Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт им.П.Н. Лебедева Российской академии наук.

На правах рукописи

УДК 535.36

Чернега Владимир Николаевич

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м. н., профессор В.И.Манько

Москва - 2013 год

Содержание

Введение

В квантовой механике понятие "состояние системы"описывается либо волновой функцией для чистых состояний [1] либо матрицей плотности для смешанных состояний [2, 3]. Эти описания отличаются от используемого в классической статистической механике. В этой связи предпринимались попытки найти такое описание состояний в квантовой механике, которое приближается к вероятностному описанию классических состояний. В работах [4, 5, 6, 7, 8] были введены представления матрицы плотности, похожие на классические вероятностные распределения, но ими не являющиеся. Они были названы квазираспределениями. В работе [9] было введено томографическое вероятностное представление квантовых состояний. В этом представлении вместо волновой функции или матрицы плотности используется стандартное положительное распределение вероятности. Матрица плотности определяется этим распределением, и все физические величины могут быть найдены, если оно задано, аналогичным образом, как они находятся, если задана матрица плотности. Такой подход к квантовым состояниям был назван "вероятностным представлением квантовой механики,"и ему посвящены исследования (см., например [10]) как в квантовой оптике [11], так и в теории спина [12, 13, 14]. Различные аспекты вероятностного подхода обсуждались также в работах [15, 16, 17, 18]. Согласно [19] существует девять формулировок квантовой механики, включающих в себя матричную механику, фейнмановскую формулировку с интегралом по путям и др. Вероятностное представление квантовой механики дополняет известные формулировки, являющиеся эквивалентными по физическому содержанию, но подчеркивающие разные аспекты математического формализма квантовой механики. Вероятностное представление квантовой механики позволяет описывать квантовые и классические системы на одном языке - языке теории вероятности, при этом состояния квантовой и классической системы задается одним и тем же объектом - томограммой, которая является функцией распределения вероятности, что позволяет исследовать одинаковым образом информационные характеристики классических и квантовых состояний, такие как энтропия Шэннона, энтропия Реньи, относительная энтропия, относительная энтропия Реньи, энтропия Тцаллиса вместе с неравенствами для соответствующих энтропий. Свойства томограмм в классической и квантовой областях различаются.

Квантовые состояния задаются неотрицательными, эрмитовыми операторами, дисперсии и ковариации наблюдаемых в квантовых состояниях обязаны удовлетворять соотношениям неопределенностей, а следовательно и томограммы, задающие квантовые состояния, должны удовлетворять определенным условиям, следующим из соотношений неопределенностей и неотрицательности, соответствующего томограмме оператора плотности квантового состояния. В классической области на дисперсии и ковариации наблюдаемых не наложены такие ограничения. Поэтому томограммы, допустимые в квантовой области (описывающие физические состояния квантовой системы) могут быть недопустимыми в классической области и наоборот. В связи с этим представляет большой интерес исследование гибридных квантово-классических систем и их эволюции, а также соотношений неопределенностей в томографическом представлении. В томографическом представлении квантовой механики [9] все квантовые постулаты и уравнения для волновой функции и матрицы плотности могут быть выражены через функции распределения вероятности и уравнения на них. В частности, различные соотношения неопределенностей также могут быть записаны в виде неравенств на томограммы, которые могут быть проверены в будущих экспериментах, что позволит провести проверку основных принципов квантовой механики (например, в экспериментах с использованием гомодинного детектирования фотонных состояний), поэтому представляет интерес подробное исследование в томографическом представлении соотношений неопределенностей. Кроме того, соотношения неопределенностей задают границу квантовости физических явлений, которая определяется постоянной Планка. Граница квантовости зависит от различных характеристик состояния (ковариаций, параметра негауссовости, параметра чистоты). Зависимость границы квантовости от параметров состояния в соотношениях неопределенностей может быть формальныо описана введением "эффективной постоянной Планка". Квантовые флуктуации приводят к такому квантовому явлению как туннелирование частицы под потенциальным барьером, эффективность этого процесса зависит от параметров состояния, то есть формально также может быть описана "эффективной постоянной Планка". Следовательно представляет интерес исследовать в томографическом представлении влияние различных параметров состояния и эффектов не только на границу квантовости, но и на эффективность квантового туннелирования.

Настоящая диссертация посвящена актуальным проблемам вероятностного представления квантовой механики и решению новых задач, относящихся к связи квантовых и классических подходов в квантовой оптике, теории спиновых систем (кубитов и кудитов), теории квантовых корреляций (неравенства Белла [20]), запутанных состояний, соотношений неопределенности.

Актуальность задач, поставленных в диссертационной работе, определяется необходимостью рассмотрения основ квантовой механики в связи с интенсивным развитием квантовых технологий в квантовых коммуникациях, квантовых вычислениях и квантовой криптографии.

В классической статистической механике состояние частиц с одной степенью свободы с флуктуирующими координатой q и импульсом p описывается неотрицательной функцией распределения вероятности $f(q,p,t)$. В случае многих частиц состояние системы описывается совместной функцией распределения вероятности $f(\vec{q},\vec{p},t)$, где вектора $\vec{q}$ и $\vec{p}$ имеют N компонент. Процесс эволюции системы описывается кинетическими уравнениями, простейшим из которых является уравнение Луивилля без столкновительного члена (см., например, [21, 22]). Учет столкновений приводит к уравнению Больцмана, которое может быть получено методом построения зацепленной системы уравнений, полученных Н. Н. Боголюбовым, называемых цепочкой Боголюбова. В квантовой статистической механике состояние системы описывается оператором плотности $\hat{\rho}$. Для частицы с одной степенью свободы оператор плотности может быть представлен с помощью интегрального преобразования Фурье функции Вигнера $W(q,p,t)$ [4], являющейся некоторым аналогом классической функции распределения вероятности $f(q,p,t)$. Уравнение эволюции квантовой системы (уравнение Мойала [23]) до некоторой степени похоже на уравнение Лиувилля и переходит в него в пределе постоянной Планка, стремящейся к нулю. Однако функция Вигнера может принимать отрицательные значения и поэтому не является распределением вероятности, так как вероятность по определению является неотрицательной величиной. В работе [9] в квантовой механике было введено новое представление, в котором с помощью преобразования Радона [24] функции Вигнера квантовое состояние описывается функцией распределения вероятности, называемой томограммой состояния или томографической функцией распределения. В работе [25] было показано, что аналогичная томограмма может быть введена и для классической частицы с помощью преобразования Радона функции распределения вероятности $f(q,p,t)$ на фазовой плоскости. Преобразование Радона обратимо. Таким образом, информация о состоянии классической частицы на языке функции $f(q,p,t)$ эквивалентна информации, заключенной в томограмме. Это же утверждение справедливо и для квантовой частицы, для которой информация о состоянии, заключенная в функции Вигнера, эквивалентна информации, заключенной в томограмме состояния.

В диссертационной работе рассмотрены кинетические уравнения классической статистической механики (уравнение Лиувилля, цепочка Боголюбова) в томографическом представлении, и обсуждены возможности томографического подхода с помощью преобразования Радона к описанию системы в квантовой области. Существуют и другие уравнения, в частности релятивистские уравнения в теории поля [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32], которые в перспективе можно будет рассмотреть в томографическом представлении.

Важной статистической характеристикой является корреляция между частицами системы. В квантовой механике состояние частиц со спином описывается спинорами. В [33, 12] было показано, что спиноры можно отобразить на томографические распределения вероятности. Это отображение задается преобразованием, аналогичным преобразованию Радона. Таким образом в квантовой механике можно формулировать свойство состояний, используя вместо волновых функций (спиноров) или вместо матриц плотности томограммы. В квантовой теории информации аналогом спиновых состояний являются кубиты (спин $s = 1/2$) и кудиты (любые более высокие значения спина s). Важной задачей при этом является изучение свойств состояний систем из нескольких спинов. Состояния таких составных систем отличаются степенью корреляции между подсистемами. Сильными, чисто квантовыми корреляциями обладают так называемые запутанные состояния. Проблема определения запутанности состояний и меры для характеристики запутанности не решена на сегодняшний день. Имеются лишь частичные результаты. Поэтому в диссертационной работе обсуждаются также свойства сепарабельности и запутанности в рамках томографического подхода для кубитов и кутритов.

Целью диссертационной работы является исследование свойств квантовых систем, включая квантовые корреляции, гибридных квантово-классических систем, явления запутанности, соотношений неопределенностей и неравенств на статистические характеристики квантовых систем (энтропии и информации) в рамках нового томографического вероятностного представления квантовой механики.

Научная новизна полученных в диссертационной работе результатов заключается в том, что рассмотренные в ней формулы, выводы и свойства квантовых и классических систем являются новыми, выведенными в соответствии с вероятностным представлением квантовых состояний, полученным в последнее десятилетие.

Практическая значимость полученных результатов определяется тем, что с их помощью выясняются фундаментальные аспекты квантовой теории, на основе которых базируется развитие квантовых технологий.

Апробация работы Основные результаты прошли апробацию на следующих международных конференциях:

Workshop on Advances in Foundations of Quantum Mechanics and Quantum Information with Atoms and Photons, Турин, Италия, 2012

18th Central European Workshop on Quantum Optics, Мадрид, 2011

Conference on Foundation of Probability and Physics-6 (Вакша, Швеция, 2011);

Восьмой семинар Д.Н.Клышко, Москва, МГУ, Корпус нелинейной оптики им.Р.В. Хохлова, 20-22 мая 2013 г.

Результаты докладывались на аспирантском семинаре ФИАН.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 15 статьях в рецензируемых журналах из перечня периодических изданий ВАК [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48]..

Личный вклад автора. Все теоретические результаты, представленные в диссертации, получены автором самостоятельно. Постановка большей части задач выполнена научным руководителем. Обсуждение результатов работ проводилось совместно с соавторами.

Сруктура и объем диссертационной работы. Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 152 страницы. Библиография включает 110 наименований на 10 страницах.

В первой главе с помощью преобразования Радона в классической статистической механике введен формализм квантовой механики (волновой функции, матрицы плотности).

Во второй главе обсуждаются классические кинетические уравнения (Лиувилля) для одной и многих частиц в томографическом представлении. Получены редуцированные уравнения, что позволяет рассмотреть цепочку Боголюбова с помощью томографического метода. Рассмотрен также простейший пример релятивистского кинетического уравнения.

В третьей главе обсуждаются в вероятностном представлении квантовой механики статистические характеристики состояний, такие как средние значения, дисперсии и моменты высших порядков наблюдаемых величин. Кроме того, используя собственные вектора матриц, описывающие наблюдаемые величины, построены бистохастические матрицы, связанные с функциями распределения вероятности, детально рассмотрен пример спиновых систем.

В четвертой главе рассмотрены спиновые состояния и сложение спинов в вероятностном представлении квантовой механики, обсуждено линейное отображение томограммы кудита на томограмму кубита, названного кубитный портрет, и рассмотрено его использование для описания состояния кудита. При помощи метода кубитного портрета исследованы неравенства Белла и обсуждено их нарушение или ненарушение в зависимости от структуры совместной функции распределения вероятности (томограммы). Проблема исследования сепарабельности состояния кубита–кутрита редуцирована к проблеме исследования условий нарушения неравенств Белла для двух кубитов, и в вероятностном представлении квантовой механики приведено доказательство необходимого условия сепарабельности квантовых состояний, основанное на использовании отображения кудита на кубит.

В пятой главе введены некоторые неравенства для томограмм, представленных в виде вектора вероятности, рассмотрены томограммы кудита, введен связанный с томографической функцией распределения фотона томографический кумулянт, и исследована с его помощью негауссовость состояния, показано, что все вектора вероятности, полученные в результате специальных, линейных преобразований, удовлетворяют специфическим неравенствам на энтропии, связанные с преобразованными векторами вероятности.

В шестой главе соотношения неопределенностей записаны на языке томограмм, причем в форме, удобной для экпериментальной проверки с использованием схемы детектирования фотонного состояния. Описанный в четвертой главе метод кубитного портрета кудитных состояний использован для анализа перепутанности двухмодового состояния электромагнитного поля.

В седьмой главе введено уравнение эволюции для совместной функции распределения вероятности состояния гибридной системы, содержащей классическую и квантовую подсистемы, которое совместно с уравнением Лиувилля в классической области и с кинетическим уравнением фон Неймана в квантовой области.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

1 ГЛАВА. КЛАССИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Преобразование Радона можно использовать, чтобы ввести формализм квантовой механики (волновой функции, матрицы плотности) в классической статистической механике. Действительно, в квантовой механике по томограмме $w(X, \mu, \nu)$ восстанавливается функция Вигнера $W(q, p)$, а тем самым и матрица плотности. Функция Вигнера аналогична классической функции распределения вероятности $f(q, p)$. Поэтому применим формально к классической функции распределения вероятности преобразование, переводящее в квантовой механике функцию Вигнера в матрицу плотности (оператор плотности $\hat{\rho}$) в классической статистической механике. Для оператора плотности $\hat{\rho}$, отвечающего свойству чистых состояний, то-есть $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$, можно ввести и аналог волновой функции в классической статистической механике. В данной главе, следуя [37, 38], мы рассмотрим такую волновую функцию на примерах классического осциллятора с постоянной частотой и классического параметрического осциллятора.

1.1 Преобразование Радона функции распределения на фазовом пространстве

Преобразование Радона - это интегральное преобразование функции многих переменных, родственное преобразованию Фурье. (Операция, сопоставляющая функции вещественной переменной другую функцию вещественной переменной. Эта новая функция описывает коэффициенты при разложении исходной функции на элементарные составляющие - гармонические колебания с разными частотами). Впервые преобразование Радона было введено в работе австрийского математика Иоганна Радона в 1917 году [24]. Важнейшее свойство преобразования Радона- это обратимость, то-есть возможность восстанавливать исходную функцию по ее преобразованию Радона. Преобразование Радона в настоящее время активно применяется в медицине и технике. Например, в компьютерной томографии (в широком смысле синоним термина томография, так как все современные томографические методы реализуются с помощью компьютерной техники); в узком смысле (в котором употребляется значительно чаще, синоним термина рентгеновская компьютерная томография, так как именно этот метод положил начало современной томографии) линейка детекторов измеряет поглощение исследуемым объектом параллельного пучка излучения (например, рентгеновских лучей в медицинской томографии, сейсмических волн в геофизической томографии). Также преобразование Радона активно используется в квантовой механике, так в [50] была найдена связь функции Вигнера [4] с измеримым маргинальным распределением вероятностей для гомодинной наблюдаемой, являющейся повернутой на заданный угол координатой в фазовом пространстве системы. Функция Вигнера одномерной системы была выражена через эту измеримую нормированную положительную функцию распределения с помощью преобразования Радона [50], (с интегрированием по углу поворота в фазовом пространстве), используемого в обычной медицинской томографии. В этой связи схема измерений квантового состояния для непрерывной наблюдаемой типа координаты или импульса была названа схемой оптической томографии, и эта схема была применена в экспериментах по реконструкции квантового состояния моды электромагнитного излучения [51] и в молекулярной спектроскопии [52]. Эксперименты по воспроизводимому измерению сжатого вакуумного состояния света, генерируемого оптическим параметрическим осциллятором были рассмотрены в [53]. Реконструкция однофотонного фоковского состояния была реализована экспериментально в работе [54]. Резонансная флуоресценция была предложена для реконструкции квантово-механического состояния иона в работе [55]. Томограмма классического состояния частицы также связана с функцией распределения $f(q,p,t)$ на фазовой плоскости преобразованием Радона.

Рассмотрим состояние нерелятивистской классической свободной частицы единичной массы m=1, которое задано функцией распределения вероятности в фазовом пространстве $f(q,p,t)$. Функция распределения вероятности неотрицательна $f(q,p,t) \geq 0$ и нормирована $\int f(q,p,t)dqdp = 1$. Если мы применим к функции $f(q,p,t=0) \equiv f(q,p))$ интегральное преобразование Радона, то мы получим функцию трех действительных переменных $w(X,\mu,\nu)$, которая называется томограммой. Томограмма является неотрицательной функцией и является функцией распределения вероятности случайной величины - координаты частицы X

$$w(X,\mu,\nu) = \int f(q,p)\delta(X - \mu q - \nu p)dqdp, \tag{1}$$

где $\delta(X - \mu q - \nu p)$ дельта-функция Дирака, а параметры μ, ν характеризуют систему отсчета в фазовом пространстве. Томограмма, называемая симплектической, обладает свойствами стандартной функции распределения вероятности, она неотрицательна и нормирована $\int w(X,\mu,\nu)dX = 1$ для любых значений параметров μ и ν. Преобразование Радона (1) обратимо. Применив обратное преобразования Радона, получаем

$$f(q,p) = \int w(X,\mu,\nu)e^{\iota(X-\mu q-\nu p)}\frac{dXd\mu d\nu}{(2\pi)^2}. \tag{2}$$

Если переменные $\mu = 1$, $\nu = 0$, то данная функция задает маргинальное распределение вероятности координаты. На самом деле

$$w(X,1,0) = \int \delta(X-q)f(q,p)dqdp = \int f(X,p)dp = P(X), \tag{3}$$

где $P(X)$ распределение вероятности координаты. Если $\mu = 0$, $\nu = 1$, то получаем маргинальное распределение вероятности для импульса

$$w(X,0,1) = \int \delta(X-p)f(q,p)dqdp = \int f(X,p)dp = \wp(X). \tag{4}$$

Физический смысл томограммы можно охарактеризовать, рассмотрев две системы координат в фазовом пространстве (на плоскости координата и импульс): исходную и повернутую по отношению к ней на угол Θ. Томограмма (без учета эффекта изменения масштаба по осям координата и импульс, то есть когда $\mu = \cos\Theta$, $\nu = \sin\Theta$) является функцией распределения вероятности только по координате частицы, рассматриваемой в повернутой системе координат. Интегральные преобразования (1), (2) удовлетворяют следующим соотношениям соответствия

$$\begin{aligned} pf(q,p) &\longleftrightarrow -(\frac{\partial}{\partial X})^{-1}\frac{\partial}{\partial \nu}w(X,\mu,\nu); \quad \frac{\partial}{\partial q}f(q,p) \longleftrightarrow \mu\frac{\partial}{\partial X}w(X,\mu,\nu);\\ qf(q,p) &\longleftrightarrow -(\frac{\partial}{\partial X})^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu}w(X,\mu,\nu); \quad \frac{\partial}{\partial p}f(q,p) \longleftrightarrow \nu\frac{\partial}{\partial X}w(X,\mu,\nu). \end{aligned} \tag{5}$$

По определению $(\frac{\partial}{\partial X})^{-1}\frac{\partial}{\partial X} = 1$. При действии оператора $(\frac{\partial}{\partial X})^{-1}$ на функцию $\varphi(X)$ получаем функцию $\Phi(X)$, которая удовлетворяет уравнению: $\frac{d\Phi(X)}{dX} = \varphi(X)$. Применив преобразование Фурье к функциям $\varphi(X)$ и $\Phi(X)$

$$\varphi(X) = \int \tilde{\varphi}(k)e^{ikX}dk \quad \text{и} \quad \Phi(X) = \int \tilde{\phi}(k)e^{ikX}dk, \tag{6}$$

мы определяем действие оператора $(\frac{\partial}{\partial X})^{-1}$ на функцию $\varphi(X)$ согласно соотношению

$$(\frac{\partial}{\partial X})^{-1}\varphi(X) = \int \frac{1}{ik}\tilde{\phi}(k)e^{ikX}dk, \tag{7}$$

что фиксирует константу при выборе первообразной $\Phi(X)$. В формулах (5), например, первое соотношение означает, что

$$pf(q,p) = -\int [(\frac{\partial}{\partial X})^{-1} \frac{\partial}{\partial \nu} w(X,\mu,\nu)] e^{\iota(X-\mu q-\nu p)} \frac{dX d\mu d\nu}{(2\pi)^2}. \tag{8}$$

Теперь рассмотрим состояние нескольких нерелятивистских классических частиц единичной массы (m=1). Томограмма определяется функцией распределения вероятности в фазовом пространстве системы $f(\vec{q},\vec{p})$, где $\vec{q}=(q_1,q_2,..,q_N)$,$\vec{p}=(p_1,p_2,..,p_N)$. Используем свойство однородности для симплектической томограммы, которое для одной степени свободы имеет вид $w(\lambda X,\lambda\mu,\lambda\nu)=\frac{1}{|\lambda|}w(X,\mu,\nu)$. Это свойство следует из свойства однородности дельта-функции Дирака: $\delta(\lambda y)=\frac{1}{|\lambda|}\delta(y)$. Для функции распределения вероятности нескольких частиц существует многомерное преобразование Радона, применив которое, получим симплектическую томограмму

$$w(\vec{X},\vec{\mu},\vec{\nu}) = \int f(\vec{q},\vec{p}) \prod_{k=1}^{N} \delta(X_k-\mu_k q_k-\nu_k p_k) d\vec{q} d\vec{p}. \tag{9}$$

Обратное преобразование Радона имеет вид

$$f(\vec{q},\vec{p}) = \frac{1}{(4\pi^2)^N} \int w(\vec{X},\vec{\mu},\vec{\nu}) (\prod_{k=1}^{N} e^{i(X_k-\mu_k q_k-\nu_k p_k)}) d\vec{X} d\vec{\mu} d\vec{\nu}. \tag{10}$$

Симплектическая томограмма (9) неотрицательна и нормирована, то-есть

$$w(\vec{X},\vec{\mu},\vec{\nu}) \geq 0 \quad \text{и} \quad \int w(\vec{X},\vec{\mu},\vec{\nu}) d\vec{X} = 1. \tag{11}$$

Томограмма является совместной функцией распределения вероятности N случайных величин (координат) X_k, измеряемых в специальной системе отсчета в фазовом пространстве системы, каждая частица которой рассматривается в своей подсистеме отсчета, которая подвергнута операции изменения масштаба $q_k \to s_k q_k$, $p_k \to s_k^{-1} p_k$ и повернута на угол θ_k. Особенно важным свойством, следующим из физического смысла томограммы $w(\vec{X},\vec{\mu},\vec{\nu})$ (приведенного выше) является свойство редукции

$$\int w(\vec{X},\vec{\mu},\vec{\nu}) dX_N = \tilde{w}(\vec{X}',\vec{\mu}\,',\vec{\nu}\,'), \tag{12}$$

где $\vec{X}'=(X_1,X_2,...,X_{N-1})$, $\vec{\mu}\,'=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_{N-1})$ и $\vec{\nu}\,'=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_{N-1})$. Свойство редукции томограммы связано со свойством редукции функции распределения вероятности

$$\int f(\vec{q},\vec{p}) dq_N\, dp_N = \tilde{f}(\vec{q}\,',\vec{p}\,'), \tag{13}$$

где $\vec{q}' = (q, ..., q_{N-1})$, $\vec{p}' = (p, ..., p_{N-1})$. Функция распределения вероятности $\tilde{f}(\vec{q}', \vec{p}')$ является функцией распределения вероятности подсистемы, состоящей из $N-1$ частиц. Симплектическая томограмма $\tilde{w}(\vec{X}', \vec{\mu}', \vec{\nu}')$ получается из функции распределения вероятности $\tilde{f}(\vec{q}', \vec{p}')$ при помощи преобразования Радона

$$\int f(\vec{q}', \vec{p}') \prod_{k=1}^{N-1} \delta(X_k - \mu_k q_k - \nu_k p_k) d\vec{q}\, d\vec{p} = \tilde{w}(\vec{X}', \vec{\mu}', \vec{\nu}'). \tag{14}$$

Симплектическая томограмма состояния многомодовой системы обладает свойством однородности

$$w(\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, ..., \lambda_N X_N, \lambda_1 \mu_1, \lambda_2 \mu_2, ..., \lambda_N \mu_N, \lambda_1 \nu_1, \lambda_2 \nu_2, ..., \lambda_N \nu_N) =$$
$$(\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{|\lambda_k|}) w(\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) \tag{15}$$

и должна удовлетворять следующему условию

$$\int w(\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) \prod_{k=1}^{N} e^{i(X_k - \mu_k q_k - \nu_k p_k)}) d\vec{X} d\vec{\mu} d\vec{\nu} \geq 0, \tag{16}$$

ввиду того, что этот интеграл определяет функцию распределения вероятности системы в фазовом пространстве.

1.2 Аналогия между преобразованием Лоренца и поворотами в фазовом пространстве

Рассмотрим волновую функцию классического гармонического осциллятора, для чего сначала обсудим повороты в фазовом пространстве осциллятора. Гамильтониан классического гармонического осуциллятора имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} \tag{17}$$

(для простоты мы положили частоту $\omega = 1$, и массу $m = 1$). Из уравнений движения для осциллятора

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \quad -\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p}, \tag{18}$$

получаем стандартные дифференциальные уравнения для импульса и координаты осциллятора $p = \dot{q}, \quad -q = \dot{p}$, из которых следует уравнение $\ddot{q} + q = 0$. Если гармонический осциллятор взаимодействует с окружающей средой, то координата и импульс осциллятора флуктуируют, а следовательно, состояние осциллятора описывается функцией распределения вероятности $f(q,p,t)$ в фазовом пространстве. Функция распределения вероятности неотрицательна и удовлетворяет условию нормировки , которое означает, что полная вероятность того, что координата и импульс отвечают какой-то точке в фазовом пространстве осциллятора равна единице. Функция распределения вероятности удовлетворяет кинетическому уравнению Лиувилля для осциллятора

$$\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t}+p\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q}-q\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial p}=0. \tag{19}$$

Осуществим преобразование поворота в фазовом пространстве, для чего рассмотрим величину следующего вида

$$X=q\cos\Theta+p\sin\Theta,\quad P=-q\sin\Theta+p\cos\Theta. \tag{20}$$

Рассмотрим две системы отсчета в фазовом пространстве осциллятора, первая система отсчета задается осями q и p, а вторая повернута относительно первой на угол Θ и задается осями q' и p'. Величина X может пониматься как координата осциллятора во второй системе отсчета в фазовом пространстве. Преобразование поворота системы отсчета в фазовом пространстве аналогично преобразованию Лоренца для четырехвектора координата-время релятивистской частицы. Как хорошо известно, время и координата частицы в системе отсчета, движущейся относительно другой инерциальной системы отсчета со скоростью v, направленной вдоль оси x, связана с координатой и временем в начальной системе отсчета преобразованиями Лоренца, а именно

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2}},\quad t=\frac{t'+vx'}{\sqrt{1-v^2}} \tag{21}$$

(скорость света в формуле (21) положена равной единице c=1). Введем угол поворота Θ при помощи соотношения

$$\cosh\Theta=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}},\quad \sinh\Theta=\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{22}$$

Из формулы (22) видно, что преобразование Лоренца (21) аналогично преобразованию поворота (20). Разница заключается в том, что угол Θ становится чисто мнимым $\Theta\to\imath\Theta$. Известно, что преобразования Лоренца объясняют многие нетривиальные эффекты, возникающие при движении объектов со скоростями близкими к скорости света в специальной теории относительности. Аналогично, преобразования поворота в фазовом пространстве могут объяснить квантовомеханические эффекты [9]. В последующих параграфах мы рассмотрим роль преобразования поворота в фазовом пространстве классического осциллятора.

1.3 Связь волновой функции и функции распределения вероятности классического гармонического осциллятора

В квантовой механике состояние осциллятора обычно задается волновой функцией $\Psi(x,t)$, которая является решением уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{x^2}{2}\Psi(x,t). \tag{23}$$

Для простоты понимания частота, масса частицы, а также постоянная Планка в формуле (23) положены равными 1, то есть $\omega = 1$, $m = 1$, $\hbar = 1$. В квантовой механике для описания чистых и смешанных состояний также можно использовать матрицу плотности $\rho(x,x',t)$, которая является функцией двух переменных x, x' и времени t. Матрица плотности чистых состояний имеет вид

$$\rho_\Psi(x,x',t) = \Psi(x,t)\Psi^*(x',t), \tag{24}$$

где $\Psi(x,t)$ волновая функция этого состояния. Матрица плотности смешанных состояний может быть выражена через матрицы плотности чистых состояний в виде выпуклой суммы, а именно

$$\rho(x,x',t) = \sum_k p_k \rho_{\Psi_k}(x,x',t), \tag{25}$$

где коэффициенты p_k удовлетворяют условиям $p_k \geq 0$ и $\sum_k p_k = 1$. Квантовое состояние с матрицей плотности $\rho(x,x',t)$ в квантовой механике может задаваться также функцией Вигнера [4]. Функция Вигнера задается преобразованием Фурье матрицы плотности

$$W(q,p,t) = \int \rho(q+\frac{u}{2}, q-\frac{u}{2}, t)e^{-ipu}du. \tag{26}$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$\rho(x,x',t) = \frac{1}{2\pi}\int W(\frac{x+x'}{2}, p, t)e^{ip(x-x')}dp. \tag{27}$$

Для чистых состояний формула (26) преобразуется в формулу

$$W_\Psi(q,p,t) = \int \Psi(q+\frac{u}{2},t)\Psi^*(q-\frac{u}{2},t)e^{-\imath pu}du. \quad (28)$$

Волновая функция может быть выражена через функцию Вигнера $W_\Psi(q,p,t)$ следующим образом

$$\Psi(x,t)\Psi^*(x',t) = \frac{1}{2\pi}\int W_\Psi(\frac{x+x'}{2},p,t)e^{\imath p(x-x')}dp. \quad (29)$$

В результате получаем

$$\Psi(0,t)\Psi^*(0,t) = \frac{1}{2\pi}\int W_\Psi(0,p,t)dp. \quad (30)$$

Кроме того

$$\Psi(x,t)\Psi^*(0,t) = \frac{1}{2\pi}\int W_\Psi(\frac{x}{2},p,t)e^{\imath px}dp, \quad (31)$$

или

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi\Psi^*(0,t)}\int W_\Psi(\frac{x}{2},p,t)e^{\imath px}dp. \quad (32)$$

Так как $\Psi(0,t)^* = |\Psi^*(0,t)|e^{-\imath\varphi_0(t)}$, где $\varphi_0(t)$ зависит от времени, получаем

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{\imath\varphi_0(t)}}{\sqrt{(\int W_\Psi(0,p,t)dp)}}\int W_\Psi(\frac{x}{2},p,t)e^{\imath px}dp. \quad (33)$$

Функция Вигнера чистых состояний обладает следующими свойствами

$$\int W(q,p,t)\frac{dp}{2\pi} = |\Psi(q,t)|^2 \quad \text{и} \quad \int W(q,p,t)\frac{dq}{2\pi} = |\tilde{\Psi}(p,t)|^2. \quad (34)$$

Функция $\widetilde{\Psi}(p,t)$ - это волновая функция осциллятора в импульсном представлении. Функция $W(q,p,t)$ обладает свойствами аналогичными свойствам функции распределения вероятностей $f(q,p,t)$ классического осциллятора. Поэтому можно ввести матрицу плотности и волновую функцию классического гармонического осциллятора, пользуясь данной аналогией. Для этого заменим функцию Вигнера $W(q,p,t)$ в формулах (27) и (33) функцией распределением вероятности $2\pi f(q,p,t)$. Получаем волновую функцию классического гармонического осциллятора

$$\Psi_f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\int f(0,p,t)dp}}\int f(\frac{x}{2},p,t)e^{\imath px}dp. \quad (35)$$

В формуле (35) фактор $e^{\imath\varphi_0(t)}$, связанный с постоянной фазой, положен равным единице. Матрица плотности состояния классического осциллятора имеет вид

$$\rho_f(x,x',t) = \int f(\frac{x+x'}{2},p,t)e^{\imath p(x-x')}dp. \quad (36)$$

1.4 Основное и возбужденное состояния классического гармонического осциллятора

Продемонстрируем вышеизложенное на примере хорошо известных состояний осциллятора. Для этого введем волновую функцию классического гармонического осциллятора, выбранную в виде функции, совпадающей по форме с волновой функцией основного состояния квантового осциллятора [21]

$$\Psi_{ocl}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{37}$$

В формуле (37) время положено равным нулю ($t = 0$). Введем операторы рождения и уничтожения для классического осциллятора аналогично операторам рождения и уничтожения квантового осциллятора. В этом случае оператор уничтожения классического осциллятора задан следующей формулой

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{\partial}{\partial x}). \tag{38}$$

Оператор рождения равен

$$\hat{a}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\partial}{\partial x}). \tag{39}$$

Коммутационные соотношения операторов рождения и уничтожения классического осциллятора имеют вид

$$[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = \hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a} = \hat{1}, \tag{40}$$

где $\hat{1}$ - единичный оператор, который задается равенством

$$\hat{1}\Psi(x) = \Psi(x) \tag{41}$$

для произвольной функции $\Psi(x)$. В результате получаем соотношение

$$\hat{a}\Psi_{ocl}(x) = 0. \tag{42}$$

Пользуясь аналогией с квантовым осциллятором, введем волновую функцию возбужденного состояния классического осциллятора, а именно,

$$\Psi_n^{cl}(x) = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} \Psi_{ocl}(x), \quad n = 0, 1, 2... \tag{43}$$

Функции (42), (43) хорошо известны, они выражаются через полиномы Эрмита

$$\Psi_n^{cl}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x). \tag{44}$$

Полиномы Эрмита задаются производящей функцией следующего вида

$$e^{-\tau^2+2\tau x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} H_n(x). \tag{45}$$

Функция распределения вероятности основного состояния (37) имеет вид

$$f_0(q,p) = \frac{1}{\pi} e^{-q^2-p^2}. \tag{46}$$

Функция распределения вероятности (46) гауссова и является функцией распределения вероятности двух случайных переменных (координаты и импульса). Средние значения координаты и импульса в состоянии (46) равны нулю, а дисперсии координаты и импульса равны $(\sigma_q)^2 = 1/2, \quad (\sigma_p)^2 = 1/2$. Можно проверить, что волновая функция классического осциллятора (35) выражается через функцию распределения вероятности $f(x,p,t)$ при помощи формулы

$$\int f(q,p,t)dp = |\Psi_{cl}(q,t)|^2. \tag{47}$$

Физический смысл формальной волновой функции классического осциллятора в квантовоподобном представлении классической механики такой же как у волновой функции осциллятора в квантовой механике. Для модуля волновой функции классического осциллятора получаем следующее выражение

$$|\Psi_{cl}(x,t)|^2 = P(x,t), \tag{48}$$

где $P(x,t)$ это функция распределения плотности вероятности координаты классического осциллятора.

