

ПОГОСОВ ВАЛЬТЕР ВАЛЕНТИНОВИЧ

На правах рукописи

УДК 538.945

**Сверхпроводники и разреженные сверхтекучие бозе-системы:
от микро- к макроуровню**

Специальность 01.04.02 – Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук (г. Москва)

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук **И. С. Бурмистров**
(Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН),
доктор физико-математических наук **А. С. Мельников**
(Институт физики микроструктур РАН),
доктор физико-математических наук **В. М. Пудалов**
(Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН).

Ведущая организация:

Институт спектроскопии Российской академии наук

Защита состоится 16 июня 2014 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 002.023.02 Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физический институт имени П.Н. Лебедева Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического института им. П.Н. Лебедева РАН.

Автореферат разослан «__» _____ 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 002.023.02
доктор физико-математических наук,
профессор
Я.Н. Истомин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Развитие технологий и экспериментальной физики последних десятилетий позволило приступить к изучению сверхпроводящих и родственных им систем, характеризующихся пространственными и иными масштабами, недоступными еще в недавнем прошлом. Это - наноразмерные и наноструктурированные сверхпроводники, бозе-конденсаты в разреженных газах атомов щелочных металлов в магнитных и оптических ловушках, молекулярные экситоны в органических агрегатах, конденсаты поляритонов в микрополостях, межямные экситоны, высокотемпературные сверхпроводники и т. д.. Во многих из перечисленных случаев, речь идет о системах, находящихся в режиме перехода от микро- к макроуровню. В то же время, как известно, вопрос о том, как макроскопические свойства системы возникают по мере увеличения ее размеров, является достаточно нетривиальным. Изучение этой проблемы приобретает все большую актуальность в связи с бурным развитием методов миниатюризации и привлекает огромный интерес исследователей.

Помимо интереса с точки зрения фундаментальной науки исследования в этом направлении, безусловно, перспективны и для технологических приложений (сверхпроводниковая электроника, квантовые компьютеры, квантовая криптография, органическая электроника, увеличение критического тока сверхпроводника и т.д.). Кроме того, они важны для дальнейшего развития методов теоретической и математической физики, применяемых к описанию физических явлений в таких системах, а также и для установления междисциплинарных связей между различными разделами современной физики.

Несмотря на то, что исследование сверхпроводимости и родственных явлений проводится весьма активно на протяжении уже десятилетий, целый круг проблем остается недостаточно изученным. Так, например, для описания куперовского спаривания в наноразмерных системах необходимо оставаться в представлении с фиксированным числом частиц и выходить за рамки приближения среднего поля. Всё это диктует необходимость создания новых подходов (или, по крайней мере, адаптации традиционных методов) к описанию сверхпроводников и родственных им систем, в которых можно было бы надлежащим образом учитывать размерные эффекты.

Цель работы. Настоящая диссертационная работа преследует следующие цели: 1) разработка новых методов решения уравнений Ричардсона для систем, описываемых гамильтонианом теории Бардина-Купера-Шриффера (БКШ), и исследование с их помощью коррелированного состояния с учетом размеров системы; 2) изучение топологических дефектов и флуктуаций в системах малого размера – сверхпроводниках и конденсатах

разреженных газов атомов щелочных металлов в ловушках; 3) исследование структуры и свойств вихревых решеток в сверхпроводниках второго рода, в том числе, в присутствии одновременно беспорядка и искусственного периодического потенциала пиннинга; 4) разработка нового метода описания экситонов Френкеля, представляющих из себя один из примеров разреженных бозе-систем, с учетом фермионной статистики для составляющих экситоны электронов и дырок.

Несмотря на разнообразие задач, рассмотренных в диссертации, во всех них анализируются свойства систем, в которых возможно явление бозе-конденсации. Особое внимание уделяется вопросу о том, как свойства таких систем меняются при переходе от микроуровня к макроуровню.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

1. Предложен новый подход к нахождению решений уравнений Ричардсона (анзаца Бете) в термодинамическом пределе. Решение реконструируется с помощью методов интегрирования на комплексной плоскости. Аналитически рассчитаны соответствующие многомерные интегралы сельберговского типа. Метод может быть распространен на случаи других уравнений Бете.
2. Показано, что в термодинамическом пределе обобщение среднеполевой теории БКШ дает точные результаты для энергий основного и первого возбужденного состояний вдоль всего перехода от конденсата БКШ к конденсату БЭК локальных пар при нуле температур. Предложена интерпретация результатов теории БКШ в терминах энергии связи изолированной пары, которая обеспечивает существование энергетического масштаба, отличающегося от сверхпроводящей щели.
3. Продемонстрировано существование скрытой симметрии между спаренными электронами и спаренными дырками в модели Ричардсона. Предложена формула для энергии основного состояния системы, применимая вдоль всего перехода от конденсата БКШ в термодинамическом пределе к режиму доминирования флуктуаций в ультрамалых системах. Выявлена роль масштаба энергии, относящегося к энергии связи изолированной пары: когда расстояния между соседними одноэлектронными уровнями становятся сопоставимыми с этой величиной, приближение среднего поля перестает давать точные результаты.
4. Исследованы вихревые фазовые диаграммы мезоскопических сверхпроводников, гибридных структур “сверхпроводник-ферромагнетик” и бозе-конденсатов атомов щелочных металлов. Предложен механизм проникновения вихрей в конденсат через образование пар “вихрь-антивихрь”.
5. Построена модель термоактивационного проникновения вихря в ультрамалый сверхпроводящий островок. Вычислено среднее время проникно-

вения. Предложено объяснение экспериментально наблюдаемому подавлению магнитного гистерезиса в ультрамалых островках из свинца. Исследовано подавление поверхностного барьера за счет квантовых флуктуаций и установлены критерии перехода от квантового туннелирования вихря к термоактивации. Предсказано существование индуцированных геометрией флуктуаций параметра порядка в островках сложной формы с углами.

6. Для спинорных конденсатов атомов щелочных металлов предсказано существование сильных температурных флуктуаций разностей фаз между различными компонентами параметра порядка. Предсказан переход типа перехода с потерей огранки в циклической фазе конденсата со спином 2. Рассчитаны температуры плавления вихревых кластеров в скалярных конденсатах и выявлена их сильная зависимость от симметрии таких кластеров.
7. Предложена вариационная модель для вычисления обратимой намагниченности сверхпроводника второго рода, применимая во всем диапазоне полей между первым и вторым критическими полями. Модель позволяет учитывать перекрытие сердцевин вихрей в промежуточных полях, а также общее подавление параметра порядка.
8. Исследована структура вихревой решетки и критические токи в присутствии периодической системы центров пиннинга с учетом межвихревого отталкивания, приводящего к существованию необычных фаз. Исследована эта же система, но с дополнительным беспорядком. Выявлено существование богатой фазовой диаграммы системы. Построена единая картина эволюции дефектов решетки. Проанализированы динамические режимы, возникающие при пропускании через систему тока. Выявлена роль дефектов типа “кинк”, а также пар “кинк-антикинк”.
9. Предложено многочастичное описание для экситонов Френкеля, в котором самосогласованно учитывается фермионная статистика для составляющих их электронов и дырок. Для этого применены специальные диаграммная и коммутационная техники. Рассчитана энергия основного состояния системы в первом приближении по взаимодействию экситонов.

Научная новизна и достоверность

Основные результаты диссертационной работы получены впервые, её выводы обоснованы надежностью применявшихся аналитических методов и согласием с данными физических и численных экспериментов, выполненных другими авторами, где сравнение представилось возможным.

Научная и практическая ценность

Развитые в диссертационной работе методы могут быть использованы

для описания широкого круга явлений в сверхпроводящих, сверхтекучих, а также иных системах.

Предложенные в диссертационной работе методы решения уравнений Ричардсона существенно обогащают данный раздел физики, а также представляют интерес в более широком контексте с точки зрения точно решаемых моделей статистической физики и техники анзаца Бете. Представляется, что данные методы могут быть обобщены на случай системы конечных размеров и конечные температуры. Можно пытаться использовать процедуру усреднения на комплексной плоскости, с соответствующей весовой функцией, для отыскания корреляционных функций в исходном пространстве. Кроме того, метод нахождения решений уравнений с помощью сельберговских интегралов вскрывает новые связи данного раздела физики с конформными теориями поля и теорией случайных матриц.

В диссертационной работе выявлено существование симметрии между парами электронов и парами дырок в моделях ричардсоновского типа, что является дополнительным инструментом анализа решений этих уравнений. В частности, с использованием этой симметрии впервые удалось получить простую формулу для энергии основного состояния в переходной области между конденсатом БКШ и режимом, в котором доминируют флуктуации (релеватном для ультрамалых систем). Предложен и исследован дополнительный масштаб энергии, представляющий собой энергию связи изолированной пары. Показано, как обычные результаты теории БКШ могут быть интерпретированы в терминах этой величины. Данный масштаб проявляет себя явно в системах малого размера - когда расстояния между уровнями становятся сопоставимы с этой величиной, теория БКШ перестает быть точной.

В диссертационной работе было предсказано существование ряда флуктуационных эффектов в сверхпроводниках малого размера и конденсатах атомов щелочных металлов. Кроме того, были разработаны новые методы изучения этих явлений. Так, был предложен аналитический метод исследования флуктуационного проникновения вихря Абрикосова в ультрамалый сверхпроводник, в котором разложение параметра порядка по уровням Ландау не только используется для описания самого барьера, но и инкорпорируется в кинетическое уравнение Фоккера-Планка. В диссертации предсказано усиление температурных флуктуаций в углах сверхпроводящих наноструктур, что важно для обеспечения бесперебойной работы устройств на их основе (например, фотодетекторов). Впервые исследовано квантовое туннелирование вихрей Абрикосова через поверхностный барьер в ультратонких сверхпроводящих островках во внешнем поле. Построено описание поведения гетероструктур "сверхпроводник-ферромагнетик", ко-

торые могут использоваться в приложениях. Продемонстрирована возможность существования сильных температурных флуктуаций в конденсатах атомов щелочных металлов (несмотря на весьма низкие температуры). Предложен новый механизм проникновения вихря во вращающийся конденсат, согласно которому на границе системы возникают пары “вихрь-антивихрь”, после чего антивихри удаляются на периферию системы, а вихри проникают вглубь облака.

