

ОТЗЫВ

официального оппонента, доктора физико-математических наук Сергея Константиновича Ландо, о диссертации Елены Николаевны Ланиной на тему “Симметричный подход к изучению петель Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса”, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

Диссертационная работа Е.Н. Ланиной посвящена построению эффективных способов вычисления инвариантов узлов и зацеплений, которые строятся по алгебрам Ли и их представлениям (квантовым инвариантам). К их числу относятся такие знаменитые полиномиальные инварианты как многочлены Александера, Джонса и ХОМФЛИ, а также их крашенные (представлениями) версии. Не являясь инвариантами конечного (по В.А. Васильеву, 1990) порядка, все они, однако, могут быть выражены в терминах таких инвариантов. Это означает, что каждому из них соответствует функция на хордовых диаграммах (комбинаторных объектах, представляющих собой ориентированную окружность с выделенным набором из четного числа попарно различных точек, разбитых на непересекающиеся пары). (Альтернативным комбинаторным объектом, дающим эквивалентное описание, могут служить диаграммы Якоби — вложенные 3-валентные графы с выделенной петлей Вильсона.) Как следствие, процедуру вычисления значений квантовых инвариантов на данном узле или зацеплении можно разбить на две независимые процедуры:

- вычисление элемента центра универсальной обертывающей алгебры (*группового фактора*), отвечающего данной хордовой диаграмме, для всех хордовых диаграмм с количеством хорд, не превышающих порядка разложения; это вычисление не зависит от конкретного узла;
- подсчет коэффициентов разложения узла по хордовым диаграммам.

Актуальность темы диссертации не вызывает сомнений в связи с вышесказанным. Полученные в диссертации результаты отличаются **научной новизной**. **Достоверность и обоснованность** результатов диссертации несомненны, так как соответствующие исследования проведены с помощью строгих методов теоретической и математической физики и проверены на целом ряде примеров и частных случаев, а релевантные публикации соискателя цитируются и используются в других научных работах.

Диссертация состоит из введения, пяти глав основного текста, заключения и списка литературы из 165 ссылок.

Во **Введении**, составляющем первую главу, дается общее описание исследуемой соискателем области — изучение квантовых полиномиальных инвариантов узлов и зацеплений — и полученных при этом результатах.

Вторая глава посвящена описанию основных понятий, используемых в диссертации. К их числу относятся

- цветной полином ХОМФЛИ узлов и зацеплений и его различные определения;
- групповые факторы (весовые системы) для хордовых диаграмм и диаграмм Якоби;
- центр групповой алгебры алгебры Ли sl_N ;
- квантовые коэффициенты Рака и b_j -символы;
- R -матрицы и их использование для конструирования инвариантов узлов и зацеплений, в том числе, цветного полинома ХОМФЛИ.

Третья глава посвящена разработке эффективных методов вычисления весовой системы, отвечающей серии алгебр Ли sl_N , т. е. цветным полиномам ХОМФЛИ. При выбранном представлении алгебры Ли значение этой весовой системы на данной хордовой диаграмме представляет собой многочлен от двух переменных, q и a . Размер диаграммы дает верхнюю оценку на степень этого многочлена, и для диаграмм маленьких порядков (вплоть до 6) эти многочлены были известны ранее. Они имеют универсальный вид: они полиномиально зависят от длин строк в диаграммах Юнга, описывающих неприводимые представления алгебр Ли sl_N , и от ранга $N-1$ этих алгебр Ли.

Разрабатываемые в диссертации новые методы позволяют построить явные выражения для значений этой весовой системы на хордовых диаграммах до порядка 13, т.е. являются существенным продвижением по сравнению с известными ранее результатами. Они основаны на использовании симметрий весовой системы по отношению к выбранным представлениям, а именно,

- симметрии *сдвига*, состоящей в сохранении значения весовой системы при одновременном увеличении/уменьшении длин всех строк в диаграмме Юнга на одну и ту же величину;
- симметрии *сопряжения*, заменяющей диаграмму Юнга симметричной ей относительно главной диагонали;
- симметрии *дополнения*, заменяющей диаграмму Юнга дополнительной к ней в прямоугольнике со стороной N ;
- симметрии *«тяни-крюк»*, позволяющей «протаскивать» клетки диаграммы Юнга через ее главный угол.

При этом если поведение sl_N -весовой системы по отношению к первым трем симметриям хорошо известно, и они и ранее использовались для изучения ее свойств, то симметрия «тяни-крюк» является сравнительно новой (она была введена в работе В.Мишнякова, А.Слепцова, Н.Целоусова в 2021 г.) и ее природа изучена не до конца. Соискатель степени играет заметную роль в изучении этой природы. В основе симметрии «тяни-крюк» лежит поведение весовых систем, связанных с супералгебрами Ли серии $gl_{N|M}$.

Выдвинутая соискателем Гипотеза 3.4.1 на стр. 54 о том, что упомянутых выше симметрий в принципе достаточно для вычисления значений sl_N -весовой системы на всех хордовых диаграммах и для всех представлений алгебры Ли sl_N , на текущий момент представляется чересчур оптимистичной.

В четвертой главе описывается, как результаты предыдущей главы можно применять для вычисления инвариантов узлов до порядков более высоких, чем было известно ранее. Основное содержание этой главы составляет доказательство того, что цветные полиномы ХОМФЛИ узлов и зацеплений подчиняются симметрии «тяни-крюк». Этот результат используется для обнаружения новых симметрий полинома Александра.