1.5 Уравнение эволюции для волновой функции классического гармонического осциллятора

Можно ввести уравнение эволюции для волновой функции гармонического осциллятора, основываясь на соотношении (19). На самом деле, волновая функция должна удовлетворять уравнению, аналогичному уравнению Шредингера

$$\iota \frac{\partial \Psi_{cl}(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_{cl}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2 \Psi_{cl}(x,t). \tag{49}$$

Можно проверить, что функция

$$f(q,p,t)=\frac{1}{2\pi}\int \Psi_{cl}(q+\frac{u}{2},t)\Psi^*_{cl}(q-\frac{u}{2},t)e^{-\iota pu}du \tag{50}$$

удовлетворяет уравнению (19). Поэтому можно рассматривать уравнение (49) как математический инструмент для решения уравнения (19). Данный способ решения опирается на использование интегральных преобразований (50) и (35). Фазовый множитель в уравнении (35) положен равным 1 в отличии от уравнения (33). Это означает, что мы вывели уравнение (19) для осциллятора из соотношения (49). Для того чтобы вывести уравнение (49) из соотношения (19) надо в качестве дополнительной информации ввести фазовый множитель. Можно поставить вопрос следующим образом, а возможно ли получить уравнение для классической волновой функции, аналогичное уравнению Шредингера, в случае произвольного потенциала $U(q)$. В работе [56] было показано, что возможно получить уравнение для матрицы плотности только аналогичное уравнению фон Неймана, используя соотношение (19). Следовательно, решение полученного уравнения не совпадает по форме с выражением (24). В квантовой механике уравнение фон Неймана имеет вид

$$\iota\frac{\partial\rho(x,x',t)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho(x,x',t)}{\partial x^2}+U(x)\rho(x,x',t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho(x,x',t)}{\partial x'^2}-U(x')\rho(x,x',t). \tag{51}$$

Решение данного уравнения в случае чистых состояний имеет вид (24). Для смешанных состояний решение данного уравнения имеет вид (25). Уравнение для классической матрицы плотности (36), которое можно получить из (19) имеет вид

$$\iota\frac{\partial\rho_{cl}(x,x',t)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho_{cl}(x,x',t)}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho_{cl}(x,x',t)}{\partial x'^2}-(x'-x)U'(\frac{x+x'}{2})\rho_{cl}(x,x',t)=0. \tag{52}$$

Различия между двумя уравнениями (52) и (51) заключается в слагаемых, содержащих потенциальную энергию. Для систем с квадратичными потенциалами

$$U(x)=a(t)x^2+b(t)x+c(t) \tag{53}$$

уравнения совпадают, поэтому решение уравнения (52) для классического осциллятора имеет такой же вид как и решение для чистых состояний

$$\rho^{\Psi}_{cl}(x,x',t)=\Psi_{cl}(x,t)\Psi^*_{cl}(x',t), \tag{54}$$

причем формальный вид решения не изменяется с течением времени.

1.6 Гауссовские решения уравнения, аналогичного уравнению Шредингера для классического осциллятора

Можно проверить, что гауссовские пакеты, имеющие вид волновой функции когерентных состояний [57]

$$\Psi_\alpha^{cl}(x,t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{\iota t}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2} + \sqrt{2}\alpha e^{-\iota t}x - \frac{\alpha^2}{2}e^{-2\iota t}\right) \tag{55}$$

удовлетворяют уравнению эволюции для классического осциллятора. Эти функции являются собственными функциями оператора уничтожения

$$\hat{a}\Psi_\alpha(x,t) = \alpha e^{-\iota t}\Psi_\alpha(x,t), \tag{56}$$

где $\alpha = \alpha_1 + \iota\alpha_2$ произвольное комплексное число. Можно проверить, что функция $\Psi_\alpha(x,t)$ удовлетворяет уравнению (49) и условию нормировки

$$\int \Psi_\alpha^*(x,t)\Psi_\alpha(x,t)dx = 1. \tag{57}$$

В случае когерентных состояний функция распределения вероятности $f(q,p,t)$, заданная соотношением (50), имеет вид совместной функции распределения вероятности двух случайных величин (координаты и импульса) гауссова типа, а именно нормального распределения

$$f_\alpha(q,p,t) = \frac{1}{\pi}e^{-(p-\bar{p})^2-(q-\bar{q})^2}, \tag{58}$$

где

$$\bar{p} = \sqrt{2}\mathrm{Im}(\alpha e^{-\iota t}), \quad \bar{q} = \sqrt{2}\mathrm{Re}(\alpha e^{-\iota t}). \tag{59}$$

Дисперсии координаты и импульса в когерентном состоянии классического осциллятора имеют вид

$$(\sigma_p)^2 = \frac{1}{2}, \quad (\sigma_q)^2 = \frac{1}{2}. \tag{60}$$

Другие решения гауссова типа аналогичны сжатым состояниям квантового осциллятора.

Рассмотрим решения уравнения (49), имеющие вид возбужденных состояний квантового гармонического осциллятора (43) и (44). На самом деле, функция

$$\Psi_n^{cl}(x,t) = e^{-\iota(n+\frac{1}{2})t}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(x), \quad n = 0,1,2... \tag{61}$$

является другим решением уравнения (49). Данная функция удовлетворяет соотношениям

$$\hat{a}\Psi_n^{cl}(x,t) = \sqrt{n}\Psi_{n-1}^{cl}(x,t), \quad \hat{a}^\dagger\Psi_n^{cl}(x,t) = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}^{cl}(x,t) \tag{62}$$

и условию ортогональности

$$\int \Psi_n^{(cl)*}(x,t)\Psi_m^{cl}(x,t)dx = \delta_{nm} \tag{63}$$

аналогично волновой функции квантового осциллятора. Если вычислить функцию распределения вероятности $f_n(q,p,t)$, используя формулу (50), то функция $f_n(q,p,t)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Например, функция

$$f_1(q,p,t) = \frac{1}{2\pi}\int \Psi_1^{cl}(q+\frac{u}{2},t)\Psi_1^{cl*}(q-\frac{u}{2},t)e^{-\iota pu}du, \tag{64}$$

где

$$\Psi_1^{cl}(x,t) = e^{-\iota\frac{3}{2}t}\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\sqrt{2}xe^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{65}$$

имеет вид

$$f_1(q,p,t) = \frac{1}{\pi}(p^2+q^2-\frac{1}{2})e^{-p^2-q^2}. \tag{66}$$

Для малых значений p и q, а также для случая, когда $p=0$, $q=0$, функция становится отрицательной. Из физического смысла функции распределения вероятности $f(q,p,t)$ следует, что решение (66) уравнения (50) в классической механике является недопустимым. В этом заключается принципиальная разница с квантовым осциллятором. В квантовой механике функция Вигнера первого возбужденного состояния квантового осциллятора $W_1(q,p,t)$, заданная формулой (28), описывает физическое состояние и при этом может принимать отрицательные значения.

1.7 Гильбертово пространство состояний классического осциллятора

После введения волновой функции классического осциллятора, мы можем ввести для классического осциллятора формализм гильбертова пространства состояний. Используем определение Дирака для волновой функции

$$\Psi(x) = \langle x|\Psi\rangle, \tag{67}$$

то есть, свяжем с волновой функцией $\Psi(x)$ вектор состояния $|\Psi\rangle$, принадлежащий гильбертову пространству. Матрица плотности также может быть введена с использованием определения для оператора плотности $\hat{\rho}$, действующего в гильбертовом пространстве, а именно,

$$\Psi(x,t)\Psi^*(x',t) = \langle x|\hat{\rho}^{cl}(t)|x'\rangle. \tag{68}$$

В квантовой механике оператор плотности должен быть неотрицательным, в классической механике оператор плотности может быть и отрицательным. Следовательно, в классической механике формально можно ввести структуру аналогичную используемой для описания квантового осциллятора. Эта структура состоит из гильбертова пространства состояний осциллятора, функций распределения вероятности, являющихся аналогом функций Вигнера, и томограмм состояний осциллятора, которые являются компонентами преобразования Радона функций распределения вероятности. Рассмотрим в качестве примера томограмму основного состояния. Волновая функция основного состояния классического осциллятора задана формулой (37). Функция распределения вероятности $f_0(q,p)$ основного состояния определяется формулой (46). Томограмма основного состояния может быть получена с помощью соотношения (1) и имеет вид

$$w_o(X,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}} e^{-\frac{X^2}{\mu^2+\nu^2}}. \tag{69}$$

Данная томограмма является гауссианом со средним значением $\langle X\rangle = 0$, и дисперсией

$$\sigma_X^2 = \frac{\mu^2+\nu^2}{2}. \tag{70}$$

Характеристическая функция распределения Гаусса имеет вид

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2(\mu^2+\nu^2)}{4}}. \tag{71}$$

Здесь t это параметр и

$$\varphi_X(t) = \int w_0(X,\mu,\nu) e^{\imath tX} dX. \tag{72}$$

Высшие моменты $< X^n >$ функции распределения вероятности заданы следующим образом

$$\varphi_X(t) = \int w_0(X,\mu,\nu)[1 + \imath tX + \frac{(\imath tX)^2}{2!} + ... + \frac{(\imath tX)^n}{n!} + ...]dX =$$

$$= 1 + \imath t\langle X\rangle + \frac{(\imath t)^2}{2!}\langle X^2\rangle + ... + \frac{(\imath t)^n}{n!}\langle X^n\rangle + ... \tag{73}$$

Здесь

$$\langle X^n\rangle = \int w_0(X, \mu, \nu)X^n dX. \tag{74}$$

Получаем формулу для высших моментов через характеристическую функцию

$$\langle X^n\rangle = \frac{d^n}{d(\imath t)^n}\varphi_X(t)|_{t=0}. \tag{75}$$

Например, для (71) получаем

$$e^{-\frac{t^2(\mu^2+\nu^2)}{4}} = 1 + (-\frac{1}{4})(\mu^2 + \nu^2)t^2 + (-\frac{1}{4}(\mu^2 + \nu^2))^2\frac{t^4}{2!} + ... \tag{76}$$

Можно увидеть, что высшие моменты нечетных $n = 2k + 1$ степеней равны нулю

$$\langle X^{2k+1}\rangle = 0. \tag{77}$$

Высшие моменты четных степеней $n = 2k$ равны

$$\langle X^{2k}\rangle = (-1)^k((-\frac{1}{4})(\mu^2 + \nu^2))^{2k}\frac{2k!}{k!}. \tag{78}$$

В качестве другого примера рассмотрим томограмму когерентных состояний. Она является гауссианом следующего вида

$$w_\alpha(X, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)}}e^{-\frac{(X-\langle X\rangle)^2}{\mu^2+\nu^2}}, \tag{79}$$

где

$$\langle X\rangle = \mu\langle q\rangle + \nu\langle p\rangle. \tag{80}$$

Используя (59), получаем

$$\langle X\rangle = \sqrt{2}(\mu Re(\alpha e^{-\imath t}) + \nu Im(\alpha e^{-\imath t})). \tag{81}$$

Рассмотрим классический аналог первого возбужденного состояния классического гармонического осциллятора. Волновая функция первого возбужденного состояния классического осциллятора имеет вид

$$\Psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{82}$$

Томограмма данного состояния может быть получена при помощи преобразования Радона функции распределения вероятности (66) или используя связь томограммы с волновой функцией [58]

$$w_1(X,\mu,\nu)=\frac{1}{2\pi|\nu|}|\int\Psi_1(y)e^{\frac{\iota\mu y^2}{2\nu}-\frac{\iota Xy}{\nu}}dy|^2, \tag{83}$$

получаем

$$w_1(X,\mu,\nu)=\frac{2X^2}{(\mu^2+\nu^2)\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}}e^{-\frac{X^2}{(\mu^2+\nu^2)}}. \tag{84}$$

В квантовой механике данная томограмма описывает физически допустимое состояние. А в случае классического осциллятора данная томограмма задает физически недопустимое состояние с отрицательной функцией распределения вероятности (66). Томограмма состояния, аналогичного основному состоянию осциллятора и томограмма когерентного состояния являются гауссовыми пакетами и задают физически допустимые состояния как в случае классического осциллятора, так и в случае квантового осциллятора. Волновая функция и томограмма первого возбужденного состояния описывает физически допустимое состояние для квантового осциллятора и физически недопустимое состояние классического осциллятора.

1.8 Интегралы движения параметрического классического осциллятора

В этом разделе мы рассмотрим волновую функцию на примере классического параметрического осциллятора. Сперва обсудим интегралы движения и эволюцию классического гармонического осциллятора с зависящей от времени частотой. Гамильтониан классического параметрического осциллятора имеет вид

$$H=\frac{p^2}{2}+\frac{\omega^2(t)q^2}{2}, \tag{85}$$

где масса частицы положена равной единице. Частота осциллятора ω зависит от времени t, а в начальный момент времени мы полагаем ее равной единице ($\omega(0)=1$). Уравнение движения, соответствующее гамильтониану (85), имеет вид

$$\ddot{q}+\omega^2(t)q=0. \tag{86}$$

В классической статистической механике состояние параметрического осциллятора описывается функцией распределения вероятности $f(q,p,t)$ в фазовом пространстве осциллятора. Функция $f(q,p,t)$ неотрицательна и нормирована. Эволюция во времени функции распределения, задающей состояние параметрического осциллятора, определяется кинетическим уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t}+p\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q}-\omega^2(t)q\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial p}=0. \tag{87}$$

От уравнения (19) оно отличается наличием зависящей от времени частоты $\omega^2(t)$ в третьем слагаемом. Используя пропагатор $K(q,p,q',p',t)$, можно решить кинетическое уравнение Лиувилля, записав его в виде

$$f(q,p,t)=\int K(q,p,q',p',t)f(q',p',0)dq'dp'. \tag{88}$$

Уравнение для пропагатора ($t>$0) имеет вид

$$\frac{\partial K(q,p,q',p',t)}{\partial t}+p\frac{\partial K(q,p,q',p',t)}{\partial q}-\omega^2(t)q\frac{\partial K(q,p,q',p',t)}{\partial p}=0. \tag{89}$$

Начальное условие для пропагатора имеет вид

$$K(q,p,q',p',t=0)=\delta(q-q')\delta(p-p'). \tag{90}$$

По определению интегралы движения $I(q,p,t)$ классической системы с гамильтонианом $H(q,p,t)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{dI(q,p,t)}{dt}=0. \tag{91}$$

Полная производная по времени в уравнении (91) может быть переписана в виде

$$\frac{\partial I(q,p,t)}{\partial t}+\frac{\partial I(q,p,t)}{\partial q}\dot{q}-\frac{\partial I(q,p,t)}{\partial p}\dot{p}=0. \tag{92}$$

Так как масса осциллятора m=1, то импульс частицы равен производной от координаты частицы ($m\dot{q}=p=\dot{q}$). Кроме того, по второму закону Ньютона

$$\dot{p}=F=-\frac{\partial U}{\partial q}.$$

Для параметрического осциллятора

$$\frac{\partial U}{\partial q}=\omega^2(t)q. \tag{93}$$

Ввиду этого интегралы движения для параметрического осциллятора удовлетворяют следующему уравнению

$$\frac{\partial I(q,p,t)}{\partial t} + p\frac{\partial I(q,p,t)}{\partial q} - \omega^2(t)q\frac{\partial I(q,p,t)}{\partial p} = 0. \tag{94}$$

Уравнения (92) и (87) совпадают, следовательно, функция распределения вероятности $f(q,p,t)$ является интегралом движения. Существуют два комплексных интеграла движения $I_1(q,p,t)$ и $I_2(q,p,t)$, являющиеся линейной комбинацией координаты q и импульса p. Они имеют вид

$$I_1(q,p,t) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon(t)p - \dot{\varepsilon}(t)q) \quad \text{и} \quad I_2(q,p,t) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\varepsilon^*(t)p - \dot{\varepsilon}^*(t)q). \tag{95}$$

Комплексная функция $\varepsilon(t)$ должна удовлетворять уравнению движения для параметрического осциллятора

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \omega^2(t)\varepsilon(t) = 0. \tag{96}$$

Если выбрать для этой функции начальные условия

$$\varepsilon(0) = 1, \quad \dot{\varepsilon(0)} = i, \tag{97}$$

то скобка Пуассона интегралов движения равна мнимой единице, то-есть

$$\{I_1(q,p,t), I_2(q,p,t)\} = \frac{\partial I_1(q,p,t)}{\partial q}\frac{\partial I_2 q,p,t)}{\partial p} - \frac{\partial I_1(q,p,t)}{\partial p}\frac{\partial I_2(q,p,t)}{\partial q} = i. \tag{98}$$

Если $\omega(t) = 1$, то функция $\varepsilon(t)$ равна

$$\varepsilon(t) = e^{it}. \tag{99}$$

В этом случае интеграл движения $I_1(q,p,t)$ имеет вид

$$I_1(q,p,t) = \frac{i}{\sqrt{2}}(e^{it}p - ie^{it}q) = \alpha(t), \tag{100}$$

где введена комплексная функция времени

$$\alpha(t) = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}e^{it} \tag{101}$$

и

$$I_2(q,p,t) = \alpha^*(t) = \frac{q-ip}{\sqrt{2}}e^{-it}. \tag{102}$$

Существуют еще два линейных интеграла движения

$$q_0(q,p,t) = \frac{I_1(q,p,t) + I_2(q,p,t)}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad p_0(q,p,t) = \frac{I_1(q,p,t) - I_2(q,p,t)}{i\sqrt{2}}. \tag{103}$$

Эти интегралы движения обладают следующими свойствами

$$q_0(q,p,t=0) = q, \quad p_0(q,p,t=0) = p. \tag{104}$$

Любая функция от интеграла движения также является интегралом движения, поэтому функция

$$F(q,p,t) = \Phi(q_0(t), p_0(t)) \tag{105}$$

также является интегралом движения, а следовательно удовлетворяет уравнению (94). Легко увидеть, что уравнение для функции распределения вероятности (87), уравнение для пропагатора (89) и для интегралов движения идентичны. Это означает, что они имеют одни и те же решения. Следовательно, пропагатор, удовлетворяющий начальному условию (90), может быть выражен через интегралы движения $q_0(q,p,t)$ и $p_0(q,p,t)$

$$K(q,p,q',p',t) = \delta(q' - q_0(q,p,t))\delta(p' - p_0(q,p,t)). \tag{106}$$

Ввиду этого, эта функция является функцией интегралов движения, удовлетворяет уравнению (89), а ввиду (104), она удовлетворяет начальным условиям (90). Если $\omega(t) = 1$, то интегралы движения $q_0(q,p,t)$ и $p_0(q,p,t)$ имеют вид

$$q_0(q,p,t) = -(\sin t)p + (\cos t)q, \quad p_0(q,p,t) = (\cos t)p + (\sin t)q. \tag{107}$$

В этом случае интеграл движения $I_1(q,p,t)I_2(q,p,t)$ имеет вид

$$\frac{q_0^2(q,p,t)}{2} + \frac{p_0^2(q,p,t)}{2} = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} = H, \tag{108}$$

где H - это энергия (гамильтониан) гармонического осциллятора. В случае параметрического осциллятора имеем интеграл движения

$$\frac{q_0^2(q,p,t)}{2} + \frac{p_0^2(q,p,t)}{2} = E(t) \quad \text{и} \quad E(t) = I_1(q,p,t)I_2(q,p,t). \tag{109}$$

Можно проверить, что

$$E(t) \neq H, \tag{110}$$

где гамильтониан H задан выражением (85). Для значения $t = 0$ гамильтониан $H(0) = E(0)$. Это означает, что физический смысл интеграла движения (109) состоит в том, что он равен начальному значению энергии параметрического осциллятора. Данный интеграл движения является квадратичной формой по координате q и импульсу p. Данный интеграл движения был найден Ермаковым [59].

1.9 Отображение Вейля-Вигнера-Мойала

Обсудим отображение Вейля-Вигнера-Мойала [60][4][23] для преобразования функции распределения вероятности $f(q,p)$ в матрицу плотности $\rho(x,x')$ в случае параметрического осциллятора. Для простоты изложения мы не будем рассматривать зависимость от времени функции распределения вероятности. По аналогии с квантовой механикой будем использовать обозначение $W(q,p)$, такое же как для функции Вигнера (26)

$$W(q,p) = 2\pi f(q,p). \tag{111}$$

Данная функция действительна и удовлетворяет условию нормировки

$$\int W(q,p)\frac{dqdp}{2\pi} = 1. \tag{112}$$

По аналогии с квантовой механикой и следуя схеме, изложенной во втором параграфе данной главы, введем матрицу плотности $\rho(x,x')$ для классического параметрического осциллятора при помощи формулы (27), но не будем рассматривать зависимость от времени. Функция $W(q,p)$ (111) связана с матрицей плотности преобразованием Фурье (26). Матрица плотности удовлетворяет условию нормировки

$$\int \rho(x,x)dx = 1. \tag{113}$$

Формулы (112),(27),(26),(113) идентичны соотношениям, задающим отображение Вейля-Вигнера-Мойала в квантовой механике. Для чистых состояний функция Вигнера $W(q,p)$ удовлетворяет условию

$$\int W^2(q,p)\frac{dqdp}{2\pi} = 1. \tag{114}$$

В этом случае можно ввести волновую функцию $\psi(x)$ классического параметрического осциллятора. Соотношение (114) в квантовой механике выполняется для чистых состояний. Если выполняется (114), то соотношение (27) может быть записано в факторизованном виде (29), где для простоты не будем рассматривать зависимость от времени. Это означает, что можно ввести волновую функцию классического параметрического осциллятора, если функция распределения вероятностей $f(q,p)$ удовлетворяет соотношению, являющемуся следствием соотношения (114), а, именно,

$$2\pi \int f^2(q,p)dqdp = 1, \tag{115}$$

то-есть,

$$\psi(x) = \frac{\int f(\frac{x}{2},p)e^{ipx}dp}{(\int f(o,p)dp)^{\frac{1}{2}}}. \tag{116}$$

Волновая функция классического параметрического осциллятора, так же как и квантового, удовлетворяет условию нормировки

$$\int |\psi(x)|^2 dx = 1. \tag{117}$$

Используя отображение Вейля-Вигнера-Мойала, можно построить по аналогии с квантовой механикой для классического параметрического осциллятора матрицу плотности $\rho(x,x')$ и волновую функцию $\psi(x)$.

1.10 Уравнение эволюции для волновой функции и матрицы плотности

Рассмотрим зависящие от времени функции $f(q,p,t)$ и $W(q,p,t)$. Используя отображение функции $W(q,p,t)$ на матрицу плотности $\rho(x,x',t)$ (27) и уравнение эволюции (87) для функции $f(q,p,t)$, которое одновременно является уравнением эволюции для функции $W(q,p,t)$, получаем уравнение эволюции для матрицы плотности $\rho(x,x',t)$ классического параметрического осциллятора

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\rho(x,x',t)}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho(x,x',t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho(x,x',t)}{\partial x'^2} \\ &+ \frac{\omega^2(t)x^2\rho(x,x',t)}{2} - \frac{\omega^2(t)x'^2\rho(x,x',t)}{2}. \end{aligned} \tag{118}$$

Это уравнение полностью совпадает с уравнением фон Неймана для матрицы плотности параметрического осциллятора в квантовой механике. В случае выполнения условия (114), можно ввести волновую функцию $\psi(x,t)$ по формуле (116). Следовательно, если решение уравнения (118) имеет факторизованную форму

$$\rho(x,x',t) = \psi(x,t)\psi^*(x',t), \tag{119}$$

то волновая функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет уравнению, подобному уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2(t)x^2}{2}\psi(x,t). \tag{120}$$

Функция (119) удовлетворяет уравнению (118), следовательно, функция $W(q,p,t)$ и функция $f(q,p,t)$ удовлетворяют уравнению эволюции (87). Мы назовем функцию $\psi(x,t)$ волновой функцией классического параметрического осциллятора. В квантовой механике волновая функция квантового параметрического осциллятора удовлетворяет тому же уравнению (120) и условию нормировки. Но в классической механике для классического параметрического осциллятора физический смысл имеют только те решения $\psi(x,t)$ уравнения (120) (аналогичного квантовому уравнению Шредингера), которые задают неотрицательные функции $W(q,p,t)$, то-есть

$$W(q,p,t) = \int \psi(q+\frac{u}{2},t)\psi^*(q-\frac{u}{2},t)e^{-ipu}du \geq 0. \tag{121}$$

Такие решения существуют не только для осциллятора с постоянной частотой, но и для параметрического осциллятора. Состояние классического осциллятора, формально совпадающее с аналогом вакуумного состояния, то-есть состояние классического параметрического осциллятора с волновой функцией

$$\psi_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\varepsilon(t)}}e^{\frac{i\dot{\varepsilon}(t)}{2\varepsilon(t)}x^2}, \tag{122}$$

где функция комплексного переменного $\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению (96) с начальными условиями (97) и приводит к гауссовой неотрицательной функции распределения

$$W_0(q,p,t) = 2e^{-q_0^2(q,p,t)-p_0^2(q,p,t)}. \tag{123}$$

Функции $q_0(q,p,t)$ и $p_0(q,p,t)$ заданы формулами (103)и выражаются через интегралы движения $I_1(q,p,t)$ и $I_2(q,p,t)$, которые заданы формулами (95). Другой пример - это решения в форме когерентных состояний параметрического осциллятора

$$\psi_\alpha(x,t) = \hat{D}(\alpha)\psi_0(x,t), \tag{124}$$

где $\hat{D}(\alpha)$ - оператор сдвига Вейля, имеющий вид

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger(t) - \alpha^* \hat{a}(t)}, \tag{125}$$

а

$$\hat{a}(t) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon(t)(-i\frac{\partial}{\partial x}) - \dot{\varepsilon}(t)x), \quad \hat{a}^\dagger(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon^*(t)(-i\frac{\partial}{\partial x}) - \dot{\varepsilon}^*(t)x) \tag{126}$$

аналогичны операторам рождения и уничтожения в квантовой механике. Операторы (126), которые являются интегралами движения и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = \hat{1}. \tag{127}$$

Решения уравнения (120), аналогичные фоковским возбужденным состояниям, задаются формулой (44) с оператором рождения $\hat{a}^\dagger(t)$, который задается формулой (126). Они удовлетворяют условию нормировки и обладают следующими свойствами

$$\int \psi_n^*(x,t)\psi_m(x,t)dx = \delta_{nm}, n, m = 0, 1, 2..., \tag{128}$$

и

$$\Sigma_{n=0}^{\infty}\psi_n(x,t)\psi_n^*(x',t) = \delta(x - x'), \tag{129}$$

но приводят к функции $W_n(q,p,t)$, принимающей отрицательные значения. Это означает, что такие решения не могут описывать физические состояния классического параметрического осциллятора.

1.11 Фоковские состояния и пропагатор в томографическом представлении

Томограммы состояний, аналогичных фоковским состояниям, связаны с волновой функцией классического параметрического осциллятора при помощи дробного преобразования Фурье

$$w_n(X,\mu,\nu,t) = \frac{1}{2\pi|\nu|}|\int \psi_n(y,t)e^{\frac{\iota\mu}{2\nu}y^2 - \frac{\iota X y}{\nu}}dy|^2. \tag{130}$$

Например, в случае гармонического осциллятора с постоянной частотой получаем

$$w_n(X,\mu,\nu,t)=\frac{e^{-\frac{X^2}{\mu^2+\nu^2}}}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}2^n n!}H_n^2(\frac{X}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}). \tag{131}$$

Гауссово когерентное состояние приводит к функции распределения вероятности в виде гауссиана

$$w_\alpha(X,\mu,\nu,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(X-\bar{X}(t))^2}{2\sigma^2}}. \tag{132}$$

Здесь среднее значение координаты $\bar{X}(t)$ равно

$$\bar{X}(t)=\mu\sqrt{2}(Re(\alpha e^{-\iota t}))+\nu\sqrt{2}(Im(\alpha e^{-\iota t})). \tag{133}$$

Дисперсия в гауссовом распределении выражается через параметры μ и ν

$$\sigma^2=\mu^2\frac{1}{2}+\nu^2\frac{1}{2}. \tag{134}$$

Для осциллятора с зависящей от времени частотой форма распределения сохраняется, но средние значения и дисперсии зависят от функции $\varepsilon(t)$, а, именно,

$$\bar{X}(t)=\mu q_0(q,p,t)+\nu p_0(q,p,t), \tag{135}$$

где $q_0(q,p,t)$ и $p_0(q,p,t)$ заданы уравнениями (103) и

$$\sigma^2=\mu^2\frac{|\varepsilon(t)|^2}{2}+\nu^2\frac{|\dot{\varepsilon}(t)|^2}{2}+2\mu\nu\sigma_{pq}, \tag{136}$$

а ковариация равна

$$(\frac{|\varepsilon(t)|^2}{2}\frac{|\dot{\varepsilon}(t)|^2}{2}-\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}=\sigma_{pq}^2. \tag{137}$$

Томограмма состояния, подобного фоковскому, выражается через полиномы Эрмита. Пропагатор в томографическом представлении имеет вид

$$K(X,\mu,\nu,X',\mu',\nu',t)=\delta(X-X')\delta(\mu'-q_0(\mu,\nu,t))\delta(\nu'-p_0(\mu,\nu,t)). \tag{138}$$

Томограмма любого состояния классического параметрического осциллятора выражается через пропагатор следующим образом

$$w(X,\mu,\nu,t)=\int K(X,\mu,\nu,X',\mu',\nu',t)w(X',\mu',\nu',t=0)dX'd\mu'd\nu'. \tag{139}$$

Отсюда видно, что пропагатор классического параметрического осциллятора совпадает с пропагатором квантового параметрического осциллятора в томографическом представлении.

2 ГЛАВА. ТОМОГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

В данной главе, следуя [46, 41], мы рассмотрим кинетические уравнения классической статистической механики (уравнение Лиувилля, цепочка Боголюбова) в томографическом представлении и обсудим возможности томографического подхода, с помощью преобразования Радона, в квантовой области.

2.1 Кинетическое уравнение Лиувилля в томографическом представлении. Нерелятивистский случай

Рассмотрим уравнение Лиувилля, которое описывает эволюцию во времени функции распределения в фазовом пространстве, в томографическом представлении. Рассмотрим кинетическое уравнение Лиувилля для нерелятивистской частицы, которое имеет вид

$$\frac{df(q,p,t)}{dt} = \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t} = 0. \tag{140}$$

Для свободной частицы (в отсутствии силы)

$$\dot{p} = 0. \tag{141}$$

Если частица имеет единичную массу m=1,

$$\dot{q} = p, \tag{142}$$

и кинетическое уравнение Лиувилля для свободной частицы принимает вид

$$p\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q} + \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t} = 0. \tag{143}$$

Используя соотношения (5), получаем уравнение эволюции для томограммы свободной частицы

$$\frac{\partial w(X,\mu,\nu)}{\partial t} - \mu\frac{\partial w(X,\mu,\nu)}{\partial \nu} = 0. \tag{144}$$

2.2 Обобщение кинетического уравнения Лиувилля в томографическом представлении. Нерелятивистский случай

Уравнение Лиувилля является простейшим кинетическим уравнением для функции распределения вероятности $f(q,p,t)$ в фазовом пространстве частицы в классической механике. С учетом потенциальной энергии оно имеет вид

$$\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t}+p\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q}-\frac{\partial U(q)}{\partial q}\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial p}=0, \tag{145}$$

где $U(q)$ - потенциальная энергия. В этом случае уравнение Ньютона записывается следующим образом

$$\dot{p}=-\frac{\partial U(q)}{\partial q}. \tag{146}$$

Гамильтониан системы со многими степенями свободы имеет вид

$$H(q_1,q_2,...,q_N,p_1,p_2,...,p_N)=\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2}+U(q_1,q_2,...,q_N). \tag{147}$$

Уравнение Ньютона, соответствующее гамильтониану (147), записывается следующим образом

$$\dot{p_j}=-\frac{\partial U(q_1,...,q_N)}{\partial q_j}. \tag{148}$$

Кинетическое уравнение Лиувилля имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(q_1,q_2,...,q_N,p_1,p_2,...,p_N,t)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{N}p_j\frac{\partial f(q_1,q_2,...,q_N,p_1,p_2,...,p_N,t)}{\partial q_j}\\-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f(q_1,q_2,...,q_N,p_1,p_2,...,p_N,t)}{\partial p_j}\frac{\partial U(q_1,q_2,...,q_N,p_1,p_2,...,p_N)}{\partial q_j}=0.\end{aligned} \tag{149}$$

Кинетическое уравнение Лиувилля может быть записано в томографическом представлении, что означает, что мы заменим функции распределения вероятности $f(q_1,q_2,...,q_N,p_1,p_2,...,p_N,t)$ их преобразованиями Радона и напишем уравнение для томографических плотностей вероятности (томограмм). Для систем с одной степенью свободы мы воспользуемся соотношениями отображения (5) и получим кинетическое уравнение Лиувилля в томографическом представлении

$$\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial t}-\mu\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial \nu}-\frac{\partial U}{\partial q}\left(q\to-(\frac{\partial}{\partial X})^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\nu\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial X}=0. \tag{150}$$

Для систем с N степенями свободы соответствующие правила имеют вид

$$\begin{aligned}
&f(q_1,...,q_N,p_1,...,p_N,t) \longleftrightarrow w(X_1,...,X_N,\mu_1,...,\mu_N,\nu_1,...,\nu_N,t);\\
&p_j f(q_1,...,q_N,p_1,...,p_N,t) \longleftrightarrow -(\frac{\partial}{\partial X_j})^{-1}\frac{\partial}{\partial \nu_j}w(X_1,...,X_N,\mu_1,...,\mu_N,\nu_1,...,\nu_N,t);\\
&\frac{\partial}{\partial q_j}f(q_1,...,q_N,p_1,...,p_N,t) \longleftrightarrow \mu_j\frac{\partial}{\partial X_j}w(X_1,...,X_N,\mu_1,...,\mu_N,\nu_1,...,\nu_N,t);\\
&q_j f(q_1,...,q_N,p_1,...,p_N,t) \longleftrightarrow -(\frac{\partial}{\partial X_j})^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu_j}w(X_1,...,X_N,\mu_1,...,\mu_N,\nu_1,...,\nu_N,t);\\
&\frac{\partial}{\partial p_j}f(q_1,...,q_N,p_1,...,p_N,t) \longleftrightarrow \nu_j\frac{\partial}{\partial X_j}w(X_1,...,X_N,\mu_1,...,\mu_N,\nu_1,...,\nu_N,t). \qquad (151)
\end{aligned}$$

Применив преобразование Радона к кинетическому уравнению Лиувилля (149), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w(\vec{X},\vec{\mu},\vec{\nu},t)}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N}\mu_j\frac{\partial w(\vec{X},\vec{\mu},\vec{\nu},t)}{\partial \nu_j} - \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial U}{\partial q_j}(q_1 \to -(\frac{\partial}{\partial X_1})^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu_1},\\
&q_2 \to -(\frac{\partial}{\partial X_2})^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu_2},...,q_N \to -(\frac{\partial}{\partial X_N})^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu_N})\nu_j\frac{\partial w(\vec{X},\vec{\mu},\vec{\nu},t)}{\partial X_j} = 0. \qquad (152)
\end{aligned}$$

Полученное уравнение описывает эволюцию томограммы и соответствует стандартному уравнению Лиувилля для функции распределения вероятности в фазовом пространстве.