В диссертационной работе впервые исследован соревновательный эффект периодического и случайного потенциала на вихревые решетки. Помимо чисто научного интереса (исследование переходов типа “порядок-беспорядок”), результаты имеют и практическую ценность, поскольку различные системы искусственно созданных центров пиннинга используются для увеличения критического тока сверхпроводников. Было выявлено существование различных дефектов вихревой решетки и построена общая картина разупорядочивания системы при усилении беспорядка. Исследованы не только статическая фазовая диаграмма, но и динамические режимы. Данные результаты существенно обогащают имеющиеся представления о переходах между упорядоченными и разупорядоченными фазами.

В диссертационной работе был предложен аналитический вариационный метод описания вихревой решетки во всем диапазоне полей между первым и вторым критическими полями. Предложена единая формула для обратимой намагнитченности сверхпроводника, которая, в частности, может использоваться для анализа экспериментальных данных.

Для экситонов Френкеля был предложен новый метод учета фермионной статистики для составляющих экситоны электронов и дырок. Использована коммутационная техника для вычисления различных матричных элементов. Для визуализации вычислений использована специальная диаграммная техника. Метод может быть использован для описания коллективных свойств экситонов Френкеля и исследования нелинейных оптических эффектов.

Апробация работы

Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на конференциях и совещаниях “International Conference Vortex III” (о. Крит, Греция, 2003); “International Argonne Fall Workshop on Nanophysics III” (Аргон, США, 2003); “Belgium Physical Society - International Meeting” (Гент, Бельгия, 2003); 14th Intern. Laser Physics Workshop (Киото, Япония, 2005); “Physical Society of Japan Meeting”, (Токио, Япония, 2005); (Киото, Япония, 2005), (Мацуяма, Япония, 2006); XXXII Международная зимняя школа физиков-теоретиков “Коуровка-2008” (Екатеринбург, Россия, 2008); 9th European Conference on Applied Superconducti-

ivity (EUCAS 2009), (Дрезден, Германия, 2009); “General Scientific Meeting of the Belgian Physical Society and Belgian Biophysical Society” (Хассельт, Бельгия, 2009); “XXXV Собрание по физике низких температур (НТ-35)”, (Черноголовка, Россия, 2009); 4-ая Международная конференция “Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости”, (Звенигород, Россия 2011); XXXVI Собрание по физике низких температур, (Санкт-Петербург, Россия, 2012); Advanced research workshop “Meso-2012”, (Черноголовка, Россия, 2012), на семинарах в ИТПЭ РАН, ИТФ РАН, ФИАН РАН, ИФП РАН, ИТЭФ, университета Антверпена (Антверпен, Бельгия), университета Окаямы (Окаяма, Япония), Университета Лёвена (Лёвен, Бельгия), университета Лувен-ла-Нев (Лувен-ла-Нев, Бельгия), университета Пьера и Марии Кюри (Париж, Франция), Института физико-химических исследований RIKEN (Вако, Япония), Иллинойского университета в Урбане-Шампейне (Урбана-Шампейн, США), университете Брауна (Провиденс, США), Академии Синика (Тайвань), Центре ядерных исследований (Сакле, Франция).

Представленные в диссертационной работе результаты были получены при финансовой поддержке РФФИ, фонда “Династия”, программы РАН “Сверхпроводимость”, Фонда содействия отечественной науке, программы президента РФ для молодых ученых, ИНТАС, Японского общества продвижения науки (JSPS), Министерства образования Франции, программы ENS-Landau, стипендии для молодых ученых в рамках 7-ой рамочной программы Евросоюза, Исследовательского совета университета Левена (Бельгия), программы Vortex Европейского научного фонда, Программы Odysseus правительства Фландрии (Бельгия).

Публикации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 2000 – 2013 годах в 30 научных работах, список которых приводится в конце реферата.

Личный вклад автора

Приведенные в диссертации результаты получены автором. В ряде разделов материалы получены вместе с экспериментаторами - в этих случаях соискатель разрабатывал теоретические модели. Часть результатов получена путем комбинирования численных и аналитических методов - в этих случаях автор производил аналитические расчеты, занимался постановкой задачи и интерпретацией данных численных экспериментов.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из пяти глав, одного приложения, заключения и списка литературы. Полный объем работы составляет 332 страницы. Список используемой литературы включает 280 наименований.

Содержание работы

В первой главе обоснована актуальность тематики, представлен небольшой исторический и литературный обзор, характеризующий этапы развития науки по соответствующим направлениям, сформулированы постановка задачи и основные цели работы, показана их научная новизна и практическая значимость, приведены положения, выносимые на защиту, кратко изложена структура диссертационной работы.

Во второй главе разрабатываются новые аналитические методы решения и исследования свойств уравнений Ричардсона [1], которые являются частным случаем уравнений Бете и могут применяться для изучения различных систем со спаренными фермионами. Особенно тесно метод Ричардсона связан с хорошо известной моделью Годена [2]. Этот метод позволяет найти точное решение многочастичного уравнения Шрёдингера для потенциала типа БКШ, оставаясь в представлении с фиксированным числом частиц.

В разделе 2.1 изложено краткое введение в данную главу.

В разделе 2.2 предложен так называемый вероятностный метод решения уравнений Ричардсона. Используется известная электростатическая аналогия для этих уравнений, которая ставит в соответствие энергиподобные величины и систему свободных кулоновских зарядов на плоскости. Аналогия выполняется и для ряда других уравнений Бете [3].

Вместо рассмотрения энергии зарядов перейдем к некоторому аналогу гиббсовской вероятности найти систему в заданной конфигурации при фиксированной температуре. Положение центра масс системы будем реконструировать методами интегрирования. Выражение для вероятности, подходящее для исследования термодинамического предела, имеет вид:

$$S(\{R_j\}) = \frac{\prod_{j,l,j < l} (R_l - R_j)^2}{\prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{k}} (2\varepsilon_{\mathbf{k}} - R_j)} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^N R_j}{V}\right), \quad (1)$$

где $\{R_j\}$ - набор энергиподобных величин, N - количество пар в системе, $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ - энергии одноэлектронных состояний, V - постоянная взаимодействия. Это выражение соответствует температуре, равной V , стремящейся к нулю в термодинамическом пределе. Заметим, что (1) имеет аналогию с квадратом волновой функции Лафлина. Функция (1) является мероморфной и факторизуемой по каждой из переменных R_j .

Энергия исходной квантовой системы E_N равна $\sum_{j=1}^N R_j$ в положении равновесия. Используя (1), выразим E_N через аналог статистической суммы Z для системы зарядов: $E_N = -\partial(\ln Z)/\partial(1/V)$, где $Z = \int S(\{R_j\}) dR_j$, а интегрирование проводится по каждой из величин R_j вдоль

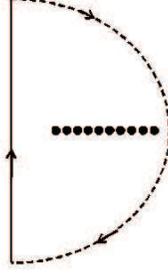


Рис. 1. Схематическое изображение комплексной плоскости значений R_j и пути интегрирования для каждой из этих величин. Точки - полюса функции S , соответствующие одноэлектронным энергиям.

замкнутого контура, показанного на Рис. 1. Примечательно, что энергия квантовой задачи дается логарифмической производной от классической статистической суммы. Множитель $\prod_{l,j,j<l}(R_l - R_j)^2$ позволяет классифицировать Z в качестве интеграла сельберговского типа (“кулоновский” интеграл).

Вычисления проводятся для случая эквидистантного распределения энергий одноэлектронных уровней. А именно, притяжение между электронами действует только в окне Дебая: $\varepsilon_{\mathbf{k}} \in [\varepsilon_{F_0}, \varepsilon_{F_0} + \Omega]$, расстояния между ближайшими уровнями $1/\rho$ (ρ – плотность состояний), а количество состояний в окне Дебая $N_\Omega = \rho\Omega$. Интеграл выражается через сумму биномиального типа: $Z = \exp(-2N\varepsilon_{F_0}/V)z$, где

$$z = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=0}^{N_\Omega} \left[\prod_{j=1}^N (-1)^{n_j} \sigma^{n_j} \binom{N_\Omega}{n_j} \right] \prod_{l,j,l>j} (n_l - n_j)^2, \quad (2)$$

где $\sigma = \exp(-2/\rho V)$ - неаналитическая функция от V .

Учитывая, что $\prod_{l,j,l>j}(n_l - n_j)$ выражается через детерминант Вандермонде, можно показать, что сумма (2) сводится к компактному виду

$$z = \sigma^{\frac{N(N-1)}{2}} (1 - \sigma)^{NN_\Omega - N(N-1)} A(N, N_\Omega), \quad (3)$$

где

$$A(N, N_\Omega) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} (N_\Omega!)^N \frac{sf(N)sf(N_\Omega - N)}{sf(N_\Omega)}, \quad (4)$$

где $sf(N)$ - суперфакториал.

Вычисляя логарифмическую производную от Z по $1/V$, получаем выражение для энергии основного состояния системы:

$$E_N = 2N\varepsilon_{F_0} + \frac{N(N-1)}{\rho} - 2N \left(\Omega - \frac{N-1}{\rho} \right) \frac{\sigma}{1-\sigma}. \quad (5)$$

Уравнения Ричардсона в термодинамическом пределе решались и с помощью еще одного оригинального метода, в котором все энергеподобные величины раскладывались вблизи решения для единичной пары (**раздел 2.3**), а для плотности энергии выводилось разложение типа вириального. Этот подход ограничен пределом БЭК. Результаты согласуются с результатами вычислений в рамках вероятностного подхода.

В **разделе 2.4** подробно анализируется выражение (5). Два первых слагаемых соответствуют кинетической энергии в отсутствие взаимодействия. Третье слагаемое - это энергия конденсации. Оно имеет весьма примечательную структуру, будучи пропорциональным и количеству пар электронов N , и количеству пар дырок $N_\Omega - N$ в окне Дебая. Энергия конденсации в состоянии с N парами может быть интерпретирована с использованием энергии связи одной пары, которая оказывается уменьшенной по сравнению с энергией связи *изолированной* пары. Уменьшение это пропорционально числу занятых состояний в окне Дебая. Физически подобное уменьшение ожидаемо, поскольку пары состоят из фермионов, которые блокируют состояния в окне Дебая из-за запрета Паули, не давая им участвовать в формировании коррелированного состояния. Похожий эффект наблюдается и для экситонов Ванье-Мотта [8].

