-d} \rangle = \langle (\rho_k)^d \rangle = 1, k = 1, \dots, d - 1$$

о которых мы уже упоминали в первой лекции.

- ЯВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ $d=3$.

Рассмотрим наиболее важный для приложений случай $d = 3$.

Предположим, что нам требуется найти матожидание монома $\langle s_1^{m_1}(P)s_2^{m_2}(P)s_3^{m_3}(P) \rangle$.

Меру Хаара на трехмерной группе вращений проще всего задавать с помощью УГЛОВ ЭЙЛЕРА. Напомним, как они определяются.

Известно, что группа вращений порождается поворотами вокруг любых двух из трех координатных осей. Если в качестве таковых выбрать e_1 и e_3 то произвольную матрицу вращений можно представить как произведение трех вращений:

1. Вращение на угол α вокруг оси e_3 :

$$O_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi,$$

2. Вращение на угол θ вокруг оси e_1

$$O_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

3. Повторное вращение на угол φ вокруг оси e_3 :

$$O_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

$$O(\varphi, \theta, \alpha) = O_3(\varphi)O_2(\theta)O_1(\alpha).$$

Углы φ, θ, α можно выбрать в качестве локальных координат на групповом многообразии $SO(3)$. Известно, что в этих координатах мера Хаара имеет вид

$$d\mu_H(O) = \sin \theta \, d\theta \, d\alpha \, d\varphi.$$

Частичное усреднение $\langle s_1^{m_1}(P)s_2^{m_2}(P)s_3^{m_d}(P) \rangle$ по мере Хаара (при фиксированных Λ, ω), таким образом, можно записать так:

$$\langle s_1^{m_1} s_2^{m_2} s_3^{m_d} \rangle_O = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \, s_1^{m_1}(P)s_2^{m_2}(P)s_3^{m_d}(P).$$

В трехмерном случае внешние произведения представляются в виде векторного и смешанного произведений:

$$s_1(O, \Lambda, \omega) = |Pe_1|,$$

$$s_2(O, \Lambda, \omega) = |Pe_1 \times Pe_2|, \text{ - векторное произведение.}$$

$$s_3(O, \Lambda, \omega) = |(Pe_1, Pe_2, Pe_2)| \text{ - смешанное произведение.}$$

При усреднении этих выражений по инвариантной мере Хаара, переменные ω выпадают, поэтому достаточно усреднить выражения

$$s_1(O, \Lambda, 1) = (\Lambda Oe_1, \Lambda Oe_1)^{\frac{1}{2}},$$

$$s_2(O, \Lambda, 1) = (|\Lambda Oe_1|^2 |\Lambda Oe_2|^2 - (\Lambda Oe_1, \Lambda Oe_2)^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$s_3(O, \Lambda, 1) = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \text{ - не зависит от } O.$$

С помощью такого усреднения можно вычислять моменты элементов длины, площади и объема для трехмерных и двумерных изотропных распределений, а также непосредственно «в лоб» проверить для них утверждение Леммы. Ясно что они останутся единицами и после остаточного усреднения по оставшимся переменным (Λ, ω) с любой плотностью $\rho(\Lambda, \omega)$. В этом смысле они являются универсальными стохастическими интегралами изотропных потоков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Итак, настоящая работа содержит оригинальные результаты, посвященные теории стохастических дифференциальных уравнений и их применению к задачам теории турбулентного транспорта в гладких стохастических потоках.

а.) Предложен новый метод определения асимптотического поведения решений уравнения Казанцева-Крайчнана. Он является обобщением известного метода стохастического квантования и позволяет эффективно вычислять инкремент роста однородных флуктуаций пассивного поля в стохастическом потоке с произвольной структурной функцией. В качестве примера вычислена кривая устойчивости магнитных флуктуаций в модели Вайштейна-Кичатинова.

Публикации: [72].

б.) Построена последовательная теория линейных стохастических дифференциальных уравнений с матричным мультипликативным шумом. Такие уравнения возникают в процессе решения многих задач турбулентного транспорта. Основная проблема при анализе многомерных систем заключается в некоммутативности матричного произведения и, в связи с этим, с невозможностью применить обычную теорию больших уклонений для изучения асимптотики решений при $t \rightarrow \infty$. Мы развиваем теорию, обобщающую теорию больших уклонений на некоммутативный случай. Показано, что это возможно лишь для изотропных матричных процессов. Мы вводим понятие эффективного матричного дельта-процесса, и доказываем, что он дает точную асимптотику для ляпуновских и обобщенных ляпуновских показателей негауссового мультипликативного матричного шума с ненулевым, конечным корреляционным временем.

Публикации: [62], [63], [75], [76].

в.) Предложено негауссово обобщение модели Казанцева-Крайчнана, т.н. V3-модель, в рамках которой оказывается возможным учесть T-неинвариантность

стохастического потока. Единственным свободным параметром в этой модели является отношение Ляпуновских экспонент λ_2/λ_1 , которое, согласно численным расчетам для турбулентности Навье-Стокса [56] мало и примерно равно 0.14.

В рамках этой модели вычислены показатели затухания скалярного и магнитного локализованных возмущений на бетчелоровском этапе эволюции. Изучен эффект насыщения высших моментов, связанный с сильной перемежаемостью таких систем.

Публикации: [62], [64], [66], [68].

г.) Изучено поведение скалярного возмущения с нелинейным самодействием типа реакция-диффузия, помещенного в турбулентный поток. Показано, что на бетчелоровском этапе волна реакции распространяется экспоненциально быстро, что приводит к экспоненциальному росту популяции, не смотря на насыщение плотности. Вычислены высшие моменты плотности и величины популяции, которые также демонстрируют наличие сильной перемежаемости в системе. Эти результаты имеют большое значение для задач химии, биологии, экологии и др.

Публикации: [67].

д.) Установлена связь энергии локализованного возмущения и плотности энергии безграничных, однородных и изотропных флуктуаций пассивного поля, помещенного в одинаковые стохастические потоки. Это соотношение («энергетическое соответствие») позволяет описать эволюцию магнитного поля и магнитной энергии локализованного возмущения и пролить свет на природу турбулентного динамо при больших числах Прандтля. Оказывается, что она различна на разных этапах эволюции. После определения характера эволюции гладких линий и поверхностей в потоке, мы показываем, что на бетчелоровском этапе генерация поля происходит благодаря некогерентному наложению в ансамбле вытягивающихся возмущений, в то время как на постбетчелоровском

этапе она возникает благодаря самоналожению каждого возмущения в отдельности.