Обсудим теперь редуцированное уравнение Лиувилля в томографическом представлении. Цепочка Боголюбова уравнений для функции распределения вероятности одной частицы может быть получена с использованием уравнения Лиувилля на функцию распределения для многих частиц. Этот прием заключается в следующем. Уравнение Лиувилля для многих частиц интегрируется по $2(N-1)$ переменным, а именно, по $q_2,q_3,...,q_N,p_2,p_3,...,p_N$. Полученное уравнение для одной степени свободы учитывает вклад взаимодействия одной частицы с остальными. Приведем этот вывод на примере системы двух частиц, уравнение Лиувилля для которых имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}f(q_1,q_2,p_1,p_2,t) + p_1\frac{\partial f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)}{\partial q_1} + p_2\frac{\partial f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)}{\partial q_2} -\\
&-\frac{\partial U(q_1,q_2)}{\partial q_1}\frac{\partial f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)}{\partial p_1} - \frac{\partial U(q_1,q_2)}{\partial q_2}\frac{\partial f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)}{\partial p_2} = 0. \qquad (153)
\end{aligned}$$

Интегрируем уравнение (153) по переменным q_2,p_2, связанным со второй частицей. Предположим, что потенциальная энергия зависит от расстояния между частицами, тогда

$$U(q_1,q_2) = U(|q_1-q_2|) = U(|X_{1,2}|), \quad X_{1,2} = q_1 - q_2, \qquad (154)$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(q_1,p_1,t)+p_1\frac{\partial}{\partial q_1}\tilde{f}(q_1,p_1,t)+\int p_2\frac{\partial}{\partial q_2}f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)dq_2dp_2\\
&-\int U'(|X_{1,2}|)(\frac{\partial}{\partial q_1}|q_1-q_2|)\frac{\partial}{\partial p_1}f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)dq_2dp_2\\
&+\int U'(|X_{1,2}|)(\frac{\partial}{\partial q_1}|q_1-q_2|)\frac{\partial}{\partial p_2}f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)dq_2dp_2=0, \qquad (155)
\end{aligned}$$

где мы использовали обозначения

$$\tilde{f}(q_1,p_1,t)=\int f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)dq_2dp_2. \qquad (156)$$

Уравнение (155) может быть преобразовано аналогичным образом как и уравнение Лиувилля (149). Произведем редукцию томографического уравнения Лиувилля для двух частиц (152)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w(X_1,X_2,\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2,t)}{\partial t}-(\mu_1\frac{\partial}{\partial\nu_1}+\mu_2\frac{\partial}{\partial\nu_2})w(X_1,X_2,\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2,t)-\\
&-U'(|(\frac{\partial}{\partial X_1})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_1}-(\frac{\partial}{\partial X_2})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_2}|)sgn[-(\frac{\partial}{\partial X_1})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_1}+(\frac{\partial}{\partial X_2})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_2}]\\
&\times w(X_1,X_2,\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2,t)-U'(|(\frac{\partial}{\partial X_1})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_1}-(\frac{\partial}{\partial X_2})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_2}|)sgn[\\
&-(\frac{\partial}{\partial X_2})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_2}+(\frac{\partial}{\partial X_1})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_1}]w(X_1,X_2,\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2,t)=0. \qquad (157)
\end{aligned}$$

Интегрируя по переменной X_2, получаем редукцию уравнения для томограммы, описывающей состояние одной частицы, в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{w}(X_1,\mu_1,\nu_1,t)}{\partial t}-\mu_1\frac{\partial}{\partial\nu_1}\tilde{w}(X_1,\mu_1,,\nu_1,t)+\\
&+\int dX_2[-U'(|(\frac{\partial}{\partial X_1})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_1}-(\frac{\partial}{\partial X_2})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_2}|)sgn[\\
&-(\frac{\partial}{\partial X_1})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_1}+(\frac{\partial}{\partial X_2})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_2}]w(X_1,X_2,\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2,t)-\\
&-U'(|(\frac{\partial}{\partial X_1})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_1}-(\frac{\partial}{\partial X_2})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_2}|)sgn[\\
&-(\frac{\partial}{\partial X_2})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_2}+(\frac{\partial}{\partial X_1})^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu_1}]w(X_1,X_2,\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2,t)]=0. \qquad (158)
\end{aligned}$$

Полученное уравнение (158) соответствует преобразованию Радона редуцированного уравнения Лиувилля (155). Цепочка Боголюбова в случае многих частиц может быть получена при помощи аналогичной процедуры (152). В этом случае интегрирование производится по переменным $X_2,X_3,...,X_N$.

2.3 Релятивистский случай

Рассмотрим релятивистскую частицу и применим к описанию ее движения томографический подход, по аналогии со случаем нерелятивистской частицы. Изменение описания в релятивистском случае определено формулой (140), связывающей момент и скорость частицы. В релятивистской классической механике связь между скоростью и импульсом задается следующей формулой

$$\dot{q} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{159}$$

Мы положили для простоты скорость света c=1 и массу частицы m=1. Релятивистское кинетическое уравнение для распределения вероятности $f(q,p,t)$ имеет вид (140). В случае свободной частицы силы равны нулю, а, следовательно, $\dot{p}=0$, ввиду уравнения (141).

Для свободной частицы скорость $\dot{q}$ зависит только от импульса частицы (159)) и кинетическое уравнение (140) принимает вид

$$\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q} = 0. \tag{160}$$

При малых значениях импульса ($p^2 \ll 1$) можно использовать приближенное соотношение

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \simeq p. \tag{161}$$

Используя приближенное соотношение (161) и подставляя его в кинетическое уравнение (160), получаем уравнение, имеющее вид кинетического уравнения Лиувилля (145). Учитывая первую релятивистскую поправку, получаем уравнение

$$\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t} + p\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q} = \frac{p^3}{2}\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q}. \tag{162}$$

Чтобы получить кинетическое уравнение в томографической форме, используем соотношения соответствия (5). Применив эти соотношения, получаем кинетическое уравнение в томографическом представлении в случае релятивистской частицы

$$\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial t} - [1 + (\frac{\partial}{\partial X})^{-2}(\frac{\partial}{\partial \nu})^2]^{-\frac{1}{2}}\mu\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial \nu} = 0. \tag{163}$$

В нерелятивистском приближении с учетом первой релятивистской поправки уравнение (163) имеет вид

$$\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial t} - \mu\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial \nu} = \frac{1}{2}[-(\frac{\partial}{\partial X})^{-3}(\frac{\partial}{\partial \nu})^3]w(X,\mu,\nu,t). \tag{164}$$

Следовательно, используя преобразование Радона мы получаем релятивистское кинетическое уравнение для свободной частицы в томографическом представлении.

3 ГЛАВА. БИСТОХАСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАНТОВЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ

В данной главе мы обсудим, следуя [39], в вероятностном представлении квантовой механики статистические характеристики, такие как средние значения, дисперсии и моменты высших порядков. Кроме того, используя собственные вектора матриц, описывающих наблюдаемые величины, построим бистохастические матрицы, связанные с функциями распределения вероятности, детально рассмотрев пример спиновых систем. В стандартной квантовой механике [61], статистические характеристики физических наблюдаемых величин $\hat{A}$ в чистых состояниях получаются взятием следа от произведения оператора, задающего наблюдаемую величину, и оператора плотности $\hat{\rho}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, то есть, $\langle\hat{A}^p\rangle = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_\psi\hat{A}^p$, $p = 0, 1, \ldots$, где $\hat{\rho}_\psi$ оператор плотности. Пусть A - матрица оператора $\hat{A}$. Ниже мы покажем, что статистические характеристики могут быть вычислены, используя стандартные формулы классической теории вероятности. Рассмотрим распределение вероятности w_k и значения случайной величины A_k. Средние от степеней случайной величины (высшие моменты) $\langle A^p\rangle$ мы можем рассматривать как $\sum_k A_k^p w_k$. Наша цель показать, что значения A_k являются собственными значениями наблюдаемой величины A, и w_k связаны с компонентами собственных векторов наблюдаемой величины A. В качестве примеров мы обсудим кубиты и кудиты в вероятностном представлении квантовой механики [9, 25, 33, 12, 34, 14, 10].

3.1 Эрмитовы матрицы и собственные вектора

В стандартной квантовой механике наблюдаемые величины задаются эрмитовыми операторами. В базисе пространства Гильберта эрмитовы операторы описываются эрмитовыми матрицами. Собственные значения эрмитовых матриц являются действительными числами. Нормированные собственные вектора эрмитовых матриц образуют в гильбертовом пространстве квантовых состояний ортонормированный базис. Наша цель - рассмотреть средние значения и все высшие моменты наблюдаемой величины, используя стандартный подход классической теории вероятности. Для этого построим функции распределения вероятности и покажем, что все статистические характеристики наблюдаемых величин могут описываться при помощи этих функций распределения вероятности. Сначала рассмотрим частицу со спином 1/2. Чистое состояние такой частицы задается нормированным вектором в двумерном гильбертовом пространстве $|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, где a и b комплексные числа, и вектор $|\Psi\rangle$ нормирован

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{165}$$

Любая наблюдаемая величина определяется оператором $\hat{A}$. В стандартном базисе $|jm\rangle$, где $j = 1/2$, $m = \pm 1/2$, она задается матрицей

$$A_{mm'} = \langle jm|\hat{A}|jm'\rangle. \tag{166}$$

Эту матрицу можно рассматривать следующим образом

$$A_{mm'} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{167}$$

Матрица (167) эрмитова $A = A^\dagger$, то есть,

$$A_{11} = A_{11}^*, \qquad A_{12} = A_{21}^*, \qquad A_{22} = A_{22}^*. \tag{168}$$

Эрмитовы матрицы могут быть приведены к диагональному виду унитарным преобразованием, следовательно, матрица A может быть записана в виде

$$A = uA_d u^\dagger, \tag{169}$$

где матрица A_d является диагональной матрицей

$$A_d = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{170}$$

где A_1 и A_2 собственые значения матрицы A. Они удовлетворяют секулярному уравнению на переменную λ

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0, \tag{171}$$

которое имеет два корня: $\lambda_1 = A_1$ и $\lambda_2 = A_2$. Унитарная матрица u обладает следующей структурой $u = \| |u_1\rangle |u_2\rangle \|$. Столбцы унитарной матрицы u являются нормированными собственными векторами матрицы A, а именно,

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}, \qquad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}. \tag{172}$$

Компоненты данных векторов являются решениями уравнения на собственные вектора

$$A \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}, \tag{173}$$

и удовлетворяют условию унитарности

$$uu^\dagger = u^\dagger u = 1. \tag{174}$$

Условие унитарности приводит к равенствам

$$|u_{11}|^2 + |u_{21}|^2 = |u_{12}|^2 + |u_{22}|^2 = |u_{11}|^2 + |u_{12}|^2 = |u_{21}|^2 + |u_{22}|^2 = 1 \tag{175}$$

и

$$u_{11}^* u_{12} + u_{21}^* u_{22} = 0, u_{11}^* u_{21} + u_{12}^* u_{22} = 0. \tag{176}$$

Вычислив след матрицы A

$$T = A_{11} + A_{22} \tag{177}$$

и ее определитель

$$d = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}, \tag{178}$$

получаем следующее выражение для двух собственных значений матрицы A

$$A_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4d}}{2}, \qquad T^2 \geq 4d. \tag{179}$$

3.2 Средние значения наблюдаемых величин

Выразим средние значения наблюдаемых величин $\hat{A}$ через собственые вектора и собственные значения матрицы A. В базисе

$$|1\rangle \equiv |1/2, 1/2\rangle, \quad |2\rangle \equiv |1/2, -1/2\rangle, \tag{180}$$

средние значения наблюдаемой величины $\hat{A}$ имеют вид

$$A_{11} = \langle 1|\hat{A}|1\rangle, \quad A_{22} = \langle 2|\hat{A}|2\rangle. \tag{181}$$

Используя (169), запишем средние значения в виде вектора

$$|\hat{A}\rangle = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \end{pmatrix}, \tag{182}$$

который может быть выражен через собственные значения, записанные в виде другого вектора

$$|\hat{A}_d\rangle = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{183}$$

при помощи бистохастической матрицы

$$M = \begin{pmatrix} |u_{11}|^2 & |u_{12}|^2 \\ |u_{21}|^2 & |u_{22}|^2 \end{pmatrix}. \tag{184}$$

На самом деле, можно проверить, что

$$|\hat{A}\rangle = M|\hat{A}_d\rangle, \tag{185}$$

а значит

$$A_{11} = |u_{11}|^2 A_1 + |u_{12}|^2 A_2 \quad \text{и} \quad A_{22} = |u_{21}|^2 A_1 + |u_{22}|^2 A_2. \tag{186}$$

Бистохастическая матрица определяется как матрица, у которой столбцы и строки - это функции распределения вероятности (вектора вероятности) следующего вида

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \tag{187}$$

где $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$, и

$$w_1 + w_2 = 1. \tag{188}$$

Получаем две функции распределения вероятности

$$w_1 = |u_{11}|^2, \qquad w_2 = |u_{12}|^2 \qquad \text{и} \qquad \tilde{w_1} = |u_{21}|^2, \qquad \tilde{w_2} = |u_{22}|^2, \tag{189}$$

здесь мы использовали вектор вероятности

$$\vec{w_2} = \begin{pmatrix} \tilde{w_1} \\ \tilde{w_2} \end{pmatrix}. \tag{190}$$

По построению данные функции распределения вероятности выражаются через компоненты собственных векторов наблюдаемой величины $\hat{A}$. Следовательно, формула для усреднения A_{11} и A_{22}, вычисленная с использованием квантовомеханической процедуры усреднения

$$A_{11} = \mathrm{Tr}\,\hat{A}|1\rangle\langle 1|, \qquad A_{22} = \mathrm{Tr}\,\hat{A}|2\rangle\langle 2|, \tag{191}$$

представлена в стандартной форме, используемой в классической теории вероятности, а именно,

$$A_{11} = w_1 A_1 + w_2 A_2, \qquad A_{22} = \tilde{w_1} A_1 + \tilde{w_2} A_2. \tag{192}$$

Собственные занчения A_1 и A_2 играют роль классических случайных величин, имеющих два значения (классическая монетка). Средние значения A_{11} и A_{22} вычисляются с помощью классических функций распределения вероятности (векторов вероятности) $\vec{w_1}$ и $\vec{w_2}$. Причем, и классические случайные величины со значениями A_1 и A_2 и классические функции распределения вероятности - вектора вероятности $\vec{w_1}$ и $\vec{w_2}$ построены с использованием собственных значений и собственных векторов квантовой наблюдаемой $\hat{A}$.

3.3 Высшие моменты и наблюдаемые величины

Рассмотрим другие статистические характеристики квантовых наблюдаемых $\hat{A}$. Например, матрица A^2 имеет следующую структуру

$$A^2 = u A_d^2 u^\dagger. \tag{193}$$

Матрица A_d^2 выражается через собственные значения A_1 и A_2

$$A_d^2 = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & A_2^2 \end{pmatrix}. \tag{194}$$

Затем с помощью аргументов, используемых для вычисления средних значений наблюдаемой величины $\hat{A}$, получаем выражения

$$(A^2)_{11} = w_1 A_1^2 + w_2 A_2^2, \qquad (A^2)_{22} = \tilde{w}_1 A_1^2 + \tilde{w}_2 A_2^2, \tag{195}$$

где вероятности w_1, w_2, $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2$ заданы формулами (189) и (190). На самом деле, данное построение может быть применено ко всем высшим моментам наблюдаемой величины $\hat{A}$, так как

$$A^n = u A_d^n u^\dagger. \tag{196}$$

Из формулы (196) следует, что высшие моменты (момент nой степени) наблюдаемой величины $\hat{A}$ задается следующей формулой

$$(A^n)_{11} = w_1 A_1^n + w_2 A_2^n, \qquad (A^n)_{22} = \tilde{w}_1 A_1^n + \tilde{w}_2 A_2^n. \tag{197}$$

Формулу (197) можно переписать в векторном виде. Введем вектора

$$|A^n\rangle = \begin{pmatrix} A_{11}^n \\ A_{22}^n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad |A_d^n\rangle = \begin{pmatrix} A_1^n \\ A_2^n \end{pmatrix}, \tag{198}$$

получаем соотношение

$$|A^n\rangle = M|A_d^n\rangle, \tag{199}$$

где бистохастическая матрица M задана формулой (184).

Можно построить производящий вектор для всех введенных высших моментов. Рассмотрим матрицу

$$G(\lambda) = e^{\lambda A} = 1 + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2!} A^2 + \frac{\lambda^3}{3!} A^3 + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} A^n + \cdots \tag{200}$$

и вычислим диагональные элементы при помощи соотношения:

$$[G(\lambda)]_{jj} = 1 + \lambda A_{jj} + + \frac{\lambda^2}{2!} (A^2)_{jj} + \frac{\lambda^3}{3!} (A^3)_{jj} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} (A^n)_{jj} + \cdots \tag{201}$$

Так как для каждого диагонального элемента $(A^n)_{jj}$ из (201) выполняется соотношение (197), то мы можем переписать выражение (201) в векторной форме, а именно

$$|G(\lambda)\rangle = \begin{pmatrix} (G(\lambda))_{11} \\ (G(\lambda))_{22} \end{pmatrix}, \qquad \Big|\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{A_d^n}{n!}\Big\rangle = \begin{pmatrix} 1 + \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{2!} A_1^2 + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} A_1^n + \cdots \\ 1 + \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{2!} A_1^2 + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} A_1^n + \cdots \end{pmatrix} \tag{202}$$

Для данных векторов, получаем соотношение

$$|G(\lambda)\rangle = M\left|\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n \frac{A_d^n}{n!}\right\rangle, \tag{203}$$

где бистохастическая матрица M задана формулой (184), то есть, она построена из собственных векторов наблюдаемой величины $\hat{A}$. Дисперсии могут быть выражены через вектора

$$\sigma_{AA} = |A^2\rangle - (|A^1\rangle)^2, \tag{204}$$

а именно,

$$(\sigma_{AA})_{11} = (A^2)_{11} - (A_{11})^2, \qquad (\sigma_{AA})_{11} = (A^2)_{22} - (A_{22})^2. \tag{205}$$

Используя бистохастическую матрицу M с матричными элементами (189) и (190), перепишем соотношение (205) в следующем виде

$$\begin{aligned}(\sigma_{AA})_{11} &= w_1 A_1^2 + w_2 A_2^2 - (w_1 A_1 + w_2 A_2)^2,\\ (\sigma_{AA})_{22} &= \tilde{w}_1 A_1^2 + \tilde{w}_2 A_2^2 - (\tilde{w}_1 A_1 + \tilde{w}_2 A_2)^2.\end{aligned} \tag{206}$$

Итак, мы выразили все статистические характеристики спиновых наблюдаемых величин $\hat{A}$ через функции распределения вероятности w_1, w_2, $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2$, определяемые собственными векторами матрицы A наблюдаемой величины $\hat{A}$ в заданном базисе. Причем все полученные формулы для статистических характеристик базируются на стандартных формулах классической теории вероятности.

3.4 Кудит

Наш анализ, проведенный для состояния частицы со спином $1/2$, может быть расширен на любую квантовую систему в n-мерном гильбертовом пространстве состояний. Вывод формул, полученных в предыдущих параграфах, может быть повторен для произвольной квантовой системы при замене двумерных векторов на n-мерные.

Рассмотрим гамильтониан для кудита $j > 1/2$. Он является $n \times n$ эрмитовой матрицей H_{kj}, $k, j = 1, \ldots, n$,

$$H_{kj}^* = H_{jk}. \tag{207}$$

Матрица может быть диагонализована при помощи унитарной $n\times n$-матрицы u. Это означает, что матрицы H в заданном базисе $|k\rangle$ имеет вид

$$H_{kj} = \sum_{m,l=1}^{n} u_{km}(H_d)_{ml}(u^\dagger)_{lj} = \langle k|\hat{H}|j\rangle. \tag{208}$$

Диагональная матрица H_d равна

$$(H_d)_{ml} = \delta_{ml}E_m, \tag{209}$$

где δ_{ml} это дельта-символ Кронекера, а E_m энергетические уровни системы. Матрицы u и $u^\dagger$ унитарные, то есть, $uu^\dagger = 1$. Средние значения энергии являются диагональными элементами матрицы H_{kj}

$$\langle E_k\rangle = \langle k|\hat{H}|k\rangle = H_{kk}. \tag{210}$$

Используя представление (208), получаем среднее значение энергии

$$\langle E_k\rangle = \sum_{m=1}^{n} |u_{km}|^2 E_m. \tag{211}$$

Матричные элементы ортостохастической матрицы $|u_{km}|^2$ играют роль функции распределения вероятности для k-го энергетического состояния. Для этого состояния в случае матрицы H_{kj}, уровни энергии распределяются с вероятностью $|u_{km}|^2$, получаемой усреднением (211). Для случайной наблюдаемой величины $\hat{A}$ с матричными элементами эрмитовой матрицы A_{kj}, получаем аналогичное выражение

$$A_{kk} = \langle k|\hat{A}|k\rangle = \sum_{m=1}^{n} |u_{km}|^2 A_m, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{212}$$

где A_m собственные значения наблюдаемой величины $\hat{A}$, а u_{km} унитарная матрица. Компонентами столбцов унитарной матрицы u_{km} являются m мерные собственные вектора матрицы A_{kj} соответствующие собственным значениям A_m.

В случае бесконечномерной матрицы, когда наблюдаемая величина описывается оператором, действующим в пространстве состояний гармонического осциллятора, в рассматриваемом фоковском базисе $|n\rangle$ получаем

$$A_{nn} = \sum_{m} |U_{nm}|^2 A_m, \qquad n, m = 0, 1, 2\cdots, \tag{213}$$

где U_{nm} матрица унитарного преобразования, заданная в фоковском базисе

$$U_{nm} = \langle n|\hat{U}|m\rangle. \tag{214}$$

Матрица U удовлетворяет условию унитарности $UU^\dagger = 1$, что означает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_{nm} U^*_{nm'} = \delta_{mm'}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} U_{nm} U^*_{n'm} = \delta_{nn'}. \tag{215}$$

Элементы ортостохастической матрицы $|U_{nm}|^2$ являются распределениями вероятности, так как они положительны и нормированны

$$\sum_{n=0}^{\infty} |U_{nm}|^2 = 1, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} |U_{nm}|^2 = 1. \tag{216}$$

Аналогичные характеристики высших моментов наблюдаемых $\hat{A}$ описываются при помощи распределений вероятности, которые заданы как в n-мерном пространстве, так и в бесконечномерном пространстве состояний гармонического осциллятора. Например, в случае кудита они задаются формулой

$$\langle A^p \rangle_{kk} = \sum_{m=1}^{n} |u_{km}|^2 A_m^p. \tag{217}$$

В случае осциллятора получаем

$$\langle A^p \rangle_{jj} = \sum_{m=0}^{\infty} |U_{jm}|^2 A_m^p. \tag{218}$$

Высшие моменты наблюдаемых величин для кубита, кудита и для таких систем как гармонический осциллятор и атом водорода могут определяться стандартными формулами классической теории вероятности. В рамках этого рассмотрения роль распределений вероятности играют матрицы, заданные унитарными матрицами диагонализующими матрицы рассматриваемых наблюдаемых величин. Собственные значения наблюдаемой величины определяют возможное значение наблюдаемой величины, которое измеряется в эксперименте.

3.5 Пример наблюдаемой величины кубита

Рассмотрим состояние кубита с матрицей плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{219}$$

Вычислим среднее значение для проекции спина на ось x для этого состояния. Оператор проекции спина имеет вид

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{220}$$

Среднее значение наблюдаемой величины может быть вычислено двумя разными способами.

Используя первый способ, получаем

$$\langle S_x \rangle = \mathrm{Tr} \left(\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0. \tag{221}$$

Данный результат совместен с вычислением функции распределения вероятности, ввиду соотношения

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{222}$$

Используя данное разложение, ортостохастическая матрица $|u_{mm'}|^2$ может быть представлена в следующем виде

$$|u_{mm'}|^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{223}$$

Нулевое значение $\langle S_x \rangle$ можно получить по правилам теории вероятности для вычислению средних значений при помощи функции распределения вероятности $(1/2, 1/2)$, которая является столбцом матрицы (223). На самом деле, получаем

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) = 0. \tag{224}$$

3.6 Операторы в представлении Гейзенберга

Если система описывается гамильтонианом с матрицей H, то матрица унитарного оператора эволюции имеет вид

$$U(t) = \exp(-iHt) \qquad (\hbar = 1). \tag{225}$$

Следовательно, в представлении Гейзенберга, матрица наблюдаемой величины эволюционирует от начального значения A к значению в момент времени t

$$A_H(t) = \exp(iHt) A \exp(-iHt). \tag{226}$$

Матрица унитарного оператора эволюции (225) может быть использована для описания среднего значения наблюдаемой величины при помощи ортостохастической матрицы

$$|V(t)|^2 = |uU^\dagger(t)|^2, \tag{227}$$

где в качестве столбцов унитарной матрицы u стоят собственные вектора наблюдаемой величины A. Средние значения наблюдаемой величины A в момент времени t заданы соотношением

$$A_{kk}(t) = \sum_j |(uU^\dagger(t))_{kj}|^2 A_j. \tag{228}$$

В этой формуле среднее значение наблюдаемой величины выражено через результаты эксперимента A_j, а вероятности этих результатов заданы ортостохастической матрицей (227).

В данном разделе мы показали, что статистические характеристики квантовых наблюдаемых величин, такие как средние, дисперсии и высшие моменты могут быть вычислены с использованием стандартных подходов классической теории вероятности. В стандартной формулировке квантовой механики эти статистические характеристики вычисляются взятием следа от произведения матрицы наблюдаемой величины и матрицы плотности. Аналогичный результат может быть получен, когда вычисления производятся при помощи собственных векторов и собственных значений наблюдаемых величин. Полученные результаты показывают, что квантово-статистический формализм по форме очень близок к формализму классической статистической физики, и статистические флуктуации наблюдаемых величин как в классической области, так и в квантовой могут быть вычислены при помощи стандартных формул классической теории вероятности.

4 ГЛАВА. СПИНОВЫЕ СОСТОЯНИЯ В ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В вероятностном представлении квантовой механики [9, 62] квантовые состояния описываются функциями распределения вероятности, называемыми томограммами. Вероятностное представление для спиновых состояний введено в [33, 12, 63] и изучалось и развивалось в работах [64, 65, 66, 13, 67, 68, 69]. В работах [70, 71] показано, что вероятностное представление может быть получено в рамках квантования на основе звездочного произведения. Проблема перепутанности [72] рассматривалась в вероятностном представлении в работах [73, 74, 75]. В работе [13] проблема нарушения неравенства Белла [20] для состояния двух кубитов редуцирована на проблему исследования структуры совместной функции распределения вероятности двух случайных переменных. Неравенство Белла в вероятностном представлении квантовой механики обсуждалось в работах [66, 13, 76]. В данной главе, следуя [34, 40], обсудим спиновые состояния и сложение спинов в вероятностном представлении квантовой механики, рассмотрим линейное отображение томограммы кудита на томограмму кубита, названного кубитный портрет, обсудим использование кубитного портрета для описания состояния кудита. Кроме того в данной главе исследуем связь полугруппы стохастических матриц с функциями распределения вероятности состояний кубита и кутрита, используя полугруппу стохастических матриц и метод кубитного портрета, исследуем неравенство Белла и обсудим его нарушение или ненарушение в зависимости от структуры совместной функции распределения вероятностей (томограммы). В данной главе проблема исследования сепарабельности состояния кубита–кутрита редуцирована к проблеме исследования условий нарушения неравенства Белла для двух кубитов, и в вероятностном представлении квантовой механики обсуждено доказательство необходимого условия сепарабельности квантовых состояний, основанное на использовании отображения кудита на кубит.

4.1 Томограмма спинового состояния

Опишем вероятность, задающую спиновые состояния частицы со спином $1/2$, называемую томографической вероятностью или томограммой $w(m, \vec{n})$. Здесь $\vec{n}$ - единичный вектор, задаваемый широтой θ и долготой ϕ. Проекция спина m на это направление при измерениях принимает значения $m = +1/2$ и $m = -1/2$ с вероятностью $w(m, \vec{n})$. Если задана матрица плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

спинового состояния, то томографическая вероятность равна диагональному элементу матрицы

$$(\rho_u)_{mn} = (u^+ \rho u)_{mn}$$

где u - матрица поворота спинора [61]

$$u = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{i(\phi+\psi)/2} & \sin\frac{\theta}{2} e^{i(\phi-\psi)/2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i(\phi-\psi)/2} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-i(\phi+\psi)/2} \end{pmatrix} \tag{229}$$

Например, для чистого состояния со спином, направленным вдоль оси z, $\rho_{11} = 1$, $\rho_{12} = \rho_{21} = \rho_{22} = 0$, и томограмма равна

$$w(+1/2, \vec{n}) = \cos^2\frac{\theta}{2}, \quad w(-1/2, \vec{n}) = \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Важным свойством томограммы является то, что существует формула обращения, позволяющая по томограмме $w(m, \vec{n})$ определить матрицу плотности [12]. Таким образом, вероятность (томограмма) может использоваться как величина, полностью задающая квантовое состояние. Состояние двух спинов также можно задать совместной функцией распределения вероятности $w(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$, полученной при измерении проекций первого спина $m_1 = \pm 1/2$ на направление $\vec{n}_1$ и второго спина $m_2 = \pm 1/2$ на направление $\vec{n}_2$. Для состояния с матрицей плотности с $\rho_{11} = 1$ и $\rho_{ik} = 0$, где $i, k = 1, 2, 3, 4$ при $i \neq 1$, $k \neq 1$, томограмма есть совместное распределение вероятности

$$w(+1/2, +1/2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}, \quad w(+1/2, -1/2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \cos^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2},$$

$$w(-1/2, +1/2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \sin^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}, \quad w(-1/2, -1/2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}.$$

4.2 Неравенство Белла и явление перепутанности состояний

Обычно неравенство Белла связывают с квантовыми свойствами, например, системы двух спинов $s_1 = 1/2$ и $s_2 = 1/2$. Проекции спина при их измерении на выделенное направление могут принимать значения $\pm 1/2$. В данном параграфе речь пойдет о поляризации, то есть, рассматривается удвоенное значение проекции спина. Поляризация является дихотомной случайной величиной со значениями ± 1. Рассмотрим состояние двух частиц с матрицей плотности $\rho(1,2)$, тогда корреляция двух поляризаций равна

$$\langle M_1 M_2 \rangle = \mathrm{Tr}\rho(1,2) M_1 M_2, \tag{230}$$

где $M_1 = (\vec{\sigma}_1 \vec{n}_1)$, $M_2 = (\vec{\sigma}_2 \vec{n}_2)$. Единичные вектора $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ задают два направления в пространстве. Матрицы Паули $\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$ являются операторами поляризации вдоль декартовых осей для первой и второй частиц, соответственно. Операторы M_1 и M_2 коммутируют, следовательно можно одновременно измерить эти поляризации. Оператор M_1 понимается как тензорное произведение

$$M_1 = (\vec{\sigma}_1 \vec{n}_1) \otimes 1_2$$

, и оператор M_2 понимается как тензорное произведение $M_2 = 1_1 \otimes (\vec{\sigma}_2 \vec{n}_2)$, 1_2 является единичным оператором в пространстве спиновых состояний второй частицы, а 1_1 - единичный оператор в пространстве спиновых состояний первой частицы. Рассмотрим три 4×4 матрицы $\rho(1,2)$, M_1 и M_2, вычислим среднее значение $M_{12} = \langle M_1 M_2 \rangle$ (230) для четырех пар векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$

$$\vec{n}_1 = \vec{a}, \quad \vec{n}_2 = \vec{b};$$

$$\vec{n}_1 = \vec{a}, \quad \vec{n}_2 = \vec{c};$$

$$\vec{n}_1 = \vec{d}, \quad \vec{n}_2 = \vec{b};$$

$$\vec{n}_1 = \vec{d}, \quad \vec{n}_2 = \vec{c}$$

и составим число

$$B = |M_{ab} + M_{ac} + M_{db} - M_{dc}|, \tag{231}$$

которое называется числом Белла. Это число может принимать различные значения, зависящие от направления четырех векторов. Согласно стандартным квантовым вычислениям это число находится в интервале $[0, 2\sqrt{2}]$. Согласно гипотезе скрытых переменных это число находится в интервале $[0, 2]$. Эксперимент [77] подтверждает выводы обычной квантовой механики.

