

УТВЕРЖДАЮ:  
Заместитель директора Федерального  
государственного бюджетного  
учреждения науки  
Физико-технического института  
им. А.Ф. Иоффе Российской академии  
наук,  
д.ф.-м.н. П.Н. Брунков/

« 06 » 05 2024 г.

### Отзыв ведущей организации

на диссертационную работу **Ильина Антона Сергеевича «Стохастический транспорт в изотропных потоках»**, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

Диссертационная работа А.С. Ильина посвящена построению теоретических моделей переноса и эволюции скалярных и векторных полей в гладких стохастических потоках. Проблема имеет давнюю историю и, безусловно, относится к числу **актуальных**, в значительной мере нерешенных задач. Ввиду существенного практического значения турбулентного переноса в таких разных проблемах, как распространение пассивных примесей в атмосфере, теплоперенос в реакторах, кинематика и динамика магнитных полей в случайных МГД-потоках, на сегодня развито значительное количество приближенных и феноменологических моделей. Однако, строгой и последовательной теории пока не построено, ввиду чрезвычайной сложности описания стохастических динамических систем. Для описания эволюции магнитных полей в ядре Земли и планет, МГД - генераторах и астрофизических объектах различных масштабов, используют упрощенные модели и численное моделирование. Поскольку проблемы существенно многомасштабные доступный динамический диапазон компьютерных моделей часто недостаточен для полного описания системы и используются упрощения. Для проверки точности приближений и численных расчетов очень важно иметь точные аналитические результаты, в частности, интегралы движения. Развитие методов аналитического описания транспорта в стохастических потоках в работах А.С.Ильина, согласно вышесказанному, делает его диссертацию безусловно актуальным и практически важным научным исследованием, идущим в ногу со временем.

Диссертация А.С.Ильина состоит из введения, 11 глав и заключения. Для удобства, вспомогательные справочные материалы, а также некоторые технические детали вычислений сосредоточены в 3-х приложениях. Полный объем диссертации с приложениями составляет 169 страниц с двумя рисунками и одной таблицей. Список

литературы содержит 79 наименований.

**Во введении** обосновывается актуальность исследований, которым посвящена диссертационная работа, предъявляется обзор научной литературы по изучаемым проблемам, формулируются цели, задачи, а также отмечается научная новизна и практическая значимость работы.

Главный объект, изучению которого посвящена диссертация, это гладкий стохастический поток – случайное гладкое векторное поле. В работе автор ограничился рассмотрением изотропных потоков. Важными приложениями этой конструкции является теория кинематического динамо; она объясняет природу мелкомасштабных магнитных полей у астрофизических объектов: звезд, галактик, галактических кластеров и т.д. Электрически нейтральная плазма, из которой состоят эти объекты, часто допускает описание в рамках магнитной гидродинамики, более того, на начальном этапе эволюции можно считать, что магнитное поле мало и не оказывает обратного влияния на среду.

Теория турбулентного динамо должна установить условия для поля скоростей и коэффициент магнитной диффузии, которые гарантировали бы неустойчивость магнитных флуктуаций. В случае бесконечной проводимости ответ известен, он дается теоремой Альфвена. Линии индукции магнитного поля в таких условиях оказываются заморожены в поток, а вектор магнитной индукции экспоненциально растет. Проблема, однако, состоит в том, что наличие сколь угодно малой диффузии приводит к диффузионному перезамыканию силовых линий и генерация может быть подавлена. Подробному изучению этих процессов и посвящена значительная часть диссертации.

**Первая глава** посвящена формальной постановке задач теории турбулентного транспорта.

**Во второй главе** приводится более простой, по сравнению с оригинальным, вывод уравнения Казанцева-Крайчана (КК): дифференциального уравнения в частных производных параболического типа, которое связывает интегральную структурную функцию поля скоростей и инвариантный парный коррелятор транспортируемого поля. Метод, которым пользуется автор, основан на функциональных подходах стохастического анализа и, по сравнению с оригинальным методом, оказывается более пригоден для обобщения на случай негауссовых полей скорости.