Анализ показывает, что выражение (5) совпадает с соответствующим выражением теории БКШ при $N = N_\Omega/2$. Теорию БКШ можно распространить и на случай произвольного заполнения окна Дебая. Для этого к уравнению на сверхпроводящую щель следует добавить уравнение на химический потенциал в духе работ Иглса [4] и Леггетта [5] по переходу БЭК-БКШ, который сейчас привлекает огромное внимание в контексте изучения ультрахолодных газов, а также, согласно некоторым представлениям, может быть релевантен для высокотемпературных сверхпроводников (см., например, [6, 7]). В диссертационной работе показано, что и в общем случае (5) согласуется с таким обобщением теории БКШ.

В рамках вероятностного подхода, также проводится расчет энергий первых возбужденных состояний. Для этого аналитически вычислялись сельберговские интегралы более сложного вида. Результаты также совпадают с результатами обобщенной теории БКШ. Были идентифицированы три режима для разницы между энергиями первого возбужденного и основного состояний в зависимости от заполнения окна Дебая. Это - разреженный

предел пар электронов, режим БКШ и разреженный предел пар дырок. С изменением заполнения окна Дебая переходы между этими режимами происходят плавно. В режиме БКШ разница энергий определяется щелью типа БКШ, тогда как в двух других случаях - энергией связи пары. Используя выражение для статистической суммы (3), можно показать, что погрешность в определении энергии основного состояния пренебрежимо мала в термодинамическом пределе. Таким образом, получаем, что обобщенная теория БКШ дает асимптотически точные результаты для энергий основного состояния и щели вдоль всего перехода от режима БЭК к режиму БКШ при нуле температуре.

Развитое в диссертации понимание энергии конденсации отличается от распространенного в литературе. Обычная интерпретация основана на концепции виртуальных пар [10], которые обычно и называют “куперовскими парами”. Их число полагается равным числу электронов в тонком слое порядка Δ вокруг энергии Ферми, и каждая обладает энергией связи порядка Δ . В предлагаемой интерпретации принимается во внимание, что *все* электроны из окна Дебая участвуют в спаривании. В терминологии Шриффера это – сверхтекучие пары [10]. Приписывая каждой паре энергию порядка энергии связи изолированной пары, снова получаем энергию конденсации. Таким образом, два этих понимания отвечают двум возможным способам разложения выражения для энергии конденсации на множители. Предложенная интерпретация обладает преимуществом, позволяя описывать с единых позиций как режим БКШ, так и предел БЭК.

Энергия связи пары обеспечивает дополнительный масштаб энергии. Однако этот масштаб, по-видимому, скрыт в сверхпроводниках макроскопического размера. Возникает вопрос, при каких условиях он может проявиться? Известно, что теория БКШ перестает работать даже качественно в малоразмерных системах, содержащих небольшое число пар [11]. В этой связи, целесообразно исследовать режим, в котором доминируют флуктуации, а также переход от него к режиму БКШ макроскопической системы. Предельные состояния по обе стороны перехода качественно отличаются друг от друга. Этому вопросу посвящен **раздел 2.5**.

Переписывая гамильтониан через дырочные операторы, получаем, что для энергии основного состояния $E_N(\varepsilon_{F_0})$ действует универсальное соотношение, диктуемое симметрией между парами электронов и парами дырок:

$$E_N(\varepsilon_{F_0}) = E_{N_{\Omega}-N} \left(V - \varepsilon_{F_0} - \frac{N_{\Omega} - 1}{\rho} \right) - VN_{\Omega} + 2N_{\Omega}\varepsilon_{F_0} + \frac{N_{\Omega}(N_{\Omega} - 1)}{\rho}. \quad (6)$$

Несмотря на то, что электронно-дырочная симметрия содержится в гамильтониане, она явно не фигурирует в уравнениях Ричардсона.

Разделим E_N на аддитивный вклад $2N\varepsilon_{F_0}$, и вклад E'_N , который не зависит от ε_{F_0} : $E_N(\varepsilon_{F_0}) = 2N\varepsilon_{F_0} + E'_N$. Поскольку E'_N - функция дискретной переменной N , она всегда может быть представлена в виде полинома от N (степени N_Ω). Разложение удобно проводить по символам Похгаммера: $E'_N = \sum_{n=1}^{N_\Omega} e_n(N)_n$, где e_n - набор неизвестных величин. Далее предположим, что основной вклад в E'_N обеспечивается двумя первыми слагаемыми: $E'_N \simeq e_1N + e_2N(N-1)$. Это предположение оправдано, поскольку именно такая форма E'_N возникает в трех пределах, решаемых аналитически. Будем считать e_1 и e_2 неизвестными. Используя (6) и рассматривая задачу с одной парой в качестве граничного условия в пространстве дискретных N , получаем: $E'_1 = e_1$, где e_1 дается решением единственного уравнения Ричардсона, и $|e_1|$ есть не что иное, как энергия связи единичной пары. В общем случае, e_1 должно быть найдено численно. В итоге, для энергии конденсации получаем выражение:

$$E_N^{(cond)}/N = e_1 \left(1 - \frac{N-1}{N_\Omega-1} \right) - V \frac{N-1}{N_\Omega-1}. \quad (7)$$

Проведем сравнение теоретических предсказаний с результатами численного решения системы уравнений Ричардсона для разного количества пар - от 1 до 50 при $N = N_\Omega/2$. Результаты представлены на Рис. 2. Энергия конденсации нормирована на $2/\rho$. Сплошные линии соответствуют аналитической формуле (7), пунктирные линии - результатам численного решения уравнений, а точечные линии - подходу БКШ. Имеется хорошее согласие между (7) и численными результатами, которое сохраняется и в переходной области.

В данном подходе снова фигурирует масштаб, равный энергии связи единичной пары, который альтернативен щели Δ . Более того, из (7) следует, что теория БКШ перестает давать правильные результаты для энергии конденсации, когда расстояние между соседними уровнями $1/\rho$ становится сравнимым с этой величиной. Интересно, что в работе [9] уже указывалось на существование дополнительного масштаба энергии $2\Delta^2/\Omega \ll \Delta$ в наноразмерных гранулах - как раз в этом контексте. Из записанного в таком виде выражения трудно понять его происхождение. Однако прямая проверка показывает, что в пределе системы большого размера $2\Delta^2/\Omega$ есть не что иное как энергия связи пары. Таким образом, в ультрамалых системах дополнительный энергетический масштаб проявляется в явном виде.

В третьей главе диссертационной работы исследуются свойства малоразмерных сверхпроводников и сверхтекучих конденсатов атомов щело-

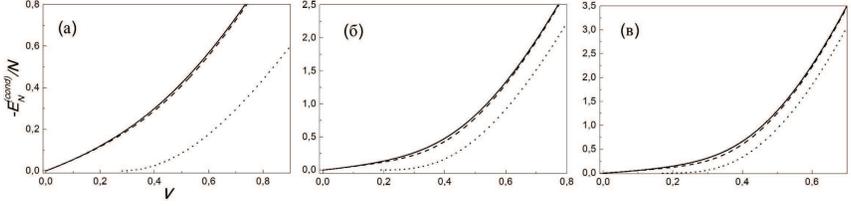


Рис. 2. Энергия конденсации (в единицах $2/\rho$) на пару, как функция константы взаимодействия $v = \rho V$ для N пар: $N = 5$ (а), $N = 25$ (б), $N = 50$ (в). Сплошные линии - результат вычислений по формуле (7), пунктирные - численное решение уравнений Ричардсона, точечные линии - теория БКШ.

чных металлов, чьи размеры сопоставимы с длиной когерентности. Особое внимание уделено развитию методов решения уравнений Гинзбурга-Ландау (ГЛ) и Гросса-Питаевского (ГП) для вихревого состояния в таких системах, основанных на использовании пробных функций. С их помощью исследуется целый ряд проблем.

В **разделе 3.1** представлено краткое введение в третью главу.

В **разделе 3.2** рассматривается несколько задач о равновесных свойствах малоразмерных систем. На вихревое состояние в малоразмерных сверхпроводниках оказывает влияние и окружающая образец среда. В рамках теории ГЛ, это можно учесть через граничное условие де Женна для параметра порядка: $\mathbf{n}(-i\nabla - \mathbf{a})\psi = \frac{i}{b}\psi$, где \mathbf{n} - единичный вектор нормали к поверхности, \mathbf{a} - векторный потенциал, а b - длина экстраполяции. Исследуем эволюцию вихревой фазовой диаграммы длинного цилиндра радиуса R в параллельном магнитном поле при изменении b . Параметр порядка представим в виде разложения (r и ϕ - полярные координаты):

$$\psi(r, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(r) \exp(-il\phi). \quad (8)$$

Безвихревое, одновихревое состояния, а также фаза с гигантским вихрем кратности L соответствуют слагаемым с $l = 0, 1$ и L . Для описания с хорошей точностью состояния с кластерами вихрей достаточно принять во внимание небольшое количество членов разложения. Для f_l используем пробную функцию:

$$f_l(r) = \exp\left(-q_l \frac{r^2}{R^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(l)} \left(\frac{r}{R}\right)^{l+2n}, \quad (9)$$

где q_l зависит от вариационных параметров $p_n^{(l)}$ через граничное условие де Женна. В (9) учтем лишь несколько первых слагаемых, а значения вариационных параметров найдем из минимума энергии.