В данном параграфе мы рассмотрим неравенства Белла в вероятностном представлении квантовой механики и покажем, что нарушения неравенства Белла [20] в квантовой механике для случая двух частиц со спинами 1/2 могут быть получены из анализа совместной функции распределения вероятностей, задающей квантовое состояние этих двух спинов. Рассмотрим различные типы совместных функций распределения вероятностей и обсудим какие из них не приводят к нарушению неравенства Белла, а какие приводят. Продемонстрируем в вероятностном представлении, что природа нарушений неравенства Белла, является чисто математической и характеризует определенные различия обычных совместных функций распределения вероятностей. Кроме того, в вероятностном представлении квантовой механики продемонстрируем связь между нарушением неравенства Белла и явлением перепутанности состояний системы.

Рассмотрим квантовые состояния составной системы. Сепарабельными (неперепутанными) состояниями называются состояния, операторы плотности которых могут быть представлены в виде суммы тензорных произведений операторов плотности подсистем с неотрицательными коэффициентами p_k

$$\widehat{\varrho} = \sum_k p_k \widehat{\varrho}_1^{(k)} \otimes \widehat{\varrho}_2^{(k)}. \tag{232}$$

Коэффициенты p_k удовлетворят условию нормировки

$$\sum_k p_k = 1.$$

Состояние называется "просто сепарабельным", если

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2. \tag{233}$$

В вероятностном представлении квантовой механики сепарабельное состояние спиновых систем задается томограммой

$$w(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \sum_k p_k W_k(m_1, \vec{n}_1) w_k(m_2, \vec{n}_2). \tag{234}$$

Томограмма "просто сепарабельного"состояния имеет вид

$$w(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = W(m_1, \vec{n}_1) w(m_2, \vec{n}_2). \tag{235}$$

Рассмотрим число Белла (231). Неравенство

$$| < M_{ab} > + < M_{ac} > + < M_{db} > - < M_{dc} > | \leq 2. \tag{236}$$

называется неравенством Белла. Рассмотрим две случайные переменные m_1, m_2, принимающие значения ± 1. Они задаются совместной функцией распределения вероятности $w(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$, нормированной, неотрицательной

$$\sum_{m_1, m_2} w(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1, \quad w(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) \geq 0$$

и зависящей от дополнительных векторных параметров $\vec{n}_1, \vec{n}_2$, задающих направления в пространстве. Введем четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{c}$, задающих направления в пространстве. Рассмотрим корреляторы переменных m_1, m_2, связанных с этими направлениями в пространстве, получаем

$$< M_{ab} >= w(1, 1, \vec{a}, \vec{b}) - w(1, -1, \vec{a}, \vec{b}) - w(-1, 1, \vec{a}, \vec{b}) + w(-1, -1, \vec{a}, \vec{b}),$$

$$< M_{ac} >= w(1, 1, \vec{a}, \vec{c}) - w(1, -1, \vec{a}, \vec{c}) - w(-1, 1, \vec{a}, \vec{c}) + w(-1, -1, \vec{a}, \vec{c}),$$

$$< M_{db} >= w(1, 1, \vec{d}, \vec{b}) - w(1, -1, \vec{d}, \vec{b}) - w(-1, 1, \vec{d}, \vec{b}) + w(-1, -1, \vec{d}, \vec{b}),$$

$$< M_{dc} >= w(1, 1, \vec{d}, \vec{c}) - w(1, -1, \vec{d}, \vec{c}) - w(-1, 1, \vec{d}, \vec{c}) + w(-1, -1, \vec{d}, \vec{c}),$$

Рассмотрим в этом случае неравенство Белла (236). Выполнение или нарушение неравенства Белла зависит от структуры совместной функции распределения вероятности $w(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$. Когда состояние "просто сепарабельное", совместная функция распределения вероятности имеет вид (235), то есть факторизуется. В этом случае, для $\vec{n}_1 = \vec{a}$, $\vec{n_2} = \vec{b}$, получаем коррелятор

$$< M_{ab} >= w(1, \vec{a}) W(1, \vec{b}) - w(1, \vec{a}) W(-1, \vec{b}) - w(-1, \vec{a}) W(1, \vec{b}) + w(-1, \vec{a}) W(-1, \vec{b}),$$

когда $\vec{n}_1 = \vec{a}$, $\vec{n_2} = \vec{c}$, то

$$< M_{ac} >= w(1, \vec{a}) W(1, \vec{c}) - w(1, \vec{a}) W(-1, \vec{c}) - w(-1, \vec{a}) W(1, \vec{c}) + w(-1, \vec{a}) W(-1, \vec{c}),$$

когда $\vec{n}_1 = \vec{d}$, $\vec{n_2} = \vec{b}$, получаем

$$< M_{db} >= w(1, \vec{d}) W(1, \vec{b}) - w(1, \vec{d}) W(-1, \vec{b}) - w(-1, \vec{d}) W(1, \vec{b}) + w(-1, \vec{d}) W(-1, \vec{b}),$$

а когда $\vec{n}_1 = \vec{d}$, $\vec{n_2} = \vec{c}$, то

$$< M_{dc} >= w(1, \vec{d}) W(1, \vec{c}) - w(1, \vec{d}) W(-1, \vec{c}) - w(-1, \vec{d}) W(1, \vec{c}) + w(-1, \vec{d}) W(-1, \vec{c}).$$

Число Белла (231) в этом случае преобразуется к виду

$$| < M_{ab} > + < M_{ac} > + < M_{db} > - < M_{dc} > | =$$

$$|w(1,\vec{a})[W(1,\vec{b})+W(1,\vec{c})] - w(1,\vec{a})[W(-1,\vec{b})+W(-1,\vec{c})]$$

$$-w(-1,\vec{a})[W(1,\vec{b})+W(1,\vec{c})]+w(-1,\vec{a})[W(-1,\vec{b})+W(-1,\vec{c})]+w(1,\vec{d})[W(1,\vec{b})-W(1,\vec{c})]$$

$$-w(1,\vec{d})[W(-1,\vec{b})-W(-1,\vec{c})]-w(-1,\vec{d})[W(1,\vec{b})-W(1,\vec{c})]+w(-1,\vec{d})[W(-1,\vec{b})-W(-1,\vec{c})]|.$$

Так как

$$W(1,\vec{b})+W(-1,\vec{b})=1, \quad w(1,\vec{d})+w(-1,\vec{d})=1, \quad w(1,\vec{a})+w(-1,\vec{a})=1,$$

$$W(1,\vec{c})+W(-1,\vec{c})=1,$$

то число Белла (231) оказывается меньше или равно 2, следовательно, неравенство Белла (236) в данном случае выполняется. То есть неравенство Белла выполняется для состояний системы, заданных томограммами со структурой (235).

Рассмотрим совместную функцию распределения вероятности сепарабельного состояния. Она представима в виде (234). В этом случае мы получаем смесь из предыдущих выражений с неотрицательными коэффициентами. Каждое выражение по модулю меньше, чем 2, и оно умножено на неотрицательное число p_k меньшее единицы, следовательно, вся сумма также меньше 2, и неравенство Белла выполняется.

Когда совместная функция распределения вероятности не может быть представлена в виде (235) или (234), то она задает "перепутанное" состояние, для которого неравенство Белла может нарушаться. Рассмотрим, например, совместную функцию распределения вероятности $w(m_1,m_2,\vec{n}_1,\vec{n}_2)$ следующего вида

$$w(1,-1,\vec{n}_1,\vec{n}_2) = w(-1,1,\vec{n}_1,\vec{n}_2) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}+\sin^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\psi_1+\psi_2),$$

$$w(1,1,\vec{n}_1,\vec{n}_2) = w(-1,-1,\vec{n}_1,\vec{n}_2) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}+\sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\psi_1+\psi_2),$$

$$\vec{n}_1 = (\sin\theta_1\cos\psi_1, \sin\theta_1\sin\psi_1, \cos\theta_1)\,, \quad \vec{n}_2 = (\sin\theta_2\cos\psi_2, \sin\theta_2\sin\psi_2, \cos\theta_2)\,.$$

В случае, когда

$$\vec{n}_1=\vec{a},\ \vec{n_2}=\vec{b},$$

получаем что

$$< M_{ab} >= \cos\theta_a\cos\theta_b+\sin\theta_a\sin\theta_b\cos(\psi_a+\psi_b),$$

когда

$$\vec{n}_1=\vec{a},\ \vec{n_2}=\vec{c},$$

то

$$< M_{ac} >= \cos\theta_a\cos\theta_c+\sin\theta_a\sin\theta_c\cos(\psi_a+\psi_c),$$

когда

$$\vec{n}_1=\vec{d},\ \vec{n_2}=\vec{b},$$

то

$$< M_{db} >= \cos\theta_d\cos\theta_b+\sin\theta_d\sin\theta_b\cos(\psi_d+\psi_b),$$

а когда

$$\vec{n}_1=\vec{d},\ \vec{n_2}=\vec{c},$$

то

$$< M_{dc} >= \cos\theta_d\cos\theta_c+\sin\theta_d\sin\theta_c\cos(\psi_d+\psi_c).$$

Получаем, что число Белла (231) принимает вид

$$B=|\cos\theta_a\,(\cos\theta_b+\cos\theta_c)+\sin\theta_a\,[\sin\theta_b\cos(\psi_a+\psi_b)+\sin\theta_c\cos(\psi_a+\psi_c)]$$
$$+\sin\theta_d\,[\sin\theta_b\cos(\psi_d+\psi_b)-\sin\theta_c\cos(\psi_d+\psi_c)]+\cos\theta_d\,(\cos\theta_b-\cos\theta_c)\,|.$$

Вычисляя B для углов $\theta_a=\theta_b=\theta_c=\pi/6$, $\theta_d=\pi/2$, $\psi_a+\psi_b=\psi_a+\psi_c=\pi/4$, $\psi_d+\psi_b=-\pi/2$, $\psi_d+\psi_c=\pi$, получаем значение $2+\sqrt{2}/4$, то есть, видим, что в этом случае неравенство Белла нарушается. Рассмотренная в третьем случае функция распределения вероятности (спиновая томограмма) задает перепутанное состояние Вернера для двух частиц со спинами $1/2$ с матрицей плотности

$$\varrho=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{237}$$

Переменные m_1 и m_2 в этом случае имеют физический смысл удвоенных проекций спина на направления, заданные векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, соответственно.

4.3 Характеристическая функция состояния двух спинов в вероятностном представлении

Квантовое состояние составной системы из двух частиц со спинами j_1 и j_2 описывается совместной функцией распределения томографических вероятностей $w(m_1, \vec{n}_1, m_2, \vec{n}_2)$, называемой томограммой. Томограмма зависит от случайных значений двух спиновых проекций m_1 и m_2. Дискретные случайные переменные принимают значения $m_1 = -j_1, -j_1+1, \ldots j_1$ и $m_2 = -j_2, -j_2+1, \ldots j_2$. Спиновая проекция m_1 - это проекция спина первой частицы на направление $\vec{n}_1$ и спиновая проекция m_2 - это проекция спина второй частицы на направление $\vec{n}_2$. Единичные вектора $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ задают две точки на двух единичных сферах. Эти точки имеют следующие угловые координаты θ_1, ϕ_1 и θ_2, ϕ_2. Эти координаты образуют компоненты единичных векторов $\vec{n}_1 = (\sin\theta_1 \cos\phi_1, \sin\theta_1 \sin\phi_1, \cos\theta_1)$ и $\vec{n}_2 = (\sin\theta_2 \cos\phi_2, \sin\theta_2 \sin\phi_2, \cos\theta_2)$. Совместная функция распределения $w(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$ определяет квантовое состояние двух частиц со спинами. Коррелятор случайных переменных m_1 и m_2, соответствующий функции распределения для всех пар направлений $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ имеет вид

$$\langle m_1 m_2 \rangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m=-j_2}^{j_2} m_1 m_2 w(m_1, \vec{n}_1, m_2, \vec{n}_2). \tag{238}$$

По определению характеристическая функция, связанная с томограммой $w(m_1, \vec{n}_1, m_2, \vec{n}_2)$, имеет вид

$$\chi(s_1, \vec{n}_1, s_2, \vec{n}_2) = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} e^{i(s_1 m_1 + s_2 m_2)} w(m_1, \vec{n}_1, m_2, \vec{n}_2). \tag{239}$$

Эта функция определяет все моменты разложением в ряд

$$\chi(s_1, \vec{n}_1, s_2, \vec{n}_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(is_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{(is_2)^{k_2}}{k_2!} \langle m_1^{k_1} m_2^{k_2} \rangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), \tag{240}$$

где

$$\langle m_1^{k_1} m_2^{k_2} \rangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} m_1^{k_1} m_2^{k_2} w(m_1, \vec{n}_1, m_2, \vec{n}_2). \tag{241}$$

Например, матрица дисперсий проекций двух спинов состоит из следующих матричных элементов

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) &= \langle m_1^2 \rangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) - [\langle m_1 \rangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)]^2, \\
\sigma_{12}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) &= \langle m_1 m_2 \rangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) - \langle m_1 \rangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \langle m_2 \rangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{21}(\vec{n}_1,\vec{n}_2) &= \sigma_{12}(\vec{n}_1,\vec{n}_2),\\
\sigma_{22}(\vec{n}_1,\vec{n}_2) &= \langle m_2^2\rangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2) - [\langle m_2\rangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)]^2.
\end{aligned} \tag{242}$$

Если томограмма квантового состояния факторизуется, то есть, она задает "просто сепарабельное" состояние двух частиц со спинами, то характеристическая функция также факторизуется

$$\chi(s_1,\vec{n}_1,s_2,\vec{n}_2) = \chi_1(s_1,\vec{n}_1)\chi_2(s_2,\vec{n}_2). \tag{243}$$

В формуле (243) $\chi_1(s_1,\vec{n}_1)$ и $\chi_2(s_2,\vec{n}_2)$ - это характеристические функции, связанные с томограммами $w_1(m_1,\vec{n}_1)$ и $w_2(m_2,\vec{n}_2)$, соответственно.

4.4 Сложение спинов в вероятностном представлении квантовой механики

Томограмма, задающая чистое состояние с волновой функцией $|\psi\rangle$ одной частицы со спином j, имеет вид

$$w_\psi(m,\vec{n}) = |\langle m|u^+(\vec{n})|\psi\rangle|^2. \tag{244}$$

Здесь $u(\vec{n})$ - это унитарная матрица неприводимого представления группы $SU(2)$. Матричные элементы этой матрицы называются D-функциями Вигнера [61]

$$D^{(j)}_{m'm}(\phi,\theta,\gamma) \;=\; e^{im'\gamma}d^{(j)}_{m'm}(\theta)e^{im\phi}, \tag{245}$$

где

$$d^{(j)}_{m'm}(\theta) \;=\; \left[\frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!}\right]^{1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{m'+m}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{m'-m}P^{(m'-m,m'+m)}_{j-m'}(\cos\theta), \tag{246}$$

а $P^{(a,b)}_n(x)$ - полином Якоби. D-функции Вигнера зависят от трех углов Эйлера (ϕ,θ,γ). Благодаря структуре формулы (244), зависимость от третьего угла Эйлера γ пропадает, и томограмма зависит только от двух углов Эйлера. Если в качестве состояния $|\psi\rangle$ рассмотреть состояние $|m'\rangle$ частицы с определенной проекцией m' на ось z, то томограмма такого состояние имеет вид

$$w_{m'}(m,\vec{n}) = |D^{(j)}_{mm'}(\vec{n})|^2. \tag{247}$$

Итак, мы получили, что квадрат модуля D-функции Вигнера может быть интерпретирован как функция распределения томографической вероятности в чистом состоянии с определенной проекцией спина на ось z. Характеристическая функция, связанная с этой томограммой, имеет вид

$$\chi^{(j)}(s,\vec{n}) = \sum_{m=-j}^{j} e^{ism} |D^{(j)}_{mm'}(\vec{n})|^2. \tag{248}$$

Рассмотрим состояние двух частиц со спинами. Для состояния, имеющего вид $|\psi\rangle = |m_1' m_2'\rangle$, томограмма равна

$$w_{m_1' m_2'}(m_1,\vec{n}_1,m_2,\vec{n}_2) = |\langle m_1 m_2 | u^+(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|\psi\rangle|^2. \tag{249}$$

Здесь унитарная матрица $u(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$ является тензорным произведением

$$(u(\vec{n}_1,\vec{n}_2))_{m_1 m_1', m_2 m_2'} = D^{(j_1)}_{m_1 m_1'}(\vec{n}_1) D^{(j_2)}_{m_2 m_2'}(\vec{n}_2) \tag{250}$$

матриц двух неприводимых представлений группы $SU(2)$. В случае чистых состояний $|m_1' m_2'\rangle$ спиновая томограммы имеет вид

$$w_{m_1' m_2'}(m_1,\vec{n}_1,m_2,\vec{n}_2) = |D^{(j_1)}_{m_1 m_1'}(\vec{n}_1) D^{(j_2)}_{m_2 m_2'}(\vec{n}_2)|^2. \tag{251}$$

Характеристическая функция, связанная с томограммой состояния $|m_1' m_2'\rangle$, равна

$$\chi^{(j_1,j_2)}(s_1,\vec{n}_1,s_2,\vec{n}_2) = \chi_1^{(j_1)}(s_1,\vec{n}_1)\chi_2^{(j_2)}(s_2,\vec{n}_2). \tag{252}$$

Из формулы видно, что нет корреляций между проекциями спинов двух частиц. В случае двух спинов вектор состояния $|j_1 j_2 j m\rangle$ системы с суммарным спином j и проекцией спина на ось z, равной m, выражается через вектора состояний частиц $|j_1 m_1\rangle$ и $|j_2 m_2\rangle$

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j m) |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle. \tag{253}$$

Здесь коэффициенты $(j_1 m_1 j_2 m_2 | j m)$ - это коэффициенты Клебши-Жордана (явные выражения для коэффициентов Клебши-Жордана приведены в [61]). Томограмма суперпозиционного состояния $|j_1 j_2 j m\rangle$ задана формулой (249), если сделать замену $|\psi\rangle \to |j_1 j_2 j m\rangle$. Итак, мы выразили томограмму чистого состояния системы из двух частиц с суммарным спином j через коэффициенты Клебши-Жордана и матричные элементы неприводимого представления группы $SU(2)$

$$w(m_1,\vec{n}_1,m_2,\vec{n}_2) = |\sum_{m_1'=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2'=-j_2}^{j_2}(j_1j_2m_1'm_2'|jm)D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(\vec{n}_1)D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(\vec{n}_2)|^2. \qquad (254)$$

Характеристическая функция, отвечающая распределению вероятностей (254), имеет вид

$$\chi^{(jm)}(s,\vec{n}_1,s,\vec{n}_2) =$$

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}e^{i(s_1m_1+s_2m_2)}|\sum_{m_1'=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2'=-j_2}^{j_2}(j_1j_2m_1'm_2'|jm)D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(\vec{n}_1)D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(\vec{n}_2)|^2. \qquad (255)$$

В случае сепарабельных состояний двух кудитов (то есть двух частиц со спинами j_1, j_2) томограмма, задающая состояние, может быть представлена в виде выпуклой суммы произвольных сепарабельных состояний вида (234). Необходимое условие сепарабельности томограммы состояний имеет вид [78]

$$\sum_{m_1=-j_1}^{s_1}\sum_{m_2=-j_2}^{s_2}w(m_1,\vec{n}_1,m_2,\vec{n}_2) = \sum_k p_k P_1^{(k)}(s_1,\vec{n}_1)P_2^{(k)}(s_2,\vec{n}_2), \quad s_1 < j_1,\, s_2 < j_2, \quad (256)$$

где s_1 и s_2 - это произвольные полуцелые числа, удовлетворяющие следующему условию: $-j_1 \le s_1 \le +j_1$, $-j_2 \le s_2 \le +j_2$, а функции распределения вероятности $P_1^{(k)}(s_1,\vec{n}_1)$ и $P_2^{(k)}(s_2,\vec{n}_2)$ имеют вид

$$P_1^{(k)}(s_1,\vec{n}_1) = \sum_{m_1=-j_1}^{s_1} w_1^{(k)}(m_1,\vec{n}_1), \quad s_1 < j_1,$$
$$P_2^{(k)}(s_2,\vec{n}_2) = \sum_{m_2=-j_2}^{s_2} w_2^{(k)}(m_2,\vec{n}_2), \quad s_2 < j_2.$$

Новый набор необходимых условий сепарабельности состояния двух кудитов (256) может быть обобщен на случай произвольного числа кудитов.

4.5 Кубиты и стохастические матрицы

В данном параграфе мы обсудим свойства стохастических матриц, связанных с квантовыми спиновыми состояниями. В классической теории вероятности стохастические матрицы используются, например, для задания линейных преобразований функций распределения вероятности. Вектор состояния частицы со спином 1/2 (так называемого кубита) $|\psi\rangle$ имеет вид

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \langle\psi| = (a^*,\ b^*)\,, \tag{257}$$

где комплексные числа $a = a_1 + ia_2$ и $b = b_1 + ib_2$ удовлетворяют условию нормировки

$$\langle\psi|\psi\rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{258}$$

Матрица плотности размерности 2×2 чистого состояния $|\psi\rangle$ имеет вид

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ ba^* & |b|^2 \end{pmatrix}. \tag{259}$$

След матрицы плотности равен единице

$$\mathrm{Tr}\,\rho_\psi = |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{260}$$

Вероятности проекций спина на ось z $m = +1/2$ и $m = -1/2$ определяются диагональными матричными элементами матрицы плотности,

$$w(+1/2) = |a|^2, \qquad w(-1/2) = |b|^2. \tag{261}$$

В связи с тем, что вероятности проекций спина на ось z удовлетворяют условию нормировки (258), они могут быть параметризованы следующим образом

$$|a|^2 = \cos^2\Theta, \qquad |b|^2 = \sin^2\Theta. \tag{262}$$

Введем следующую матрицу, называемую стохастической

$$M = \begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix}, \tag{263}$$

где действительные числа p и q удовлетворяют нижеприведенным неравенствам

$$1 \geq p \geq 0, \qquad 1 \geq q \geq 0. \tag{264}$$

Неотрицательные числа p, $1-p$ и q, $1-q$ могут быть интерпретированы как функция распределения вероятности. Важным свойством множества матриц M является то, что произведение двух матриц вида (263) имеет ту же форму, что и исходные матрицы, а именно,

$$M_1M_2 = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ 1-p_1 & 1-q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 & q_2 \\ 1-p_2 & 1-q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 & q_3 \\ 1-p_3 & 1-q_3 \end{pmatrix}, \qquad (265)$$

где

$$p_3 = p_1p_2 + q_1(1-p_2), \qquad q_3 = p_1q_2 + q_1(1-q_2). \qquad (266)$$

Это означает, что множество матриц (263) является полугруппой. Полугруппы и их представления достаточно хорошо изучены. Полугруппы отличаются от групп только тем, что наличие у каждого элемента полугруппы обратного элемента не требуется, а для группы это требование обязательно. Единичная матрица также принадлежит полугруппе. Матричные элементы обратной матрицы

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} 1-q & -q \\ p-1 & p \end{pmatrix}, \quad \det M = p(1-q) - q(1-p) \qquad (267)$$

не удовлетворяют условию положительности (264), и поэтому данная матрица не принадлежит множеству матриц (263). Если параметры p и q являются произвольными действительными числами, то множество матриц M с $\det M \neq 0$ образуют двумерную группу Ли. Если параметры p и q являются комплексными числами, то множество матриц M образует четырехмерную группу Ли. Подмножество стохастических матриц следующего вида, называемых бистохастическими

$$N = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \qquad (268)$$

также образуют полугруппу. Действительно, произведение двух таких матриц

$$N_1N_2 = \begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ 1-p_1 & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 & 1-p_2 \\ 1-p_2 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 & 1-p_3 \\ 1-p_3 & p_3 \end{pmatrix}, \qquad (269)$$

где неотрицательные числа p_1, p_2, p_3 связаны следующим соотношением

$$p_3 = p_1p_2 + (1-p_1)(1-p_2), \qquad (270)$$

имеет тот же вид (268). Формула (270) может быть использована в качестве определения нового ассоциативного звездочного произведения действительных (комплексных) чисел $p_1 \star p_2$. Интересно, что в таблице умножения, отвечающей этому определению, произведение чисел $2 \star 2 = 5$. В бистохастической матрице суммы чисел как в столбцах так и в строках равны единице. Тензорное произведение двух бистохастических матриц является бистохастической матрицей. Используя соотношения (269), можно ввести ассоциативное произведение функций распределения вероятностей. С двумя функциями распределения вероятности $p_1, 1-p_1$ и $p_2, 1-p_2$, можно связать два вектора

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{271}$$

$$\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} p_2 \\ 1-p_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} w_1^{(2)} \\ w_2^{(2)} \end{pmatrix} \tag{272}$$

и две матрицы

$$N_1 = \begin{pmatrix} w_1^{(1)} & w_2^{(1)} \\ w_2^{(1)} & w_1^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{273}$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} w_1^{(2)} & w_2^{(2)} \\ w_2^{(2)} & w_1^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{274}$$

Определим ассоциативное произведение $\overrightarrow{w_3}$ двух векторов (которое называется звездочным произведением) $\overrightarrow{w_1} * \overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{w_3}$, используя для нахождения компонент вектора $\overrightarrow{w_3}$ произведение двух матриц N_1 и N_2, заданное формулами (269) и (270). Мы получим

$$w_1^{(3)} = w_1^{(1)} w_1^{(2)} + w_2^{(1)} w_2^{(2)}, \tag{275}$$

$$w_2^{(3)} = w_2^{(1)} w_1^{(2)} + w_1^{(1)} w_2^{(2)}. \tag{276}$$

Собственные значения стохастической матрицы (263) равны

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = p - q. \tag{277}$$

Они удовлетворяют следующему условию

$$|\lambda_k| \leq 1, \qquad k = 1, 2. \tag{278}$$

Собственные вектора стохастической матрицы (263) равны

$$|U_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ q^{-1}(1-p) \end{pmatrix}, \qquad |U_{p-q}\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{279}$$

Следовательно, матрица M представима в виде

$$\begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{pmatrix} U^{-1}, \tag{280}$$

где матрица U равна

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q^{-1}(1-p) & -1 \end{pmatrix}. \tag{281}$$

В случае, когда $p = q$, определитель стохастической матрицы равен нулю.

Выведем неравенство, которому удовлетворяет скалярное произведение двух пар действительных векторов. Пусть

$$\left|(\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_1})\right| < c; \qquad \left|(\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b_2})\right| < c, \tag{282}$$

где c - положительное число. В этом случае выпуклая сумма $\cos^2\gamma(\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_1}) + \sin^2\gamma(\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b_2})$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\cos^2\gamma(\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_1}) + \sin^2\gamma(\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b_2})\right| < c. \tag{283}$$

Методом индукции получаем неравенство для выпуклой суммы в общем случае. Если $|\overrightarrow{a_k}\overrightarrow{b_k}| < c$, тогда

$$\left|\sum_k p_k(\overrightarrow{a_k}\overrightarrow{b_k})\right| < c, \tag{284}$$

где коэффициенты $1 \geq p_k \geq 0, \qquad \sum_k p_k = 1$. Если $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{b_2} = \cdots = \overrightarrow{b_k} = \cdots = \overrightarrow{B}$, то неравенство (284) принимает вид

$$\left|\sum_k p_k(\overrightarrow{a_k}\overrightarrow{B})\right| < c, \tag{285}$$

то есть,

$$\left|\sum_k (p_k\overrightarrow{a_k})\overrightarrow{B}\right| < c. \tag{286}$$

4.6 Матрицы как вектора

В данном параграфе обсудим хорошо известные свойства матриц, а именно, то, что они могут рассматриваться как вектора. Например, действительная 2×2 матрица

$$\mu = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{287}$$

может рассматриваться как вектор

$$\overrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \tag{288}$$

Сумма двух матриц μ_1 и μ_2

$$\mu_1 + \mu_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \tag{289}$$

может быть интерпретирована как сумма двух векторов со следующими компонентами

$$\overrightarrow{\mu_1} + \overrightarrow{\mu_2} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix}. \tag{290}$$

Тогда число $\mathrm{Tr}\,(\mu_1^{\mathrm{tr}}\mu_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$, где μ_1^{tr} - это транспонированная матрица μ_1, является стандартным скалярным произведением двух векторов

$$\mathrm{Tr}\,\left(\mu_1^{\mathrm{tr}}\mu_2\right) = \left(\overrightarrow{\mu_1}\overrightarrow{\mu_2}\right). \tag{291}$$

4.7 Редукция функций распределения

Рассмотрим распределение вероятностей (p_1, p_2, p_3). Неотрицательные элементы p_1, p_2 и p_3 могут быть преобразованы в три пары неотрицательных чисел

$$P_1^{(1)} = p_1, \qquad P_2^{(1)} = (p_2 + p_3), \tag{292}$$

$$P_1^{(2)} = p_1 + p_2, \qquad P_2^{(2)} = p_3, \tag{293}$$

$$P_1^{(3)} = p_1 + p_3, \qquad P_2^{(3)} = p_2. \tag{294}$$

В результате такой редукции получаем три функции распределения вероятностей $\left(P_1^{(1)}, P_2^{(1)}\right)$, $\left(P_1^{(2)}, P_2^{(1)}\right)$ и $\left(P_1^{(3)}, P_2^{(3)}\right)$, а также функции распределения вероятности, которые можно получить перестановками индексов. Получаем, что исходная функция распределения вероятности, содержащая три возможных значения, преобразуется в набор функций распределения вероятности, каждая из которых содержит два возможных значения. Данное линейное преобразование обратимо, так как,

$$p_1 = P_1^{(1)}, \qquad p_2 = P_1^{(2)} - P_1^{(1)}, \qquad p_3 = P_2^{(2)}. \tag{295}$$

Следовательно, зная функции распределения вероятности (292)–(294), мы можем восстановить начальные функции распределения вероятности. Набор функций распределения вероятности (292) и (293) назовем портретом начальной функции распределения вероятности. Используя, предложенный подход, можно построить аналогичное преобразование для получение портрета совместных функций распределения вероятности.

4.8 Стохастическая матрица, определяемая кубитом

Матрица плотности смешанного состояния частицы со спином 1/2 (состояние кубита) может быть представлена в виде выпуклой суммы матриц плотностей чистых состояний. Следовательно, матрица

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|, \tag{296}$$

где $1 \geq p_k \geq 0$ и $\sum_k p_k = 1$, является эрмитовой матрицей, и ее след равен единице. Матрица плотности является неотрицательной матрицей, то есть ее собственные значения неотрицательные числа. Томограмма состояния кубита имеет вид

$$w(m,U) = \begin{pmatrix} w(+1/2,U) \\ w(-1/2,U) \end{pmatrix} = (U^+ \rho U)_{mm}, \tag{297}$$

где U - унитарная матрица вида (229). Построим стохастическую матрицу (263), используя следующие обозначения

$$p = w(+1/2, U_1), \qquad q = w(+1/2, U_2). \tag{298}$$

Получаем, что она имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} w(+1/2,U_1) & w(+1/2,U_2) \\ 1 - w(+1/2,U_1) & 1 - w(+1/2,U_2) \end{pmatrix}, \tag{299}$$

где матрица U_1 определяется углами Эйлера φ_1, θ_1, и ψ_1, а матрица U_2 задается углами Эйлера φ_2, θ_2, и ψ_2. Матричные элементы построенной стохастической матрицы равны томографическим вероятностям и, поэтому данная матрица обладает всеми свойствами стохастической матрицы (263), обсужденными в предыдущих параграфах.

4.9 Два кубита: сепарабельные и перепутанные состояния

Рассмотрим единичный вектор $\overrightarrow{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, который является нормалью к поверхности сферы. Томограмму $w(m, U)$ можно рассматривать как функцию на сфере $w(m, U) \equiv w(m, \overrightarrow{n})$. Стохастическая матрица M может быть представлена в следующем виде

$$M = \begin{pmatrix} w(+1/2, \overrightarrow{n_1}) & w(+1/2, \overrightarrow{n_2}) \\ 1 - w(+1/2, \overrightarrow{n_1}) & 1 - w(+1/2, \overrightarrow{n_2}) \end{pmatrix}. \tag{300}$$

Теперь рассмотрим два кубита, то есть, рассмотрим матрицу плотности ρ размерности 4×4. Томограмма состояния двух кубитов имеет вид

$$w(m_1, m_2, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{N}) = (U^\dagger \rho U)_{m_1 m_2, m_1 m_2}\,, \tag{301}$$

где U - 4×4 унитарная матрица, являющаяся тензорным произведением двух 2×2 унитарных матриц

$$U = U_1 \otimes U_2, \tag{302}$$

где U_1 и U_2 заданы формулами (229) с углами Эйлера φ_1, θ_1, ψ_1 и φ_2, θ_2, ψ_2, соответственно. Вектор $\overrightarrow{n}$ задан углами Эйлера φ_1, θ_1, а вектор $\overrightarrow{N}$ задан углами Эйлера φ_2, θ_2.

Томограмма просто сепарабельного состояния факторизуется. Построим для такого состояния 4×4 стохастическую матрицу по следующему правилу.