Это приводит к существенному отличию в поведении двумерных и трехмерных флуктуаций. Топология двумерного самоналожения локализованных возмущений всегда приводит к ослаблению поля, в то время как в трехмерном случае, происходит усиление (см. рис. 2)

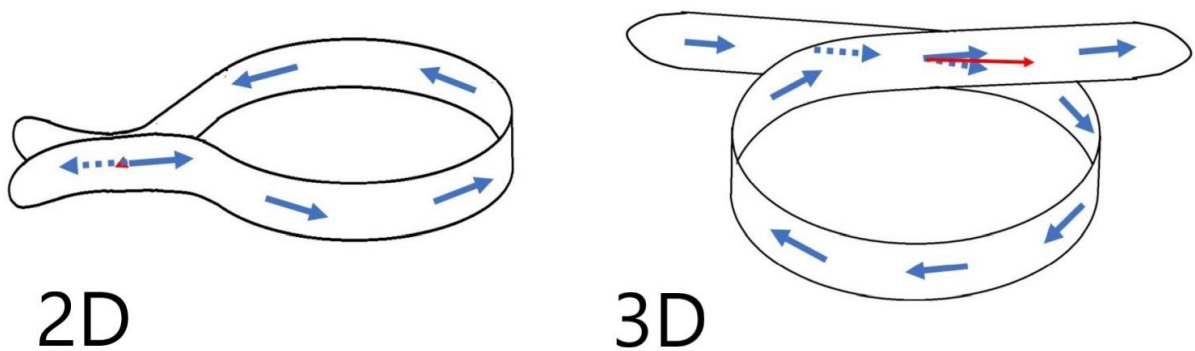


Рис. 2

Все сказанное удобно представить в виде таблицы:

СТАДИЯ ЭВОЛЮЦИИ	ИЗОЛИРОВАННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ	ОДНОРОДНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ	МЕХАНИЗМ ГЕНЕРАЦИИ
БЕТЧЕЛОРОВСКАЯ, ИДЕАЛЬНЫЙ ПРОВОДНИК	Объем постоянен, напряженность растет экспоненциально.	Напряженность растет экспоненциально.	Вытягивание замороженных магнитных линий.
БЕТЧЕЛОРОВСКАЯ ДИФфуЗИОННАЯ 3D	Объем возрастает экспоненциально, напряженность экспоненциально падает.	Напряженность растет экспоненциально.	Некогерентное наложение локализованных возмущений.
БЭТЧЕЛОРОВСКАЯ ДИФфуЗИОННАЯ, 2D	Объем возрастает экспоненциально, напряженность падает по степенному закону.	Напряженность растет экспоненциально.	Некогерентное наложение локализованных возмущений.
ПОСТБЕТЧЕЛОРОВСКАЯ 3D	Объем возрастает по степенному закону, напряженность растет экспоненциально.	Напряженность растет экспоненциально.	Скоррелированное самоналожение каждого локализованного возмущения.
ПОСТБЭТЧЕЛОРОВСКАЯ 2D	Объем возрастает по степенному закону, напряженность падает по степенному закону.	Напряженность падает по степенному закону.	Антикоррелированное самоналожение каждого локализованного возмущения.

Табл. 1

Публикации: [72]

е.) Найдены новые точные универсальные интегралы движения k -мерных гиперповерхностей в гладких изотропных d -мерных потоках. Показано, что каждой перестановке из d элементов соответствует точный стохастический интеграл. Например, для трехмерного случая существует 6 интегралов:

Перестановка	Стохастический интеграл
123	$\langle 1 \rangle$
132	$\langle s_1 s_2^{-2} s_3 \rangle$
213	$\langle s_1^{-2} s_2 \rangle$
231	$\langle s_2^{-3} s_3^2 \rangle$
312	$\langle s_1^{-3} s_3 \rangle$
321	$\langle s_1^{-2} s_2^{-2} s_3^2 \rangle$

Публикация [76].

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Fisher, *Ann. Eugenics* 7, 355 (1937).
2. A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii, and N. S. Piskunov, *Bulletin of Moscow State University Series A: Mathematics and Mechanics* 1, 1 (1937).
3. Cramér, Harald, *Colloque consacré à la théorie des probabilités, Part 3, Actualités scientifiques et industrielles (in French)*. 731: 5–23. (1938)
4. Marcinkevich, J.: *Math. Z.* 44(H.4), 612 (1938)
5. H. Alfvén, *Nature*, 150 (3805): 405 (1942)
6. G.K. Batchelor, *Proc. Roy. Soc. London A* 261, 405 (1950)
7. K. Furutsu, *J. Res. Natl. Bur. Std.* 67D, 303 (1963)
8. Furstenberg, H.: *Trans. Am. Math. Soc.* 108, 377 (1963)
9. H.K. Moffat and P.J. Saffman, *Phys.Fluids* 7 (1), 155 (1964)
10. E. A. Novikov, *J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.)* 47, 1919 (1965) [*Sov. Phys. JETP* 20, 1290 (1965)]
11. E. Wong, M. Zakai, *Ann. Math. Statist.* 36 5 (1965)
12. А.П. Казанцев, *ЖЭТФ*, 53(5 (11)), 1806, (1967)
13. R. Kraichnan, *Phys. Fluids* 10 1417 (1967)
14. V. I. Oseledets, *Trans. Moscow Math. Soc.* 19, 197 (1968)
15. N. G. Van Kampen, *Physica* 74, 215 (1974)
16. Tutubalin, V.N.: *Theory Probab. Appl.* 22, 203 (1978)
17. H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1978
18. Simon B. *Functional Integration and Quantum Physics*. — Academic Press, 1979
19. E. N. Parker, *Cosmic Magnetic Fields, Their Origin and Activity*. Clarendon, Oxford, 1979
20. G. Parisi, Y.S. Wu, *Sci. Sinica*, 24 483 (1981)
21. Ya. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin, S. A. Molchanov and D. D. Sokoloff *J. Fluid Mech.* 144,1 (1984)