Сравнивая энергии различных состояний, исследуем равновесные фазовые диаграммы цилиндров в плоскости “внешнее магнитное поле – радиус цилиндра”. Результаты приведены на Рис. 3 для $b = \xi(T)$ (а), $b = 2,5\xi(T)$ (б), $b = 5\xi(T)$ (в), $b \rightarrow \infty$ (г). Сплошные линии показывают переходы с изменением вихревого заряда, т.е. суммы кратностей всех вихрей (под кратностью понимается, сколько раз меняется на 2π фаза параметра порядка при обходе вокруг оси вихря). Нижняя/верхняя линия относится к первому/поверхностному критическому полю. Переходы между состояниями без изменения вихревого заряда являются переходами второго рода (пунктирные линии), сопровождающимися слиянием вихрей в гигантский вихрь (при увеличении поля) или расщеплением последнего (при уменьшении поля). Переходы с изменениями этого заряда всегда являются переходами первого рода и сопровождаются скачками намагниченности. Уменьшение b ведет к подавлению величины скачков, так что дискретность намагниченности сглаживается. Площадь домена на фазовой диаграмме, в котором выгодно существование гигантских вихрей, быстро уменьшается по мере уменьшения b .

Далее метод пробных функций применен к описанию серии экспериментов по изучению свойств гетероструктур сверхпроводник-ферромагнетик, в которых влияние ферромагнетика сводится преимущественно к генерации дополнительного поля [A7, A8]. Были исследованы конфигурации в виде сверхпроводящего диска с расположенной на его поверхности магнитной точкой – с диэлектрическим слоем между сверхпроводником и ферромагнетиком и без него. Такой слой препятствует разрушению сверхпроводимости. Остановимся подробнее на этом случае [A8]. Радиус диска составлял 1,08 мкм, его толщина - 60 нм. Радиус и толщина магнитной точки - 270 нм и 16,5 нм, соответственно. Толщина слоя кремния между диском и точкой - 10 нм. На Рис. 4 (а) сравниваются экспериментальные данные и результаты вычислений (сплошная линия) для зависимости критической температуры структуры T_c от внешнего поля (T_{c0} - критическая температура без магнитной точки в нулевом внешнем поле). Также приведены результаты расчетов для диска без магнитной точки (пунктирная линия).

Из Рис. 4 (а) видно, что зависимость $T_c(B)$ вблизи точки $B_a = 0$ сдвинута вдоль оси B_a из-за наличия добавочного поля ферромагнетика. Оказывается, что само направление сдвига зависит от интенсивности поля точки. При усилении интенсивности сдвиг поначалу определяется просто эффектом компенсации внешним полем. Затем вихревой заряд меняется

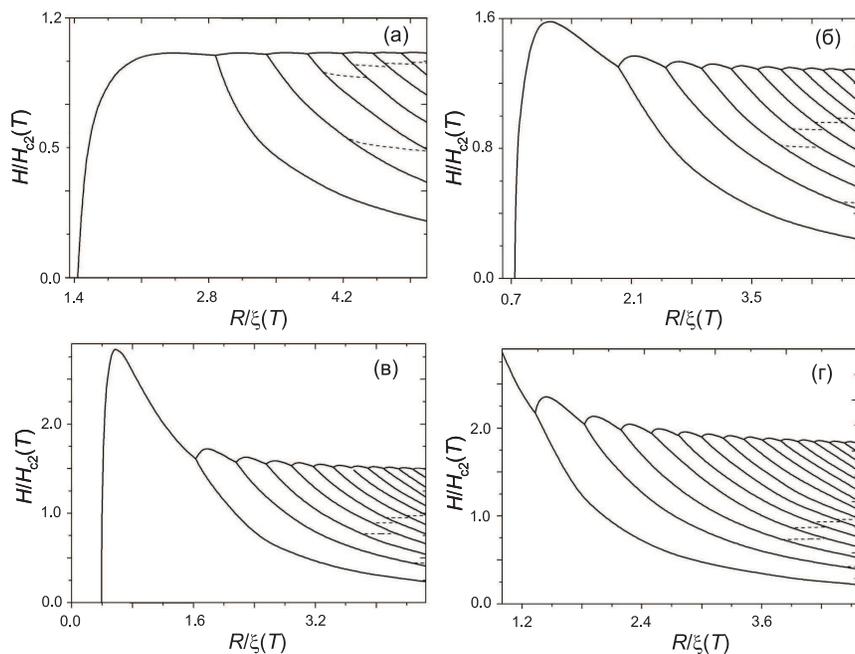


Рис. 3. Равновесные фазовые диаграммы цилиндров для различных значений длины экстраполяции де Женна: $b = \xi(T)$ (а), $b = 2,5\xi(T)$ (б), $b = 5\xi(T)$ (в), $b \rightarrow \infty$ (г). Сплошные (пунктирные) линии показывают переходы первого (второго) рода.

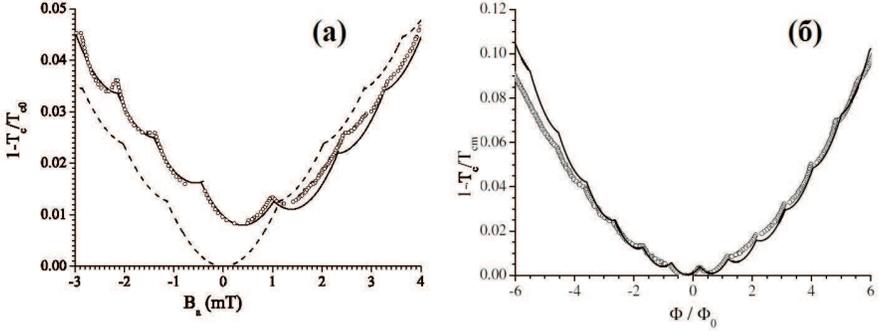


Рис. 4. Границы между сверхпроводящей и нормальной фазами для гибридных структур “ферромагнетик-сверхпроводник”. Рис. 4 (а) относится к случаю диска с магнитной точкой посередине; B_a - внешнее магнитное поле. Рис. 4 (б) относится к случаю кольца с магнитной точкой посередине; Φ - поток через кольцо. Сплошные линии - результат вычислений, круги - экспериментальные данные, пунктирная линия на Рис. 4 (а) - вычисления для диска без магнитной точки.

скачком, и сдвиг становится противоположным по знаку. Максимальное значение $T_c(B_a)$ уменьшено из-за наличия магнитной точки, поскольку ее поле не однородно, и поэтому его нельзя полностью скомпенсировать внешним полем.

В работах [A9, A10] все та же магнитная точка помещалась в центре сверхпроводящего *кольца* из алюминия. В [A9] внутренний и внешний радиусы кольца составляли $R_i = 0,55$ мкм и $R_o = 1,05$ мкм, соответственно. Радиус магнитной точки был $r_d = 0,27$ мкм. Была построена теоретическая модель, пригодная для описания сверхпроводящего состояния в кольце и учитывающая неоднородность поля. Для тонкого кольца показано, что максимальная критическая температура при заданном квантовом числе L (параметр порядка $\psi(r, \phi) = f(r) \exp(-iL\phi)$) равна

$$1 - \frac{T_c}{T_{c0}} = \frac{2\xi(0)^2}{R_o^2 - R_i^2} \left(\frac{\pi R_i^2 (B_l - B_{op})}{\Phi_0} - L \right)^2 \left[\ln \frac{R_o}{R_i} - \frac{R_o^2 - R_i^2}{R_o^2 + R_i^2} \right], \quad (10)$$

где B_{op} и B_l - средние поля в открытой части кольца и в сверхпроводящей части. Из (10) следует, что полный сдвиг кривой $T_c(B)$ вдоль оси B вблизи максимальной T_c снова может быть обоих знаков при одной и той же ориентации намагниченности точки. При низких температурах сдвиг $T_c(B)$ определяется только средним полем внутри сверхпроводника. Неоднородность поля приводит к двум разным и независимым сдвигам $T_c(B)$ при

низких и высоких температурах, что “скручивает” всю кривую. Результаты вычислений хорошо согласуются с экспериментальными данными, как видно из сравнения на Рис. 4 (б) (T_{cm} - максимально возможная критическая температура структуры).

Сверхпроводящее кольцо с помещенной посередине него магнитной точкой может использоваться в низкотемпературной электронике. В работе [12] была предложена конструкция кубита на основе кольца субмикронного размера с джозефсоновскими контактами. Прикладывая магнитный поток, можно получать состояния с противоположной циркуляцией тока. Если пренебречь зарядовой энергией, эти состояния оказываются вырожденными при значении потока $\Phi_0/2$, индуцирующем сдвиг обобщенной фазы параметра порядка на π . Если учесть зарядовую энергию, вырождение снимается, так что эти два состояния можно пытаться использовать в качестве состояний кубита. Представляется важным инкорпорировать “ π -сдвиг” в само устройство. Одно из предложений сформулировано в работе [A10] с участием автора диссертационной работы: в центр кольца можно поместить магнитную точку с подобранными параметрами, которые бы и обеспечивали “ π -сдвиг”. Подобное устройство было успешно реализовано [A10]. Экспериментальные данные хорошо согласуются с полученными теоретическими предсказаниями.

Далее техника пробных функций для параметра порядка применена для случая конденсата атомов щелочных металлов, в которых уравнения ГЛ заменяются уравнением ГП, похожим по математической структуре. Исследованы равновесные вихревые фазы в конденсате со спином 2, в котором параметр порядка имеет пять компонент. Рассмотрены случаи вращающихся конденсатов в ловушках с гармоническим запирающим потенциалом. При этом изучены лишь фазы с аксиальной симметрией модуля параметра порядка. Были построены равновесные фазовые диаграммы таких конденсатов и предложено простое качественное объяснение серий фазовых переходов между состояниями с различными типами топологических дефектов. Описаны новые типы таких дефектов, отличающиеся экзотической спиновой текстурой.