Возьмем четыре вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{d}$. Затем выберем два вектора $\overrightarrow{n}$ равными $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, а два вектора $\overrightarrow{N}$ равными $\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{d}$. Получаем две функции распределения вероятности для первого кубита, а именно, $w_1(m_1, \overrightarrow{a})$ и $w_1(m_1, \overrightarrow{b})$, и две функции распределения вероятности для второго кубита $w_2(m_2, \overrightarrow{c})$ и $w_2(m_2, \overrightarrow{d})$. Получаем, что 4×4 стохастическая матрица содержит 4 столбца

$$(M_4)_{k1} = \begin{pmatrix} w_1(+1/2, \overrightarrow{a})\, w_2(+1/2, \overrightarrow{b}) \\ w_1(+1/2, \overrightarrow{a})\, w_2(-1/2, \overrightarrow{b}) \\ w_1(-1/2, \overrightarrow{a})\, w_2(+1/2, \overrightarrow{b}) \\ w_1(-1/2, \overrightarrow{a})\, w_2(-1/2, \overrightarrow{b}) \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3, 4, \tag{303}$$

$$(M_4)_{k2} = \begin{pmatrix} w_1(+1/2, \overrightarrow{a})\, w_2(+1/2, \overrightarrow{c}) \\ w_1(+1/2, \overrightarrow{a})\, w_2(-1/2, \overrightarrow{c}) \\ w_1(-1/2, \overrightarrow{a})\, w_2(+1/2, \overrightarrow{c}) \\ w_1(-1/2, \overrightarrow{a})\, w_2(-1/2, \overrightarrow{c}) \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3, 4, \tag{304}$$

$$(M_4)_{k3} = \begin{pmatrix} w_1(+1/2, \overrightarrow{d})\, w_2(+1/2, \overrightarrow{b}) \\ w_1(+1/2, \overrightarrow{d})\, w_2(-1/2, \overrightarrow{b}) \\ w_1(-1/2, \overrightarrow{d})\, w_2(+1/2, \overrightarrow{b}) \\ w_1(-1/2, \overrightarrow{d})\, w_2(-1/2, \overrightarrow{b}) \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3, 4, \tag{305}$$

$$(M_4)_{k4} = \begin{pmatrix} w_1(+1/2, \overrightarrow{d})\, w_2(+1/2, \overrightarrow{c}) \\ w_1(+1/2, \overrightarrow{d})\, w_2(-1/2, \overrightarrow{c}) \\ w_1(-1/2, \overrightarrow{d})\, w_2(+1/2, \overrightarrow{c}) \\ w_1(-1/2, \overrightarrow{d})\, w_2(-1/2, \overrightarrow{c}) \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3, 4. \tag{306}$$

Данная матрица может быть записана в виде тензорного произведения двух 2×2 стохастических матриц, то есть,

$$M_4 = \begin{pmatrix} w_1(+1/2, \overrightarrow{a}) & w_1(+1/2, \overrightarrow{d}) \\ w_1(-1/2, \overrightarrow{a}) & w_1(-1/2, \overrightarrow{d}) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} w_2(+1/2, \overrightarrow{b}) & w_2(+1/2, \overrightarrow{c}) \\ w_2(-1/2, \overrightarrow{b}) & w_2(-1/2, \overrightarrow{c}) \end{pmatrix}. \tag{307}$$

Назовем данную матрицу "просто сепарабельной" стохастической матрицей. Можно проверить, что матрица (307) удовлетворяет неравенству Белла–Клаузера–Хорна–Шимони–Холта [79]

$$\begin{aligned} &|(M_4)_{11} - (M_4)_{21} - (M_4)_{31} + (M_4)_{41} + (M_4)_{12} - (M_4)_{22} - (M_4)_{32} + (M_4)_{42} \\ &+(M_4)_{13} - (M_4)_{23} - (M_4)_{33} + (M_4)_{43} - (M_4)_{14} + (M_4)_{24} + (M_4)_{34} - (M_4)_{44}| \leq 2. \end{aligned} \tag{308}$$

Данное неравенство можно переписать в матричном виде, а именно, $|\mathrm{Tr}\,(M_4 I)| \leq 2$, где

$$I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{309}$$

Неравенство должно выполняться в случае, когда матрица I заменена на следующую матрицу $\tilde{I} = IC$, где $C = C_1 \otimes C_2$, а две $2{\times}2$ матрицы C_1 и C_2 - произвольные стохастические матрицы. Перейдя к векторной форме для матриц $M_4 \to \overrightarrow{M_4}$, $I \to \overrightarrow{I}$, получаем следующее неравенство

$$\left|\left(\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{M_4}\right)\right| \leq 2. \tag{310}$$

Построив выпуклую сумму из матриц типа M_4

$$M = \sum_k P_k M_4^{(k)}, \qquad P_k \geq 0, \qquad \sum_k P_k = 1, \tag{311}$$

и учтя свойства выпуклых сумм (284), получаем, что

$$\left|\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{M}\right| \leq 2, \tag{312}$$

то есть,

$$|\mathrm{Tr}(MI)| \leq 2. \tag{313}$$

4.10 Сепарабельные и перепутанные состояния

По определению квантовое состояние двух кубитов является сепарабельным (неперепутанным), если томограмма данного состояния представима в виде выпуклой суммы произвольных просто сепарабельных томограмм. Можно показать, что стохастическая матрица, соответствующая такой томограмме, также представима в виде выпуклой суммы матриц, задаваемых формулой (307), то есть, имеет вид

$$M_4 = \sum_k P_k \begin{pmatrix} w^{(k)}(+1/2, \overrightarrow{a}) & w^{(k)}(+1/2, \overrightarrow{d}\,) \\ w^{(k)}(-1/2, \overrightarrow{a}) & w^{(k)}(-1/2, \overrightarrow{d}\,) \end{pmatrix}$$
$$\otimes \begin{pmatrix} w^{(k)}(+1/2, \overrightarrow{b}\,) & w^{(k)}(+1/2, \overrightarrow{c}\,) \\ w^{(k)}(-1/2, \overrightarrow{b}\,) & w^{(k)}(-1/2, \overrightarrow{c}\,) \end{pmatrix}. \tag{314}$$

Назовем стохастические матрицы такого типа сепарабельными стохастическими матрицами. Сформулируем следующее утверждение:

Произведение двух стохастических матриц $M_4^{(1)}$ и $M_4^{(2)}$, соответствующих томограммам сепарабельных состояний двух кубитов, представимо в виде выпуклой суммой произвольных просто сепарабельных стохастических матриц.

Докажем это утверждение

Пусть F_1 - стохастическая матрица, соответствующая сепарабельным квантовым состояниям двух кубитов, то есть, она может быть записана в форме (314), что означает, что

$$F_1 = \sum_k P_k w_{(1)}^{(k)}. \tag{315}$$

Здесь

$$w_{(1)}^{(k)} = \begin{pmatrix} w^{(k)}(+1/2, \overrightarrow{a_1}) & w^{(k)}(+1/2, \overrightarrow{d_1}) \\ w^{(k)}(-1/2, \overrightarrow{a_1}) & w^{(k)}(-1/2, \overrightarrow{d_1}) \end{pmatrix}$$
$$\otimes \begin{pmatrix} w^{(k)}(+1/2, \overrightarrow{b_1}) & w^{(k)}(+1/2, \overrightarrow{c_1}) \\ w^{(k)}(-1/2, \overrightarrow{b_1}) & w^{(k)}(-1/2, \overrightarrow{c_1}) \end{pmatrix}. \tag{316}$$

Рассмотрим другую стохастическую матрицу F_2 следующего вида

$$F_2 = \sum_s \rho_s w_{(2)}^{(s)}, \tag{317}$$

где $\rho_s \geq 0$ и $\sum_s \rho_s = 1$. Использование системы обозначений (317) означает, что мы сделали следующие переобозначения в формуле (316)

$$k \to s, \qquad \overrightarrow{a_1} \to \overrightarrow{a_2}, \qquad \overrightarrow{d_1} \to \overrightarrow{d_2}, \qquad \overrightarrow{b_1} \to \overrightarrow{b_2}, \qquad \overrightarrow{c_1} \to \overrightarrow{c_2}.$$

Теперь вычислим произведение матриц

$$F = F_1 F_2 = \sum_{ks} (P_k \rho_s) w_{(1)}^{(k)} w_{(2)}^{(s)}. \tag{318}$$

Поскольку

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (ac) \otimes (bd), \tag{319}$$

получаем

$$F = \sum_j Q_j w^j, \tag{320}$$

где j - коллективный индекс $j = (ks)$, матрица $w^{(j)}$ - 4×4 стохастическая матрица просто сепарабельной формы, то есть, матрица F удовлетворяет неравенству Белла–Клаузера–Хорна–Шимони–Холта [79]

$$|\mathrm{Tr}\,(FI)| \leq 2. \tag{321}$$

4.11 Необходимое условие сепарабельности

Обсужденное выше утверждение позволяет сформулировать необходимое условие сепарабельности состояния двух кубитов. Рассмотрим спиновую томограмму сепарабельного состояния двух кубитов $w(m_1 m_2 \overrightarrow{n_1} \overrightarrow{n_2})$, и свяжем с ней матрицы

$$M\left(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d}\right) =$$
$$\begin{pmatrix} w\left(+\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) & w\left(+\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right) & w\left(+\frac{1}{2}\overrightarrow{d}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) & w\left(+\frac{1}{2}\overrightarrow{d}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right) \\ w\left(+\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) & w\left(+\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right) & w\left(+\frac{1}{2}\overrightarrow{d}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) & w\left(+\frac{1}{2}\overrightarrow{d}-\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right) \\ w\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) & w\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right) & w\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{d}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) & w\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{d}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right) \\ w\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) & w\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right) & w\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{d}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) & w\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{d}-\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right) \end{pmatrix}, \tag{322}$$

Данный набор матриц образует полугруппу матриц, удовлетворяющих неравенству (313). Данное свойство матриц можно использовать как критерий сепарабельности.

Например, рассмотрим две матрицы $M_1\left(\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_1}\overrightarrow{c_1}\overrightarrow{d_1}\right)$ и $M_2\left(\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b_2}\overrightarrow{c_2}\overrightarrow{d_2}\right)$. Очевидно, что произведение двух матриц

$$F = M_1 M_2 \left(\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_1}\overrightarrow{c_1}\overrightarrow{d_1}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b_2}\overrightarrow{c_2}\overrightarrow{d_2}\right)$$

удовлетворяет неравенству (313) в случае произвольных направлений $\left(\overrightarrow{a_k}\overrightarrow{b_k}\overrightarrow{c_k}\overrightarrow{d_k}\right)$ с $k = 1, 2$, что гарантируется указанной леммой.

Данное свойство может быть обобщено на любое число направлений $k = 1, 2, \ldots$

Необходимо отметить, что произведение двух матриц плотности сепарабельных квантовых состояний не является матрицей плотности квантового состояния.

4.12 Пример перепутанных состояний

Рассмотрим опять пример (237) чистого запутанного состояния двух кубитов. Построим томограмму этого состояния, используя матрицы (301) и (302), получаем, что она имеет вид

$$
\begin{aligned}
w\left(+\frac{1}{2},+\frac{1}{2},\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_1}{2}\cos^2\frac{\Theta_2}{2}+\sin^2\frac{\Theta_1}{2}\sin^2\frac{\Theta_2}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\Theta_1\sin\Theta_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right),\\
w\left(+\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_1}{2}\sin^2\frac{\Theta_2}{2}+\sin^2\frac{\Theta_1}{2}\cos^2\frac{\Theta_2}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\Theta_1\sin\Theta_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right),\\
w\left(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2},\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_1}{2}\sin^2\frac{\Theta_2}{2}+\sin^2\frac{\Theta_1}{2}\cos^2\frac{\Theta_2}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\Theta_1\sin\Theta_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right),\\
w\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_1}{2}\cos^2\frac{\Theta_2}{2}+\sin^2\frac{\Theta_1}{2}\sin^2\frac{\Theta_2}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\Theta_1\sin\Theta_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right).
\end{aligned}
\tag{323}
$$

Матрица $M\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}\right)$, связанная с томограммой (323), состоит из 16 матричных элементов:

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_a}{2}\cos^2\frac{\Theta_b}{2}+\sin^2\frac{\Theta_a}{2}\sin^2\frac{\Theta_b}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\Theta_a\sin\Theta_b\cos\left(\varphi_a+\varphi_b\right),\\
M_{21} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_a}{2}\sin^2\frac{\Theta_b}{2}+\sin^2\frac{\Theta_a}{2}\cos^2\frac{\Theta_b}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\Theta_a\sin\Theta_b\cos\left(\varphi_a+\varphi_b\right),\\
M_{31} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_a}{2}\sin^2\frac{\Theta_b}{2}+\sin^2\frac{\Theta_a}{2}\cos^2\frac{\Theta_b}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\Theta_a\sin\Theta_b\cos\left(\varphi_a+\varphi_b\right),\\
M_{41} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_a}{2}\cos^2\frac{\Theta_b}{2}+\sin^2\frac{\Theta_a}{2}\sin^2\frac{\Theta_b}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\Theta_a\sin\Theta_b\cos\left(\varphi_a+\varphi_b\right),\\
M_{12} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_a}{2}\cos^2\frac{\Theta_c}{2}+\sin^2\frac{\Theta_a}{2}\sin^2\frac{\Theta_c}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\Theta_a\sin\Theta_c\cos\left(\varphi_a+\varphi_c\right),\\
M_{22} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_a}{2}\sin^2\frac{\Theta_c}{2}+\sin^2\frac{\Theta_a}{2}\cos^2\frac{\Theta_c}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\Theta_a\sin\Theta_c\cos\left(\varphi_a+\varphi_c\right),\\
M_{32} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_a}{2}\sin^2\frac{\Theta_c}{2}+\sin^2\frac{\Theta_a}{2}\cos^2\frac{\Theta_c}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\Theta_a\sin\Theta_c\cos\left(\varphi_a+\varphi_c\right),\\
M_{42} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_a}{2}\cos^2\frac{\Theta_c}{2}+\sin^2\frac{\Theta_a}{2}\sin^2\frac{\Theta_c}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\Theta_a\sin\Theta_c\cos\left(\varphi_a+\varphi_c\right),\\
M_{13} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_d}{2}\cos^2\frac{\Theta_b}{2}+\sin^2\frac{\Theta_d}{2}\sin^2\frac{\Theta_b}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\Theta_d\sin\Theta_b\cos\left(\varphi_d+\varphi_b\right),\\
M_{23} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_d}{2}\sin^2\frac{\Theta_b}{2}+\sin^2\frac{\Theta_d}{2}\cos^2\frac{\Theta_b}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\Theta_d\sin\Theta_b\cos\left(\varphi_d+\varphi_b\right),\\
M_{33} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_d}{2}\sin^2\frac{\Theta_b}{2}+\sin^2\frac{\Theta_d}{2}\cos^2\frac{\Theta_b}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\Theta_d\sin\Theta_b\cos\left(\varphi_d+\varphi_b\right),\\
M_{43} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_d}{2}\cos^2\frac{\Theta_b}{2}+\sin^2\frac{\Theta_d}{2}\sin^2\frac{\Theta_b}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\Theta_d\sin\Theta_b\cos\left(\varphi_d+\varphi_b\right),\\
M_{14} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_d}{2}\cos^2\frac{\Theta_c}{2}+\sin^2\frac{\Theta_d}{2}\sin^2\frac{\Theta_c}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\Theta_d\sin\Theta_c\cos\left(\varphi_d+\varphi_c\right),\\
M_{24} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_d}{2}\sin^2\frac{\Theta_c}{2}+\sin^2\frac{\Theta_d}{2}\cos^2\frac{\Theta_c}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\Theta_d\sin\Theta_c\cos\left(\varphi_d+\varphi_c\right),\\
M_{34} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_d}{2}\sin^2\frac{\Theta_c}{2}+\sin^2\frac{\Theta_d}{2}\cos^2\frac{\Theta_c}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\Theta_d\sin\Theta_c\cos\left(\varphi_d+\varphi_c\right),\\
M_{44} &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\Theta_d}{2}\cos^2\frac{\Theta_c}{2}+\sin^2\frac{\Theta_d}{2}\sin^2\frac{\Theta_c}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\Theta_d\sin\Theta_c\cos\left(\varphi_d+\varphi_c\right).
\end{aligned}
\tag{324}
$$

Матрица M (324) нарушает условие (313), которое является неравенством Белла, и число B принимает при некоторых значениях углов максимально возможное значение $2\sqrt{2}$, которое называется границей Цирельсона [80]. Нарушение соотношения (313) происходит из-за перепутанности состояния (237). Нарушение неравенства Белла является сигналом о том, что состояние является перепутанным. Произведение M двух матриц (324), отвечающее углам Θ_a, Θ_b, Θ_c, Θ_d, φ_a, φ_b, φ_c и φ_d для первой матрицы M_1 и углам $\Theta_{a'}$, $\Theta_{b'}$, $\Theta_{c'}$, $\Theta_{d'}$, $\varphi_{a'}$, $\varphi_{b'}$, $\varphi_{c'}$ и $\varphi_{d'}$ для второй матрицы M_2, то есть, $M = M_1 M_2$ в случае сепарабельных состояний должно удовлетворять неравенствам Белла (313). Эти матрицы образуют полугруппу, которая является подполугруппой всех стохастических матриц, построенных при помощи томограмм всех квантовых состояний.

4.13 Сведение исследования сепарабельности состояния кубита–кутрита к исследованию условий нарушения неравенства Белла для двух кубитов

В данном параграфе, обсудим новые необходимые условия сепарабельности состояния кубита-кутрита в вероятностном представлении квантовой механики. Идея построения необходимого условия сепарабельности основана на нахождении портретов состояний кубита и кутрита, которые обсуждались в предыдущих параграфах. Введем вектор распределения вероятности с тремя неотрицательными компонентами

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}, \tag{325}$$

где $W_1 + W_2 + W_3 = 1$. Новый вектор распределения вероятности $\overrightarrow{\rho}$ может быть построен следующим образом:

$$\overrightarrow{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 + W_3 \end{pmatrix}. \tag{326}$$

Это означает, что каждое трехмерное распределение редуцируется к двумерному распределению. Можно использовать все вектора

$$\overrightarrow{\rho'} = \begin{pmatrix} \rho_1' \\ \rho_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 + W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} \tag{327}$$

и

$$\overrightarrow{\rho''} = \begin{pmatrix} \rho_1'' \\ \rho_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 + W_3 \\ W_2 \end{pmatrix} \tag{328}$$

Рассмотрим произвольное сепарабельное состояние системы кубит-кутрит с оператором плотности

$$\hat{\rho}(1,2) = \hat{\rho}(1) \otimes \hat{\rho}(2).$$

Томограмма этого состояния является функцией распределения вероятности следующего вида

$$w(m_1, \overrightarrow{n_1}, m_2, \overrightarrow{n_2}) = w_1(m_1, \overrightarrow{n_1}) W(m_2, \overrightarrow{n_2}), \tag{329}$$

где проекция первого спина m_1 принимает значения $-1/2$ и $+1/2$, а проекция второго спина m_2 принимает значения -1, 0 и 1.

Записанная в форме шестимерного вектора, томограмма (329) принимает вид

$$\overrightarrow{w}(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \overrightarrow{w_{1/2}}(\overrightarrow{n_1}) \otimes \overrightarrow{W_1}(\overrightarrow{n_2}), \tag{330}$$

где

$$\overrightarrow{w_{\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} w_1(\overrightarrow{n_1}) \\ w_2(\overrightarrow{n_1}) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{W_1}(\overrightarrow{n_2}) = \begin{pmatrix} W_1(\overrightarrow{n_2}) \\ W_2(\overrightarrow{n_2}) \\ W_3(\overrightarrow{n_2}) \end{pmatrix}. \tag{331}$$

В результате получаем

$$\overrightarrow{w}(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \begin{pmatrix} w_1(\overrightarrow{n_1}) W_1(\overrightarrow{n_2}) \\ w_1(\overrightarrow{n_1}) W_2(\overrightarrow{n_2}) \\ w_1(\overrightarrow{n_1}) W_3(\overrightarrow{n_2}) \\ w_2(\overrightarrow{n_1}) W_1(\overrightarrow{n_2}) \\ w_2(\overrightarrow{n_1}) W_2(\overrightarrow{n_2}) \\ w_2(\overrightarrow{n_1}) W_3(\overrightarrow{n_2}) \end{pmatrix}. \tag{332}$$

Применим описанный способ для сведения трехмерного распределения к двумерному распределению. Используя (331), получаем вектор

$$\overrightarrow{\rho_1}(\overrightarrow{n_2}) = \begin{pmatrix} W_1(\overrightarrow{n_2}) \\ W_2(\overrightarrow{n_2}) + W_3(\overrightarrow{n_2}) \end{pmatrix}. \tag{333}$$

Данная редукция сводит шести-вектор (332) к четырех-вектору

$$\overrightarrow{\rho}(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \begin{pmatrix} w_1(\overrightarrow{n_1})W_1(\overrightarrow{n_2}) \\ w_1(\overrightarrow{n_1})(W_2(\overrightarrow{n_2}) + W_3(\overrightarrow{n_2})) \\ w_2(\overrightarrow{n_1})W_1(\overrightarrow{n_2}) \\ w_2(\overrightarrow{n_1})(W_2(\overrightarrow{n_2}) + W_3(\overrightarrow{n_2})) \end{pmatrix}. \tag{334}$$

Нетрудно заметить, что для произвольной сепарабельной томограммы, редуцированный вектор распределения $\overrightarrow{\rho}(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$ является сепарабельным распределением. Из данного свойства можно получить аналогичное свойство для выпуклой суммы произвольных сепарабельных распределений.

Обсудим свойства спиновых томограмм, задающих сепарабельные состояния системы кубит-кутрит (кутрит - это синоним частицы с $s = 1$). Пусть спиновая томограмма задана функцией распределения $w(m_1, \overrightarrow{n_1}, m_2, \overrightarrow{n_2})$, которая может описывать как сепарабельное так и перепутанное состояние. Зададим томограмму при помощи следующего вектора

$$\overrightarrow{w}(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \begin{pmatrix} w\,(+1/2, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2}) \\ w\,(+1/2, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}) \\ w\,(+1/2, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2}) \\ w\,(-1/2, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2}) \\ w\,(-1/2, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}) \\ w\,(-1/2, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2}) \end{pmatrix}. \tag{335}$$

Затем введем четырех–вектор

$$\overrightarrow{\rho}\,(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \begin{pmatrix} w\,(+1/2, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2}) \\ w\,(+1/2, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}) + w\,(+1/2, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2}) \\ w\,(-1/2, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2}) \\ w\,(-1/2, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}) + w(-1/2, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2}) \end{pmatrix}. \tag{336}$$

Теперь применим критерий сепарабельности, обсужденный и использованный для исследования состояний системы двух кубитов в предыдущих параграфах. Для этого построим 4×4 стохастическую матрицу, в столбцах которой стоят компоненты векторов (336) с соответствующими векторами $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$

$$P\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right) = \| \ \overrightarrow{\rho}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \overrightarrow{\rho}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\right) \overrightarrow{\rho}\left(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}\right) \overrightarrow{\rho}\left(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{c}\right) \| \, . \tag{337}$$

В результате получаем, что если матричные элементы (337) нарушают неравенства Белла, то состояние системы кубит-кутрит является перепутанным. Выполнение неравенств Белла (321) является необходимым условием сепарабельности состояний системы кубит-кутрит.

4.14 Кубит–кутрит и два кутрита

В данном параграфе рассмотрим два конкретных примера перепутанных состояний. Пусть матрица плотности состояния кубита–кутрита в стандартном базисе $|1/2, m_1\rangle |1, m_2\rangle$ имеет вид

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{338}$$

Две унитарные матрицы, преобразующие кубиты, с матричными элементами

$$\begin{aligned} U_{11} &= e^{i\varphi_1/2} \cos \frac{\theta_1}{2}, \qquad U_{12} = i e^{i\varphi_1/2} \sin \frac{\theta_1}{2}, \\ U_{21} &= i e^{-i\varphi_1/2} \sin \frac{\theta_1}{2}, \qquad U_{22} = e^{-i\varphi_1/2} \cos \frac{\theta_1}{2}, \end{aligned} \tag{339}$$

и кутриты, с матричными элементами

$$\begin{aligned} V_{11} &= e^{i\varphi_2} \cos^2 \frac{\theta_2}{2}, \qquad V_{12} = i e^{i\varphi_2} \frac{\sin \Theta_2}{\sqrt{2}}, \qquad V_{13} = -e^{i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2}, \\ V_{21} &= i \, \frac{\sin \Theta_2}{\sqrt{2}}, \qquad V_{22} = \cos \Theta_2, \qquad V_{23} = i \, \frac{\sin \Theta_2}{\sqrt{2}}, \\ V_{31} &= -e^{-i\varphi_2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2}, \qquad V_{32} = i e^{-i\varphi_2} \frac{\sin \Theta_2}{\sqrt{2}}, \qquad V_{33} = e^{-i\varphi_2} \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \end{aligned} \tag{340}$$

могут быть использованы при построении 6×6 матрицы $U \otimes V$ и $U^\dagger \otimes V^\dagger$. Диагональные матричные элементы матрицы

$$\Big[(U^\dagger \otimes V^\dagger)\rho(U \otimes V)\Big]_{m_1m_2,m_1m_2} = w(m_1, \overrightarrow{n_1}, m_2, \overrightarrow{n_2}) \qquad (341)$$

задают спиновую томограмму состояния (338). Получаем

$$\begin{aligned}
&w\left(+\frac{1}{2}, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2}\right) = \frac{1}{2}\left|U_{11}V_{11} + U_{21}V_{31}\right|^2, \qquad w\left(+\frac{1}{2}, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}\right) = \frac{1}{2}\left|U_{11}V_{12} + U_{21}V_{32}\right|^2,\\
&w\left(+\frac{1}{2}, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2}\right) = \frac{1}{2}\left|U_{11}V_{13} + U_{21}V_{33}\right|^2, \qquad w\left(-\frac{1}{2}, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2}\right) = \frac{1}{2}\left|U_{12}V_{11} + U_{22}V_{31}\right|^2,\\
&w\left(-\frac{1}{2}, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}\right) = \frac{1}{2}\left|U_{12}V_{12} + U_{22}V_{32}\right|^2, \qquad w\left(-\frac{1}{2}, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2}\right) = \frac{1}{2}\left|U_{12}V_{13} + U_{22}V_{33}\right|^2.
\end{aligned} \qquad (342)$$

Сделав редукцию данного распределения, получаем вектор (336), а затем получаем 4×4 матрицу (337). Вычисляя модуль следа от произведения этой матрицы и матрицы I, заданной формулой (309), получаем выражение, которое запишем в следующем виде:

$$B = \Big|\sin\Theta_a\left(\sin^2\Theta_b \sin\Phi_{ab} + \sin^2\Theta_c \sin\Phi_{ac}\right) + \sin\Theta_d\left(\sin^2\Theta_b \sin\Phi_{db} - \sin^2\Theta_c \sin\Phi_{dc}\right)\Big|, \qquad (343)$$

где

$$\Phi_{ab} = \varphi_a + 2\varphi_b, \qquad \Phi_{ac} = \varphi_a + 2\varphi_c, \qquad \Phi_{db} = \varphi_d + 2\varphi_b, \qquad \Phi_{dc} = \varphi_d + 2\varphi_c.$$

Можно проверить, что для нижеприведенных значений параметров

$$\Theta_a = \frac{\pi}{2}, \quad \Theta_b = \frac{\pi}{2}, \quad \Theta_c = \frac{\pi}{2}, \quad \Theta_d = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi_{ab} = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi_{dc} = -\frac{\pi}{4}, \quad \Phi_{ac} = \frac{\pi}{4}, \quad \Phi_{db} = 0, \qquad (344)$$

значение B (343) оказывается больше 2, а именно,

$$B = 1 + \sqrt{2}, \qquad (345)$$

что означает, что состояние кубита–кутрита является перепутанным. Полученный результат можно было предсказать, так как известно, что матрица плотности (338) задает чистое перепутанное состояние

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+1/2\rangle|+1\rangle + |-1/2\rangle|-1\rangle\Big).$$

Матрица плотности, задающая перепутанное состояние двух кутритов, размерности 9×9, содержит 72 нулевых матричных элемента и 9 матричных элементов, имеющих следующий вид

$$\rho_{11} = \rho_{15} = \rho_{19} = \rho_{51} = \rho_{55} = \rho_{59} = \rho_{91} = \rho_{95} = \rho_{99} = 1/3. \tag{346}$$

Спиновая томограмма может быть вычислена вышеописанным способом при помощи двух 3×3 матриц U и V, заданных соотношениями (340). Матричные элементы матрицы U зависят от углов φ_1 и Θ_1. В результате получаем вектор $\overrightarrow{w}(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$ с 9 компонентами:

$$\begin{aligned}
&w(+1, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2}) = \frac{1}{3}\left|\sum_{j=1}^{3} U_{j1}V_{j1}\right|^2, \qquad w(+1, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}) = \frac{1}{3}\left|\sum_{j=1}^{3} U_{j1}V_{j2}\right|^2;\\
&w(+1, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2}) = \frac{1}{3}\left|\sum_{j=1}^{3} U_{j1}V_{j3}\right|^2, \qquad w(0, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2}) = \frac{1}{3}\left|\sum_{j=1}^{3} U_{j2}V_{j1}\right|^2,\\
&w(0, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}) = \frac{1}{3}\left|\sum_{j=1}^{3} U_{j2}V_{j2}\right|^2,\\
&w(0, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2}) = \frac{1}{3}\left|\sum_{j=1}^{3} U_{j2}V_{j3}\right|^2, \qquad w(-1, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2}) = \frac{1}{3}\left|\sum_{j=1}^{3} U_{j3}V_{j1}\right|^2,\\
&w(-1, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}) = \frac{1}{3}\left|\sum_{j=1}^{3} U_{j3}V_{j2}\right|^2, \qquad w(-1, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2}) = \frac{1}{3}\left|\sum_{j=1}^{3} U_{j3}V_{j3}\right|^2.
\end{aligned} \tag{347}$$

Построим кубитный портрет для данного состояния. Один из четырех–векторов $\overrightarrow{P}(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$ этого портрета имеет компоненты

$$\begin{aligned}
P_1(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) &= w(+1, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2}),\\
P_2(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) &= w(+1, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}) + w(+1, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2})\\
P_3(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) &= w(0, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2}) + w(-1, \overrightarrow{n_1}, +1, \overrightarrow{n_2})\\
P_4(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) &= w(0, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}) + w(0, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2}) + w(-1, \overrightarrow{n_1}, 0, \overrightarrow{n_2}) + w(-1, \overrightarrow{n_1}, -1, \overrightarrow{n_2}).
\end{aligned} \tag{348}$$

Используя формулы (347), (348) и выбирая пары

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{a}, \qquad \overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{b}, \qquad \overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{a}, \qquad \overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{c}$$

и

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{d}, \qquad \overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{b}, \qquad \overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{d}, \qquad \overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{c},$$

получаем 4×4 матрицу (337). Вычисляя модуль следа от произведения матрицы (309) с матрицей (337), находим, что выражение для B имеет вид

$$\begin{aligned} B \;=\; & \frac{1}{2}\Big|\Big[(\cos\Theta_b+1)^2-2\Big](\cos\Theta_a+\cos\Theta_d)+\Big[(\cos\Theta_c+1)^2-2\Big](\cos\Theta_a-\cos\Theta_d) \\ & -\sin^2\Theta_b(\sin\Phi_{ab}\sin\Theta_a+\sin\Phi_{db}\sin\Theta_d)-\sin^2\Theta_c(\sin\Phi_{ac}\sin\Theta_a+\sin\Phi_{dc}\sin\Theta_d)\Big|. \end{aligned} \tag{349}$$

Можно проверить, что для углов

$$\varphi_a=2\pi,\quad \varphi_b=-\frac{\pi}{8},\quad \varphi_c=\frac{\pi}{8},\quad \varphi_d=0,\quad \Theta_a=0,\quad \Theta_b=\frac{\pi}{2},\quad \Theta_c=\frac{\pi}{2},\quad \Theta_d=\frac{\pi}{2}, \tag{350}$$

значение B равно $(1+\sqrt{2})>2$, что соответствует перепутанному состоянию двух кутритов.

4.15 Редукционный критерий сепарабельности состояний двух кудитов

Используя вышеприведенные результаты, сформулируем критерий сепарабельности в общем случае квантовой системы, состоящей из двух частей, основанный на свойствах томограмм сепарабельных состояний двухчастичной системы.

Для простоты, рассмотрим сепарабельное состояния двух кудитов, заданное томограммой (234). Свяжем с этой томограммой совместную функцию распределения вероятности, имеющую четыре неотрицательных значения

$$\begin{aligned} &\tilde{w}(M_1=j_1,M_2=j_2,\vec{n_1},\vec{n_2})=w(j_1,j_2,\vec{n_1},\vec{n_2}),\\ &\tilde{w}(M_1=j_1,M_2=j_2-1,\vec{n_1},\vec{n_2})=\sum_{m_2=-j_2}^{j_2-1}w(j_1,m_2,\vec{n_1},\vec{n_2}),\\ &\tilde{w}(M_1=j_1-1,M_2=j_2,\vec{n_1},\vec{n_2})=\sum_{m_1=-j_1}^{j_1-1}w(m_1,j_2,\vec{n_1},\vec{n_2}),\\ &\tilde{w}(M_1=j_1-1,M_2=j_2-1,\vec{n_1},\vec{n_2})=\sum_{m_1=-j_1}^{j_1-1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2-1}w(m_1,m_2,\vec{n_1},\vec{n_2}), \end{aligned} \tag{351}$$

где M_1 принимает значения j_1 и j_1-1, а M_2 принимает значения j_2 и j_2-1. Мы можем интерпретировать полученное совместное распределение как томограмму двух кубитов. Поэтому, мы можем сказать, что неравенство Белла выполняется для функций распределения вероятности, если начальное состояние двух кудитов является сепарабельным. Мы используем рецепт получения редуцированной совместной функции распределения вероятности путем суммирования вероятностей в начальной функции распределения вероятности с большим числом возможных событий (измерений). Сепарабельность начальных состояний сохраняется при таком суммировании, в том смысле, что если начальная функция распределения вероятности представима в виде выпуклой суммы произведений двух функций распределения вероятности, то и редуцированное распределение также будет представимо в виде выпуклой суммы произведений двух функций распределения вероятности. Данный результат можно сформулировать как редукционный критерий сепарабельности.

Необходимым условием сепарабельности состояний системы, состоящей из двух частей, является свойства сепарабельности редуцированной томограммы состояний. Выполнение неравенств Белла для редуцированной томограммы состояния является необходимым условием сепарабельности изучаемого квантового состояния. Можно дать рецепт исследования сепарабельности данного состояния системы из двух частей. Первым шагом в данном исследовании является получение томограммы состояния. Затем вычисляется редуцированная томограмма путем суммирования по всем событиям, таким образом, чтобы получить томограмму для двух кубитов. На следующем шаге проверяется выполнение неравенства Белла для полученной редуцированной томограммы. Если неравенство Белла нарушено, то начальное состояние является запутанным.