**Третья глава** посвящена разработке нового метода анализа решения уравнения КК, который заключается в его сведении к уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятности вспомогательной фиктивной «диффузной» частицы.



Дальнейший анализ этого соответствия позволяет сформулировать новый четкий критерий отсутствия растущих мод уравнения КК.

**Четвертая глава** посвящена применению этого формализма для получения асимптотик уравнения КК для пассивного скаляра и вектора (магнитного поля): автор находит инкременты роста (убывания) решений для различных интегральных структурных функций потока, в частности для модели Вайнштейна-Кичатинова. Кроме получения явных выражений для инкрементов, эти вычисления демонстрируют возможность применения этого подхода для решения задач транспорта не только в рамках модели КК, но и в негауссовых потоках.

**Пятая глава** посвящена формализму квази-лагранжевых траекторий. В рамках этого формализма находятся точные решения уравнений транспорта для локализованных возмущений «блобов» на вязком (бетчелоровом) этапе эволюции. Эти решения содержат оператор эволюции – случайную матричную функцию, удовлетворяющую стохастическому уравнению с матричным мультипликативным шумом, в роли которого выступает лагранжев тензор градиентов скорости. Получающиеся матричные уравнения оказываются очень сложны для анализа привычными средствами. Разработке новых методов посвящена

#### **Шестая глава.**

В начале главы обсуждается классическая математическая проблема о мультипликативной эволюции в дискретном времени, которая сводится к изучению бесконечных произведений случайных матриц. Автором вычисляются характеристические моменты флага произведения независимых матриц, при этом, оказывается, что в изотропном случае, проблемы, связанные с некоммутативностью матричного произведения, существенно упрощаются.

Этот факт далее позволяет автору работать с континуальными произведениями (в непрерывном времени). Автор показывает, что задача сводится к подходящей замене переменных, и вычислению некоторого функционального якобиана. В этих переменных оказывается возможным до конца вычислить характеристические корреляторы флага. Далее автор развивает последовательную теорию больших уклонений (large deviation) для континуальных некоммутативных произведений и находит связь функции Крамера элементов лагранжевого тензора градиентов и функции Крамера обобщенных ляпуновских показателей.

Эта теория, в конечном итоге, позволяет автору вычислить моменты замороженных магнитных и скалярных полей, а также моменты невмороженных полей при малой диффузии.

**В седьмой главе** рассматривается простейшая модель поля скоростей,

обобщающая модель КК и предполагающая отклонение статистики потока от гауссовой. Автор называет ее V3-моделью, так как она содержит связную корреляционную функцию третьего порядка. Показывается, что статистические свойства потока в этой модели не инвариантны по отношению к обращению времени, что говорит о ее большей реалистичности по сравнению со стандартной гауссовой моделью КК.

Автор находит аналитические выражения для ляпуновского спектра, что позволяет связать свободные параметры модели с параметрами реальных турбулентных потоков.

**В восьмой главе** V3-модель применяется для описания пассивного скалярного локализованного возмущения на вязком этапе эволюции. Автор вычисляет точные инкременты затухания моментов плотности и обнаруживает эффект насыщения инкрементов высших моментов. Из этого автор заключает, что статистика скалярного поля сильно перемежаема.

**В девятой главе** изучена эволюция системы с самодействием типа Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова. Автор подробно изучает нелинейные динамические и стохастические эффекты, возникающие при эволюции возмущения пассивной примеси, помещенной в турбулентный поток, в системе «реакция-диффузия-турбулентный поток». Продемонстрирована возможность экспоненциального роста популяции примеси несмотря на динамическое насыщение плотности.

**В десятой главе** изучается поведение магнитных возмущений (блобов). Автор показывает, что на вязком (бэтчелоровском) этапе магнитное поле блоба затухает в 2D из-за диффузионного перезамыкания силовых линий, несмотря на рост полной энергии. Рост происходит за счет экспоненциального увеличения объема блоба. Далее автор доказывает теорему о «стохастической декомпозиции», которая позволяет представлять безграничные изотропные флуктуации в виде некогерентного наложения блобов. При этом в 3D энергия локализованного возмущения после выхода за пределы колмогоровского масштаба продолжает расти.

