ОТЗЫВ

официального оппонента, доктора физико-математических наук, профессора Алексея Петровича Исаева, о диссертации Елены Николаевны Ланиной на тему "Симметрийный подход к изучению петель Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

Диссертация Е.Н. Ланиной посвящена изучению вильсоновских средних в трехмерной топологической теории Черна–Саймонса с калибровочной группой SU(N). В петле Вильсона в качестве контура интегрирования можно взять произвольный узел (зацепление), а калибровочные поля, как элементы алгебры Ли su(N), могут выбираться в произвольном представлении. За счет этого устанавливается интересная связь с важной областью маломерной топологии – теорией узлов. Другой удивительной особенностью данной теории является то, что в ней можно получать непертурбативные ответы, причем метод их получения универсален для любого зацепления и выбираемого представления. В частности, это открывает неявную квантово-групповую симметрию трехмерной теории Черна–Саймонса. Стоит также отметить, что теория Черна–Саймонса на 3-мерном многообразии M соответствует двумерной конформной модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена на границе M и, таким образом, предоставляет один из исторически первых примеров QFT/CFT соответствия. В связи с отмеченными выше и многими другими связями с активно развивающимися областями теоретической и математической физики изучение трехмерной теории Черна–Саймонса несомненно является важной и актуальной задачей.

Диссертация состоит из введения, пяти глав основного содержания, заключения и списка литературы из 165 наименований.

В первой главе – **Введении**, очерчено современное состояние исследований по теории Черна–Саймонса, квантовым инвариантам узлов и тесно связанным с ними объектам – квантовым 6j-символам для квантовой группы $U_q(sl(N))$. Обоснована актуальность темы диссертации, дан обзор соответствующей литературы, представлена структура диссертации и сформулированы цели работы и положения, выносимые на защиту. Изложение является последовательным и ясным.

Вторая глава посвящена введению основных объектов исследования – цветных (раскрашенных представлением алгебры sl(N)) полиномов ХОМФЛИ. Данные квантовые инварианты узлов можно ввести несколькими самосогласованными способами. Во второй главе подробно рассматриваются три из них. С одной стороны, их можно определить универсальным способом через подход Решетихина–Тураева, который происходит из теории квантовых групп и квантовых R-матриц. Другое математическое определение квантовых инвариантов узлов предоставляет более общая конструкция интеграла Концевича. Если к интегралу Концевича применить так называемую весовую систему алгебры Ли sl(N), ассоциированную с ее представлением, то получаемый образ возникающего отображения и будет полиномом ХОМФЛИ, раскрашенным соответствующим представлением. Третий подход связан с открытием Э. Виттеном удивительной связи между квантовой топологией и трехмерной калибровочной теорией Черна–Саймонса. А именно, оказалось, что петли Вильсона в теории Черна–Саймонса совпадают с полиномами ХОМФЛИ.

Главы с третьей по шестую посвящены непосредственным результатам Е.Н. Ланиной. В **третьей главе** соискатель представляет один из основных результатов своих исследований. Изучается пертурбативное разложение петель Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса, являющихся цветными полиномами ХОМФЛИ. Интересной его особенностью является разделение зависимости от узла и представления. Зависящие от узла части называются инвариантами Васильева, а от представления – групповыми факторами. В третьей главе проводится исследование групповой структуры пертурбативного разложения полиномов ХОМФЛИ. Е.Н. Ланина предъявила алгоритм нахождения групповых факторов в произвольном порядке пертурбативного разложения для произвольного представления алгебры sl(N) любого ранга с использованием соображений симметрии полиномов ХОМФЛИ. Была выдвинута гипотеза, что групповая структура полностью фиксируется известными симметриями цветных полиномов ХОМФЛИ. Групповые факторы были найдены явно вплоть до 13-го порядка, поэтому и данная гипотеза была проверена до 13-го порядка.

Четвертая глава посвящена получению следствий из полученной соискателем групповой структуры цветных полиномов ХОМФЛИ. Одно из наиболее важных следствий – доказательство недавно открытой симметрии «тяни-крюк» цветных полиномов узлов ХОМФЛИ. Другое важное следствие – получение инвариантов Васильева высших порядков. Оно важно, в частности, потому, что только начиная с 11-го порядка инварианты Васильева начинают различать узлы-мутанты. Однако не все инварианты Васильева могут быть получены из цветных полиномов ХОМФЛИ: начиная с 8-го порядка весовая система sl(N) перестает различать некоторые примарные инварианты Васильева. Более того, на 6 уровне два непримарных инварианта Васильева неразличимы весовыми системами любых простых алгебр Ли, что было получено Е.Н. Ланиной с использованием параметризации Вожеля. Еще одно следствие, полученное в рамках работы над диссертацией – новый метод получения квантовых А-полиномов, который был продемонстрирован на примере их получения в случае полиномов Джонса (полиномов ХОМФЛИ для sl(2)) в симметрических представлениях для торических узлов T[2,2k+1]. Далее в этом разделе обсуждаются полученные соискателем свойства частного случая полиномов ХОМФЛИ – полиномов Александера. Отдельно стоит отметить обобщение однокрюкового скейлингового соотношения на полином Александера на случай произвольных представлений.