Состояния кудита могут отображаться на функции распределения вероятности. Функции распределения вероятности можно интерпретировать как вектора. Используя эти вектора как столбцы матриц, можно строить из них стохастические и бистохастические матрицы. Как стохастические так и бистохастические матрицы образуют полугруппы. Обратимое преобразование от функций распределения вероятности к бистохастическим матрицам используется для построения звездочного произведения функций распределения вероятности. Для стохастических матриц мы ввели понятие кубитного портрета. Мы показали, что необходимое условие сепарабельности состояния системы, состоящей из двух частей, основано на сепарабельности кубитного портрета. Нарушение неравенства Белла для кубитного портрета состояния системы из двух частей означает, что состояние системы является перепутанным. Мы обсудили примеры перепутанных состояний кубита-кутрита и двух кутритов, основываясь на методе кубитного портрета этих состояний.

Известно, что в квантовой механике верхняя граница нарушения неравенства Белла для двух кубитов равна $2\sqrt{2}$. Возникает естественный вопрос, возможно ли среди функций распределения вероятностей найти четыре распределения, для которых число B будет больше чем $2\sqrt{2}$. На самом деле, существуют такие распределения, например,

$$\begin{aligned}
&P_{\mathrm{I}}^{(a,b)} = 1, \quad P_{\mathrm{II}}^{(a,b)} = P_{\mathrm{III}}^{(a,b)} = P_{\mathrm{IV}}^{(a,b)} = 0, \\
&P_{\mathrm{I}}^{(a,c)} = P_{\mathrm{II}}^{(a,c)} = P_{\mathrm{III}}^{(a,c)} = 0, \quad P_{\mathrm{IV}}^{(a,c)} = 1, \\
&\\
&P_{\mathrm{I}}^{(d,b)} = P_{\mathrm{IV}}^{(d,b)} = \frac{1}{2}, \quad P_{\mathrm{III}}^{(d,b)} = P_{\mathrm{II}}^{(d,b)} = 0, \\
&P_{\mathrm{I}}^{(d,c)} = P_{\mathrm{II}}^{(d,c)} = P_{\mathrm{IV}}^{(d,c)} = 0, \quad P_{\mathrm{III}}^{(d,c)} = 1.
\end{aligned} \tag{352}$$

Для этих четырех распределений получаем, что

$$B = 4 > 2\sqrt{2}. \tag{353}$$

Существенным свойством этих распределений является то, что они не могут быть получены из томограммы двухкубитных состояний. Такие распределения могли бы соответствовать суперкоррелированным состояниям, в которых наблюдаются более сильные корреляции между переменными M_1 и M_2, чем чисто квантовые корреляции, наблюдаемые в перепутанных состояниях. Интересно было бы попробовать получить такие корреляции на эксперименте. Если кому-либо удалось бы на эксперименте получить значение верхней границы нарушения неравенств Белла $B > 2\sqrt{2}$, то это значение было бы связано с корреляциями, которые не соответствуют ни сепарабельным квантовым состояниями, ни перепутанным. Очевидно, что такие корреляции противоречат квантово-механическому описанию состояний. Необходимо отметить, что такая характеристика функций распределения (томограмм) как энтропия Шеннона [81] для спиновых состояний обсуждалась в работах [56, 14]. Линейное преобразование функции распределения томографической вероятности (томограммы кудита) в томограмму кубита и возможность использовать кубитный портрет для нахождения необходимого условия сепарабельности состояния нескольких кудитов исследовались в работе [34], а предварительные оценки такой возможности обсуждались в [78].

5 ГЛАВА. ВЕКТОРА ВЕРОЯТНОСТИ, ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАНТОВОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ И СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ТОМОГРАФИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В данной главе мы обсудим, следуя [35], некоторые неравенства для томограм, которые будем записывать в виде вектора вероятности. Рассмотрим в качестве примеров, следуя [45], томограммы кудита, введем связанный с томографической функцией распределения фотона томографический кумулянт, и исследуем с его помощью негауссовость состояния. В работах [38, 39, 42] в томографическом представлении квантовой механики [9, 10] были обсуждены соотношения неопределенности Трифонова [82, 83], которые мы называем зависящими от состояний соотошениями неопределенности. Данные соотношения неопределенности были представлены в работе [11] в виде интегральных неравенств на оптические томограммы [84, 51, 85]. В данном главе мы рассмотрим другие неравенства, которые можно записать в терминах вектора вероятности и применим полученные неравенства к исследованию состояний фотонов и кудитов, заданных томографическими функциями распределения вероятности в томографическом представлении квантовой механики. Мы рассмотрим полученные Трифоновым [82, 83] новые соотношения неопределенности для произвольных величин в форме неравенств на измеряемую оптическую томограмму. Кроме того, простейшие неравенства, которые можно записать в терминах вектора вероятности, мы используем для получения неравенств на спиновую томографическую функцию распределения вероятности. Вектора вероятности могут быть преобразованы в другие вектора вероятности. Наиболее интересным является семество линейных преобразований функций распределения вероятности. Линейное преобразование функций распределения вероятности описывается матрицами, поэтому в данной главе мы обсудим специфический набор матриц, которые имеют один единичный элемент в столбце, а все остальные элементы в столбце у них равны нулю. Произведение таких матриц является матрицей того же типа. Мы покажем, что все вектора вероятности, полученные в результате линейных преобразований, удовлетворяют специфическим неравенствам на энтропии, связанные с преобразованными векторами вероятности. Другой целью данной главы является обсуждение томографического кумулянта, введенного в работе [45], являющегося характеристикой гауссовости фотонного состояния.

Кроме того, в данной главе, следуя [35], мы обсудим энтропии Шеннона, Реньи и Тцаллиса в кудитных состояниях в вероятностном представлении квантовой механики, рассмотрим связанную с томографической функцией распределения вероятности состояния мультиспиновых систем относительную энтропию, обсудим проблемму перепутанности в этих состояниях.

Квантовые состояния спиновых систем могут задаваться функциями распределения вероятности, которые называются спиновыми томограммами [33], [12]. Для любой функции распределения вероятности можно найти такие характеристики, как энтропия Шеннона [81], энтропия Реньи [86], информация Шеннона (см., например, [87]). Некоторые аспекты томографического подхода к классическим и квантовым частицам были рассмотрены в [25]. Мы детально изучим энтропийные неравенства для квантовых томограмм состояний спиновых систем. Частично эти неравенства обсуждались в [87]. Кроме того, мы обсудим некоторые неравенства для неотрицательных чисел, которые следуют из энтропийных неравенств на томограммы спиновых состояний. Обсудим энтропийные неравенства, связанные с функцией вероятности распределения по числу фотонов в гауссовском состоянии [88], и получим некоторые новые неравенства для полиномов Эрмита.

5.1 Вектора вероятности

Рассмотрим соотношения для функций распределения вероятности, которые рассмотрим как вектора вероятности. Сначала в качестве примера рассмотрим классический объект, который может находиться в четырех различных состояниях a_1,a_2,a_3 и a_4 с вероятностями p_1,p_2,p_3 и p_4, соответственно. Неотрицательные числа p_k, $k = 1, 2, 3, 4$ удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{4} p_k = 1$. Эти числа можно рассматривать как компоненты p_k четырехкомпонентного вектора $\vec{p}$, который будем называть вектором вероятности. Кроме того, эти четыре числа могут рассматриваться как координаты точки на плоскости, на которой область, занятая всеми векторами вероятности называется симплексом. Рассмотрим линейные преобразования векторов вероятности заданные двумя четырехмерными матрицами

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{354}$$

Получаем новый четырехомпонентный вектор вероятности

$$\vec{\wp}^{(1)} = M^{(1)}\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 + p_2 \\ p_3 + p_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\wp}^{(2)} = M^{(2)}\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 + p_3 \\ p_2 + p_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{355}$$

Для данных векторов компоненты $\wp_1^{(1)}$,$\wp_2^{(1)}$ и $\wp_1^{(2)}$,$\wp_2^{(2)}$ являются неотрицательными числами, которые удовлетворяют условию $\wp_1^{(1)} + \wp_2^{(1)} = \wp_1^{(2)} + \wp_2^{(2)} = 1$. Данные пары чисел могут рассматриваться как вероятность результата эксперимента с двумя различными классическими монетками или как результат измерения проекции спинов двух частиц со спином 1/2, причем измеряются проекции спинов $m = +1/2, -1/2$ на два различных направления $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$.

Аналогичную процедуру можно использовать для отображения четырехкомпонентных векторов в двухкомпонентные, что было использовано в [34] при создания кубитного портрета кудитного состояния с целью исследования явления перепутанности (энтанглъмента) кудитных состояний. Все остальные матрицы, дающие в результате преобразования четырехкомпонентные вектора с двумя нулевыми компонентами, могут быть получены из матрицы $M^{(1)}$ всевозможными перестановками строчек и столбцов.

Очевидно, что при перестановке компонент вектора $\vec{p}$, получается другой четырехкомпонентный вектор. Данное преобразование задано набором бистохастических матриц $\tilde{M}_s$, $s = 1, 2, ..., 24$, где

$$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{356}$$

Другие 23 матрицы могут быть получены из матрицы $\tilde{M}_1$ путем всех возможных перестановок столбцов и строк. Существует два специфичсеских типа линейных преобразований векторов вероятности. Один из них осуществляется при помощи бистохастических матриц

$$\tilde{M}_c = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{357}$$

Матрица отображает каждый вектор вероятности $\vec{p}$ на один и тот же вектор со всеми компонентами равными $1/4$, которые являются координатами центра симплекса. Другое преобразование задается стохастической матрицей M_1^{pur}, все строки которой, кроме первой, состоят только из нулевых элементов, и которая удовлетворяет условию

$$(M_1^{pur})^2 = M_1^{pur}. \tag{358}$$

Данная матрица отображает все вектора $\vec{p}$ на один вектор, который является аналогом чистого состояния кудита

$$M_1^{pur}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{359}$$

Еще три матрицы можно получить из матрицы M_1^{pur} перестановкой строк. Таким образом отображения, заданные матрицами M_k^{pur} , $k = (1, 2, 3, 4)$ проектируют вектор $\vec{p}$ на вершины симплекса. Существуют стохастические матрицы $M^{(3)}$, которые отображают четырехкомпонентный вектор вероятности на трехкомпонентный вектор вероятности. Полученный трехкомпонентеный вектор вероятности называется кутритным портретом кудитного состояния. Например,

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{360}$$

осуществляет отбражение $(p_1,p_2,p_3,p_4)\to(p_1+p_2,p_3,p_4,0)$. Остальные матрицы, осуществляющие отображение четырехкомпонентных векторов $\vec{p}$ на соответствующие вектора вероятности с одной нулевой компонентой, могут быть получены из матрицы $M^{(3)}$ всеми возможными перестановками строк и столбцов. Кубитный портрет может быть получен при помощи отображения, осуществляемого другим типом стохастических матриц, а именно, при помощи стохастических матриц, имеющих нулевые элементы в двух строках, например,

$$M_4=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \qquad (361)$$

Она обладает следующим свойством: $M_4M_4=M_1^{pur}$. Получаем отображение $(p_1,p_2,p_3,p_4)\to(p_1+p_2+p_3,p_4,0,0)$. Все остальные матрицы этого типа, задающие кубитный портрет кудитного состояния, могут быть получены из матрицы M_4 всеми возможными перестановками строк и столбцов. Все стохастические матрица M, задающие линейных преобразования векторов вероятности $\vec{p}$, образуют полугруппу. Стохастические матрицы, задающие различные портреты кудитных состояний, образуют подполугруппу набора всех матриц M. Аналогичная конструкция из отображений векторов вероятности может быть построена для линейного пространства любого измерения N. Матрицы, обсужденные в данном главе, отображают вектора вероятности на другие вектора вероятности. Данные матрицы принадлежат полугруппе стохастических матриц. В обычной теории вероятности множество матриц с неотрицательными элементами называется множеством стохастических матриц, если для любого столбца матрицы из этого множества выполняются свойства векторов вероятности, то есть, сумма матричных элементов в любом столбце равна единице. Подмножество множества стохастических матриц, у которых еще и сумма матричных элементов в каждой строке равна единице называется полугруппой бистохастических матриц.

5.2 Энтропия и вероятность

Вектора вероятности могут рассматривать как аргументы функции, которая характеризует степень беспорядка (хаотичность) в системе. Например, энтропия Шеннона имеет вид [81]

$$H(\vec{p}) = -\sum_{k=1}^{4} p_k \ln p_k \equiv -\vec{p} \ln \vec{p}. \tag{362}$$

В случае двухкомпонентных векторов (кубитов) или трехкомпонентных векторов (кутритов) энтропия Шеннона задана соотношением (362), в котором вместо четырехкомпонентных векторов $\vec{p}$ используются двухкомпонентные или трехкомпонентные вектора. Получим для энтропии некоторые неравенства. Любое преобразование M, заданное стохастической матрицей, с матричными элементами равными либо нулю, либо единице, отображающее вектор вероятности с четырьмя ненулевыми элементами на новый вектор с нулевыми компонентами, может только уменьшить энтропию, то есть

$$-M\vec{p} \ln M\vec{p} \leq -\vec{p} \ln \vec{p}. \tag{363}$$

Все 24 матрицы, полученные перестановками столбцов и строк (см. $\tilde{M}_1$ (356)), не уменьшают энтропию Шеннона. Отображение, заданное матрицей $\tilde{M}_c$ увеличивает энтропию до максимального значения $\ln 4$.

Обсудим аналогичные свойства кубитов. Для двухкомпонентного вектора отображение, обсуждаемое выше, задается четырьмя матрицами

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и матрицей

$$M^{(5)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первые две матрицы уменьшают энтропию до нуля. Две матрицы, полученные перестановками столбцов и строк, а именно $M^{(3)}$ и $M^{(4)}$, оставляют энтропию кубита неизменной, а бистохастическая матрица $M^{(5)}$ увеличивает энтропию до максимального значения $\ln 2$.

Среди стохастических матриц M с нулевыми и единичными матричными элементами существует определенное упорядочение. Отметим, что в общем случае $N-$мерного вектора вероятности такие стохастические матрицы содержат только k строчек с нулевыми матричными элементами, обозначим их $M_k^{(N)}$. Для энтропии Шеннона в этом случае можно получить неравенства

$$\begin{aligned}
&-\vec{p}\ln\vec{p} \geq -M_1^{(N)}\vec{p}\ln M_1^{(N)}\vec{p} \geq -M_2^{(N)}\vec{p}\ln M_2^{(N)}\vec{p} \geq ... \\
&\geq -M_k^{(N)}\vec{p}\ln M_k^{(N)}\vec{p} \geq ... \geq -M_{(N-1)}^{(N)}\vec{p}\ln M_{(N-1)}^{(N)}\vec{p}.
\end{aligned} \tag{364}$$

В частности, в случае кутрита для вектора вероятности $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ выполняется неравенство для неотрицательных чисел p_k

$$-p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - p_3 \ln p_3 \geq -(p_1 + p_2)\ln(p_1 + p_2) - p_3 \ln p_3. \tag{365}$$

Для произвольного $N-$мерного вектора $\vec{p}$ получаем

$$-\sum_{k=1}^{N} p_k \ln p_k \geq -\sum_{k=3}^{N} p_k \ln p_k - (p_1 + p_2)\ln(p_1 + p_2). \tag{366}$$

В связи с симметрией энтропии Шеннона относительно перестановок получаем уменьшение энтропии при сложении любых двух компонент вектора $\vec{p}$.

Для любой совместной функции распределения вероятности состояния составной системы, состоящей из двух подсистем, выполняется условие субаддитивности. Рассмотрим пример такого распределения для двух классических монеток. Четырехкомпонентный вектор вероятности $\vec{p}$ для такого распределения имеет следующие индексы

$$p_1 = p_{++}, \quad p_2 = p_{+-}, \quad p_3 = p_{-+}, \quad p_4 = p_{--}. \tag{367}$$

Можно такkже сказать, что мы имеем вероятность для двух проекций спина быть сонаправленными или противонаправленными направленрию оси $z-$. Рассматривая энтропии Шеннона двух независимых подсистем, мы получаем неравенства для энтропии

$$\begin{aligned}
&[-(p_1 + p_2)\ln(p_1 + p_2) - (p_3 + p_4)\ln(p_3 + p_4)] + [-(p_1 + p_3)\ln(p_1 + p_3) \\
&-(p_2 + p_4)\ln(p_2 + p_4)] \geq -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - p_3 \ln p_3 - p_4 \ln p_4.
\end{aligned} \tag{368}$$

Очевидно, что аналогичные неравенства могут быть получены из (368) перестановкой чисел $1, 2, 3, 4$. В этом случае меняется смысл неравенства для энтропии подсистемы. Аналогично можно получить неравенство

$$[-p_1 \ln p_1 - (p_2 + p_3 + p_4) \ln(p_2 + p_3 + p_4)] + [-p_2 \ln p_2 - p_3 \ln p_3$$
$$-(p_1 + p_4) \ln(p_1 + p_4)] \geq -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - p_3 \ln p_3 - p_4 \ln p_4. \qquad (369)$$

Это неравенство эквивалентно условию субаддитивности шестикомпонентного вектора вероятности $\vec{p}$ с двумя нулевыми первыми компонентами, который мы рассматриваем как вероятность состояния кубит-кутритной системы с обозначением для вектора $\vec{q}$ следующего вида

$$q_1 \equiv q_{+(1)} = 0,\ q_2 \equiv q_{+(0)} = 0,\ q_3 \equiv q_{+(-1)} = p_1,\ q_4 \equiv q_{-(1)} = p_2,$$

$$q_5 \equiv q_{-(0)} = p_3,\ q_6 \equiv q_{-(-1)} = p_4.$$

Кубит имеет индекс $\pm$, и кутрит имеет индекс $+1,\ \ 0,\ -1$. Вычисляя энтропию Шеннона для совместной функции распределения вероятности, получаем неравенство (369). Очевидно, что из данного неравенства получаются другие неравенства путем перестановок индексов $1, 2, 3, 4$.

Для систем состоящих из двух частей взаимная информация, которая равна разности левой и правой части неравенства (369), имеет вил

$$I = p_4 \ln p_4 - (p_2 + p_3 + p_4) \ln(p_2 + p_3 + p_4) - (p_1 + p_4) \ln(p_1 + p_4). \qquad (370)$$

Информация, как известно, неотрицательна, $I \geq 0$. Можно получить неотрицательные аналоги информации, применяя перестановки в вышеприведенном соотношении.

5.3 Томограммы состояний кудитов и кубитов

Вектор вероятности квантового состояния спина или кудита определяется через матрицу плотности ρ состояния. Унитарная томограмма состояния кудита имеет вид

$$w(m, u) = \langle m | u \rho u^\dagger | m \rangle. \qquad (371)$$

Данная томограмма была введена в работе [75]. Здесь $m = -j, -j + 1, ..., j - 1, j$, $j = 0, 1/2, 1, 3/2, ...$ Чистое состояние $|m\rangle$ удовлетворяет условию на собственные вектора

$$\hat{J}_z|m\rangle = m|m\rangle, \tag{372}$$

где $\hat{J}_z$ проекция спина на ось z. Матрица u является унитарной матрицей размерности $(2j+1)$x$(2j+1)$. Если матрица u является матрицей неприводимого представления группы $SU(2)$, то унитарная томограмма $w(m,u)$ превращается в функцию $w(m,\vec{n})$, где $\vec{n}$ - это единичный трехмерный вектор, определяющий точку на сфере Пуанкаре S^2. В этом случае томограмму называют спиновой томограммой. Унитарная томограмма и спиновая томограмма удовлетворяют условию неотрицательности $w(m,u) \geq 0$ и условию нормировки

$$\sum_{m=-j}^{j} w(m,u) = \sum_{m=-j}^{j} w(m,\vec{n}) = 1. \tag{373}$$

Матрица плотности может быть восстановлена, если известна томограмма $w(m,\vec{n})$ или известна томограмма $w(m,u)$. В случае двух кудитов унитарная томограмма состояния системы, состоящей из двух частей, связана с оператором плотности $\rho(1,2)$ следующим образом

$$w(m_1,m_2,u) = \langle m_1 m_2|u\rho(1,2)u^\dagger|m_1 m_2\rangle. \tag{374}$$

Проекция спина m_k

$$-j_k \leq m_k \leq j_k, \quad k=1,2, \tag{375}$$

а u - унитарная матрица размерности $(2j_1+1)(2j_2+1)$x$(2j_1+1)(2j_2+1)$. Если $u = u_1 \bigotimes u_2$, где u_k унитарные матрицы размерности $(2j_k+1)$x$(2j_k+1)$, которые являются матрицами неприводимого представления группы $SU(2)$x$SU(2)$, то унитарные томограммы $w(m_1,m_2,u)$ превращаются в спиновые томограммы $w(m_1,m_2,\vec{n_1},\vec{n_2})$, где вектора $\vec{n}_k$ являются единичными векторами, задающим точки на сферах Пуанкаре. Матрица плотности $\rho(1,2)$ может быть восстановлена, если известна томограмма $w(m_1,m_2,\vec{n_1},\vec{n_2})$ или томограмма $w(m_1,m_2,u)$ (см., например, [10]). Унитарная и спиновая томограммы могут быть представлены в виде векторов вероятности. Например, в случае кудитных состояний, заданных матрицей плотности ρ с неотрицательными собственными значениями $\rho_1,\rho_2,...,\rho_{2j+1}$ и нормированными собственными векторами $\vec{u}_{01}, \vec{u}_{02}, ..., \vec{u}_{02j+1}$, вектор томографическрой вероятности $\vec{w}(u)$ с компонентами $w(m,u)$ имеет вид

$$\vec{w}(u) = |uu_0|^2 \vec{\rho}. \tag{376}$$

Здесь $\vec{\rho}$ - вектор столбец с неотрицательными компонентами ρ_k, $k = 1, 2, ..., 2j+1$. Столбцы унитарной матрицы u_0 - это вектора $\vec{u}_{ok}$. По определению матричные элементы матрицы $|A|^2$ в случае любой матрицы A равны $|A|^2_{jk} = |A_{jk}|^2$. Обсудим неравенства, которым удовлетворяет вектор томографической вероятности кудитного состояния. Применяя неравентсво (364) к томографическрому вектору вероятности $\vec{w}(u)$ кудитного состояния, получаем

$$\begin{aligned} &-\vec{w}(u)\ln\vec{w}(u) \geq -M_1^{(2j+1)}\vec{w}(u)\ln M_1^{(2j+1)}\vec{w}(u) \geq -M_2^{(2j+1)}\vec{w}(u)\ln M_2^{(2j+1)}\vec{w}(u) \\ &\geq ... \geq -M_k^{(2j+1)}\vec{w}(u)\ln M_k^{(2j+1)}\vec{w}(u) \geq ... \geq -M_{(2j-1)}^{(2j+1)}\vec{w}(u)\ln M_{(2j-1)}^{(2j+1)}\vec{w}(u). \end{aligned} \tag{377}$$

Эти неравенства выполняются для любой унитарной матрицы u. Кроме того для любой матрицы u, являющейся матрицей неприводимого представления группы SU(2), соответствующие неравенства выполняются для любого единичного вектора $\vec{n}$, определяющего точку на сфере Пуанкаре. Так как минимум энтропии Шеннона, соответствующий спиновому томографическому вектору вероятности $\vec{w}(u)$ при $u = u_0^{-1}$, равен энтропии фон Неймана, получаем неравенство

$$\begin{aligned} &S_{VN} \geq -M_1^{(2j+1)}\vec{w}(u_0^{-1})\ln M_1^{(2j+1)}\vec{w}(u_0^{-1}) \geq -M_2^{(2j+1)}\vec{w}(u_0^{-1})\ln M_2^{(2j+1)}\vec{w}(u_0^{-1}) \\ &\geq ... \geq -M_k^{(2j+1)}\vec{w}(u_0^{-1})\ln M_k^{(2j+1)}\vec{w}(u_0^{-1}) \geq ... \geq -M_{(2j-1)}^{(2j+1)}\vec{w}(u_0^{-1})\ln M_{(2j-1)}^{(2j+1)}\vec{w}(u_0^{-1}). \end{aligned} \tag{378}$$

Итак, энтропия фон Неймана является верхней границей для всех энтропий связанных с томографическими векторами вероятности портрета в точке $u = u_0^{-1}$. Очевидно, что для чистых состояний энтропия фон Неймана равна нулю. Энтропия в неравенстсве (377) неотрицательна, следовательно, все эти энтропии равны нулю при $u = u_0^{-1}$. Обсудим выражение для информации I (370), в котором мы рассмотрим в качестве вектора вероятности томограмму кудитного состояния, соответствующего $j = 3/2$. Неотрицательность информации $I \geq 0$ приводит к неравенству

$$w(-\frac{3}{2},u)\ln w(-\frac{3}{2},u) - [w(\frac{1}{2},u) + w(-\frac{1}{2},u) + w(-\frac{3}{2},u)]\ln[w(\frac{1}{2},u)$$

$$+w(-\frac{1}{2},u)+w(-\frac{3}{2},u)]-[w(\frac{3}{2},u)+w(-\frac{3}{2},u)]\ln[w(\frac{3}{2},u)+w(-\frac{3}{2},u)]\geq 0. \tag{379}$$

Это означает, что для точки u_0^{-1} мы получаем условие положительности томографической информации при заданной энтропии фон Неймана. Физический смысл этого неравенства требует дополнительного прояснения. Из условие неотрицательности информации в случае вектора вероятности состояния двух кубитов (370) получаем следующее неравенство

$$\begin{aligned}
&w(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},u)\ln w(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},)-[w(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},u)+w(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},u)+w(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},u)]\\
&\times\ln[w(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},u)+w(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},u)+w(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},u)]\\
&-[w(\frac{1}{2},\frac{1}{2},u)+w(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},u)]\ln[w(\frac{1}{2},\frac{1}{2},u)+w(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},u)]\geq 0.
\end{aligned} \tag{380}$$

Перепутанное чистое состояние системы двух кубитов нарушает неравенства Белла [20]. Для такого состояния можно рассмотреть неравенство для информации, которое приводит к некоторым соотношениям для заданной вероятности $w(m_1,m_2,\vec{n}_1,\vec{n}_2)$. Возможно существует связь между нарушением неравенства Белла для унитарной матрицы в частном случае $u=u_1\bigotimes u_2$, соответствующей направлениям $\vec{n}_1,\vec{n}_2$, и неравенством для информации.

5.4 Томографический кумулянт

Любое распределение вероятности характеризуется различными специальными числами, такими как энтропия Шеннона, моменты случайных величин и так далее. Одно из таких чисел - это кумулянт. Для заданного распределения вероятности $W(X)$ непрерывной переменной X кумулянт определется следующим образом

$$g(t)=\ln\langle\exp(tX)\rangle=\sum_{n=2}^{n}K_n\frac{t^n}{n!}, \tag{381}$$

где

$$\langle\exp(tX)\rangle=\int W(X)\exp(tX)dx, \tag{382}$$

кумулянты K_n это коэффициенты в разложении. В вероятностном представлении квантовой механики состояние описывается симплектической томограммой $M(X,\mu,\nu)$, которая является функцией распределения вероятности гомодинной квадратуры X и зависит от действительных параметров μ и ν. Введем томографические кумулянты $K_n(\mu,\nu)$, которые определяются соотношением

$$g(t,\mu,\nu) = \ln \int M(X,\mu,\nu)\exp(tX)dX = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{K_n(\mu,\nu)}{n!}. \tag{383}$$

Для оптической томограммы $w(X,\Theta) = M(X,\cos\Theta,\sin\Theta)$ кумулянты задаются производящей функцией

$$g(t,\Theta) = \ln \int w(X,\Theta)\exp(tX)dX = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{K_n(\Theta)}{n!}. \tag{384}$$

Введем функцию $C(t,\Theta)$, которую мы используем как характеристику гауссовости состояния в виде

$$\begin{aligned} C(t,\Theta) &= \ln \int w(X,\Theta)\exp(tX)dX - t\int Xw(X,\Theta)dX \\ &-\frac{t^2}{2}[\int X^2 w(X,\Theta)dX - (\int Xw(X,\Theta)dX)^2]. \end{aligned} \tag{385}$$

В экспериментах по гомодинному детектированию фотонов измеряется оптическая томограмма $w(X,\Theta)$. Для гауссовых фотонных состояний введенная функция должна быть равна нулю. Отклонение от нуля функции параметра t и фазы локального осциллятора Θ дает информацию о степени негауссовости квантового состояния. Эти характеристики легко могут быть получены из экспериментальных данных при гомодинном детектировании. Можно ввести параметр негауссовости

$$\mathrm{Ch} = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} C(t,\Theta)e^{-t}\,dt\,d\Theta.$$

Для гауссовых состояний этот параметр равен нулю.

5.5 Энтропия и информация как характеристика кубитных состояний

Состояния кубита в обычной квантовой механики определяются при помощи 2x2-матрицы

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}. \tag{386}$$

Матрица (589) эрмитова

$$\rho^{\dagger} = \rho, \tag{387}$$

то есть

$$\rho_{11} = \rho_{11}^{*}, \rho_{22} = \rho_{22}^{*}, \rho_{21} = \rho_{12}^{*}. \tag{388}$$

Матрица плотности неотрицательна, следовательно

$$\rho_{11} \geq 0, \rho_{22} \geq 0, \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} \geq 0. \tag{389}$$

Свойство (592) означает, что собственные значения матрицы плотности λ_1 и λ_2 - это неотрицательные числа. Секулярное уравнение имеет вид

$$(\rho_{11} - \lambda)(\rho_{22} - \lambda) - \rho_{12}\rho_{21} = 0 \tag{390}$$

или

$$\lambda^2 - \lambda(\rho_{11} + \rho_{22}) - \rho_{12}\rho_{21} + \rho_{11}\rho_{22} = 0. \tag{391}$$

След матрицы плотности равен единице,

$$\rho_{11} + \rho_{22} = 1. \tag{392}$$

Получаем, что собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21})} \tag{393}$$

удовлетворяют условию неотрицательности

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{4} - det\rho}. \tag{394}$$

Детерминант удовлетворяет неравенству

$$\rho_{11}\rho_{22} - \mid \rho_{12} \mid \mid^2 \leq \frac{1}{4}. \tag{395}$$

В [33] томографическая вероятность $w(m,u)$ состояния кубита была введена в следующем виде

$$w(m,u) = \langle m | u\rho u^{\dagger} | m \rangle. \tag{396}$$

Здесь u - унитарная 2x2-матрица

$$u = \left(\begin{array}{cc} \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} & \sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} \\ -\sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{-i(\varphi+\psi)}{2}} & \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{-i(\varphi+\psi)}{2}} \end{array} \right). \tag{397}$$

Магнитное квантовое число m принимает два значения $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. Вероятность зависит от двух дискретных случайных переменых $m = \pm\frac{1}{2}$ и параметров θ, φ, ψ (углы Эйлера). Параметризуем унитарную матрицу с комплексными матричными элементами

$$u = \left(\begin{array}{cc} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{array} \right). \tag{398}$$

Матричные элементы удовлетворяют условиям

$$| u_{11} |^2 + | u_{12} |^2 = | u_{21} |^2 + | u_{22} |^2 = | u_{11} |^2 + | u_{21} |^2 = | u_{12} |^2 + | u_{22} |^2 = 1 \tag{399}$$

и условиям ортогональности

$$u_{11} u_{21}^* + u_{12} u_{22}^* = u_{11} u_{12}^* + u_{21} u_{22}^* = 0. \tag{400}$$

Условия (399), (603) следуют из свойств унитарности матрицы u, то есть

$$u u^\dagger = u^\dagger u = 1. \tag{401}$$

Томографическая вероятность (599) может быть описана вектором-столбцом вероятности

$$\vec{w}(u) = \left(\begin{array}{c} w(+\frac{1}{2}, u) \\ w(-\frac{1}{2}, u) \end{array} \right). \tag{402}$$

Два собственных вектора $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ матрицы плотности удовлетворяют уравнениям

$$u \vec{u_1} = \lambda_1 \vec{u_1}, u \vec{u_2} = \lambda_2 \vec{u_2}. \tag{403}$$

Эти вектора нормированы и ортогональны, то есть для векторов

$$\vec{u_1} = \left(\begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \end{array} \right), \vec{u_2} = \left(\begin{array}{c} a_2 \\ b_2 \end{array} \right) \tag{404}$$

получаем условия нормировки

$$| a_1 |^2 + | b_1 |^2 = | a_2 |^2 + | b_2 |^2 = 1 \tag{405}$$

и условие их ортогональности

$$a_1^* a_2 + b_1^* b_2 = 0. \tag{406}$$

Введем унитарную матрицу

$$u_0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{407}$$

Из выполнения условий (405), (406), получаем условие унитарности

$$u_0 u_0^\dagger = u_0^\dagger u_0 = 1. \tag{408}$$

Число a_1 можно записать в виде функции от элементов матрицы плотности

$$a_1 = \sqrt{\frac{\mid \rho_{12} \mid^2}{\mid \rho_{12} \mid^2 + (\lambda_1 - \rho_{11})^2}}. \tag{409}$$

Число a_2 можно записать в виде другой функции от элементов матрицы плотности

$$a_2 = \sqrt{\frac{\mid \rho_{12} \mid^2}{\mid \rho_{12} \mid^2 + (\lambda_2 - \rho_{11})^2}}. \tag{410}$$

Числа b_1 и b_2 заданы формулами

$$b_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2} - \rho_{11}}{\rho_{12}} a_{1,2}. \tag{411}$$

Рассмотрим матрицу плотности, у которой $\rho_{12} \neq 0$. Матрица плотности ρ представима в виде произведения

$$\rho = u_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} u_0^{-1} = u_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} u_0^\dagger. \tag{412}$$

Томограмма (599) может быть записана в виде

$$w(m, u) = \langle m \mid u u_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} u_0^\dagger u^\dagger \mid m \rangle. \tag{413}$$

Получаем, что вероятности спиновых состояний с различными проекциями спина могут быть выражены через собственные значения и собственные вектора матрицы плотности

$$w(+\frac{1}{2}, u) = \mid (u u_0)_{11} \mid^2 \lambda_1 + \mid (u u_0)_{12} \mid^2 \lambda_2; \tag{414}$$

$$w(-\frac{1}{2},u) =\mid (uu_0)_{21}\mid^2 \lambda_1 + \mid (uu_0)_{22}\mid^2 \lambda_2. \qquad (415)$$

Данные формулы могут быть представлены в виде соотношения связывающего вектора вероятности

$$\vec{w}(u) = M\vec{\Lambda}, \qquad (416)$$

где вектор $\vec{\Lambda}$ состоит из неотрицательных чисел λ_1 и λ_2

$$\vec{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad (417)$$

для которого получаем условие нормировки

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1. \qquad (418)$$

Матрица M является бистохастической 2x2-матрицей, сконструированной из собственных векторов матрицы плотности

$$M = \begin{pmatrix} \mid (uu_0)_{11}\mid^2 & \mid (uu_0)_{12}\mid^2 \\ \mid (uu_0)_{21}\mid^2 & \mid (uu_0)_{22}\mid^2 \end{pmatrix}. \qquad (419)$$

Такая форма вектора томографической вероятности состояний кубита была найдена в [90].