В **разделе 3.3** рассмотрена проблема термоактивационного проникновения вихря в малоразмерный низкотемпературный сверхпроводник. В экспериментах [13, 14] было обнаружено подавление гистерезиса для входа и выхода вихрей в нано-островки из свинца. Поперечные размеры этих образцов столь малы (около 100 нм), что они были способны вместить лишь один вихрь. В диссертационной работе показано, что за подавление барьера могут отвечать температурные флуктуации. Для этого оказалось необходимым разработать новый подход к проблеме, поскольку размер системы

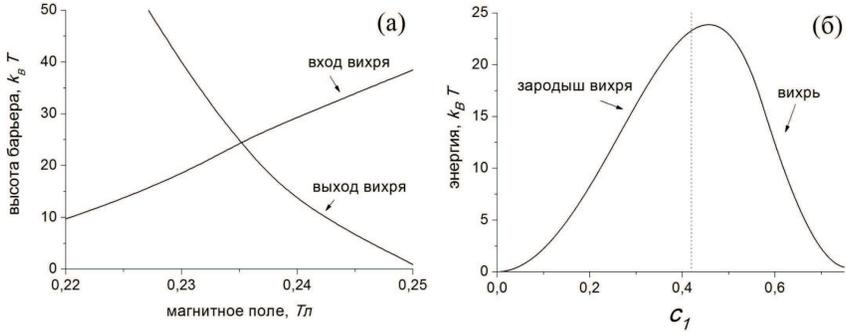


Рис. 5. Высота поверхностного барьера в условиях эксперимента [13], как функция внешнего поля (а). Зависимость энергии системы от параметра c_1 , отвечающего формированию вихря, вдоль оптимальной траектории (б). Точечная линия на Рис. 5 (б) показывает границу между состояниями с зародышем вихря на границе островка и с реальным вихрем.

лишь немного превышает размер сердцевины вихря – поэтому положение вихря не является подходящей независимой переменной.

Учитывая размеры образца, можно спроецировать параметр порядка на два низших уровня Ландау: $f(r, \varphi) \simeq c_0 \varphi_0(r) + c_1 \varphi_1(r) e^{-i\varphi}$, где φ_0 и φ_1 - собственные функции оператора кинетической энергии. Поверхностный барьер описываем в терминах населенностей c_0 и c_1 . Энергия системы выражается биквадратной функцией этих параметров. Вычисленные высоты барьеров на вход и выход вихря в условиях эксперимента [13] показаны на Рис. 5 (а), а энергия системы вдоль оптимального пути между безвихревыми и одновихревыми состояниями – на Рис. 5 (б). Затем, в рамках модели Бардина-Стефена и с учетом эффектов размагничивания, вводятся в рассмотрение и оцениваются коэффициенты вязкости, связанные с изменениями c_0 и c_1 . На конечном этапе решается уравнение Фоккера-Планка - снова в терминах населенностей уровней Ландау, что позволяет описать переход системы из одной ямы на Рис. 5 (б) - в другую под действием температурных флуктуаций. Соответствующие выкладки представлены в диссертационной работе. В итоге выведено выражение для среднего времени термоактивации вихря: $\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{U_{en}}{k_B T}\right)$, где U_{en} - высота барьера, а для τ_0 получена оценка $\sim 10^{-15} - 10^{-14}$ с. Вычисления показывают, что высота барьера, в условиях эксперимента [13], составляет примерно $20k_B T$ (см. Рис. 5 (а)). Время термоактивации оказывается малым ($\tau \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ с), что и может служить объяснением результатов экспериментов [13, 14].

В **разделе 3.4** анализируется возможность преодоления поверхностного барьера вихрем за счет квантовых флуктуаций. Рассмотрен свинцовый островок, состоящий из всего нескольких моноатомных слоёв, имеющий форму диска радиуса $R \gg \xi(0)$ и помещенный во внешнее поле. Для оценки вероятности макроскопического квантового туннелирования вихря используется подход Леггетта и Калдейры [15], который учитывает диссипацию энергии. При вычислении евклидова действия S_E от временной зависимости радиальной координаты вихря $r(t)$ удобнее перейти к ее фурье-образу $\tilde{r}(\omega)$. После интегрирования по времени имеем

$$S_E = \int \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ \frac{m_v}{2} \left[1 + \frac{\eta}{|\omega|m_v} \right] \omega^2 |\tilde{r}|^2 + V(\tilde{r}) \right\}, \quad (11)$$

где m_v и η – масса и вязкость вихря, а $V(\tilde{r})$ – вклад потенциальной энергии. Далее используется метод размерных оценок [16] – S_E вычисляется приближенно в релевантном здесь диссипативном пределе, учитывая два параметра барьера – его высоту U_{en} и ширину l_b : $S_E \approx 2\eta l_b^2 \left(1 + \frac{mU_{en}}{\eta^2 l_b^2} \right)$. Величины U_{en} и l_b находятся из лондоновской модели. Вероятности квантового туннелирования и термоактивации с экспоненциальной точностью даются выражениями $P_{QT} \sim \exp(-S_E/\hbar)$ и $P_{TA} \sim \exp(-U_{en}/k_B T)$. Вычисления показали, что для рассматриваемых свинцовых островков отношение S_E/\hbar оказывается не слишком большим ($\sim 10 - 100$), что открывает возможность для наблюдения квантового туннелирования. При этом, в случае входа вихря в островок, более вероятно туннелирование, тогда как, в случае его выхода из островка – термоактивация. В диссертационной работе представлена детальная диаграмма режимов для островков.

Ультратонкие свинцовые островки, получаемые методом испарения в вакууме, начиная с некоторого размера, стремятся вырасти в треугольные структуры [13]. Треугольная геометрия образца может приводить к довольно необычным последствиям [17]. В **разделе 3.5** исследуется, как такая геометрия влияет на температурные флуктуации. Рассматривается случай нулевого внешнего поля в окрестности T_c . Граничное условие для параметра порядка на каждой из трех сторон островка длиной D берется в его обычной форме для границы вакуум/сверхпроводник. Безразмерный параметр порядка f раскладывается вокруг своего значения в отсутствие флуктуаций, а в функционале энергии ГЛ сохраняются только квадратичные по отклонениям δf слагаемые. Для каждой флуктуационной моды δf удовлетворяет граничному условию, зависящему от геометрии. Из уравнения на собственные значения находится спектр нормальных мод $E_{mn}^{(\alpha)}$, который имеет две ветви ($\alpha = 1, 2$), а также – собственные функции $c_{mn}^{(\alpha)}$. Далее δf

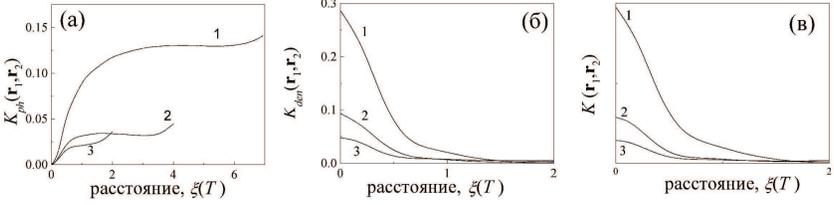


Рис. 6. Зависимость корреляционных функций (фазовая - (а), “плотность-плотность” (б), параметра порядка (в)) вдоль разных траекторий в ультратонком треугольном островке из свинца: 1 - вдоль биссектрисы, 2 - вдоль средней линии, 3 - от центра вдоль средней линии. Длина стороны структуры - 450 нм, толщина - 2 нм; $T = 0,75T_c$ (а) и (б), $T = 1,25T_c$ (в).

раскладывается по полученному базису $\delta f = \sum_{n,m,\alpha} c_{mn}^{(\alpha)} \varphi_{mn}^{(\alpha)}$. Это позволяет рассчитать статистическую сумму в гауссовом приближении:

$$Z = \prod_{n,m,\alpha} \frac{2\pi}{D\sqrt{E_{mn}^{(\alpha)}(E_{mn}^{(\alpha)} + 2)G(T)\sqrt{3}}}, \quad (12)$$

где $G(T)$ - число Гинзбурга.

Для исследования пространственной локализации флуктуаций ниже T_c вычисляются корреляторы фазы χ параметра порядка $K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [\chi(\mathbf{r}_1) - \chi(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle_T$ и плотности $n_s = |f|^2$ сверхпроводящих электронов $K_{den}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \delta n_s(\mathbf{r}_1) \delta n_s(\mathbf{r}_2) \rangle_T$, для которых в работе приведены аналитические выражения. На Рис. 6 представлены зависимости этих корреляторов от расстояния вдоль разных путей в островке толщиной 2 нм и длиной стороны $8\xi(T)$ при $T = 0,75T_c$. Видно, что флуктуации как χ , так и плотности n_s сильнее выражены в углах наноструктуры, а характерная ширина флуктуационной области - несколько $\xi(T)$. Аналогичный вывод сделан и для температур выше T_c , для которых был рассчитан коррелятор параметра порядка $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle f(\mathbf{r}_1) f^*(\mathbf{r}_2) \rangle_T$ (Рис. 6 (в) - при $T = 1,25T_c$). Качественно результаты объясняются тем, что конденсат в углах зажат с боков, что локально как бы понижает размерность системы, а чем ниже размерность, тем сильнее флуктуации.

Усиления флуктуаций можно ожидать в образцах различной формы с углами. Данный вывод важен для приложений, в которых используются малоразмерные элементы из сверхпроводников (например, в фотодетекторах, в которых именно флуктуации ответственны за их ложные срабатывания). Для подавления флуктуаций необходимо избегать острых углов в констру-

кции.

В разделе 3.6 изучаются механизмы формирования вихря во вращающихся конденсатах атомов щелочных металлов в ловушках. Входу вихря препятствует барьер, аналогичный поверхностному барьеру в сверхпроводниках. Несмотря на сходства, между этими двумя случаями есть и различия. Так, в конденсате отсутствует хорошо выраженная поверхность.

Для параметра порядка используются разложения (8) и (9), в последнем учитывается лишь первый член. Находится безразмерная частота $\omega_{inst}(l)$, зависящая от газового параметра p , при которой безвихревое состояние становится неустойчивым по отношению к компоненте с моментом l :

$$\omega_{inst}(l) = \frac{2}{\Gamma(l+1)} \left[\frac{(l-1)\Gamma(l+1)}{\sqrt{1+2p}} + \frac{1}{4} \left[\frac{1+R_l^4}{R_l^2} \right] \Gamma(l+2) + \frac{4(1+2p)^{l/2}\Gamma(l+1)}{(\sqrt{1+2p}+R_l^2)^{l+1}} \right]. \quad (13)$$

Величина R_l находится из минимума $\omega_{inst}(l)$ по R_l . Фактическая величина ω_{inst} определяется минимумом $\omega_{inst}(l)$ по дискретному l . Значение l_{inst} , приводящее к неустойчивости, увеличивается с ростом p . Интересно, что безвихревая фаза всегда устойчива по отношению к появлению гармоники с $l = 1$.