22. Молчанов С.А., Тутубалин В.Н., Теория вероятности и ее приложения, 29 2 (1984)
23. S. I. Vainshtein, L. L. Kichatinov, *J. Fluid Mech.* 168, 73 (1986)
24. P. Baxendale, T.E. Harris, *Ann. Probab.*, 14 4 (1986)
25. N. Newman, *Commun. Math. Phys.* 103, 121 (1986)
26. V. I. Belinicher and V. S. L'vov, *Sov. Phys. JETP* 66, 303 (1987)
27. Зельдович Я Б, Молчанов С А, Рузмайкин А А, Соколов Д Д *УФН* 152 3–32 (1987)
28. J. Zinn-Justin, *Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon, Oxford, 1989)
29. Girimaji, S., & Pope, S., *JFM*, 220, 427 (1990)
30. Gantmacher, F.R.: *Matrix Theory*, 2nd edn. AMS, Providence (1990)
31. Crisanti, A., Paladin, G., Vulpiani, A.: *Products of Random Matrices in Statistical Physics*. Springer, Heidelberg (1993)
32. U. Frisch, "Turbulence. The Legacy of A. N. Kolmogorov" Cambridge University Press, (1995)
33. Polyakov A M *Phys. Rev. E* 52 6183 (1995)
34. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev *Phys. Rev. E* 51, (1995)
35. M. Vergassola *Phys. Rev. E* 53, R3021(R) (1996)
36. Gamba, A., Kolokolov, I.: *J. Stat. Phys.* 85, 489 (1996)
37. M. Liao, *Ann. Probab.* 25, 1241 (1997)
38. Д. Гликвич, Теория стохастических процессов, Воронеж, 1998
39. E. Balkovsky and A. Fouxon, *Phys. Rev. E* 60, 4164 (1999)
40. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov and M. Vergassola *Phys. Rev. Lett.* 83, 4065 (1999)
41. G. Falkovich, K. Gawędzki, and M. Vergassola *Rev. Mod. Phys.* 73, 913 (2001)
42. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003
43. Gamba, A.: *J. Stat. Phys.* 112(1–2), 193 (2003)

44. A.A. Schekochihin, S.C. Cowley, and S.F. Taylor, *Astrophys. J.* 612, 276 (2004)
45. Klebaner, F.C. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. — London, UK: Imperial College Press, 2005
46. Protter P. E. *Stochastic Integration and Differential Equations*. — Springer, 2005
47. V. I. Klyatskin, *Dynamics of Stochastic Systems* (Elsevier, Amsterdam, 2005)
48. В. Я. Файнберг, *ТМФ*, 149. 3, 483–501 (2006)
49. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. *Магнитные поля в астрофизике*. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, (2006)
50. K. P. Zybin, V. A. Sirota, A. S. Il'in, and A. V. Gurevich, *Sov. Phys. JETP* 105, 455 (2007)
51. S. R. S. Varadhan, *Ann. Probab.* 36, 397 (2008)
52. K. P. Zybin, V.A. Sirota, A. S. Ilyin, and A. V. Gurevich, *Phys. Rev. Lett.* 100, 174504 (2008)
53. K. P. Zybin, V. A. Sirota, A. S. Il'in, and A. V. Gurevich, *Sov. Phys. JETP* 107, 879 (2008)
54. K. P. Zybin, V. A. Sirota, and A. S. Ilyin. *Phys. Rev. E* 82, 056324 (2010)
55. K. P. Zybin, V. A. Sirota, and A. S. Ilyin. *Physica Scripta*, 2010, T142 (2010)
56. K. P. Zybin, V. A. Sirota, and A. S. Ilyin, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 241, 3, 269-275 (2012)
57. J. Schober, D. Schleicher, S. Bovino, & R.S. Klessen, *Phys. Rev. E* 86(6), 066412 (2012)
58. G. Falkovich, A. Frishman, *PRL* 110, 214502 (2013)
59. Il'yn, A S., Zybin, K P.: *Phys. Lett. A* 379, 650 (2015)
60. Johnson P. L., Meneveau C., *Phys. Fluids*, 27 8 (2015)
61. Зыбин К П, Ильин А С *УФН* 186 1349–1353 (2016)
62. Il'yn A S, Sirota V A and Zybin K P, *Journ. Stat. Phys.* 163 765 (2016)
63. Il'yn A S, Sirota V A and Zybin K P, *Journ. Stat. Phys.* 166 24 (2017)

64. Il'yn A S, Sirota V A and Zybin K P, Phys. Rev. E 96 013117 (2017)
65. I.V. Kolokolov, J. Phys. A: Math. Theor. 50, 155501 (2017)
66. Il'yn A S, Sirota V A and Zybin K P, EL. 121 34002 (2018)
67. Il'yn A S, Sirota V A and Zybin K P, Phys. Rev. E 99, 052220 (2019)
68. Il'yn A S, Sirota V A and Zybin K P Phys. Scr. 94 064001 (2019)
69. Kopyev A V, Il'yn A S, Sirota V A and Zybin K P Phys. Rev. E 101, 063102 (2020)
70. Zybin, K. P., Il'yn, A. S., Kopyev, A. V., & Sirota, V. A., EL, 132, 24001 (2020)
71. Il'yn A S, Kopyev A V, Sirota V A and Zybin K P., Phys. Fluids 32, 125114 (2020)
72. Il'yn, A. S., Kopyev, A. V., Sirota, V. A., & Zybin, K. P., PhFl, 33, 075105 (2021)
73. Kopyev A V, Kiselev A M, Il'yn A S, Sirota V A and Zybin K P ApJ 927 172 (2022)
74. Kopyev A V, Il'yn A S, Sirota V A and Zybin K P Phys. Fluids 34, 035126 (2022)
75. Il'yn A S, Kopyev A V, Sirota V A and Zybin K P, Phys. Rev. E 105, 054130 (2022)
76. Il'yn A S, Kopyev A V, Sirota V A and Zybin K P, Phys. Rev. E, L023101 (2023)
77. Anton S. Il'yn Selected topics in stochastic. Lecture notes in Russian.
DOI: [10.13140/RG.2.2.31174.86088](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.31174.86088)
78. Anton S. Il'yn Geometry of stochastic flows. Lecture notes in Russian.
DOI: [10.13140/RG.2.2.34530.30404](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34530.30404)
79. Kopyev A V, Il'yn A S, Sirota V A and Zybin K P, MNRAS, 527 1 (2024)

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ФОРМУЛА ФУРУТЦЫ-НОВИКОВА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ.