В пятой главе соискатель изучает понятие дефекта узла, введенное Я. Кононовым и А. Морозовым в работе 2015 г. Полином ХОМФЛИ любого узла в симметрическом представлении степени r допускает разложение в сумму $r+1$ полиномов Лорана переменных a, q , с некоторыми стандартными, не зависящими от узла, квантовыми коэффициентами, причем полиномы Лорана стабильны — не зависят от степени r представления. (Под «квантовыми» коэффициентами здесь мы понимаем различные вариации q -биномиальных коэффициентов.) Такое разложение называется *дифференциальным*. Если полином Лорана в дифференциальном разложении делится на дополнительный квантовый коэффициент, то то же справедливо и для всех следующих за ним полиномов Лорана. Номер полинома Лорана, с которого начинается дополнительная факторизация, определяет *дефект* узла. Чем меньше дефект узла, тем более сильным

ограничениям подчиняются коэффициенты полиномов Лорана в дифференциальном разложении.

Основной результат пятой главы состоит в исследовании связи — ранее гипотетической — между дефектом узла и степенью его полинома Александра (который может быть интерпретирован как многочлен одной переменной, представляющий собой результат подстановки $a=1$ в полином ХОМФЛИ в стандартном представлении).

В главе приведено большое число примеров вычислений дополнительной факторизации в дифференциальном разложении для узлов различного дефекта.

Шестая глава диссертации посвящена исследованию действия симметрии «тяни-крюк» на квантовые b_j -символы и коэффициенты Рака. Эти объекты близки друг к другу — по сути они представляют собой коэффициенты перехода между двумя способами разложить по неприводимым тензорное произведение тройки неприводимых представлений. В главе высказывается гипотеза о том, что коэффициенты Рака сохраняются при симметрии «тяни-крюк». Это утверждение более сильное, чем сохранение при этой симметрии цветного полинома ХОМФЛИ. Соискатель проверяет его на ряде примеров.

В **Заключении** описаны основные результаты диссертационного исследования.

Соискатель освоила большой пласт современной литературы, посвященной квантовым инвариантам узлов и зацеплений и связанной с ними трехмерной калибровочной теории Черна–Саймонса. В диссертации приведено большое количество, в том числе, нетривиальных, примеров явного вычисления инвариантов конкретных узлов и их семейств.

Отмечу ряд недостатков диссертации:

1. На стр. 33, 5-я строка снизу утверждается, что подпространство Z_k в центре универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $sl(2)$ состоит из произведений не более чем $2k$ образующих, тогда как оно состоит из линейных комбинаций таких произведений;
2. В тексте присутствует непоследовательность в выборе обозначений; так, символ R может обозначать и R -матрицу, и представление алгебры Ли (стр. 42), а с различными индексами — и представления (стр. 38), и длины строк в диаграмме Юнга (стр. 42);
3. На стр. 50 утверждается, что выражения в формуле (3.30) не являются сингулярными по N , несмотря на то что степени переменной N присутствуют в знаменателях этих формул, но не объясняется, почему;
4. Под аналитическим продолжением функции, определенной в ограниченной области комплексного многообразия, обычно понимается голоморфная функция на всем многообразии, совпадающая с данной в этой области. В отличие от общепринятого подхода соискатель использует (например, на стр. 65) термин «аналитическое продолжение» в гораздо более простой ситуации — при доопределении многочлена с целочисленными аргументами за пределами области, в которой он изначально определен.

Впрочем, упомянутые недостатки не снижают научной ценности диссертационной работы и не могут служить препятствием к присвоению ее автору степени кандидата физико-математических наук.

В ходе диссертационного исследования Е.Н. Ланиной проделана большая работа. Результаты, полученные в диссертации, представляют значительный интерес с научной

точки зрения и могут быть использованы для дальнейших исследований в различных областях науки. В диссертации достаточно подробно описаны методы, разработанные автором, и полученные результаты, которые опубликованы в ведущих научных журналах, входящих в список ВАК и неоднократно представлялись на российских и международных конференциях. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Диссертация «Симметричный подход к изучению петель Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса» удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Ланина Елена Николаевна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

Официальный оппонент,
Ландо Сергей Константинович,
доктор физико-математических наук,
профессор факультета математики
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»,
заведующий Международной лабораторией кластерной геометрии

г. Москва, ул. Усачева, д. 6, 119048, Россия
e-mail: lando@hse.ru
Тел. +7 (495) 772-95-90

Подпись Ландо С.К. заверяю

17 апреля 2024 г.

Подпись заверяю
Специалист по персоналу
Дурнев К.Н.

Список основных работ оппонента по теме диссертации

- 1 Chmutov, S., Kazarian, M., & Lando, S. (2020). Polynomial graph invariants and the KP hierarchy. *Selecta Mathematica, New Series*, 26(3) doi:10.1007/s00029-020-00562-w
- 2 Kazarian, M., Lando, S., & Zvonkine, D. (2022). Double Hurwitz numbers and multisingularity loci in genus 0. *International Mathematics Research Notices*, 2022(12) doi: 10.1093/imrn/rnab010
- 3 Krichever, I., Lando, S., & Skripchenko, A. (2021). Real-normalized differentials with a single order 2 pole. *Letters in Mathematical Physics*, 111(2) doi:10.1007/s11005-021-01379-0
- 4 Kazarian, M., & Lando, S. (2022). Weight systems and invariants of graphs and embedded graphs. *Russian Mathematical Surveys*, 77(5) doi:10.4213/rm10054e