Пятая глава касается свойств дифференциального разложения цветных полиномов ХОМФЛИ. Дифференциальное разложение – сугубо теоретико-групповое свойство цветных полиномов ХОМФЛИ, которое следует из трансляционной инвариантности представлений sl(N), инвариантности полиномов ХОМФЛИ относительно сопряжения представлений и их симметрии относительно транспонирования диаграммы Юнга. За счет перечисленных свойств цветной полином ХОМФЛИ раскладывается в несколько слагаемых, в которых зависимости от представления и узла разделяются. Зависимые от узла полиномы называются циклотомическими функциями. Топология узлов диктует свойство дополнительной факторизации этих функций, за которое отвечает инвариант узла, называемый дефектом. Е.Н. Ланиной доказана гипотеза о связи дефекта дифференциального разложения цветного полинома ХОМФЛИ с максимальной степенью полинома Александера в фундаментальном представлении. Также анализируются другие связанные вопросы. Например, полнота целочисленных параметров полинома Александера в зависимости от дефекта. В частности, было получено, что для узлов дефекта-0 в качестве полиномов Александера реализуются все возможные целочисленные полиномы. Другое свойство дифференциального разложения, исследуемое в диссертации – гипотеза о сохранении дефекта при антипараллельной эволюции. А именно, были классифицированы некоторые случаи понижения дефекта при антипараллельной эволюции.

В **шестой главе** обсуждаются симметрии квантовых 6j-символов для квантовой группы $U_q(sl(N))$. Обсуждается, как можно получить симметрию «тяни-крюк» квантовых 6j-символов. Эта симметрия интересна тем, что она предоставляет первый пример симметрии квантовых 6j-символов, применимой к любым представлениям, включая случаи представлений с вырождениями. С одной стороны, ее можно получить из гипотезы о собственных значениях, а с другой стороны – из анализа аналогичной симметрии в случае полиномов ХОМФЛИ для узлов, которая в этом случае была доказана Е.Н. Ланиной. Интересно также, что последнюю логику можно обратить, заметив, что все составляющие элементы цветных полиномов ХОМФЛИ инварианты относительно действия симметрии «тяни-крюк» и, таким образом, выдвинуть гипотезу о существовании симметрии «тяни-крюк» полиномов ХОМФЛИ в случае зацеплений, в котором она не была ни доказана, ни даже наблюдена. Также, в диссертации и в релевантной публикации приводятся нетривиальные примеры представлений с вырождениями, в которых наблюдается симметрия «тяни-крюк» квантовых 6j-символов.

В **Заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

Диссертант выносит на защиту семь научных результатов, опубликованных в трех рецензируемых журналах первого квартиля. Все работы выполнены при непосредственном участии диссертанта, и его вклад в эти работы является определяющим.

Диссертация Е.Н. Ланиной выполнена на высоком научном уровне и представляет собой существенный вклад в актуальную область теоретической физики – теорию квантовых инвариантов узлов и в трехмерную топологическую теорию Черна–Саймонса.

Научная новизна. Полученные в диссертации результаты являются новыми и хорошо цитируются в научной литературе, посвященной теории Черна–Саймонса и квантовым инвариантам узлов.

Достоверность и обоснованность результатов, полученных соискателем, основывается в первую очередь на корректности и общепризнанности исходных теорий и применении методов, уже показавших свою адекватность в предыдущих работах по тематике диссертации. Ряд этих результатов уже использован и подтвержден другими авторами. Результаты диссертационной работы докладывались на многих представительных конференциях по релевантной тематике, как международных, так и российских.

В качестве замечаний стоит отметить следующее.

1. В разделе 2.1 и в главе 3 в некоторых местах написано, что операторы Казимира $C_1, \ldots, C_N$ составляют базис в центре универсальной обертывающей алгебры $U(sl_N)$. Во-первых, ранг алгебры sl_N равен $(N-1)$, поэтому центр генерируется $(N-1)$ независимыми операторами Казимира $C_2, \ldots, C_N$. Во-вторых, некорректно говорить в данном контексте о базисе центра $U(sl_N)$. Базис – это понятие для векторного пространства $ZU(sl_N)$, размерность которого больше $(N-1)$. Правильно говорить об образующих (генераторах) центра.