- Конечномерная формула ФН

Рассмотрим сначала конечномерный случайный вектор \vec{f} . Предположим, что нам надо вычислить корреляции вида $\langle f_k g(\vec{f}) \rangle$, где $g(\vec{f})$ - некоторая случайная величина (функция случайного вектора). Пусть \vec{f} - Гауссовый центрированный случайный вектор со средним значением $\langle f_k f_p \rangle$ и связным парным коррелятором $\langle f_k f_p \rangle_c = D_{kp}$. Удобно его центрировать, записав

$$\vec{f} = \langle \vec{f} \rangle + \delta \vec{f}.$$

$$\text{Тогда } \langle f_k g(\vec{f}) \rangle = \langle f_k \rangle \langle g(\vec{f}) \rangle + \langle \delta f_k g(\vec{f}) \rangle.$$

У вектора δf , как мы знаем, плотность вероятности

$$\rho_{\delta \vec{f}}(\vec{x}) = C e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}, D^{-1} \vec{x})}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det D}}.$$

Для $\langle \delta f_k g(\vec{f}) \rangle$ получим

$$\begin{aligned} \langle \delta f_k g(\vec{f}) \rangle &= C \int d^n x g(\langle \vec{f} \rangle + \vec{x}) x_k e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}, D^{-1} \vec{x})} = -C \int d^n x g(\langle \vec{f} \rangle + \\ &\vec{x}) D_{kp} \frac{\partial}{\partial x_p} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}, D^{-1} \vec{x})} = \\ &= C \int d^n x e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}, D^{-1} \vec{x})} D_{kp} \frac{\partial}{\partial x_p} g(\langle \vec{f} \rangle + \vec{x}) = \left\langle D_{kp} \frac{\partial}{\partial f_p} g(f) \right\rangle = \langle f_k f_p \rangle_c \left\langle \frac{\partial}{\partial f_p} g(f) \right\rangle. \end{aligned}$$

Тогда окончательно

$$\langle f_k g(\vec{f}) \rangle = \langle f_k \rangle \langle g(\vec{f}) \rangle + \langle f_k f_p \rangle_c \left\langle \frac{\partial}{\partial f_p} g(f) \right\rangle.$$

Обобщение этой формулы для многокомпонентного Гауссового случайного поля $f_k(x, t)$ и его функционала $g[f]$ имеет вид

$$\langle f_k(x, t)g[f] \rangle = \langle f_k(x, t) \rangle \langle g[f] \rangle + \int dyd\tau \langle f_k(x, t)f_p(y, \tau) \rangle_c \left\langle \frac{\delta g[f]}{\delta f_p(y, \tau)} \right\rangle$$

Это соотношение называется формулой Фурутцы-Новикова.

Можно получить аналогичную формулу для произвольного негауссова случая.

Начнем вновь с конечномерного вектора \vec{f} и запишем разложение Тейлора

$$g(\vec{f} + \vec{y}) = \exp\left(\vec{f} \frac{\partial}{\partial \vec{y}}\right) g(\vec{y}), \text{ где } \vec{f} \text{ - случайный вектор, } \vec{y} \text{ - детерминированный вектор.}$$

Тогда

$$\langle f_k g(\vec{f} + \vec{y}) \rangle_{\vec{f}} = \left\langle \exp\left(\vec{f} \frac{\partial}{\partial \vec{y}}\right) f_k \right\rangle_{\vec{f}} g(\vec{y})$$

Рассмотрим величину $\langle \exp(\vec{\mu} \vec{f}) f_k \rangle_{\vec{f}}$:

$$\langle \exp(\vec{\mu} \vec{f}) f_k \rangle_{\vec{f}} = \frac{\partial}{\partial \mu_k} \langle \exp(\vec{\mu} \vec{f}) \rangle_{\vec{f}} = \frac{\partial}{\partial \mu_k} \exp w(\vec{\mu}) = w'_{\mu_k}(\vec{\mu}) z(\vec{\mu}).$$

Таким образом

$$\langle f_k g(\vec{f} + \vec{y}) \rangle_{\vec{f}} = w'_{\mu_k} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{y}} \right) z \left(\frac{\partial}{\partial \vec{y}} \right) g(\vec{y})$$

Величина

$$z \left(\frac{\partial}{\partial \vec{y}} \right) g(\vec{y}) = \langle g(\vec{f} + \vec{y}) \rangle_{\vec{f}},$$

поэтому

$$\langle f_k g(\vec{f} + \vec{y}) \rangle_{\vec{f}} = w'_{\mu_k} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{y}} \right) \langle g(\vec{f} + \vec{y}) \rangle_{\vec{f}} = \left\langle w'_{\mu_k} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{y}} \right) g(\vec{f} + \vec{y}) \right\rangle_{\vec{f}} = \left\langle w'_{\mu_k} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{f}} \right) g(\vec{f} + \vec{y}) \right\rangle_{\vec{f}}.$$

Полагая $\vec{y} = 0$, получим

$$\langle f_k g(\vec{f}) \rangle_{\vec{f}} = \left\langle w'_{\mu_k} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{f}} \right) g(\vec{f}) \right\rangle_{\vec{f}}.$$

Напомним, что разложение куммулянтной функции в ряд Маклорена имеет вид

$$w(\mu_1 \dots \mu_n) = \sum_n \sum_{k_1 \dots k_n} \frac{1}{n!} \langle f_{k_1} \dots f_{k_n} \rangle_c \mu_{k_1} \dots \mu_{k_n},$$

откуда для производной получим

$$w'_{\mu_k}(\mu_1 \dots \mu_n) = \sum_n \sum_{k_1 \dots k_n} \frac{1}{n!} \langle f_k f_{k_1} \dots f_{k_n} \rangle_c \mu_{k_1} \dots \mu_{k_n}, \quad \text{и}$$

$$w'_{\mu_k} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{f}} \right) = \sum_n \sum_{k_1 \dots k_n} \frac{1}{n!} \langle f_k f_{k_1} \dots f_{k_n} \rangle_c \frac{\partial}{\partial f_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial f_{k_n}}$$

Окончательно

$$\langle f_k g(f) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1 \dots k_n} \frac{1}{n!} \langle f_k f_{k_1} \dots f_{k_n} \rangle_c \left\langle \frac{\partial^n g}{\partial f_{k_1} \dots \partial f_{k_n}} \right\rangle.$$

- Бесконечномерная формула Ф-Н

Эта формула также непосредственно обобщаются на случайные поля и их функционалы:

Например, если задан случайный процесс $f(t)$ и некоторый функционал $g[f]$, то

$$\langle f(t) g[f] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int dt_1 \dots dt_n \frac{1}{n!} \langle f(t) f(t_1) \dots f(t_n) \rangle_c \left\langle \frac{\delta^n g}{\delta f(t_1) \dots \delta f(t_n)} \right\rangle. \quad (\text{A1})$$

Для эффективных дельта-процессов, с сингулярными связными корреляционными функциями вида

$$\langle f(t) f(t_1) \dots f(t_n) \rangle_c = w^{(n)} \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_1 - t_n)$$

формула приобретает локальный вид

$$\langle f(t) g[f] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n+1)}}{n!} \left\langle \frac{\delta^n g}{\delta f(t)^n} \right\rangle \quad (\text{A2})$$

Однако, это выражение справедливо только для регулярных, аналитических функционалов $g[f]$. В большинстве динамических теорий необходимо расщеплять корреляции с причинными функционалами, т.е. явно, зависящими от времени и удовлетворяющими условию причинности:

$$\frac{\delta g[f,t]}{\delta f(\tau)} = 0, \text{ if } \tau > t.$$

Для таких функционалов

$$\frac{\delta^n g[f,t]}{\delta f(\tau)^n} = \theta(t - \tau) G^{(n)}[f, t, \tau],$$

поэтому

$$\langle f(\tau)g[f, t] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n+1)}}{n!} G^{(n)}[f, t, \tau], \text{ if } \tau < t \quad (\text{A2})$$

$$\langle f(\tau)g[f, t] \rangle = \langle f(\tau) \rangle \langle g[f, t] \rangle, \text{ if } \tau > t.$$

Для $\tau = t$ это выражение оказывается плохо определенным, так как содержит значение $\theta(0)$.