Это точное и универсальное соответствие позволяет описать эволюцию безграничных флуктуаций на вязком этапе.

Кроме этого, предложенный автором метод стохастической декомпозиции позволяет проследить за эволюцией блобов также и на инерциальном этапе, когда метод квази-лагранжевых траекторий уже не работает, и в частности, обсудить топологические причины различия сценариев роста флуктуаций в двумерных и трехмерных потоках.

**Одиннадцатая глава** посвящена задаче об эволюции замороженных  $k$ -мерных гиперповерхностей в  $d$ -мерных изотропных стохастических потоках. Автор строит полное описание эволюции флага «раскрашенных» гиперповерхностей и их



поверхностных плотностей.

Далее автор находит серию новых точных интегралов движения когерентных структур (материальных линий и поверхностей) и показывает, что их свойства не зависят от динамики потока и определяются только геометрией пространства флагов.

**В диссертации получены важные новые результаты к которым, в частности, относятся:**

1. Новый критерий отсутствия растущих мод у однородных параболических уравнений общего вида.
2. Определение условий возникновения генерации в моделях кинематического динамо в моделях Казанцева и Вайнштейна - Кичатинова.
3. Разработанная «некоммутативная теория больших уклонений» для матричных уравнений с мультипликативным шумом.
4. Предложенная автором T-неинвариантная негауссова реалистичная модель турбулентного потока (V3-модель). Полученные характеристические показатели роста (затухания) векторных и скалярных локализованных возмущений на вязком этапе эволюции.
5. Доказательство теоремы о «стохастической декомпозиции», которая устанавливает связь между характером эволюции однородных и локализованных возмущений магнитного поля в изотропных потоках и указывает на топологическую причину роста флуктуаций при больших числах Прандтля.
6. Расчет моментов роста однородных возмущений в рамках V3-модели.
7. Исследование различных режимов роста скалярных флуктуаций в нелинейной системе «реакция - диффузия - турбулентный поток».
8. Найденная серия новых интегралов движения когерентных структур (линий и материальных поверхностей) в изотропных стохастических потоках.

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов обеспечены использованием адекватных аналитических и численных методов анализа, сравнения результатов с результатами, полученными другими авторами, апробацией на ведущих российских конференциях, профильных семинарах и в статьях. По теме диссертации автором опубликовано 12 статей в рецензируемых международных журналах, входящих в список рекомендованный ВАК. Работы автора широко используются как отечественными, так и иностранными специалистами.

Развитые в диссертации новые методы и полученные результаты имеют **существенную теоретическую и практическую значимость.**

Выводы и положения диссертации полностью соответствует представленным результатам.

Существенных недостатков представленная диссертация не содержит. Тем не менее, по диссертации имеются замечания, в основном технического характера и

некоторые пожелания:

1) Приведенный во вводной части обзор существующих теорий и методов весьма сжатый. Практически нет обсуждения моделей, основанных на численном моделировании, а также широко обсуждавшихся теорий турбулентного переноса основанных на основе методе ренорм группы, восходящих к работам Яхота и Орзага (V.Yahot & S.Orszag Phys. Rev. Lett т.57, с.1722, 1986; Journal of Scientific Computing, Vol. 1, No. 1, 1986). Работа была бы существенно более полезной для широкого круга исследователей если бы автор критически обсудил достоинства и недостатки развитых ранее моделей. Также, хотелось бы видеть более детальное обсуждение интересных результатов автора в приложении к конкретным теориям переноса и моделям динамо.

2) В диссертации, в основном, рассматривается случай больших чисел Прандтля (слабая диффузия). Было бы полезно сравнить допустимый при используемом в диссертации анализе диапазон значений этих чисел с реальными их значениями для наиболее интересных физических систем.