2. В начале раздела 6 есть неаккуратное высказывание «Это независимое доказательство симметрии «тяни-крюк» коэффициентов Рака…». В диссертации симметрия «тяни-крюк» для матриц Рака вводится как гипотеза и не доказывается.

Впрочем, в остальном тексте симметрия «тяни-крюк» матриц Рака позиционируется как гипотеза, подтверждаемая рядом рассуждений и примеров.

3. В разделе 4.2 обсуждается, что у весовой системы sl_N есть нетривиальное ядро. Было бы интересно предъявить алгоритм нахождения линейной комбинации хордовых диаграмм, которая зануляется при отображении весовой системы sl_N, или хотя бы предъявить такие диаграммы на нижних уровнях. Аналогичный вопрос можно исследовать и для весовых систем других алгебр Ли.

Эти замечания, однако, не снижают ценности полученных в диссертации результатов.

Диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям Положением о присуждении ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013 года. Автореферат диссертации соответствует содержанию диссертации и опубликованным статьям.

Диссертант Елена Николаевна Ланина заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

Официальный оппонент,
главный научный сотрудник
Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенный институт ядерных исследований,
доктор физико-математических наук, профессор [redacted] Алексей Петрович Исаев

141980, г. Дубна, Московская область, ОИЯИ, ЛТФ
Тел. +7 (496) 216-30-24
e-mail: isaevap@theor.jinr.ru

Подпись А.П. Исаева заверяю:
Ученый секретарь ЛТФ им. Боголюбова,
Объединенный институт ядерных исследований,
кандидат физико-математических наук [redacted] А.В. Андреев

29 марта 2024 г.

Список основных работ оппонента по теме защищаемой диссертации:

1. Buchbinder, I. L., Fedoruk, S., & Isaev, A. P. (2020). Infinite spin particles and superparticles. Paper presented at the Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 335 83-96.
2. Buchbinder, I. L., Fedoruk, S., & Isaev, A. P. (2019). Twistorial and space-time descriptions of massless infinite spin (super)particles and fields. Nuclear Physics B, 945.
3. Buchbinder, I. L., Fedoruk, S., Isaev, A. P., & Krykhtin, V. A. (2020). Towards lagrangian construction for infinite half-integer spin field. Nuclear Physics B, 958.
4. Buchbinder, I. L., Fedoruk, S. A., Isaev, A. P., & Podoinitsyn, M. A. (2021). Massless finite and infinite spin representations of poincaré group in six dimensions. Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics, 813.
5. Buchbinder, I. L., Isaev, A. P., & Fedoruk, S. (2020). Massless infinite spin representations. Physics of Particles and Nuclei, 51(4), 545-550.
6. Buchbinder, I. L., Isaev, A. P., & Fedoruk, S. A. (2020). Massless infinite spin (super)particles and fields. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 309(1), 46-56.
7. Isaev, A. P., Karakhanyan, D., & Kirschner, R. (2021). Yang-baxter R-operators for osp superalgebras. Nuclear Physics B, 965.
8. Isaev, A. P., & Podoinitsyn, M. A. (2020). D-dimensional spin projection operators for arbitrary type of symmetry via brauer algebra idempotents. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 53(39).
9. Isaev, A. P., & Podoinitsyn, M. A. (2019). Polarization tensors for massive arbitrary-spin particles and the Behrends–Fronsdal projection operator. Theoretical and Mathematical Physics(Russian Federation), 198(1), 89-99.
10. Valinevich, P. A., Derkachov, S. E., & Isaev, A. P. (2019). SOS-representation for the SL(2,ℂ)-invariant R-operator and feynman diagrams. Journal of Mathematical Sciences (United States), 238(6), 819-833.
11. Valinevich, P. A., Derkachov, S. E., Isaev, A. P., & Komisarchuk, A. V. (2019). Orthogonal polynomials, 6J-symbols, and statistical weights of SOS models. Journal of Mathematical Sciences (United States), 238(6), 834-853.
12. Isaev, A. P., Krivonos, S. O., & Provorov, A. A. (2023). Split Casimir operator for simple Lie algebras in the cube of ad-representation and Vogel parameters. International Journal of Modern Physics A, 38(06n07), 2350037.
13. Isaev, A. P., & Provorov, A. A. (2022). Split Casimir operator and solutions of the Yang–Baxter equation for the and Lie superalgebras, higher Casimir operators, and the Vogel parameters. Theoretical and Mathematical Physics, 210(2), 224-260.
14. Isaev, A., & Krivonos, S. (2021). Split Casimir operator and universal formulation of the simple Lie algebras. Symmetry, 13(6), 1046.
15. Isaev, A. P., & Krivonos, S. O. (2021). Split Casimir operator for simple Lie algebras, solutions of Yang–Baxter equations, and Vogel parameters. Journal of Mathematical Physics, 62(8).