- Регуляризация

Чтобы получить правильное выражение для этого случая, необходимо регуляризовать сингулярные корреляционные функции. Мы будем использовать следующую регуляризацию

$$\langle f(t)f(t_1)\dots f(t_n) \rangle_c = \frac{w^{(n)}}{n} \sum_{k=1}^n \prod_{l=1, l \neq k}^n \delta_{\epsilon}(t_k - t_l), \delta_{\epsilon}(t) \rightarrow \delta(t), \epsilon \rightarrow 0.$$

Тогда, получим

$$\int^t dt_1 \dots \int^t t_n \prod_{l=1}^n \delta_{\epsilon}(t - t_l) \rightarrow \frac{1}{2^n}$$

$$\int^t dt_1 \dots \int^t t_n \delta_{\epsilon}(t - t_k) \prod_{l=1, l \neq k}^n \delta_{\epsilon}(t_k - t_l) \rightarrow \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

откуда

$$\langle f(t)g[f, t] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n+1)}}{(n+1)!} G^{(n)}[f, t, t]. \quad (\text{A3})$$

Сравнивая это выражение с (A2) мы видим, что корреляции дельта-процессов с причинными функционалами испытывают разрыв при $\tau = t$, при этом, наивное соглашение $\theta(0) = 1/2$ оказывается верным только для Гаусового случая. Это соотношение было использовано нами при выводе обобщенного уравнения КК, соответствующего V3-модели поля скоростей [73], [74].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ТЕОРИЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ И ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ.

В этом приложении мы обсудим свойства одномерных стохастических уравнений с аддитивным и мультипликативным шумом. Рассмотрим стационарный случайный процесс $f(t)$ с конечным корреляционным временем τ_c , и набором связанных корреляционных функций $W_n(t_1 - t_2, \dots, t_1 - t_n)$.

- Низкочастотная асимптотика куммулянтного функционала

Куммулянтный функционал имеет вид

$$W[\mu(t)] = \sum_n \int dt_1 \dots dt_n \frac{1}{n!} W_n(t_1 - t_2, \dots, t_1 - t_n) \mu(t_1) \dots \mu(t_n),$$

Рассмотрим «большую» случайную величину

$$F = \int_0^T dt f(t)$$

при больших T .

Вычислим ее куммулянтную функцию

$$w_F(\mu) = \ln \langle e^{\mu F} \rangle = \ln \left\langle e^{\mu \int_0^T dt f(t)} \right\rangle = W[\mu I_{[0,T]}(t)]$$

Сделаем асимптотическую оценку этого выражения при больших $T \gg \tau_c$.

Первый член в разложении $W[\mu I_{[0,T]}(t)]$ имеет вид:

$$\int dt_1 W_1 \mu(t_1) = \int_0^T dt_1 \langle f \rangle \mu = \langle f \rangle \mu T$$

Рассмотрим второй член

$$\frac{1}{2!} \int \int dt_1 dt_2 W_2(t_1 - t_2) \mu^2 I_{[0,T]}(t_1) I_{[0,T]}(t_2) = \frac{\mu^2}{2!} \int \int dt_1 d\tau W_2(\tau) I_{[0,T]}(t_1) I_{[0,T]}(t_1 - \tau)$$

Имеем

$\int dt_1 I_{[0,T]}(t_1) I_{[0,T]}(t_1 - \tau) = (T - |\tau|) \theta(T - |\tau|)$, поэтому

$$\frac{\mu^2}{2!} \int \int dt_1 d\tau W_2(\tau) I_{[0,T]}(t_1) I_{[0,T]}(t_1 - \tau) = \frac{\mu^2}{2!} \int_{-T}^T d\tau W_2(\tau) (T - |\tau|) = \frac{\mu^2}{2!} (w_2 T + \varepsilon_2(T)),$$

где, как и ранее

$$w_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau W_2(\tau), \text{ а}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_2(T)}{T} = 0$$

Для остальных членов можно проделать такие же оценки и получить

$$W[\mu I_{[0,T]}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n!} \mu^n T + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(T)}{n!} \mu^n, \quad w_n = \int dt_2 \dots dt_n W_n(t_1 - t_2, \dots, t_1 - t_n), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_n(T)}{T} = 0$$

Введем функции

$$w(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n!} \mu^n T, \quad \varepsilon(\mu, T) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(T)}{n!} \mu^n.$$

Тогда

$$W[\mu I_{[0,T]}(t)] = w(\mu) T + \varepsilon(\mu, T), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon(\mu, T)}{T} = 0 \quad (\text{Б1})$$

Определим статистику величины $\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t)$ при $T \rightarrow \infty$.

Такой интеграл называется «временным средним» процесса $f(t)$. При всех конечных T это случайная величина. Получим выражение для ее куммулянтной функции

$$w_{\bar{f}}(\mu) = \ln \langle e^{\mu \bar{f}} \rangle = \ln \left\langle e^{\mu \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t)} \right\rangle = W \left[\frac{\mu}{T} I_{[0,T]}(t) \right]$$

Согласно (Б1)

$$W \left[\frac{\mu}{T} I_{[0,T]}(t) \right] = w \left(\frac{\mu}{T} \right) T + \varepsilon \left(\frac{\mu}{T}, T \right)$$

Таким образом

$$w_{\bar{f}}(\mu) \sim w \left(\frac{\mu}{T} \right) T.$$

Это выражение позволяет сделать оценку для плотности вероятности \bar{f} при больших, но конечных T :

$$\rho_{\bar{f}}(x) = \left\langle \delta \left(x - \int_0^T dt f(t) \right) \right\rangle \sim \int d\mu e^{-i\mu x + w \left(\frac{\mu}{T} \right) T}.$$

- Функция Крамера (rate function)

Для оценки интеграла можно воспользоваться методом стационарной фазы и получить:

$$\rho_{\bar{f}}(x) \sim e^{-Tj(x)},$$

где $j(x) = \sup_{\mu} (\mu x - w(\mu))$ - преобразование Лежандра локальной кумулянтной функции $w(\mu)$.

Эта функция называется функцией Крамера процесса $f(t)$.