5.6 Относительная энтропия

Рассмотри два распределения вероятности. Для простоты мы рассмотрим распределения для "монеток", то есть у нас существуют только две возможности; монетка вверх или монетка вниз. Такое распределение вероятности задается двумя положительными числами x_1 и x_2,

$$1 \geq x_1 \geq 0, \quad 1 \geq x_2 \geq 0; \qquad (420)$$

$$x_1 + x_2 = 1. \qquad (421)$$

Получаем распределение вероятности, которое описывается вектором вероятности

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \qquad (422)$$

Другое распределение вероятности описывается вектором вероятности

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \tag{423}$$

с неотрицательными компонентами

$$1 \geq p_1 \geq 0; \quad 1 \geq p_2 \geq 0; \tag{424}$$

и

$$p_1 + p_2 = 1. \tag{425}$$

Энтропия Шэннона, связанная с первым распределением, равна

$$H_{\vec{x}} = -x_1 \ln x_1 - x_2 \ln x_2 = -\sum_{k=1}^{2} x_k \ln x_k. \tag{426}$$

Энтропия Шэннона, связанная со вторым распределением, имеет вид

$$H_{\vec{p}} = -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 = -\sum_{k=1}^{2} p_k \ln p_k. \tag{427}$$

Относительная энтропия определяется следующим образом

$$H(\vec{p}|\vec{x}) = p_1 \ln \frac{p_1}{x_1} + p_2 \ln \frac{p_2}{x_2}. \tag{428}$$

Значение относительной энтропии показывает насколько близки друг к другу рассматриваемые распределения вероятности, то есть она играет роль расстояния между распределениями. Докажем, что относительная энтропии всегда неотрицательна

$$H(\vec{p}|\vec{x}) \geq 0. \tag{429}$$

Чтобы доказать это неравенство, докажем что экстремум функции $H(\vec{p}|\vec{x})$, рассматриваемый для фиксированного распределения $\vec{p}$, существует в случае выполнения векторного равенства

$$\vec{x} = \vec{p}. \tag{430}$$

Чтобы найти экстремум, учтем условие нормировки распределения вероятности (421), и используем обозначения

$$x_1 = x, \quad x_2 = 1 - x; \quad p_1 = p, \quad p_2 = 1 - p; \tag{431}$$

и

$$H(\vec{p}|\vec{x}) = F(x) = p\ln\frac{p}{x} + (1-p)\ln\frac{1-p}{1-x} \tag{432}$$

и решим уравнение

$$\frac{dF(x)}{dx} = -\frac{p}{x} + \frac{1-p}{1-x} = 0. \tag{433}$$

Уравнение (433) приводит к уравнению

$$\frac{p}{x} = \frac{1-p}{1-x}. \tag{434}$$

Решение этого уравнения

$$x = p \tag{435}$$

приводит к значению экстремума, заданного формулой (430). Так как вторая производная положительна

$$\frac{d^2F(x=p)}{dx^2} = (\frac{p}{x^2} + \frac{1-p}{(1-x)^2})_{x=p} = \frac{1}{p(1-p)} > 0, \tag{436}$$

то экстремум является минимумом для относительной энтропии (428). Это означает, что для всех распределений вероятности описываемых вектором $\vec{x}$, который не совпадает с вектором $\vec{p}$, относительная вероятность (428) положительна. Относительная энтропия показывает, как близки одно с другим распределения вероятности $\vec{p}$ и $\vec{x}$. Для распределения вероятности с тремя выходными данными получаем вектора вероятности

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \tag{437}$$

Можно использовать следующие соотношения

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2, \quad p_3 = 1 - p_1 - p_2. \tag{438}$$

Относительная энтропия определяется следующим образом

$$H(\vec{p}|\vec{x}) = p_1\ln\frac{p_1}{x_1} + p_2\ln\frac{p_2}{x_2} + p_3\ln\frac{p_3}{x_3}. \tag{439}$$

Покажем, что функция

$$F(x_1, x_2) = p_1 \ln \frac{p_1}{x_1} + p_2 \ln \frac{p_2}{x_2} + (1 - p_1 - p_2) \ln \frac{1 - p_1 - p_2}{1 - x_1 - x_2} \tag{440}$$

имеет минимум в точке $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$. На самом деле, уравнение на экстремум

$$\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \tag{441}$$

приводит к системе двух линейных уравнений

$$-\frac{p_1}{x_1} + \frac{1 - p_1 - p_2}{1 - x_1 - x_2} = 0, \tag{442}$$

$$-\frac{p_2}{x_2} + \frac{1 - p_1 - p_2}{1 - x_1 - x_2} = 0. \tag{443}$$

Эта система имеет очевидное решение

$$x_1 = p_1, \quad x_2 = p_2. \tag{444}$$

Из-за единственности решения системы двух линейных уравнений получаем, что очевидное решение (444) задает точку экстремума $\vec{x} = \vec{p}$ или

$$x_1 = p_1, \quad x_2 = p_2, \quad x_3 = p_3. \tag{445}$$

Так как вторые производные обсуждаемых функций имеют вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(\vec{p}) = \frac{p_1 + p_3}{p_1 p_3}; \tag{446}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2}(\vec{p}) = \frac{p_2 + p_3}{p_2 p_3}; \tag{447}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{p}) = \frac{1}{p_3}, \tag{448}$$

получаем для симметричной матрицы, вычисленной в точке $\vec{p}$

$$F_{ij}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}(\vec{p}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{p}) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{p}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2}(\vec{p}) \end{pmatrix} \tag{449}$$

условие положительности

$$det F_{ij}(\vec{p}) = \frac{1}{p_1 p_2 p_3} \geq 0. \tag{450}$$

Вместе с положительностью главных миноров это означает, что минимум функции (440) находится в точке $\vec{x} = \vec{p}$. Минимальность данной функции означает неотрицательность относительной энтропии (439). Аналогично можно рассмотреть многомерные вектора вероятности.

Энтропия Реньи зависит от параметра q и задается соотношением [86]

$$R_q(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{1-q} \ln(x_1^q + x_2^q). \tag{451}$$

Когда $q \to 1$ энтропия Реньи переходит в энтропию Шэннона, а именно,

$$\lim_{q \to 1} R_q(\vec{x}) = H_{\vec{x}}. \tag{452}$$

Существует другая энтропия зависящая от дополнительных параметров, она называется энтропией Тцаллиса [89]

$$S_q(\vec{x}) = \frac{1 - x_1^q - x_2^q}{q-1}. \tag{453}$$

Эта энтропия обладает следующим свойством

$$\lim_{q \to 1} S_q(\vec{x}) = H_{\vec{x}}. \tag{454}$$

Относительная энтропия Реньи определяется соотношением

$$R_q(\vec{p}|\vec{x}) = p_1 \ln_q \frac{p_1}{x_1} + p_2 \ln_q \frac{p_2}{x_2}. \tag{455}$$

Здесь q-деформированная экспонента задается равенством

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, x > 0, q > 0. \tag{456}$$

Последняя функция для параметра деформации $q = 1$ равна

$$\lim_{q \to 1} \ln_q x = \ln x. \tag{457}$$

Можно доказать неравенство

$$R_q(\vec{p}|\vec{x}) \geq 0. \tag{458}$$

При параметре деформации q равном единице относительная энтропия Реньи переходит в относительную энтропию Шэннона. При использовании томографических векторов вероятности для кубитных состояний аналогичных использованным для распределения монеток, мы получаем информационные характеристики квантовых состояний, такие как энтропия Шэннона, энтропия Реньи, относительная энтропия, относительная энтропия Реньи, энтропия Тцаллиса вместе с неравенствами для соответствующих энтропий.

5.7 Условие субаддитивности

Используя неотрицательность относительной энтропии, мы можем доказать неравенство, которое называется условием субаддитивности. Рассмотрим совместную функцию распределения вероятности двух событий, обозначенных m_1 и m_2

$$w(m_1, m_2) \geq 0; \tag{459}$$

$$\sum_{m_1 m_2} w(m_1, m_2) = 1. \tag{460}$$

Получаем для маргинальных распределений вероятности

$$W_1(m_1) = \sum_{m_2} w(m_1, m_2), \tag{461}$$

$$W_2(m_2) = \sum_{m_1} w(m_1, m_2). \tag{462}$$

Кроме того, получаем три энтропии Шэннона

$$H_{12} = -\sum_{m_1 m_2} w(m_1, m_2) \ln w(m_1, m_2); \tag{463}$$

$$H_1 = -\sum_{m_1} W_1(m_1) \ln W_1(m_1); \tag{464}$$

$$H_2 = -\sum_{m_2} W_2(m_2) \ln W_2(m_2). \tag{465}$$

Докажем неравенство

$$H_{12} \leq H_1 + H_2. \tag{466}$$

Число

$$I = H_1 + H_2 - H_{12} \tag{467}$$

называется взаимная информация. Это означает, что неравенство (466) эквивалентно условию, что взаимная информация является неотрицательной величиной

$$I \geq 0. \tag{468}$$

Для того, чтобы доказать условие субаддитивности, построим распределение вероятности

$$P(m_1, m_2) = W_1(m_1)W_2(m_2), \tag{469}$$

которое описывает события в первой и второй подсистемах без корреляций между ними. Это означает, что

$$\sum_{m_1 m_2} f(m_1)\chi(m_2)P(m_1, m_2) = \langle f(m_1)\chi(m_2)\rangle_p \tag{470}$$

равно

$$\langle f(m_1)\rangle_p \langle \chi(m_2)\rangle_p = (\sum_{m_1 m_2} \chi(m_1)P(m_1, m_2))(\sum_{m_1 m_2} f(m_2)P(m_1, m_2)). \tag{471}$$

Для функции распределения общего вида $w(m_1, m_2)$, которая не факторизуется, средние значения

$$\langle f(m_1)\rangle_w = \sum_{m_1 m_2} f(m_1)w(m_1, m_2) = \langle f(m_1)\rangle_p; \tag{472}$$

$$\langle \chi(m_2)\rangle_w = \sum_{m_1 m_2} \chi(m_2)w(m_1, m_2) = \langle \chi(m_2)\rangle_p \tag{473}$$

равны средним значениям вычисленным при помощи распределения вероятности (469), но в данном случае присутствуют корреляции, так как

$$\langle f(m_1)\chi(m_2)\rangle_w \neq \langle f(m_1)\rangle_w \langle \chi(m_2)\rangle_w. \tag{474}$$

Наличие корреляций означает слегка больший порядок в системе, чем в случае распределений без корреляций. Условие субаддитивности как раз и описывает этот факт. На самом деле мы используем условие неотрицательности относительной энтропии

$$\sum_{m_1 m_2} w(m_1, m_2) \ln \frac{w(m_1, m_2)}{P(m_1, m_2)} \geq 0. \tag{475}$$

Из-за (469) получаем

$$\sum_{m_1 m_2} w(m_1, m_2) \ln w(m_1, m_2) - \sum_{m_1 m_2} w(m_1, m_2) \ln W_1(m_1, m_2)$$
$$- \sum_{m_1 m_2} w(m_1, m_2) \ln W_2(m_1, m_2) \geq 0 \tag{476}$$

или

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{m_1}(\sum_{m_2} w(m_1,m_2))\ln W_1(m_1) - \sum_{m_2}(\sum_{m_1} w(m_1,m_2))\ln W_2(m_2) \\
&\geq -\sum_{m_1 m_2} w(m_1,m_2))\ln w(m_1,m_2).
\end{aligned} \tag{477}
$$

Используя определение для распределений (461), (462) и энтропий (463)-(465), перепишем неравенство в следующем виде

$$
H(1) + H(2) \geq H(1,2). \tag{478}
$$

Оно эквивалентно неравенствам (466) и (468).

5.8 Условие сильной субаддитивности

Рассмотрим совместную функцию распределения вероятности $w(m_1, m_2, m_3)$ с тремя различными типами событий. Функция распределения вероятности определяет три маргинальных распределения (распределения вероятности)

$$
W_{12}(m_1,m_2) = \sum_{m_3} w(m_1,m_2,m_3); \tag{479}
$$

$$
W_{23}(m_2,m_3) = \sum_{m_1} w(m_1,m_2,m_3); \tag{480}
$$

$$
W_2(m_2) = \sum_{m_1} W_{12}(m_1,m_2) = \sum_{m_3} W_{23}(m_2,m_3). \tag{481}
$$

Используя распределения (479)-(481) построим совместную функцию распределения вероятности

$$
P(m_1,m_2,m_3) = W_{12}(m_1,m_2)W_2^{-1}(m_2)W_{23}(m_2,m_3). \tag{482}
$$

Рассмотрим случай, когда $W(m_2)$ не равно нулю. На самом деле, функция $P(m_1, m_2, m_3)$ удовлетворяет условию неотрицательности

$$
P(m_1,m_2,m_3) \geq 0 \tag{483}
$$

и нормировки

$$
\sum_{m_1 m_2 m_3} P(m_1,m_2,m_3) = 1. \tag{484}
$$

Условия (483)-(484) следуют из условия (481) и условия нормировки для распределения (480)

$$\sum_{m_2 m_3} W_{23}(m_2, m_3) = 1. \tag{485}$$

Применим условие положительности относительной энтропии к распределениям $w(m_1, m_2, m_3)$ и $P(m_1, m_2, m_3)$, получаем неравенство

$$\sum_{m_1 m_2 m_3} w(m_1, m_2, m_3) \ln \frac{w(m_1, m_2, m_3)}{P(m_1, m_2, m_3)} \geq 0. \tag{486}$$

Используя (482), получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1 m_2 m_3} w(m_1, m_2, m_3)[(\ln w(m_1, m_2, m_3) + \ln W_2(m_2)) \\ &- \ln W_{12}(m_1, m_2) - \ln W_{23}(m_2, m_3)] \geq 0. \end{aligned} \tag{487}$$

Первый член дает энтропию

$$-H(1,2,3) = \sum_{m_1 m_2 m_3} w(m_1, m_2, m_3) \ln w(m_1, m_2, m_3) \tag{488}$$

второй член дает энтропию

$$-H(2) = \sum_{m_1 m_2 m_3} w(m_1, m_2, m_3) \ln W_2(m_2) = \sum_{m_2} W_2(m_2) \ln W_2(m_2). \tag{489}$$

Два других члена дают энтропии

$$\begin{aligned} &- \sum_{m_1 m_2 m_3} w(m_1, m_2, m_3) \ln W_{12}(m_1, m_2) = \\ &- \sum_{m_1 m_2} W_{12}(m_1, m_2) \ln W_{12}(m_1, m_2) = H(1,2) \end{aligned} \tag{490}$$

и

$$\begin{aligned} &- \sum_{m_1 m_2 m_3} w(m_1, m_2, m_3) \ln W_{23}(m_2, m_3) = \\ &- \sum_{m_2 m_3} W_{23}(m_2, m_3) \ln W_{23}(m_2, m_3) = H(2,3). \end{aligned} \tag{491}$$

Неравенство (486) приводит к условию сильной субаддитивности

$$H(1,2,3) + H(2) \leq H(1,2) + H(2,3). \tag{492}$$

5.9 Некоторые неравенства для положительных чисел и функций

Условия положительности энтропии Шеннона, относительной энтропии, субаддитивности и сильной субаддитивности могут быть выражены в виде неравенств на неотрицательные числа, например, на целые числа. Рассмотрим два целых, положительных числа N_1 и N_2. Построим аналог функции распределения вероятности для двух различных событий

$$w_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2}, \tag{493}$$

$$w_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2}. \tag{494}$$

Условие положительности энтропии Шэннона

$$-w_1 \ln w_1 - w_2 \ln w_2 \geq 0 \tag{495}$$

может быть записано в виде неравенства

$$\frac{N_1}{N_1 + N_2} \ln \frac{N_1}{N_1 + N_2} + \frac{N_2}{N_1 + N_2} \ln \frac{N_2}{N_1 + N_2} \leq 0 \tag{496}$$

которое эквивалентно следующему неравенству

$$(\Sigma_{j=1}^{2} N_j)^{\Sigma_{j=1}^{2} N_j} \geq \Pi_{j=1}^{2} N_j^{N_j}. \tag{497}$$

Для произвольного целого числа m неравенство имеет тот же вид, при этом 2 заменено на m в формуле (497).

Рассмотрим числовой пример: $N_1 = 5, N_2 = 7$, получаем

$$12^{12} \geq 5^5 7^7. \tag{498}$$

Для функции двух переменных

$$F(x, y) = (x + y)^{(x+y)} - x^x y^y \tag{499}$$

неравенство (497) приводит к условию положительности функции для положительных значений x и y. Условие положительности относительной энтропии может быть записано в виде неравенства на положительные числа. Рассмотрим четыре положительных целых числа N_1,N_2 и M_1, M_2. Можно построить два распределения вероятности

$$x_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2}, \tag{500}$$

$$x_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2}, \tag{501}$$

и

$$p_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}, \tag{502}$$

$$p_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}. \tag{503}$$

Условие положительности относительной энтропии (429) приводит к неравенству

$$\prod_{j=1}^{2} (\frac{N_j}{\sum_{k=1}^{2} N_k})^{N_j} \geq \prod_{j=1}^{2} (\frac{M_j}{\sum_{k=1}^{2} M_k})^{N_j}. \tag{504}$$

В случае произвольных чисел m из области с индексом j неравенство (504) выполняется, но надо заменить 2 на m. Рассмотрим еще один числовой пример: $N_1 = 5$,$N_2 = 7$ и $M_1 = 3$, $M_2 = 11$. Неравенство (504) означает

$$(\frac{5}{12})^5 (\frac{7}{12})^7 \geq (\frac{3}{14})^5 (\frac{11}{14})^7. \tag{505}$$

Для функции $\Phi(x, y)$ двух переменных получаем

$$\Phi(x, y) = (\frac{x}{x + y})^x (\frac{y}{x + y})^y - (\frac{z}{z + t})^x (\frac{t}{z + t})^y \geq 0 \tag{506}$$

Неравенство (504) приводит к условию положительности функции в области $x \geq 0$, $y \geq 0$ для произвольных, положительных значений параметров z и t. Аналогичные неравенства для положительных чисел следуют из условий субаддитивности и сильной субаддитивности. При выполнении условия субаддитивности рассмотрим четыре положительных числа N_1,N_2,N_3,N_4. Получаем четыре числа

$$w_{11} = \frac{N_1}{\sum_k N_k}, \tag{507}$$

$$w_{12} = \frac{N_2}{\sum_k N_k}, \tag{508}$$

$$w_{21} = \frac{N_3}{\sum_k N_k}, \tag{509}$$

$$w_{22} = \frac{N_4}{\sum_k N_k} \tag{510}$$

из которых построим две пары положительных чисел

$$x_1 = w_{11} + w_{12} = \frac{N_1 + N_2}{\sum_k N_k}, \tag{511}$$

$$x_2 = w_{21} + w_{22} = \frac{N_3 + N_4}{\sum_k N_k} \tag{512}$$

и

$$p_1 = w_{11} + w_{21} = \frac{N_1 + N_3}{\sum_k N_k}, \tag{513}$$

$$p_2 = w_{12} + w_{22} = \frac{N_2 + N_4}{\sum_k N_k}. \tag{514}$$

Условие субаддитивности приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4} (\frac{N_j}{\sum_{k=1}^4 N_k})^{N_j} \quad & \geq (\frac{N_1 + N_2}{\sum_{k=1}^4 N_k})^{N_1+N_2} + (\frac{N_3 + N_4}{\sum_{k=1}^4 N_k})^{N_3+N_4} \\ & + (\frac{N_1 + N_3}{\sum_{k=1}^4 N_k})^{N_1+N_3} + (\frac{N_2 + N_4}{\sum_{k=1}^4 N_k})^{N_2+N_4}. \end{aligned} \tag{515}$$

Рассмотрим третий пример: $N_1 = 1, N_2 = 2, N_3 = 3, N_4 = 4$, получаем неравенство

$$(\frac{1}{10})^1 + (\frac{2}{10})^2 + (\frac{3}{10})^3 + (\frac{4}{10})^4 \geq (\frac{3}{10})^3 + (\frac{7}{10})^7 + (\frac{4}{10})^4 + (\frac{6}{10})^6 \tag{516}$$

которое легко может быть проверено.

5.10 Неравенства для специальных функций

Рассмотрим статистику фотонов гауссова состояния электромагнитного поля. Функция распределения по числу фотонов в гауссовом состоянии электромагнитного поля была выражена через специальные функции в [88]. Например, она была записана через многомерные полиномы Эрмита и их частные случаи, описывающие статистики фотонов в сжатых состояниях. Статистика фотонов в одномодовом сжатом состоянии света имеет вид

$$P(n) = P(0) \frac{H_{nn}^R(y_1, y_2)}{n!}, \tag{517}$$

где $P(0)$ вероятность вакуумного состояния, y_1 и y_2 аргументы полиномов Эрмита, которые зависят от квадратурных компонент и статистических параметров, а именно

$$y_1 = y_2^* = 2\frac{(T-1)z^* + (\sigma_{pp} - \sigma_{qq} + 2i\sigma_{pq})z}{2T - 4d - 1}. \tag{518}$$

Здесь

$$z = \frac{\langle q \rangle + i\langle p \rangle}{\sqrt{2}}. \tag{519}$$

Кроме того

$$P(0) = \frac{1}{\sqrt{d + \frac{1}{2}T + \frac{1}{4}}} \times \exp[-\frac{\langle p \rangle^2(2\sigma_{qq}+1) + \langle q \rangle^2(2\sigma_{pp}+1) - 4\sigma_{pq}\langle p \rangle\langle q \rangle}{4d + 2T + 1}], \tag{520}$$

где R - симметричная матрица с элементами

$$R_{11} = R_{22}^* = 2\frac{\sigma_{pp} - \sigma_{qq} - 2i\sigma_{pq}}{4d + 2T + 1}, \tag{521}$$

$$R_{12} = \frac{1 - 4d}{4d + 2T + 1}. \tag{522}$$

В этих формулах

$$T = \sigma_{pp} + \sigma_{qq}, \tag{523}$$

и

$$d = \sigma_{pp}\sigma_{qq} - \sigma_{pq}^2. \tag{524}$$

Для $d = 1/4$ получаем

$$P(n) = \frac{P(0)}{2^n n!}(\frac{T-1}{T+1})^{\frac{n}{2}} \mid H_n(\frac{(T+1)z + [\sigma_{pp} - \sigma_{qq} - 2i\sigma_{pq}]z^*}{(2(T+1)[\sigma_{pp} - \sigma_{qq} - 2i\sigma_{pq}])^{\frac{1}{2}}}) \mid^2 . \tag{525}$$

Применим к данной функции распределения неравенство, следующее из положительности относительной энтропии (429), получаем неравенство на полиномы Эрмита от двух переменных

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^{(1)}(0)\frac{H_{nn}^{R_1}(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})}{n!} \ln[\frac{P^{(1)}(0)H_{nn}^{R_1}(y_1^{(1)}, y_2^{(1)})}{P^{(2)}(0)H_{nn}^{R_2}(y_1^{(2)}, y_2^{(2)})}] \geq 0. \tag{526}$$

Индексы 1 и 2 в данной формуле означают, что для первой функции распределения по числу фотонов мы использовали одни статистические параметры с индексом 1

$< q_1 >$,$< p_1 >$, $\sigma_{qq}^{(1)}$,$\sigma_{pp}^{(1)}$ и $\sigma_{qp}^{(1)}$, а для второй функции распределения по числу фотонов мы использовали параметры с индексом 2. Это неравенство описывает новые свойства полиномов Эрмита. Неравенство выполняется, если статистические параметры квадратурных компонент фотонов удовлетворяют соотношению неопределенности Шредингера-Робертсона

$$\sigma_{qq}^{(1)}\sigma_{pp}^{(1)} - \sigma_{qp}^{(1)2} \geq \frac{1}{4}, \tag{527}$$

$$\sigma_{qq}^{(2)}\sigma_{pp}^{(2)} - \sigma_{qp}^{(2)2} \geq \frac{1}{4}. \tag{528}$$

Для $d = 1/4$ получаем другое неравенство

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(1)}(0)}{2^n n!}(\frac{T^{(1)}-1}{T^{(1)}+1})^{\frac{n}{2}} \mid H_n(\frac{(T^{(1)}+1)z^{(1)} + [\sigma_{pp}^{(1)} - \sigma_{qq}^{(1)} - 2i\sigma_{pq}^{(1)}]z^{*(1)}}{(2(T^{(1)}+1)[\sigma_{pp}^{(1)} - \sigma_{qq}^{(1)} - 2i\sigma_{pq}^{(1)}])^{\frac{1}{2}}}) \mid^2 \\
&\times \ln \frac{P^{(1)}(0)}{2^n n!}(\frac{T^{(1)}-1}{T^{(1)}+1})^{\frac{n}{2}} \mid H_n(\frac{(T^{(1)}+1)z^{(1)} + [\sigma_{pp}^{(1)} - \sigma_{qq}^{(1)} - 2i\sigma_{pq}^{(1)}]z^{*(1)}}{(2(T^{(1)}+1)[\sigma_{pp}^{(1)} - \sigma_{qq}^{(1)} - 2i\sigma_{pq}^{(1)}])^{\frac{1}{2}}}) \mid^2 \\
&+\frac{P^{(2)}(0)}{2^n n!}(\frac{T^{(2)}-1}{T^{(2)}+1})^{\frac{n}{2}} \mid H_n(\frac{(T^{(2)}+1)z^{(2)} + [\sigma_{pp}^{(2)} - \sigma_{qq}^{(2)} - 2i\sigma_{pq}^{(2)}]z^{*(2)}}{(2(T^{(2)}+1)[\sigma_{pp}^{(2)} - \sigma_{qq}^{(2)} - 2i\sigma_{pq}^{(2)}])^{\frac{1}{2}}}) \mid^2 \\
&\times \ln \frac{P^{(1)}(0)}{2^n n!}(\frac{T^{(1)}-1}{T^{(1)}+1})^{\frac{n}{2}} \mid H_n(\frac{(T^{(2)}+1)z^{(2)} + [\sigma_{pp}^{(2)} - \sigma_{qq}^{(2)} - 2i\sigma_{pq}^{(2)}]z^{*(2)}}{(2(T^{(2)}+1)[\sigma_{pp}^{(2)} - \sigma_{qq}^{(2)} - 2i\sigma_{pq}^{(2)}])^{\frac{1}{2}}}) \mid^2
\end{aligned} \tag{529}$$

Эти неравенства могут нарушаться для значений статистических параметров квадратурных компонент, которые нарушают соотношения неопределенности Шредингера-Робертсона.

6 ГЛАВА. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ В ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Часть 1. Соотношения неопределенности, зависящие от состояний

В данном разделе, следуя [48], мы рассмотрим в вероятностном представлении квантовой механики новые, зависящие от нескольких состояний, соотношения неопределенностей, введенные Трифоновым. Мы запишем соотношения неопределенностей Трифонова в терминах оптической томограммы, которая может быть измерена в схемах по гомодинному детектированию состояния фотона. Одним из основополагающих принципов квантовой механики являются соотношения неопределенностей, в частности, соотношение неопределенности Гейзенберга [91]. Они могут быть представлены в различной форме. В томографическом представлении квантовой механики [9] возможно выразить все квантовые постулаты и уравнения для волновой функции и матрицы плотности через функции распределения вероятности. Написанные недавно соотношения неопределенностей Трифонова [82] еще не были детально проверены экспериментально. В данном параграфе мы перепишем соотношения неопределенностей Трифонова на языке томограмм, что удобно, чтобы провести проверку основных принципов квантовой механики в эксперментах с использованием гомодинного детектирования фотонных состояний.

Стандартное соотношение неопределенностей Гейзенберга [91] для координаты и импульса имеет вид

$$\sigma_{qq}\sigma_{pp} \geq \frac{1}{4}. \tag{530}$$

Постоянная Планка положена равной 1 ($\hbar = 1$). Для случая чистых состояний с волновой функцией $|\Psi\rangle$ дисперсии координаты и импульса в неравенстве (530) имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{qq} &= \mathrm{Tr}\left(\hat{q}^2|\Psi\rangle\langle\Psi|\right) - \left(\mathrm{Tr}\left(\hat{q}|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)\right)^2,\\ \sigma_{pp} &= \mathrm{Tr}\left(\hat{p}^2|\Psi\rangle\langle\Psi|\right) - \left(\mathrm{Tr}\left(\hat{p}|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)\right)^2.\end{aligned} \tag{531}$$

Трифонов показал [82], что соотношение (530) может быть обобщено на случай двух различных состояний с волновыми функциями $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_2\rangle$. Данное обобщение соотношений неопределенности было названо зависящими от состояний соотношениями неопределенности. Оно имеет вид

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}\left(\hat{q}^2|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\right)-\left(\mathrm{Tr}\left(\hat{q}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\right)\right)^2\right]\left[\mathrm{Tr}\left(\hat{p}^2|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\right)-\left(\mathrm{Tr}\left(\hat{p}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\right)\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}\left(\hat{q}^2|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2|\right)-\left(\mathrm{Tr}\left(\hat{q}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_1|\right)\right)^2\right]\left[\mathrm{Tr}\left(\hat{p}^2|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\right)-\left(\mathrm{Tr}\left(\hat{p}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\right)\right)^2\right]\geq\frac{1}{4}. \tag{532}$$

Неравенство (532) обеспечивает допустимые условия для дисперсий координат и импульсов. Разница между соотношением неопределенности Трифонова (532) и соотношением неопределенности Гейзенберга (530) заключается в том, что соотношение (532) содержит дисперсии, вычисленные для двух различных состояний системы с волновыми функциями $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_2\rangle$. В соотношении неопределенности Гейзенберга (530) учитываются дисперсии только в одном состоянии системы с волновой функцией $|\Psi\rangle$. Если в неравенстве (532) положить $|\Psi_1\rangle = |\Psi_2\rangle$, то неравенство (532) превращается в соотношение неопределенности Гейзенберга, то есть соотношение неопределенности Гейзенберга является частным случаем соотношения неопределенности (532). Мы предлагаем для экспериментальной проверки зависящего от состояния соотношения неопределенности (532) использовать схему гомодинного детектирования фотонных состояний. Результатом этого эксперимента является оптическая томограмма, содержащая всю информацию о квантовом состоянии.

6.1 Оптическая томограмма состояния фотона

В этом параграфе обсудим оптическую томографию квантового состояния. В схеме оптической томографии вместо волновой функции или матрицы плотности для описания квантового состояния достаточно знать функцию распределения вероятности $w(X, \Theta)$, которая называется оптической томограммой [50]. Аргумент X томограммы называется гомодинной квадратурной компонентой фотона. Угол Θ называется локальной фазой осциллятора. Этот параметр контролируется в экспериментах по гомодинному детектированию [51, 54, 53]. Оптическая томограмма связана с волновой функцией [92]

$$w(X,\Theta) = \frac{1}{2\pi|\sin\Theta|}\left|\int \Psi(y)\exp\left(\frac{iy^2}{2\tan\Theta} - \frac{iXy}{\sin\Theta}\right)\,dy\right|^2. \tag{533}$$

Для значения фазы локального осциллятора $\Theta = 0$ оптическая томограмма дает функцию распределения вероятности для координаты, а именно

$$w(X,0) = |\Psi(X)|^2. \tag{534}$$

Для значения фазы локального осциллятора $\Theta = \pi/2$ оптическая томограмма задает функцию распределения вероятности импульса

$$w(X,\pi/2) = |\tilde{\Psi}(X)|^2, \tag{535}$$

где $\tilde{\Psi}(X)$ представляет собой волновую функцию состояния $|\Psi\rangle$ в импульсном представлении

$$\tilde{\Psi}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \Psi(y)e^{iXy}\,dy. \tag{536}$$

Таким образом можно получить дисперсии координаты и импульса при помощи оптической томограммы $w(X,\Theta)$, то есть

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{q}^2|\Psi\rangle\langle\Psi|\right) = \int w(X,0)X^2\,dX, \tag{537}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{p}^2|\Psi\rangle\langle\Psi|\right) = \int w(X,\pi/2)X^2\,dX. \tag{538}$$

С учетом этого соотношение неопределенности Гейзенберга может быть записано в томографическом представлении в следующем виде (см., например, [10, 56, 84])

$$\begin{aligned}&\left[\int w(X,0)X^2\,dX - \left(\int w(X,0)X\,dX\right)^2\right]\\ &\times\left[\int w(X,\pi/2)X^2\,dX - \left(\int w(X,\pi/2)X\,dX\right)^2\right] \geq \frac{1}{4}.\end{aligned} \tag{539}$$

Формула (539) является томографическрой формой соотношения неопределенности Гейзенберга (530).