Далее можно выйти за пределы линейного анализа, представив ψ в окрестности точки неустойчивости в виде суперпозиции гармоник с $l = 0$ и $l = l_{inst}$. При каждом ω решение исследуется на стабильность по отношению к возникновению других гармоник. Оказывается, что поведение системы зависит от четности l_{inst} . При нечетных l_{inst} на периферии системы появляется некоторое количество точек, в которых параметр порядка по модулю подавлен, и в конце-концов в каждой такой точке образуется пара “вихрь-антивихрь”, после чего вихри проникают во внутреннюю часть системы, а антивихри удаляются в противоположную сторону. Количество таких точек равно l_{inst} . Если l_{inst} четно, то генерируются дополнительные моды с $l = l_{inst}/2$, и в системе появляется меньшее число пар. Частота вращения, при которой вихри проникают в систему, очень несущественно отличается от ω_{inst} . Последнее обстоятельство служит подтверждением одного из предложенных ранее сценариев [19].

Механизм появления вихрей через пары “вихрь-антивихрь” является особенностью систем, в которых нет четко выраженной границы. Заметим, что уже были описаны случаи, когда в сверхпроводниках энергетически выгодно появление антивихрей в областях с пониженным параметром порядка [17, 18].

В **разделе 3.7** исследуются температурные флуктуации вихревых кластеров в конденсатах атомов в квазидвумерной геометрии в ловушках. Вихри, в этом случае, нельзя считать точечными частицами, поскольку размеры их сердцевин примерно соответствуют расстоянию между ними, что отличает такие кластеры от исследовавшихся ранее ансамблей точечных частиц [20].

Для параметра порядка снова используются разложения (8) и (9), а флуктуации исследуются в гауссовом приближении. Подробно изучено разупорядочивание кластеров, содержащих две оболочки. Показывается, что сначала становятся существенными флуктуации разностей фаз между разными гармониками параметра порядка (8), что ведет к расщеплению оболочек. Температуру межоболочечного “плавления” можно определить из критерия Линдемманна [20]. Оказывается, что кластеры с соизмеримыми количествами вихрей в оболочках намного более стабильны, чем с несоизмеримым, так что температуры их плавления на несколько порядков выше. Плавление кластеров в конденсатах происходит при экспериментально доступных плотностях и температурах.

В диссертации также рассмотрены флуктуации вихревых кластеров в ловушке с дополнительным квадрупольным искажением потенциала. Определены характерные температуры депиннинга таких кластеров.

В **разделе 3.8** изучаются температурные флуктуации в конденсатах атомов со спином 1 в ловушках. Параметр порядка имеет три компоненты Ψ_j ($j = -1, 0, 1$). Рассматриваются лишь состояния с аксиально-симметричным распределением плотности частиц. Если все три состояния населены атомами, энергия системы зависит от разности фаз $\Delta\chi = 2\chi_0 - \chi_1 - \chi_{-1}$ между этими компонентами. Малость взаимодействия в спиновом канале приводит к тому, что температурные флуктуации $\Delta\chi$ становятся существенными при намного более низких температурах, чем флуктуации плотности. В итоге, даже для низких температур среднеквадратичное отклонение угла $\Delta\chi$ может быть существенным. Это приводит к сильным флуктуациям поперечной намагниченности конденсата. В диссертации также рассмотрен случай квазидвумерного ферромагнитного конденсата и определен характерный масштаб, на котором еще сохраняется порядок в направлении намагниченности.

Наконец, в **разделе 3.9** анализируется случай конденсата со спином 2, характеризующегося пятикомпонентным параметром порядка Ψ_j ($j = -2, -1, 0, 1, 2$). Рассматривается так называемая циклическая фаза, для которой даже в пределе системы большого размера и в отсутствии вращения атомы населяют три состояния ($j = -2, 0, 2$), а энергия системы зависит от разности фаз $\Delta\chi = 2\chi_0 - \chi_2 - \chi_{-2}$. Эта величина сильно флуктуирует

из-за слабости взаимодействия в спиновом канале. Уравнения ГП в данном случае допускают решение, содержащее кинк, то есть переходную область между двумя доменами, в которых $\Delta\chi$ отличается на 2π . Кинк имеет сложную композитную структуру. Кинки играют решающую роль в разрушении дальнего порядка в таких системах в квазидвумерном случае. Потеря порядка происходит через генерацию пар “кинк-антикинк” (переход с потерей огранки). Получено приближенное выражение для соответствующей температуры.

В четвертой главе диссертационной работы изучаются свойства вихревых решеток в сверхпроводниках макроскопического размера.

В разделе 4.1 представлены вводные замечания для данной главы.

В разделе 4.2 предложена вариационная модель, позволяющая найти обратимую намагниченность сверхпроводника второго рода во всем диапазоне внешних полей между нижним и верхним критическими полями. В этой модели используется приближение круглой ячейки, а модуль параметра порядка в ней описывается с помощью пробной функции

$$|\psi| = f_\infty \frac{r}{\sqrt{r^2 + \xi_v^2}}, \quad (14)$$

где ξ_v и f_∞ вариационные параметры, r - расстояние от центра ячейки. Использование этой функции позволяет решить аналитически второе уравнение ГЛ (для магнитного поля):

$$h(r) = uI_0(f_\infty \sqrt{r^2 + \xi_v^2}) + vK_0(f_\infty \sqrt{r^2 + \xi_v^2}), \quad (15)$$

где u и v могут быть определены из граничных условий и квантования потока через ячейку. Теперь можно найти аналитически свободную энергию сверхпроводника, как функцию ξ_v , f_∞ и магнитной индукции B . Зависимости ξ_v и f_∞ от B находятся минимизацией энергии. Все соответствующие формулы приведены в диссертационной работе. В итоге, удается найти обратимую намагниченность, для которой предложена единая формула

$$\begin{aligned} -4\pi M = & -B + \frac{f_\infty K_0(f_\infty \xi_v) I_1(f_\infty \rho) + I_0(f_\infty \xi_v) K_1(f_\infty \rho)}{\kappa \xi_v K_1(f_\infty \xi_v) I_1(f_\infty \rho) - I_1(f_\infty \xi_v) K_1(f_\infty \rho)} + \\ & + \frac{1}{2B\kappa^2 \xi_v^2 \rho^2} \{K_1(f_\infty \xi_v) I_1(f_\infty \rho) - I_1(f_\infty \xi_v) K_1(f_\infty \rho)\}^{-2} + \\ & + \frac{f_\infty^2 (2 + 3B\kappa \xi_v^2)}{2\kappa (2 + B\kappa \xi_v^2)^3} + \frac{\kappa^2 f_\infty^2 \xi_v^2}{2} \left\{ \frac{1 - f_\infty^2}{2} \ln \left[\frac{2}{B\kappa \xi_v^2} + 1 \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1 - f_\infty^2}{2 + B\kappa \xi_v^2} + \frac{f_\infty^2}{(2 + B\kappa \xi_v^2)^2} \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{r^2 + \xi_v^2}$. Результат (16) хорошо согласуется с известными асимптотиками в низких и высоких полях и сохраняет точность в переходной области. В диссертации было проведено сравнение теоретических предсказаний с результатами некоторых экспериментов по измерению намагниченности ряда высокотемпературных сверхпроводников и выявлено хорошее согласие между теорией и экспериментом. Также подвергнуты критической ревизии известные работы Клема с соавторами, посвященных этой же проблеме [21, 22].

В **разделе 4.3** рассматривается структура вихревой решетки в системе искусственно созданных и расположенных периодически центров пиннинга, которые образуют квадратную решетку. Фазовая диаграмма определяется противоборством между треугольной симметрией решетки вихрей и квадратной симметрией решетки центров пиннинга. В зависимости от характеристик потенциальных ям, создаваемых центрами пиннинга, усиление пиннинга может приводить к реализации так называемой промежуточной фазы, в которой половина вихрей сорваны со своих регулярных положений, локально приближая симметрию решетки к треугольной (при факторе заполнения, т.е. отношении числа вихрей и центров периодического пиннинга, 1 и 1/2). Подобное поведение вихревой решетки наблюдалось в эксперименте [23] с конденсатами атомов щелочных металлов, в которых центры пиннинга создавались оптической решеткой. Также в диссертационной работе исследуется критический ток в подобных системах.

В **разделе 4.4** рассматривается та же система, что и в предыдущем разделе, но с дополнительным беспорядком, который придает еще большее богатство фазовой диаграмме. Исследуются фазовые диаграммы системы при факторе заполнения 1, для чего сначала проводится классификация дефектов решетки вихрей. Для квадратной решетки вихрей такими дефектами являются цепочки депиннигованных вихрей (зародыши промежуточной фазы), домены искаженной треугольной решетки, а также структуры типа кинк и антикинк внутри отдельного ряда, образующиеся вокруг лишнего вихря или вакансии. С усилением беспорядка разрушение порядка в расположении вихрей может проходить в один или два этапа. В последнем случае, в системе сначала появляются цепочки депиннигованных вихрей, которые поглощают отдельные вакансии и лишние вихри. В результате формируются сложные фракталоподобные дефекты. Затем в системе появляются домены депиннигованных вихрей, конкурирующие с фракталоподобными дефектами. Схематически диаграмма состояний представлена на Рис. 7.

В **разделе 4.5** изучается эта же система в режиме слабого беспорядка, но с приложенной внешней силой, возникающей при протекании по

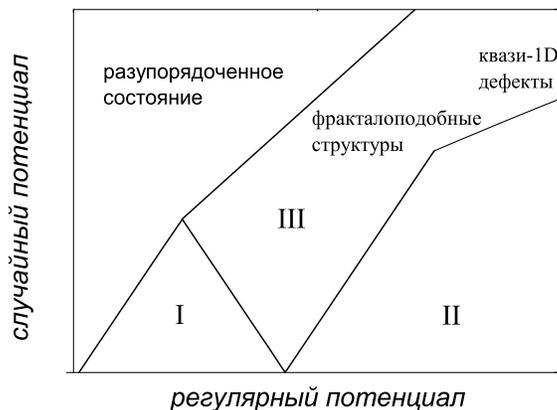


Рис. 7. Схематическая диаграмма состояний вихревой решетки в плоскости “амплитуда периодического потенциала — амплитуда случайного потенциала”: I - промежуточная фаза, II - квадратная решетка, III - сосуществование фаз I и II.