Про процессы, у которых существуют хорошо определенная функция Крамера говорят, что они удовлетворяют «принципу больших уклонений». Функция Крамера обладает следующими свойствами:

- 1.) $j(x)$ имеет минимум в точке $x_0 = \langle f \rangle$. Это равносильно эргодичности $f(t)$.
- 2.) Вблизи минимума $j(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2D} + o(x-x_0)^2$, где $D = w_2$ - дисперсия. Это равносильно центральной предельной теореме.
- 3.) $j(x)$ – выпуклая функция.

- Одномерное мультипликативное блуждание

Рассмотрим стохастическую задачу Коши

$$\dot{x}(t) = \xi(t)x(t), x(0) = 1,$$

где $\xi(t)$ - стационарный случайный процесс с набором связных корреляционных функций $\langle \xi(t_1) \dots \xi(t_n) \rangle_c = W_n(t_1 - t_2 \dots t_1 - t_n)$.

Функционал $x[\xi, t]$ легко найти в явном виде:

$x(t) = e^{\int_0^t d\tau \xi(\tau)}$, откуда для моментов $\langle x^\mu(t) \rangle$ получим выражение

$$\langle x^\mu(t) \rangle = \left\langle e^{\mu \int_0^t d\tau \xi(\tau)} \right\rangle = Z[\mu I_{[0,t]}(\tau)] = e^{W[\mu I_{[0,t]}(\tau)]},$$

Отношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \ln x(t) \rangle}{t} \equiv \lambda$$

описывает стохастическую экспоненциальную эволюцию решения и называется показателем Ляпунова.

Легко видеть, что для нашего уравнения $\lambda = \langle \xi \rangle$.

Будем теперь интересоваться асимптотическим поведением высших моментов при $T \gg \tau_c$ с т.н. «логарифмической точностью». С этой целью рассмотрим предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle x^\mu(t) \rangle}{t} \text{ (он называется обобщенный ляпуновский показатель).}$$

Легко показать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle x^\mu(t) \rangle}{t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{W[\mu I_{[0,t]}(\tau)]}{t} = \sum_n w_n \frac{\mu^n}{n!} = w(\mu),$$

где, как и ранее, $w_n = \int dt_2 \dots dt_n W_n(t_2 \dots t_n)$.

Моменты растут экспоненциально, причем различные моменты растут с различными показателями.

- Одномерное аддитивное блуждание

Рассмотрим теперь задачу

$$\dot{x}(t) = \xi(t), x(0) = 0$$

где $\xi(t)$ - снова стационарный случайный процесс с набором связанных корреляционных функций $W_n(t_1 - t_2, \dots, t_1 - t_n)$

Ее можно интерпретировать как задачу об эволюции координаты частицы нулевой массы, движущейся в вязкой среде под действием случайного шума (т.н. диффузия).

Вычислим главную асимптотику моментов $\langle x^n(t) \rangle$ при временах, больше корреляционного.

Имеем явное решение

$$x(t) = \int_0^t d\tau \xi(\tau)$$

откуда

$$\begin{aligned} \langle x^n(t) \rangle &= \left. \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \right|_{\mu=0} \langle e^{\mu x} \rangle = \left. \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \right|_{\mu=0} \left\langle e^{\mu \int_0^t \xi(\tau) d\tau} \right\rangle = \left. \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \right|_{\mu=0} Z[\mu I_{[0,t]}(\tau)] \\ &= \left. \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \right|_{\mu=0} e^{W[\mu I_{[0,t]}(\tau)]} = \\ &= \left. \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \right|_{\mu=0} e^{w(\mu)t + \varepsilon(\mu,t)}. \end{aligned}$$

При n -кратном дифференцировании будут появляться слагаемые с различными степенями t

$$\langle x^n(t) \rangle \sim w_1^n t^n + \frac{n!}{2!(n-2)!} w_1^{n-2} w_2 t^{n-1} + \frac{n!}{3!(n-3)!} w_1^{n-3} w_3 t^{n-2} + \dots$$

При больших временах $t \rightarrow \infty$ наиболее быстро растущий член

$$\langle x^n(t) \rangle \sim w_1^n t^n = \langle \xi \rangle^n t^n \text{ (или, более строго, } \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{x(t)}{t} \right)^n \right\rangle = \langle \xi \rangle^n)$$

Таким образом, моменты при $t \rightarrow \infty$ определяются средним значением процесса ξ .

Это можно рассматривать как альтернативную формулировку эргодичности ξ .

Если среднее значение процесса равно нулю, то при $t \rightarrow \infty$ основной вклад будет определяться дисперсией:

$$\langle x^{2n}(t) \rangle \sim D^n t^n \text{ (или } \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{x(t)}{\sqrt{t}} \right)^{2n} \right\rangle = D^n)$$

Этот результат можно рассматривать, как альтернативную формулировку ЦПТ для ξ .

Таким образом, для анализа асимптотического поведения одномерных уравнений, можно заменить реальный шум на дельтапроцесс с локальной куммулянтной функцией $w(\mu)$. (для многомерных уравнений это, вообще говоря, неверно, см. главу 6)

Отметим основное отличие процессов с аддитивным и мультипликативным шумом. Эволюция первых в главной асимптотике определяется средним значением или дисперсией, если среднее значение равно нулю.

В противоположность этому, все связанные корреляторы мультипликативного шума дают одинаковую асимптотику по t и не могут быть отброшены при анализе эволюции моментов.

- Перемежаемость мультипликативного блуждания

Как мы видели, моменты случайной величины, эволюционирующей под влиянием аддитивного шума, асимптотически удовлетворяют соотношениям

$$\langle x^n(t) \rangle \sim w_1^n t^n = \langle \xi \rangle^n t^n, \text{ если } \langle \xi \rangle \neq 0 \text{ и } \langle x^{2n}(t) \rangle \sim D^n t^n, \text{ если } \langle \xi \rangle = 0.$$

Какие траектории дают наибольший вклад в эти моменты?

Чтобы ответить на этот вопрос запишем

$$x(t) = t \bar{\xi}(t),$$

где $\bar{\xi}(t)$ -эргодическое среднее на интервале $[0, t]$

$$\bar{\xi}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \xi(\tau) d\tau.$$

Как мы знаем из теории больших отклонений, плотность вероятности

$$\rho_{\bar{\xi}}(y) \sim e^{-tj(y)},$$

Тогда

$$\langle x^n(t) \rangle \sim \int dy e^{-tj(y)} y^n = \int dy e^{-t(j(y) - n \frac{\ln(y)}{t})},$$

Принимая во внимание теорему о перевале, можно заключить, что при больших t основной вклад в моменты дают траектории с временным средним, находящимся вблизи минимума функции Крамера: $\frac{1}{t} \int_0^t \xi(\tau) d\tau \approx \langle \xi \rangle$. Таким образом, «хвосты» распределения $\frac{1}{t} \int_0^t \xi(\tau) d\tau$ дают несущественный вклад в моменты $\langle x^n(t) \rangle$ и они определяются траекториями $\xi(t)$, у которых эргодическое среднее близко к $\langle \xi \rangle$.