3) Также имеются некоторые технические погрешности:

В главе 2 опечатка на стр. 42. В тексте указана ссылка на формулу (2.3), а по смыслу она должна быть на формулу (1.3).

В главе 6 на стр. 74 присутствует сбой нумерации. На этой странице начинается подраздел а.) , хотя подраздел а.) уже вводился в этой главе на стр. 65, а подраздел б.) на стр. 68.

В главе 4 на стр. 55 вводится колмогоровский «вязкий» масштаб  $\eta$ , однако далее в тексте этот масштаб обозначается как  $r_v$ .

В главе 3 в последней формуле на странице 51 в правой части у  $N$  индексы  $(\sigma, \lambda, u)$ , а представляется, что они должны быть  $(\sigma, \lambda, 0)$ .

В главе 6 на стр. 71 в примере происходит усреднение логарифма через интеграл по циклической переменной  $\phi$ , результат которого не очевиден. Кроме того, для согласия с правой частью формулы, в левой части под усреднением должен быть  $\ln D(Q)$ , а не  $D(Q)$ .

Высказанные замечания не являются принципиальными и ни в какой мере не умаляют высокого уровня работы и полученных результатов.

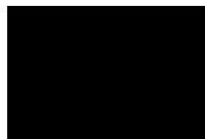
Диссертация А.С. Ильина является важным научным исследованием, в котором развиты новые аналитические подходы к решению фундаментальной проблемы переноса и динамики полей в стохастических потоках. Полученные автором результаты имеют существенное значение для решения проблем теории турбулентного переноса полей и частиц в магнитной гидродинамике, физике плазмы, физике атмосферы и астрофизике. Материалы диссертации полностью изложены в опубликованных работах автора. **Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.**

Результаты диссертации обсуждались на семинаре лаборатории астрофизики высоких энергий ФТИ им. А.Ф. Иоффе 3 мая 2024 года, на котором был обсужден и одобрен данный отзыв.

Диссертация А.С. Ильина на соискание учёной степени доктора физико-математических наук удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям, а её автор А. С. Ильин **заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук** по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

Отзыв подготовили:

кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник ФТИ им. А.Ф. Иоффе



Уваров Юрий  
Александрович

телефон: (812) 292-7160  
электронный адрес: [uv@astro.ioffe.ru](mailto:uv@astro.ioffe.ru)

руководитель отделения физики плазмы, атомной  
физики и астрофизики ФТИ им. А.Ф. Иоффе, доктор  
физико-математических наук, профессор, член-корр.  
РАН



Быков Андрей  
Михайлович

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук (ФТИ им. А.Ф. Иоффе), 194021, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26, телефон: (812) 297-2245, факс: (812) 297-1017, [post@mail.ioffe.ru](mailto:post@mail.ioffe.ru)



Список основных публикаций Быкова Андрея Михайловича по теме рассмотренной диссертации в рецензируемых научных изданиях за последние 5 лет:

1. Richardson, J. D., Bykov, A., Effenberger, F., Scherer, K., von Steiger, R., Sterken, V. J., & Zank, G. P. (2023). The Heliosphere in the Local Interstellar Medium: Into the Unknown. *Space Science Reviews*, 219(1), 6.
2. Romansky Vadim, I., Bykov Andrey, M., & Osipov Sergey, M. (2023). Kinetic modeling of MHD parameters of mildly-relativistic shocks. *St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics*, 64(1.2), 461-466.
3. Herbst, K., Baalman, L. R., Bykov, A., Engelbrecht, N. E., Ferreira, S. E., Izmodenov, V. V., ... & Strauss, R. D. T. (2022). Astrospheres of planet-hosting cool stars and beyond. when modeling meets observations. *Space Science Reviews*, 218(4), 29.
4. Bykov, A. M., Uvarov, Y. A., Slane, P., & Ellison, D. C. (2020). Uncovering magnetic turbulence in young supernova remnants with polarized X-ray imaging. *The Astrophysical Journal*, 899(2), 142.