системе транспортного тока. Выявлено существование различных динамических режимов переноса вихрей по системе. Показано, что основную роль здесь играют дефекты типа “кинк” и “антикинк”, распространяющиеся по рядам вихрей и содержащие лишнюю вихрь или вакансию, соответственно. Особенности движения этих дефектов и их размножение парами и определяют динамические режимы.

В пятой главе диссертационной работы экситоны Френкеля рассматриваются в рамках специально разработанной теории многих тел, в которой точно учитывается фермионная статистика для составляющих экситоны электронов и дырок. Эта теория является обобщением ранее развитой М. Комбеско с соавторами теории многих тел для экситонов Ванье-Мотта [8]. Проблема учета небозевости статистики для случая экситонов Френкеля ранее рассматривалась в [24–26].

В разделе 5.1 представлено введение к главе 5.

В разделе 5.2 выводится гамильтониан системы экситонов Френкеля в представлении вторичного квантования из исходного гамильтониана системы периодически расположенных ионов с локализованными на них и взаимодействующими электронами, которые могут переходить из основного состояния в первое возбужденное состояние. Возбуждение можно предста-

вить в виде пары из электрона и дырки на одном узле, которое распространяется в пространстве от узла к узлу. Такие возбуждения и представляют собой экситоны Френкеля.

В разделе 5.3 представлена коммутационная техника для операторов рождения и уничтожения единичных экситонов Френкеля. Сначала получено выражение для оператора рождения экситона с импульсом \mathbf{Q} :

$$B_{\mathbf{Q}}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{N_s}} \sum_{n=1}^{N_s} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_n} B_n^{\dagger}, \quad (17)$$

где N_s - количество ионов в системе, \mathbf{R}_n - положение каждого из них, а $B_n^{\dagger} = a_n^{\dagger} b_n^{\dagger}$ - оператор рождения возбуждения на данном ионе, выражающийся через фермионные операторы рождения электронов a_n^{\dagger} и дырок b_n^{\dagger} .

Коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения экситонов Френкеля отличаются от простых бозонных, и это отражает тот факт, что экситоны являются составными бозонами:

$$\left[B_{\mathbf{Q}'}^{\dagger}, B_{\mathbf{Q}}^{\dagger} \right]_{-} = \delta_{\mathbf{Q}'\mathbf{Q}} - D_{\mathbf{Q}'\mathbf{Q}}, \quad (18)$$

где оператор $D_{\mathbf{Q}'\mathbf{Q}}$ описывает отклонение от бозонной статистики. Можно показать, что $D_{\mathbf{Q}'\mathbf{Q}}$ при действии на вакуум электронно-дырочных пар $|v\rangle$ дает 0. Более того, верно следующее соотношение

$$\left[D_{\mathbf{Q}'\mathbf{Q}}, B_{\mathbf{P}}^{\dagger} \right]_{-} = \frac{2}{N_s} B_{\mathbf{P}+\mathbf{Q}-\mathbf{Q}'}^{\dagger}, \quad (19)$$

которое снова позволяет вернуться к операторам рождения экситонов. Соотношения (18) и (19) позволяют вычислять нормировочные множители для многочастичных волновых функций, выраженных через операторы рождения не взаимодействующих экситонов.

Для коммутатора гамильтониана системы и оператора рождения экситона Френкеля имеем

$$\left[H_X, B_{\mathbf{Q}}^{\dagger} \right] = E_{\mathbf{Q}} B_{\mathbf{Q}}^{\dagger} + V_{\mathbf{Q}}^{\dagger}, \quad (20)$$

где $E_{\mathbf{Q}}$ - энергия системы с одним экситоном, а $V_{\mathbf{Q}}^{\dagger} |v\rangle = 0$. Для оператора $V_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$, в свою очередь, выполняется коммутационное соотношение

$$\left[V_{\mathbf{Q}_1}^{\dagger}, B_{\mathbf{Q}_2}^{\dagger} \right] = \sum_{\mathbf{Q}'_1 \mathbf{Q}'_2} \xi \left(\begin{matrix} \mathbf{Q}'_2 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}'_1 & \mathbf{Q}_1 \end{matrix} \right) B_{\mathbf{Q}'_1}^{\dagger} B_{\mathbf{Q}'_2}^{\dagger}, \quad (21)$$

где $\xi \left(\begin{smallmatrix} Q'_2 & Q_2 \\ Q'_1 & Q_1 \end{smallmatrix} \right)$ – скалярная величина. Как видно, коммутатор (21) снова выражается через операторы рождения экситонов, что позволит “замыкать” расчеты матричных элементов.

В **разделе 5.4** полученные коммутационные соотношения (18), (19), (20), (21) применены для вычисления некоторых матричных элементов. Эти выкладки визуализированы с помощью специальной диаграммной техники, основанной на “обменных” диаграммах.

Так, вычислена энергия основного состояния системы с произвольным количеством экситонов Френкеля N с нулевым импульсом $\mathbf{Q} = 0$ в первом порядке по взаимодействию:

$$\langle H \rangle_N = \frac{\langle v | B_0^N H B_0^{\dagger N} | v \rangle}{\langle v | B_0^N B_0^{\dagger N} | v \rangle}. \quad (22)$$

Это выражение, взятое в термодинамическом пределе, представляет собой разложение плотности энергии по степеням плотности пар. Показано, что в нем отсутствуют слагаемые степеней, большей 1, что, в некотором смысле, роднит экситоны Френкеля с куперовскими парами, для которых в главе 2 был получен аналогичный результат (см. также [27]). Причину этого неожиданного сходства можно усмотреть в том, что экситоны Френкеля состоят из электронно-дырочных пар на одном узле в реальном пространстве, тогда как потенциал теории БКШ для куперовских пар столь же однозначно спаривает электроны двух сортов со строго противоположными импульсами в импульсном, а не реальном пространстве. Это отличает оба данных типа составных бозонов от экситонов Ванье-Мотта.

Предложенная в данной главе техника может использоваться для вычисления средних значений операторов на разнообразных многочастичных функциях. В частности, с ее помощью можно исследовать вклады кинематического взаимодействия в разных порядках по динамическому взаимодействию (например, с помощью функций Грина).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

- Разработан “вероятностный” метод решения уравнений Ричардсона, основанный на электростатической аналогии. Положение центра масс системы зарядов на плоскости комплексной энергии определяется с помощью интегрирования. Предложены аналитические методы вычисления соответствующих интегралов сельберговского типа. Подход может быть распространен на другие типы уравнений Бете, для которых существует электростатическая аналогия.
- С помощью предложенного метода показано, что обобщенная теория БКШ в лидирующем порядке по числу частиц точно описывает пере-

- ход от конденсата БКШ к конденсату локальных фермионных пар при нуле температур.
- Продемонстрировано, что в сверхпроводниках существует скрытый масштаб энергии, соответствующий энергии связи единичной пары. Показано, как результаты теории БКШ для макроскопически больших систем могут быть интерпретированы с этих позиций. В малых системах теория БКШ перестает адекватно работать, когда расстояние между соседними уровнями одноэлектронных состояний оказывается сопоставимым с энергией связи пары.
 - Показано, что в подходе Ричардсона имеется скрытая симметрия между парами электронов и парами дырок. Это свойство использовано для описания перехода между конденсатом БКШ в системах макроскопического размера к системам ультрамалого размера. Предложена простая формула для энергии основного состояния.
 - Исследованы вихревые фазовые диаграммы малоразмерных сверхпроводников, гибридных структур “сверхпроводник-ферромагнетик” и бозе-конденсатов атомов щелочных металлов. Показано, что проникновение вихрей в конденсат происходит через образование пар “вихрь-антивихрь” на границе системы.
 - Построена модель термоактивационного проникновения вихря в ультрамалый сверхпроводящий образец. Показано, что температурные флуктуации могут подавлять поверхностный барьер в островках из низкотемпературных сверхпроводников. Определены критерии перехода от термоактивации вихря к его макроскопическому квантовому туннелированию.
 - Предсказано усиление флуктуаций в углах сверхпроводящих островков и наноструктур из-за локального уменьшения эффективной размерности системы.
 - Предсказано существование сильных флуктуаций разностей фаз между различными компонентами параметра порядка в спиновых бозе-конденсатах атомов щелочных металлов.
 - Предсказано существование сильных флуктуаций кластеров вихрей в скалярных квази-двумерных конденсатах в оптических и магнитных ловушках. Температура разупорядочивания кластера существенно зависит от его симметрии и деформации ловушки.
 - Построена вариационная модель для обратимой намагниченности сверхпроводников второго рода, применимая во всем диапазоне полей между первым и вторым критическим полем. Предложена аналитическая формула для намагниченности.
 - Рассмотрены свойства вихревой решетки в системе периодических центров пиннинга. Исследованы необычные фазы вихревой решетки, возникающие из-за конкуренции между отталкиванием вихрей и пери-

одическим потенциалом. Разупорядочивание решетки из-за введения в систему беспорядка происходит в несколько этапов. Показано, что в случае слабого беспорядка критический ток определяется дефектами типа “кинк”. Эти же дефекты, а также пары “кинк-антикинк” определяют и основные динамические режимы.

- Разработана теория многих тел для экситонов Френкеля, которая точно учитывает фермионную статистику для составляющих их электронов и дырок. Предложены коммутационная и диаграммная техники для вычисления матричных элементов. Показано, что энергия основного состояния системы из произвольного числа экситонов Френкеля в первом приближении по взаимодействию содержит только линейные и квадратичные слагаемые по числу экситонов.