Для систем с мультипликативным шумом ситуация существенно иная.

Чтобы определить, какие события дают основной вклад в моменты системы с мультипликативным шумом $\langle x^n(t) \rangle \sim e^{w^{(n)}t}$, запишем $x(t) = e^{t\bar{\xi}(t)}$.

Тогда

$$\langle x^n(t) \rangle \sim \int dy e^{-t(j(y)-ny)}.$$

В соответствии с теоремой о перевале получим, что главный вклад в n -ый момент $\langle x^n(t) \rangle$, дают траектории $\xi(\tau)$, для которых $\bar{\xi} = \xi^*(n)$, где $n = s'(\xi^*)$.

При $n \neq 0$ величина $\xi^* \neq \langle \xi \rangle$, поэтому основной вклад в такие моменты дают редкие траектории, соответствующие «хвостам» распределения $\bar{\xi}(t)$. Вероятность таких траекторий $\rho_{\bar{\xi}}(\xi^*) \sim e^{-tj(\xi^*)}$ экспоненциально убывает с ростом t . Такая ситуация называется перемежаемостью.

Рассмотрим в качестве примера Гауссов центрированный шум

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad w_{\xi}(\mu) = \frac{D}{2} \mu^2.$$

Все моменты мультипликативного блуждания с таким шумом экспоненциально растут:

$$\langle x^n(t) \rangle \sim e^{t \frac{Dn^2}{2}},$$

$$\text{при этом } \langle x^n(t) \rangle = \langle x^{-n}(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{x^n(t)} \right\rangle.$$

Легко понять причину такого парадоксального поведения.

Функция Крамера равна

$$j(y) = \frac{1}{2D} y^2,$$

поэтому

$$\xi^* = Dn, \quad \rho_{\bar{\xi}}(\xi^*) \sim e^{-t \frac{Dn^2}{2}}$$

Таким образом рост положительных моментов $\langle x^n(t) \rangle$, $n > 0$ происходит благодаря наличию экспоненциально редких (в силу эргодичности) «положительных» траекторий $\xi(\tau)$, у которых эргодическое среднее

$$\bar{\xi} = Dn \neq \langle \xi \rangle = 0,$$

в то время как рост отрицательных моментов $\langle x^{-n}(t) \rangle$ определяется экспоненциально редкими «отрицательными» траекториями

$$\bar{\xi} = -Dn.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ЯКОБИАН И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ.

Здесь мы покажем, что выражение для якобиана, полученное в [62] с помощью «наивных» выкладок, может быть строго доказано с использованием линейной σ -дискретизации уравнения (6.3).

- Линейная σ -дискретизация

Рассмотрим линейные по $\delta\tau$ разностные уравнения

$$dP_t = A_t \left(\left(\frac{1}{2} + \sigma \right) P_t + \left(\frac{1}{2} - \sigma \right) P_{t+1} \right) \delta\tau, \quad dP_t \equiv P_{t+1} - P_t. \quad (B1)$$

$\sigma = 1/2$ называется дискретизацией Ито, $\sigma = 0$ – дискретизацией Стратоновича.

Во-первых, мы покажем, что для бесследовых процессов $A(t)$ функциональный якобиан преобразования (6.33) в континуальном пределе $\delta\tau \rightarrow 0$ не зависит от способа дискретизации. Во-вторых, выяснится, что для процессов с ненулевым следом (т.е. для сжимаемых потоков) линейная (с точностью до $\delta\tau$) дискретизация для разных σ приводит к разным выражениям для якобиана. Поэтому в работе [39] мы использовали нелинейную дискретизацию (с точностью до $\delta\tau^2$), которая уже приводит к однозначному выражению для якобиана. Однако здесь мы опишем другой, более простой метод. Он заключается в явном выделении из $A(t)$ бесследовой части и ее последующей линейной дискретизации.

- Дискретизация Ито

Полагая в (B1) $\sigma = 1/2$, рассмотрим следующее разностное уравнение

$$dP_t P_t^{-1} = A_t \delta\tau. \quad (B2)$$

Используя разложение Ивасава $P_t = R_t \Delta_t Z_t$, несложно получить

$$R_{t+1} X_t R_t^{-1} = A_t \quad (B3)$$

$$X_t = \theta_t + \xi_t + \zeta_t$$

$$\theta_t \delta \tau \equiv R_{t+1}^{-1} dR_t, \quad \xi_t \delta \tau \equiv d\Delta_t \Delta_t^{-1}, \quad \zeta_t \delta \tau \equiv \Delta_{t+1} dZ_t Z_t^{-1} \Delta_t^{-1},$$

Откуда,

$$R_{t+1} = R_t (1 - \theta_t \delta \tau)^{-1} \quad (\text{B4})$$

и

$$A_t = R_t (1 - \theta_t \delta \tau)^{-1} X_t R_t^{-1} = R_t X_t R_t^{-1} + R_t ((1 - \theta_t \delta \tau)^{-1} - 1) X_t R_t^{-1}.$$

Из (B4) следует условие причинности

$\frac{\partial A_t}{\partial X_{t'}} = 0$ при $t' \geq t$, поэтому якобиан представится в виде произведения миноров

$$\det \frac{\partial A_t}{\partial X_{t'}} = \prod_t \det \frac{\partial A_t}{\partial X_t}. \quad (\text{B5})$$

При этом

$$\frac{\partial R_t}{\partial X_t} = \frac{\partial R_t}{\partial \theta_t} = 0.$$

Введем, как и ранее мультиоператоры и мультииндексы

$$\mathcal{R}_{ij, kp} = R_{ik} R_{jp}, \quad \Theta_{ij, kp} = (1 - \theta \delta \tau)_{ik}^{-1} \delta_{jp} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (\theta^s)_{ik} (\delta \tau)^s \delta_{jp}.$$

Тогда

$$A_\alpha = \mathcal{R}_{\alpha\gamma} \Theta_{\gamma\nu} X_\nu$$

и

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial X_\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\gamma} \Theta_{\gamma\beta} + \mathcal{R}_{\alpha\gamma} \frac{\partial \Theta_{\gamma\nu}}{\partial X_\beta} X_\nu = \mathcal{R}_{\alpha\gamma} \left(\Theta_{\gamma\beta} + \frac{\partial \Theta_{\gamma\nu}}{\partial X_\beta} X_\nu \right),$$

Откуда

$$\left| \frac{\partial A_\alpha}{\partial X_\mu} \right| = \left| \Theta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \Theta_{\alpha\nu}}{\partial X_\beta} X_\nu \right|.$$

Возвращаясь к обычным матричным индексам, получим

$$\left| \frac{\partial A_{ij}(t)}{\partial X_{kp}(t)} \right| = 1 + tr \left(\eta_{1/2} X(t) \right) \delta\tau$$

где

$$(\eta_{1/2})_{kp} = (d - k) \delta_{kp}. \quad (B6)$$

Из (B5) тогда следует выражение для Якобиана в континуальном пределе

$$\mathfrak{J}_{-1/2}[X] = e^{\int dt tr(\eta_{-1/2} X(t))}. \quad (B7)$$

Рассмотрим теперь другую дискретизацию.

- Дискретизация $\sigma = -1/2$.

$$dQ_t Q_{t+1}^{-1} = A_t \delta\tau. \quad (B8)$$

Вновь используя разложение Ивасавы

$$R_t X_t R_{t+1}^{-1} = A_t \quad (B9)$$

$$X_t = \xi_t + \zeta_t + \theta_t$$

$$\xi_t \delta\tau \equiv d\Delta_t \Delta_{t+1}^{-1}, \quad \zeta_t \delta\tau \equiv \Delta_t dZ_t Z_{t+1}^{-1} \Delta_{t+1}^{-1}, \quad \theta_t \delta\tau \equiv R_t^{-1} dR_t,$$

Откуда

$$R_{t+1} = R_t (1 + \theta_t \delta\tau)$$

и

$$A_t = R_t X_t (1 + \theta_t \delta\tau)^{-1} R_t^{-1}$$

Заметим, что переменные X при такой дискретизации определены другим образом, однако в континуальном пределе они совпадают с прежними.

Аналогичные вычисления дают для Якобиана выражение

$$\mathfrak{J}_{-1/2}[X] = e^{\int dt \operatorname{tr}(\eta_{-1/2} X(t))}, \quad (\text{B10})$$

где теперь

$$(\eta_{-1/2})_{kp} = (1 - k)\delta_{kp}. \quad (\text{B11})$$

Таким образом, различные способы линейной дискретизации дают разные ответы. Мы, однако, заметим, что для бесследовых процессов, якобианы (A7) и (A10) совпадают на поверхности $\operatorname{tr}(X) = 0$:

$$\delta[\operatorname{tr}X(t)]e^{\int dt \operatorname{tr}(\eta_{-1/2} X(t))} = \delta[\operatorname{tr}X(t)]e^{\int dt \operatorname{tr}(\eta_{1/2} X(t))} = \delta[\operatorname{tr}X(t)]e^{\int dt \operatorname{tr}(\eta_0 X(t))}, \text{ где}$$

$$(\eta_0)_{kp} = \left(\frac{d+1}{2} - k\right)\delta_{kp} - \text{бесследовая часть } \eta_{1/2} \text{ и } \eta_{-1/2},$$

$$\delta[\operatorname{tr}X(t)] = \prod_t \delta(\operatorname{tr}X(t)) - \text{дельта-функционал.}$$

Пользуясь этим фактом, мы укажем процедуру регуляризации якобиана, не зависящую от способа дискретизации.

- Регуляризация с помощью выделения бесследового подпространства

Рассмотрим производящий функционал корреляционных функций переменных X :

$$e^{W_X[\eta(t)]} = \langle e^{\int dt \operatorname{tr}(\eta(t)X(t))} \rangle = \int [dA] e^{-S[A]} e^{\int dt \operatorname{tr}(\eta(t)X[A(t)])}$$

$$\text{Представим матрицу } A \text{ в виде суммы } A = A_0 + a \hat{1}, \quad a = \frac{1}{d} \operatorname{tr}A.$$

$$\text{Тогда } e^{W_X[\eta]} = \int [da][dA_0] e^{-S[A_0 + a \hat{1}]} e^{\int dt \operatorname{tr}(\eta X[A_0 + a \hat{1}])}$$

Внесем дельта-функционал под знак функционального интегрирования:

$$e^{W_X[\eta]} = \int [da][dA] \delta[trA] e^{-S[A+a\hat{1}]} e^{\int dt tr(\eta X[A+a\hat{1}])}.$$

Сделаем нашу стандартную замену с якобианом $\mathfrak{J}_\sigma[X]$, и воспользуемся тем фактом, что $a\hat{1}$ коммутирует с любой матрицей и ее можно внести в обкладки $R(\dots)R^{-1}$:

$$e^{W_X[\eta]} = \int [da][dX] \delta[trX] \mathfrak{J}_\sigma[X] e^{-S[RX+a\hat{1}R^{-1}[X+a\hat{1}]]} e^{\int dt tr(\eta(X+a\hat{1}))}$$

Сам по себе Якобиан $\mathfrak{J}_\sigma[X] = e^{\int dt tr(\eta_\sigma X)}$ зависит от способа дискретизации, однако эта зависимость исчезает на поверхности $trX = 0$:

$$\delta[trX] e^{\int dt tr(\eta_\sigma X)} = \delta[trX] e^{\int dt tr(\eta_0 X)}$$

Воспользуемся бесследовостью η_0 и прибавим к аргументу $a\hat{1}$:

$$\delta[trX] e^{\int dt tr(\eta_0 X)} = \delta[trX] e^{\int dt tr(\eta_0(X+a\hat{1}))}$$

Выражение для производящего функционала примет вид

$$e^{W_X[\eta]} = \int [da][dX] \delta[trX] e^{-S[RX+a\hat{1}R^{-1}[X+a\hat{1}]]} e^{\int dt tr((\eta+\eta_0)(X+a\hat{1}))}.$$

Далее, пусть X_0 – бесследовая часть X . Тогда, избавляясь от $\delta[trX]$, получим

$$e^{W_X[\eta]} = \int [da][dX_0] e^{-S[RX_0+a\hat{1}R^{-1}[X_0+a\hat{1}]]} e^{\int dt tr((\eta+\eta_0)(X_0+a\hat{1}))}.$$

Откуда, окончательно

$$e^{W_X[\eta]} = \int [dX] e^{-S[R[X]XR^{-1}[X]]} e^{\int dt tr((\eta+\eta_0)X)}.$$

Мы видим, что выделение бесследовой части приводит к правильной регуляризации якобиана, которая не зависит от способа дискретизации. Этот факт является обоснованием формальных выкладок, приведенных в Главе 6 настоящей работы и в [62].