Список публикаций по теме диссертации

- A1. В. В. Погосов, А. Л. Рахманов, К. И. Кугель, *Намагниченность сверхпроводников второго рода в интервале полей $H_{c1} < H < H_{c2}$: вариационный метод*, ЖЭТФ **118**, 676 (2000).
- A2. W. V. Pogosov, K. I. Kugel, A. L. Rakhmanov, E. H. Brandt, *Approximate Ginzburg-Landau solution for the regular flux-line lattice. Circular cell method*, Phys. Rev. B **64**, 064517 (2001).
- A3. W. V. Pogosov, A. L. Rakhmanov, E. A. Shapoval, *Vortex state in mesoscopic cylinders. Variational approach*, Physica C **356**, 225 (2001).
- A4. W. V. Pogosov, *Vortex phases in mesoscopic cylinders with suppressed surface superconductivity*, Phys. Rev. B **65**, 224511 (2002).
- A5. W. V. Pogosov, K. I. Kugel, A. L. Rakhmanov, *Variational calculations of vortex structures in bulk and mesoscopic superconductors*, Studies of High-Temperature Superconductors, vol.42, ed. by A. Narlikar, Nova Sci. Pub., New York (2002).
- A6. W. V. Pogosov, A. L. Rakhmanov, V. V. Moshchalkov, *Vortex lattice in presence of a tunable periodic pinning potential*, Phys. Rev. B **67**, 014532 (2003).
- A7. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Nucleation of superconductivity in Al mesoscopic disk with a magnetic dot*, Appl. Phys. Lett. **83**, 1593 (2003).
- A8. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Influence of the stray field of magnetic dot on the nucleation of superconductivity in a disk*, Europhys. Lett. **65**, 546 (2004).
- A9. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Little-Parks effect in a superconducting loop with a magnetic dot*, Phys. Rev. B **68**, 172503 (2003).

- A10. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Magnetic Phase Shifter for Superconducting Qubits*, Phys. Rev. Lett. **92**, 177904 (2004).
- A11. W. V. Pogosov, R. Kawate, T. Mizushima, K. Machida, *Vortex structure in spinor $F=2$ Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **72**, 063605 (2005).
- A12. W. V. Pogosov, K. Machida, *The effect of thermal fluctuations on spin degrees of freedom in spinor Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. A **74**, 023624 (2006).
- A13. W. V. Pogosov, K. Machida, *Thermal fluctuations of vortex clusters in quasi two-dimensional Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. A **74**, 023622 (2006).
- A14. W. V. Pogosov, K. Machida, *Cyclic phase in $F=2$ spinor condensate: long-range order, kinks, and roughening transition*, Phys. Rev. A **74**, 023611 (2006).
- A15. W. V. Pogosov, K. Machida, *Role of surface modes in vortex formation in BEC*, Laser Physics **16**, 376 (2006).
- A16. M. Combescot, W. V. Pogosov, *Microscopic derivation of Frenkel excitons in second quantization*, Phys. Rev. B **77**, 085206 (2008).
- A17. M. Combescot, W. V. Pogosov, *Composite boson many-body theory for Frenkel excitons*, Eur. Phys. J. B **68**, 161 (2009).
- A18. W. V. Pogosov, M. Combescot, *Ground state energy of N Frenkel excitons*, Eur. Phys. J. B **68**, 183 (2009).
- A19. W. V. Pogosov, V. R. Misko, H. J. Zhao, F. M. Peeters, *Collective vortex phases in periodic plus random pinning potential*, Phys. Rev. B **79**, 014504 (2009).
- A20. W. V. Pogosov, H. J. Zhao, V. R. Misko, F. M. Peeters, *Kink-antikink vortex transfer in periodic-plus-random pinning potential: Theoretical analysis and numerical experiments*, Phys. Rev. B **81**, 024513 (2010).
- A21. W. V. Pogosov, M. Combescot, *"Moth-eaten effect" driven by Pauli blocking, revealed for Cooper pairs*, Письма в ЖЭТФ **92**, 534 (2010).
- A22. W. V. Pogosov, V. R. Misko, F. M. Peeters, *Geometry-induced localization of thermal fluctuations in ultrathin superconducting structures*, Phys. Rev. B **82**, 054523 (2010).
- A23. W. V. Pogosov, *Thermal suppression of surface barrier in ultrasmall superconducting structures*, Phys. Rev. B **81**, 184517 (2010).
- A24. W. V. Pogosov, M. Combescot, M. Crouzeix, *Two-Cooper-pair problem and the Pauli exclusion principle*, Phys. Rev. B **81**, 174514 (2010).
- A25. W. V. Pogosov, M. Combescot, *From one to N Cooper pairs, step by step*, Physica C **471**, 566 (2011).
- A26. W. V. Pogosov, V. R. Misko, *Vortex quantum tunnelling versus thermal activation in ultrathin superconducting nanoislands*, Phys. Rev. B **85**, 224508 (2012).

- A27. W. V. Pogosov, “*Probabilistic*” approach to Richardson equations, J. Phys.: Condens. Matter **24**, 075701 (2012).
- A28. W. V. Pogosov, *Excited states in Richardson pairing model: ‘probabilistic’ approach*, Prog. Theor. Phys. **128**, 1 (2012).
- A29. M. Combescot, W. V. Pogosov, O. Betbeder-Matibet, *BCS ansatz, Bogoliubov approach to superconductivity and Richardson-Gaudin exact wave function*, Physica C **485**, 47 (2013).
- A30. W. V. Pogosov, N. S. Lin, V. R. Misko, *Electron-hole symmetry and solutions of Richardson pairing model*, Eur. Phys. J. B **86**, 235 (2013).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. W. Richardson, *A restricted class of exact eigenstates of the pairing-force Hamiltonian*, Phys. Lett. **3**, 277 (1963).
- [2] M. Gaudin, *Diagonalisation d’une classe d’hamiltoniens de spin*, J. Phys. (Paris) **37**, 1087 (1976).
- [3] А. Г. Ушверидзе, *Квазиточнорешаемые модели квантовой механики*, Физ. Элем. Част. Атом. Яд. **20**, 1185 (1989).
- [4] D. M. Eagles, *Possible Pairing without Superconductivity at Low Carrier Concentrations in Bulk and Thin-Film Superconducting Semiconductors*, Phys. Rev. **186**, 456 (1969).
- [5] A. J. Leggett, *Cooper pairing in spin-polarized Fermi systems*, J. de Physique. Colloques **41**, C7 (1980).
- [6] М. Ю. Каган, А. В. Клапцов, И. В. Бродский, R. Combescot, X. Leungonas, *Составные фермионы и бозоны в ультрахолодных газах и высокотемпературных сверхпроводниках*, УФН **176**, 1105 (2006).
- [7] В. Ф. Гантмахер, В. Т. Долгополов, *Квантовый фазовый переход сверхпроводник – изолятор*, УФН **53**, 1 (2010).
- [8] M. Combescot, O. Betbeder-Matibet, F. Dubin, *The many-body physics of composite bosons*, Physics Reports **463**, 215 (2008).
- [9] M. Schechter, Y. Imry, Y. Levinson, J. von Delft, *Thermodynamic properties of a small superconducting grain*, Phys. Rev. B **63**, 214518 (2001).

- [10] J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Perseus Books Group, Massachusetts (1999).
- [11] J. Dukelsky, S. Pittel, G. Sierra, *Exactly solvable Richardson-Gaudin models for many-body quantum systems*, Rev. Mod. Phys. **76**, 643 (2004).
- [12] J. E. Mooij, T.P. Orlando, L. Levitov, Lin Tian, C.H. van der Wal, S. Lloyd, *Josephson Persistent-Current Qubit*, Science **285**, 1036 (1999).
- [13] T. Cren, D. Fokin, F. Debontridder, V. Dubost, D. Roditchev, *Ultimate Vortex Confinement Studied by Scanning Tunneling Spectroscopy*, Phys. Rev. Lett. **102**, 127005 (2009).
- [14] T. Nishio, T. An, A. Nomura, K. Miyachi, T. Eguchi, H. Sakata, S. Lin, N. Hayashi, N. Nakai, M. Machida, Y. Hasegawa, *Superconducting Pb Island Nanostructures Studied by Scanning Tunneling Microscopy and Spectroscopy*, Phys. Rev. Lett. **101**, 167001 (2008).
- [15] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, *Quantum tunneling in a dissipative system*, Ann. Phys. **149**, 374 (1983).
- [16] G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, V. M. Vinokur, *Vortices in high-temperature superconductors*, Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).
- [17] V. R. Misko, V. M. Fomin, J. T. Devreese, V. V. Moshchalkov, *Stable Vortex-Antivortex Molecules in Mesoscopic Superconducting Triangles*, Phys. Rev. Lett. **90**, 147003 (2003).
- [18] A. S. Mel'nikov, A. V. Samokhvalov, *Abrikosov vortex escape from a columnar defect as a topological electronic transition in vortex core*, Письма в ЖЭТФ **94**, 823 (2012).
- [19] J. R. Anglin, *Vortices near surfaces of Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **65**, 063611 (2002).
- [20] Yu. E. Lozovik, E. A. Rakoch, *Energy barriers, structure, and two-stage melting of microclusters of vortices*, Phys. Rev. B **57**, 1214 (1998).
- [21] Z. Hao, J. R. Clem, M. W. Elfresh, L. Civale, A. P. Malozemoff, F. Holtzberg, *Model for the reversible magnetization of type-II superconductors: Application to high- T_c superconductors*, Phys. Rev. B **43**, 2844 (1991).

- [22] Z. Hao, J. R. Clem, *Limitations of the London model for the reversible magnetization of type-II superconductors*, Phys. Rev. Lett **67**, 2371 (1991).
- [23] S. Tung, V. Schweikhard, E. A. Cornell, *Observation of Vortex Pinning in Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **97**, 240402 (2006).
- [24] В. М. Агранович, Б. С. Тошич, *Коллективные свойства френкелевских экситонов*, ЖЭТФ **53**, 149 (1967).
- [25] А. Ю. Гаевский, И. Г. Каплан, М. А. Рувинский, *Корреляционная функция плотность-плотность системы молекулярных экситонов*, ТМФ **48**, 129 (1981).
- [26] V. Chernyak, S. Mukamel, *Third-order optical response of intermediate excitons with fractional nonlinear statistics*, J. Opt. Soc. Am. B13, 1302 (1996).
- [27] M. Crouzeix, M. Combescot, *Energy of N Cooper Pairs by Analytically Solving the Richardson-Gaudin Equations for Conventional Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **107**, 267001 (2011).