6.2 Соотношения неопределенности Трифонова в томографической форме

Неравенство Трифонова (532) также может быть представлено в томографической форме. Для этого выразим дисперсии координаты и импульса в первом состоянии с волновой функцией $\Psi_1(X)$ и втором состоянии с волновой функцией $\Psi_2(X)$ через оптические томограммы $w_1(X,\Theta)$ и $w_2(X,\Theta)$ этих состояний. Для дисперсий координат получаем выражения

$$\langle\Psi_1|\hat{q}^2|\Psi_1\rangle - (\langle\Psi_1|\hat{q}|\Psi_1\rangle)^2 = \int w_1(X,0)X^2\,dX - \left(\int w_1(X,0)X\,dX\right)^2 \tag{540}$$

и

$$\langle\Psi_2|\hat{q}^2|\Psi_2\rangle - (\langle\Psi_2|\hat{q}|\Psi_2\rangle)^2 = \int w_2(X,0)X^2\,dX - \left(\int w_2(X,0)X\,dX\right)^2. \tag{541}$$

Дисперсии импульсов в первом и втором состояниях равны

$$\langle\Psi_1|\hat{p}^2|\Psi_1\rangle - (\langle\Psi_1|\hat{p}|\Psi_1\rangle)^2 = \int w_1(X,\pi/2)X^2\,dX - \left(\int w_1(X,\pi/2)X\,dX\right)^2 \tag{542}$$

и

$$\langle\Psi_2|\hat{p}^2|\Psi_2\rangle - (\langle\Psi_2|\hat{p}|\Psi_2\rangle)^2 = \int w_2(X,\pi/2)X^2\,dX - \left(\int w_2(X,\pi/2)X\,dX\right)^2. \tag{543}$$

Введем дисперсии в системе отсчета, подвергнутой преобразованию поворота. Оператор квадратуры, подвергнутый операции поворота равен

$$\hat{X} = \hat{q}\cos\Theta + \hat{p}\sin\Theta. \tag{544}$$

По физическому смыслу он является координатой в системе отсчета повернутой на угол Θ (равный фазе локального осциллятора) и является импульсом в системе отсчета повернутой на угол $\Theta+\pi/2$ (то есть для значения фазы локального осциллятора $\Theta+\pi/2$). Поэтому мы может написать соотношение неопределенности Трифонова для координаты и импульса не только в исходной системе отсчета, но и в системе отсчета, подвергнутой операции поворота. Для этого заменим в формулах (540)-(543) нулевое значение фазы локального осцилллятора на значение Θ. В результате неравенство будет иметь вид

$$\frac{1}{2}\left[\int w_1(X,\Theta)X^2\,dX - \left(\int w_1(X,\Theta)X\,dX\right)^2\right]$$

$$\times\left[\int w_2(X,\Theta+\pi/2)X^2\,dX-\left(\int w_2(X,\Theta+\pi/2)X\,dX\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\int w_2(X,\Theta)X^2\,dX-\left(\int w_2(X,\Theta)X\,dX\right)^2\right]$$
$$\times\left[\int w_1(X,\Theta+\pi/2)X^2\,dX-\left(\int w_1(X,\Theta+\pi/2)X\,dX\right)^2\right]\geq\frac{1}{4}. \qquad (545)$$

Неравенство (544), при $\Theta = 0$, превращается в неравенство Трифонова в томографическом представлении. Неравенство (544) может быть проверено в экспериментах, в которых измеряются две томограммы для двух различных состояний фотона. На самом деле неравенство (544) является критерием проверки точности экспериментов по гомодинному детектированию фотонов, так как оно должно выполняться для произвольной пары оптических томограмм квантовых состояний. В области классических состояний данное неравенство может нарушаться. Соотношение (545) может быть легко обобщено на случай томограмм смешанных квантовых состояний. Для квантовых состояний симплектическая томограмма $w_1(X,\mu,\nu)$ связана с оптической томограммой $w_1(X,\Theta)$, а именно

$$w_1(X,\mu,\nu)=\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\,w_1\left(\frac{X}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}},\arctan\left(\frac{\nu}{\mu}\right).\right) \qquad (546)$$

Симплектическая томограмма чистых состояний удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{2\pi}\int w_1(X,\mu,\nu)w_1(Y,\mu,\nu)e^{i(X-Y)}\,dX\,dY\,d\mu\,d\nu=1. \qquad (547)$$

Аналогичное соотношение выполняется для томограммы чистого состояния $w_2(X,\Theta)$. Неравенство (545) также верно, если томограммы $w_1(X,\Theta)$ и $w_2(X,\Theta)$ соответствуют смешанным состояним. Причина этого в том, что они представимы в виде выпуклой суммы томограмм, удовлетворяющих (547). Таким образом томографическая форма соотношения неопределенности Трифонова может быть проверена экспериментально не только для чистых состояний, но также и для смешанных квантовых состояний. Мы представили зависящие от состояний соотношения неопределенности для координаты и импульса в томографической форме. Эта форма содержит только оптические томограммы, которые могут быть измерены экспериментально методом гомодинного детектирования фотонных состояний. Мы сформулировали зависящие от состояний соотношения неопределенности не только для координаты и импульса, но и получили общее выражение, которое подходит для любой локальной фазы осциллятора. Мы предлагаем использовать полученные томографические соотношения неопределенности, зависящие от состояний, как критерий для проверки точности гомодинного метода измерения фотонных состояний.

6.3 Как мы можем проверить соотношения неопределенности?

В работах [93, 94, 95] было получены результаты, в которых авторы рассматривали квантовую теорию, выходящую за пределы традиционной квантовой механики. В этой связи представляет большой интерес точная экспериментальная проверка основных положений традиционной квантовой механики, а именно, соотношения неопределенности Гейзенберга [91], соотношения неопределенности Шредингера–Робертсона [96], [97], соотношения неопределенности, зависящего от параметра чистоты [98, 99] и ряда других квантово-механических неравенств. Новая формулировка квантовой механики, основанная на томографическом представлении квантовых состояний [10, 9, 100], оказывается удобным аппаратом, предлагающим такие эксперименты [101] по проверке основ квантовой механики. Такие эксперименты используют гомодинное детектирование состояний фотонов, в них измеряется оптическая томограмма квантового состояния фотона [84]. В работах [82, 83] были введены новые квантовые соотношения неопределенностей. В отличие от соотношений неопределенности Гейзенберга и Шредингера-Робертсона соотношения неопределенности Трифонова написаны для двух и более квантовых состояний, они были названы обобщенными соотношениями неопределенности, так как представляет собой обобщение стандартных соотношений неопределенности для координаты и импульса на случай нескольких состояний. В предыдущем параграфе, следуя работе [48], обсуждалось обобщение соотношения неопределенности Гейзенберга на случай зависящих от состояний соотношений неопределенности, было получено выражение для зависящих от состояния соотношений неопределенности в томографическом представлении. Полученное выражение было предложено для экспериментальной проверки в схеме гомодинного детектирования. Цель данного параграфа, следуя [42], получить выражение для соотношения неопределенности Трифонова, которое является зависящим от состояний обобщением соотнощения неопределенности Шредингера-Робертсона, содержащим ковариации координаты и импульса, в томографическом представлении. Оператор плотности квантового состояния фотона может быть восстановлен из оптической томограммы при помощи соотношения

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} d\theta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\eta dX \omega(X,\theta)|\eta| \exp i\eta(X - \hat{q}\cos\theta - \hat{p}\sin\theta). \tag{548}$$

Оптическая томограмма может быть также получена из оператора плотности $\hat{\rho}$

$$w(X,\theta) = \operatorname{Tr}\hat{\rho}\delta(X - \hat{q}\cos\theta - \hat{p}\sin\theta). \tag{549}$$

Физический смысл оптической томограммы состоит в том, что она является неотрицательной плотностью вероятности гомодинной квадратуры (544). Для системы с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{p}^2/2 + U(\hat{q})$, оптическая томограмма состояния системы удовлетворяет уравнению эволюции следующего вида [102]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\, w(X,\theta,t) = \left[\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\sin 2\theta\left(1 + X\frac{\partial}{\partial X}\right)\right] w(X,\theta,t)\\
&+\frac{1}{i}\left\{V\left[\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-1} + X\cos\theta + i\frac{\sin\theta}{2}\frac{\partial}{\partial X}\right)\right]\right.\\
&\left.- V\left[\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-1} + X\cos\theta - i\frac{\sin\theta}{2}\frac{\partial}{\partial X}\right)\right]\right\} w(X,\theta,t).
\end{aligned} \tag{550}$$

Соотношение неопределенности Шредингера-Робертсона имеет вид

$$\sigma_{qq}\sigma_{pp} - \sigma_{qp}^2 \geq 1/4, \tag{551}$$

где дисперсии координаты и импульса, а также ковариация вычислялись для одного и того же состояния системы. Данное неравенство было обобщены Трифоновым [82, 83] на случай нескольких состояний. Для двух чистых состояний $|\Psi_1\rangle$,$|\Psi_2\rangle$ это соотношение неопределенности, зависящее от состояний, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\operatorname{Tr}\left(\hat{q}^2|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\right) - \left(\operatorname{Tr}\left(\hat{q}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\right)\right)^2\right]\left[\operatorname{Tr}\left(\hat{p}^2|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\right) - \left(\operatorname{Tr}\left(\hat{p}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\right)\right)^2\right]\\
&+\frac{1}{2}\left[\operatorname{Tr}\left(\hat{q}^2|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\right) - \left(\operatorname{Tr}\left(\hat{q}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\right)\right)^2\right]\left[\operatorname{Tr}\left(\hat{p}^2|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\right) - \left(\operatorname{Tr}\left(\hat{p}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\right)\right)^2\right]\\
&-\left\{\operatorname{Tr}\left(\frac{\hat{q}\hat{p}+\hat{p}\hat{q}}{2}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\right) - \operatorname{Tr}\left(\hat{q}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\right)\operatorname{Tr}\left(\hat{p}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\right)\right\}\\
&\times\left\{\operatorname{Tr}\left(\frac{\hat{q}\hat{p}+\hat{p}\hat{q}}{2}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\right) - \operatorname{Tr}\left(\hat{q}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\right)\operatorname{Tr}\left(\hat{p}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|\right)\right\} \geq \frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{552}$$

Данное неравенство может быть записано в томографической форме

$$\frac{1}{2}\left[\int w_1(X,\theta)X^2\,dX-\left(\int w_1(X,\theta)X\,dX\right)^2\right]$$
$$\times\left[\int w_2(X,\theta+\pi/2)X^2\,dX-\left(\int w_2(X,\theta+\pi/2)X\,dX\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\int w_2(X,\theta)X^2\,dX-\left(\int w_2(X,\theta)X\,dX\right)^2\right]$$
$$\times\left[\int w_1(X,\theta+\pi/2)X^2\,dX-\left(\int w_1(X,\theta+\pi/2)X\,dX\right)^2\right]$$
$$-\{\int w_1(X,\theta+\frac{\pi}{4})X^2\,dX-\left(\int w_1(X,\theta+\frac{\pi}{4})X\,dX\right)^2$$
$$-\frac{1}{2}\left[\int w_1(X,\theta)X^2\,dX-\left(\int w_1(X,\theta)X\,dX\right)^2\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\int w_1(X,\theta+\frac{\pi}{2})X^2\,dX-\left(\int w_1(X,\theta+\frac{\pi}{2})X\,dX\right)^2\right]\}$$
$$\times\{\int w_2(X,\theta+\frac{\pi}{4})X^2\,dX-\left(\int w_2(X,\theta+\frac{\pi}{4})X\,dX\right)^2$$
$$-\frac{1}{2}\left[\int w_2(X,\theta)X^2\,dX-\left(\int w_2(X,\theta)X\,dX\right)^2\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\int w_2(X,\theta+\frac{\pi}{2})X^2\,dX-\left(\int w_2(X,\theta+\frac{\pi}{2})X\,dX\right)^2\right]\}\geq 1/4. \qquad (553)$$

Полученное неравенство может быть проверено экспериментально, если обе томограммы $w_1(X,\theta)$ и $w_2(X,\theta)$ будут измерены. Такое же неравенство может быть написано и в случае смешанных состояний.

6.4 Кубитный портрет для оптических томограмм

Кубитный портрет кудитных состояний представляет собой функцию распределения вероятности, заданную двумя положительными числами p_1, p_2, которые удовлетворяют соотношению $p_1+p_2=1$, полученную из исходного распределения вероятности $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \ldots, \mathcal{P}_N$, где $\sum_k \mathcal{P}_k = 1$. Функция распределения вероятности кубита может быть получена при помощи линейного отображения N-вектора с компонентами $\mathcal{P}_k$ на двумерный вектор с компонентами p_1, p_2. Данное отображение задается соответствующей стохастической матрицей. Для функции распределения вероятности $w(X,\theta)$ кубитный портрет может быть построен при помощи прямоугольной матрицы

$$p_m(\theta)=\int K_m(X)w(X,\theta)dX, \quad m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2} \qquad (554)$$

где $w(X,\theta)$ томограмма квантового состояния. Для двухмодового состояния, заданного томограммой $w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)$ обобщенный кубитный портрет представляет собой аналог спиновой томограммы для двух кубитов

$$p(m_1,m_2,\theta_1,\theta_2)=\int K_{m_1m_2}(X_1,X_2)w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)dX_1dX_2. \tag{555}$$

Например, матрица $K_{m_1m_2}(X_1,X_2)$ может иметь факторизованную форму. Можно исследовать квантовые корреляции в двухмодовом состоянии, рассматривая свойства функции (555). Например, четырехкомпонентный вектор вероятности $\vec{p}(\theta_1,\theta_2)$, зависящий от дополнительных угловых параметров, может быть исследован путем изучения спиновой томограммы перепутанного состояния двух кубитов, для которого нарушение неравенства Белла является достаточным условием его перепутанности. Числа Белла могут быть выражены через функцию $p(m_1,m_2,\theta_1,\theta_2)$ следующим образом

$$\begin{aligned}
B=\max|&p_{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(\theta_1,\theta_2)-p_{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\theta_1,\theta_2)-p_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(\theta_1,\theta_2)+p_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\theta_1,\theta_2)\\
&+p_{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(\theta_1,\theta_3)-p_{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\theta_1,\theta_3)-p_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(\theta_1,\theta_3)+p_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\theta_1,\theta_3)\\
&+p_{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(\theta_4,\theta_2)-p_{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\theta_4,\theta_2)-p_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(\theta_4,\theta_2)+p_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\theta_4,\theta_2)\\
&-p_{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(\theta_4,\theta_3)+p_{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\theta_4,\theta_3)+p_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(\theta_4,\theta_3)-p_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\theta_4,\theta_3)|.
\end{aligned} \tag{556}$$

Для факторизованной матрицы $K^{(1)}_{m_1}(X_1)K^{(2)}_{m_2}(X_2)$ нарушение неравенства $B\leq 2$ является достаточным условием перепутанности двухмодового состояния с томограммой $w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)$. Оптическая томограмма такого перепутанного состояния не может быть представлена в виде выпуклой суммы

$$w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)=\sum_k p_k w_1^{(k)}(X_1,\theta_1)w_2^{(k)}(X_2,\theta_2), \tag{557}$$

где $w_1^{(k)}(X_1,\theta_1)$ and $w_2^{(k)}(X_2,\theta_2)$ оптические томограммы состояний первой и второй моды соответственно. Исследуя отображение оптической томограммы двухмодового состояния на аналог спиновой томограммы двух кубитов, мы обнаружили,что нарушение неравенств Белла для полученного аналога спиновой томограммы является достаточным условием перепутанности изучаемого двухмодового состояния.

6.5 Портрет матрицы плотности

Распространим метод кубитного портрета на матрицы плотности, следуя [49]. Рассмотрим вместо трехмерного вектора вероятности матрицу 3x3, являющуюся матрицей плотности состояния кутрита

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Tr}\rho = 1, \quad \rho^{\dagger} = \rho. \tag{558}$$

Собственные значения матрицы плотности неотрицательны, то есть $\rho \geq 0$.

Предложим специальное положительное отображение, при помощи которого можно получить из начальных матриц искомую 3x3-матрицу плотности. Например, рассмотрим две матрицы следующего вида

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{22} & \rho_{13} & 0 \\ \rho_{31} & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{33} & \rho_{12} & 0 \\ \rho_{21} & \rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{559}$$

Можно проверить, что отображения $\rho \to \rho_1$, $\rho \to \rho_2$ являются положительными. Отображения построены с использованием процедуры представления матриц в виде векторов. В данном случае 3x3 матрица представлена в форме комплексных девятимерных векторов. Портрет может быть получен действием на девятимерный вектор девятимерной матрицей, состоящей из матричных элементов, которые либо равны нулю, либо равны единице. В этом смысле, процедура получения портрета матрицы аналогична процедуре получения портрета вектора вероятности. Таким образом, мы можем написать

$$\rho_1 = \mathcal{M}_1\rho, \quad \rho_2 = \mathcal{M}_2\rho, \tag{560}$$

где $\mathcal{M}_{1,2}$ обозначают линейные преобразования, приводящие к (559). Аналогично неравенствам, полученным с использованием векторов вероятности, можно получить новые неравенства на энтропию, выраженную через матрицу плотности. Таким образом, для энтропии фон Неймана кутрита получаем новое неравенство

$$-\mathrm{Tr}\rho\ln\rho \leq -\mathrm{Tr}\rho_1\ln\rho_1 - \mathrm{Tr}\rho_2\ln\rho_2. \tag{561}$$

Данное неравенство аналогично условию субаддитивности на матрицу плотнсоти двухчастичной системы, состоящей, например, из двух кубитов.

Однако, данное неравенство соответствует квантовым корреляциям, возможным в состоянии только одного кутрита, который не является двухчастичной системой. Выпишем полученное неравенство в явном виде

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{Tr}\{\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}\} \\
&\leq -\mathrm{Tr}\{\begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{22} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{22} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix}\} \\
&-\mathrm{Tr}\{\begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{33} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{33} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}\}.
\end{aligned} \tag{562}
$$

Получаем, что энтропия Шеннона в любом состоянии кутрита меньше суммы энтропий Шеннона в двух портретах (состояний кубитов). Для любого состояния кутрита может быть введена квантовая информация, она равна разности энтропий фон Неймана, использованных в условии субаддитивности, а именно

$$
I_q = -\mathrm{Tr}\rho_1 \ln \rho_1 - \mathrm{Tr}\rho_2 \ln \rho_2 + \mathrm{Tr}\rho \ln \rho. \tag{563}
$$

Квантовая информация, соответствующая состоянию одного кутрита, строго неотрицательна

$$
I_q \geq 0. \tag{564}
$$

Другое неравенство на энтропию, связанную с матрицей плотности состояния кутрита, может быть получено из неотрицательности условной энтропии. Выпишем его в явном виде, получаем

$$
0 \leq \mathrm{Tr}\{\begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{22} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix} \ln \left(\begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{22} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{33} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}^{-1}\right)\}. \tag{565}
$$

Часть 2. Соотношения неопределенности, зависящие от чистоты состояния и возможное усиление эффекта квантового тунелирования

В данном разделе, следуя [47, 43], рассмотрим соотношения неопределенности, содержащие зависимость от параметра чистоты состояния и обсудим возможность влияния на прозрачность потенциального барьера эффекта декогерентности. Исследуем пример состояния термодинамического равновесия, в котором параметр чистоты является функцией температуры.

Соотношение неопределенности координата-импульс, введенное Гейзенбергом [91], задает границу квантовости физических явлений, которая определяется постоянной Планка, являющейся результатом произведения дисперсий сопряженных переменных. Соотношения неопределенности, включающие в себя зависимость границы квантовости от произведения дисперсий и ковариаций сопряженных переменных, были введены Шредингером [96] и Робертсоном [97]. Граница квантовости сдвигается в сторону увеличения при росте ковариаций между координатой и импульсом. Следовательно, с ростом ковариации одновременно возрастают флуктуации координаты и импульса. В работах [103] исследовались соотношения неопределенности для случая, когда граница квантовости, зависит от различных характеристик состояния, например, от параметра негауссовости состояния. Соотношения неопределенности с деформацией коммутационных сооношений обсуждались в [104]. В работах [42, 45] обсуждалась проблема экспериментальной проверки соотношений неопределенности. Соотношения неопределенности в томографическом представлении квантовой механики были рассмотрены в [100]. Квантовые флуктуации приводят к такому квантовому явлению как туннелирование частицы под потенциальным барьером (см., например, [61, 105]). В этой связи, в работе [106] было отмечено, что зависимость границы квантовости от ковариации в соотношениях неопределенности Шредингера-Робертсона может быть понята как формальный рост постоянной Планка, что эквивалентно введению эффективной постоянной Планка. Так как эффект квантового туннелирования определяется постоянной Планка, в работе [107] исследовалась возможность получения больших квантовых корреляций координаты и импульса в коррелированных когерентных состояниях. Когерентные коррелированные состояния могут быть получены путем параметрического возбуждения гармонического осциллятора, а именно, посредством зависимости от времени его частоты. Возможность использования когерентных коррелированных состояний с большими ковариациями координаты и импульса для усиления эффекта туннелирования частицы под потенциальным барьером обсуждалась в работах [108]. В работах [98, 99] было показано, что граница квантовости смещается в сторону увеличения в случае смешанных состояний, так как она зависит от параметра чистоты состояния. Следовательно, вполне вероятно, что существует другая возможность влиять на проницаемость барьера. Например, явления декогерентности уменьшают параметр чистоты, но при этом увеличивают эффект квантового туннелирования.

Цель данного раздела - исследовать влияние эффектов декогерентности на зависимость соотношений неопределенности от параметра чистоты [98] и обсудить возможность зависимости эффекта туннелирования от эффективной постоянной Планка, являющейся функцией параметра чистоты (температуры в случае состояния термодинамического равновесия).

6.6 Соотношения неопределенности

Выведем стандартные соотношения неопределенности координаты и импульса, следуя [98, 99], для чего используем очевидное неравенство

$$\langle B^{\dagger} B\rangle \geq 0. \tag{566}$$

Для любого оператора $\hat{D}$ имеем $\langle\hat{D}\rangle = Tr\hat{\rho}\hat{D}$, где $\hat{D}$ оператор описывающий случайную наблюдаемую, а $\hat{\rho}$ оператор плотности, задающий квантовое состояние. Неравенство (566) для одномерной матрицы $\hat{D}$, которая в этом случае будет просто комплексным числом z, превращается в условие неотрицательности этого числа, то есть $z^{*}z = |z|^{2} \geq 0$. Усреднив неравенство (566), получаем соотношение $\langle z^{*}z\rangle \geq 0$. Введем оператор $\hat{B}$ в виде линейной комбинации операторов координаты $\hat{q}$ и импульса $\hat{p}$

$$\hat{B} = c_{1}\hat{q} + c_{2}\hat{p} - c_{1}\langle\hat{q}\rangle - c_{2}\langle\hat{p}\rangle, \tag{567}$$

где $\langle \hat{q} \rangle$ and $\langle \hat{p} \rangle$ - средние значения координаты и импульса в состоянии с оператором плотности $\hat{\rho}$. Неравенство (566) приводит к неравенству на квадратичную форму

$$\sum_{jk=1}^{2} c_j^* A_{jk} c_k \geq 0 \tag{568}$$

где c_1 и c_2 - комплексные числа, а матрицы A_{jk} имеют вид

$$A_{jk} = \begin{pmatrix} \sigma_{qq} & \sigma_{qp} \\ \sigma_{qp} & \sigma_{pp} \end{pmatrix} + \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{569}$$

Элементы матрицы A_{jk} - это дисперсии и ковариации координаты и импульса

$$\begin{aligned} \sigma_{qq} &= \langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2; \\ \sigma_{pp} &= \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2; \\ \sigma_{qp} &= \frac{1}{2} \langle \hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q} \rangle - \langle \hat{q} \rangle \langle \hat{p} \rangle. \end{aligned} \tag{570}$$

Член соотношения (569), содержащий мнимую единицу i, связан с коммутатором $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\hat{1}$. Квадратичная форма неотрицательна тогда и только тогда, когда собственные значения матрицы A_{jk} неотрицательны. Это означает, что все диагональные элементы матрицы неотрицательны, а также неотрицателен определитель матрицы. Условие неотрицательности определителя матрицы имеет вид следующего неравенства

$$\sigma_{qq}\sigma_{pp} - \sigma_{qp}^2 \geq \frac{1}{4}\hbar^2. \tag{571}$$

Данное неравенство является соотношением неопределенности Шредингера-Робертсона [96, 97] для координаты и импульса. Неравенство (571) можно представить в другой эквивалентной форме

$$\sigma_{qq}\sigma_{pp} \geq \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{1 - r^2}. \tag{572}$$

Здесь r - коэффициент корреляции случайных величин: координаты и импульса

$$r = \frac{\sigma_{qp}}{\sqrt{\sigma_{qq}\sigma_{pp}}}. \tag{573}$$

Для классических состояний (состояний принадлежащих классической области) $\hbar = 0$ и ограничение (квантовая граница) $\hbar^2/4(1 - r^2)$ на произведение дисперсий координаты и импульса отсутствует. Соотношения неопределенности Гейзенберга [91] (530) получаются из неравенства (572), если положить коэффициент корреляции равным нулю ($r = 0$). Коэффициент корреляции r характеризует степень статистической зависимости случайных величин (координаты и импульса). Если величины статистически независимы, то коэффициент корреляции равен нулю ($r = 0$), корреляции в системе не наблюдаются. Следовательно, из неравенства (572) следует, что наличие корреляций приводит к росту границы, определяющей квантовый предел точности измерений (границу квантовости) или приводит к следующей эффективной постоянной Планка

$$\hbar_{eff} = \frac{\hbar}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{574}$$

которая зависит от коэффициента корреляции r. Неравенство (572) может быть переписано в форме соотношения неопределенности Гейзенберга с эффективной постоянной Планка

$$\sigma_{qq}\sigma_{pp} \geq \frac{\hbar_{eff}^2}{4}. \tag{575}$$

Вышеизложенная интерпретация соотношений неопределенности обсуждалась в [98]. Значения коэффициента корреляции принадлежат огтрезку $-1 < r < 1$. Для значения $|r|$ близкого к 1 эффективная постоянная Планка удовлетворяет следующему неравенству

$$\hbar_{eff} \gg \hbar. \tag{576}$$

Такой чисто квантовый эффект как туннелирование частицы под барьером зависит от величины постоянной Планка [61]. Неравенство (576) означает, что увеличение эффективной постоянной Планка $\hbar_{eff}$ может приводить к усилению туннельного эффекта. Данное утверждение было приведено в [98] и развито в [108].

6.7 Соотношения неопределенности, зависящие от параметра чистоты

Смешанные состояния квантовой системы с оператором плотности $\hat{\rho}$ характеризуются параметром чистоты μ. Параметр чистоты имеет вид

$$\mathrm{Tr}\hat{\rho}^2 = \mu. \tag{577}$$

Оператор плотности чистого состояния $\hat{\rho}$ удовлетворяет соотношению $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. Следовательно, для оператора плотности чистого состояния выполняется условие $\mathrm{Tr}\hat{\rho}^2 = \mathrm{Tr}\hat{\rho} = 1$. Можно использовать другой параметр $s = 1 - \mu$, который называется линейной энтропией. Для чистых состояний линейная энтропия равна нулю. Параметр чистоты удовлетворяет неравенству $0 < \mu \leq 1$. В [98] было показано, что соотношение неопределенности определяют квантовый предел точности измерений (граница квантовости), который зависит от параметра чистоты μ, а именно

$$\sigma_{qq}\sigma_{pp} \geq \frac{\hbar^2}{4(1-r^2)}\Phi^2(\mu), \tag{578}$$

где $\Phi(\mu)_{(\mu=1)} = 1$. Функция $\Phi(\mu)$ имеет различный вид для различных областей значения параметра μ. Функция $\Phi(\mu)$ равна [98]

$$\begin{aligned}
&\Phi(\mu) = \Phi_1(\mu) = 2 - \sqrt{2\mu - 1}, \\
&\mu_2 \leq \mu \leq \mu_1, \quad \mu_1 = 1,\ \mu_2 = \frac{5}{9}; \\
&\Phi(\mu) = \Phi_2(\mu) = 3 - \sqrt{8(\mu - \frac{2}{3})}, \\
&\mu_3 \leq \mu \leq \mu_2, \quad \mu_3 = \frac{7}{18}, \quad \ldots \quad .
\end{aligned} \tag{579}$$

Такие отрезки функции $\Phi(\mu)$ возможны для бесконечного числа параметров μ_k. Поэтому функция $\Phi(\mu)$ имеет в явном виде различные формы для различных интервалов значений параметра чистоты и может быть апроксимирована приближенным выражением

$$\Phi_{app}(\mu) = \frac{4 + \sqrt{16 + 9\mu^2}}{9\mu}. \tag{580}$$

Для $\mu \ll 1$ функция $\Phi(\mu)$ равна

$$\Phi_{app}(\mu) \simeq \frac{8}{9\mu}. \tag{581}$$

Оператор плотности состояния термодинамического равновесия с температурой T имеет вид

$$\hat{\rho}(T) = \frac{1}{Z(T)} e^{-\frac{\hat{H}}{T}}, \tag{582}$$

где $\hat{H}$ гамильтониан системы. Статистическая сумма $Z(T)$ задается следом

$$Z(T) = \mathrm{Tr} e^{-\frac{\hat{H}}{T}}. \tag{583}$$

Параметр чистоты $\mu(T)$ выражается через статистическую сумму

$$\mu(T) = \frac{Z(T/2)}{Z^2(T)}. \tag{584}$$

Соотношения неопределенности в случае состояния термодинамического равновесия имеют вид

$$\sigma_{qq}\sigma_{pp} \geq \frac{\hbar^2}{4(1-r^2)}\Phi^2(\frac{Z(T/2)}{Z^2(T)}). \tag{585}$$

Для осциллятора ($\hbar = m = w = 1$) как в случае низких, так и в случае высоких температур параметр чистоты $\mu(T)$ выражается через статистическую сумму

$$Z(T) = \frac{1}{2\sinh(\frac{1}{2T})}. \tag{586}$$

Следовательно, получаем для параметра чистоты в случае малых температур выражение

$$\mu_o(T) = \tanh(\frac{1}{2T}), \tag{587}$$

которое в случае $(1/2T) \gg 1$ близко к $\mu(\infty) = 1$. В случае больших температур $T \gg 1$ получаем для параметра чистоты выражение

$$\tilde{\mu}(T) = \frac{1}{2T} \tag{588}$$

близкое к нулю. Следовательно, в случае больших температур и нулевого коэффициента корреляции ($r = 0$) зависимость эффективной постоянной Планка от температуры имеет вид $\hbar_{eff}(T)/\hbar \sim T$. Известно, что существует возможность увеличения флуктуации координаты и импульса с увеличением температуры. Это означает, что объем области координатного пространства (или пространства импульсов), где частица может оказаться, возрастает с ростом температуры. Это другое объяснение того, как высокая температура влияет на возможность преодоления отталкивающих сил, то есть если кинетическая энергия теплового движения двух заряженных частиц при высоких температурах оказывается больше, чем потенциальная энергия их электростатического отталкивания, то частицы могут сблизиться.

6.8 Декогерениность как способ увеличения эффективности туннелирования

Метод влияния на процесс тунелирования путем увеличения корреляции координаты и импульс был детально рассмотрен в [108]. Описанный выше метод влияния на процесс туннелирования путем увеличения температуры легко объясняется простыми физическими соображениями, а именно, тем что при высокой температуре частица обладает большой скоростью и большой кинетической энергией, что позволяет ей увеличить вероятность преодоления сил отталкивания. С другой стороны, мы интерпретируем это влияние как увеличение из-за зависимости от температуры границы квантовости (то есть увеличение предела точности квантовых измерений) для произведения дисперсий координаты и импульса. Отметим, что этот предел зависит не только от коэффициента корреляции r координаты и имульса, и не только от температуры T в случае состояний термодинамического равновесия, но и от параметра чистоты μ, который не сводится к температуре в общем случае. Возникновение состояний с малой величиной параметра чистоты обычно рассматривается как результат декогерентности. Процесс декогерентности рассматривается как процесс, создающий проблемы в квантовых технологиях, например, при квантовых вычислениях. С другой стороны, процесс декогерентности может быть использован для создания состояний с очень маленьким значением параметра чистоты $\mu \ll 1$. Даже если система не находится в состоянии термодинамического равновесия, смешанное состояние может быть получено другими процессами, а не только нагреванием. Мы интерпретировали обобщенные соотношения неопределенности Шредингера-Робертсона и Гейзенберга, полученные в [98], в которых граница квантовости произведения дисперсий координаты и импульса зависит от эффективной постоянной Планка, как возможность увеличения эффекта туннелирования за счет использования процесса декогерентности. Для состояния термодинамического равновесия нагревание системы ведет к увеличению флуктуаций координаты и импульса, что приводит к образованию в системе большого количества частиц с энергией достаточной для преодоления потенциального барьера. Необходимо отметить, что можно использовать для повышения эффективности процесса квантового туннелирования не только повышение температуры, но и другие процессы. Процессы декогерентности, приводящие к превращению изначально чистых состояний в смешанные, могут быть также использованы для влияния на процесс туннелирования. Таким образом использование процессов декогерентности является еще одним способом повышения эффективности туннелирования, наряду с процессом нагревания и процессом увеличения корреляции координаты и импульса в чистом состоянии. Следует отметить, что все эти три метода основаны на соотношении неопределенности координаты и импульса, которое зависит от постоянной Планка. Присутствие зависимости границы квантовости от дополнительных факторов $1/(1-r^2)$ и $\Phi^2(\mu)$ может быть интерпретировано как необходимость введения эффективной постоянной Планка, которая значительно больше, чем стандартная постоянная Планка. Необходимо отметить, что несмотря на то, что соотношения неопределенности с зависящей от параметра чистоты границей квантовости были недавно экспериментально проверены [11, 85, 84], влияние на процесс туннелирования явлений декогерентности или корреляций координаты и импульса еще требует экспериментальной проверки.

7 ГЛАВА. СИСТЕМЫ С КЛАССИЧЕСКИМИ И КВАНТОВЫМИ ПОДСИСТЕМАМИ В ТОМОГРАФИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Если классическая частица взаимодействует с измерительной аппаратурой, то значения ее импульса p и координаты q флуктуируют, следовательно, состояние частицы надо описывать функцией распределения вероятности $f(q,p)$ в фазовом пространстве частицы. Чистое состояние квантовой частицы описывается волновой функцией $\psi(x)$ [1]. Если квантовая частица взаимодействует с окружающей средой, то ее состояние будет смешанным, следовательно, его надо будет описывать эрмитовым неотрицательным оператором - матрицей плотности $\hat{\rho}$. В координатном представлении матрица плотности $\rho(x,x')$ является комплексной функцией двух действительных переменных [2, 3]. В томографическом представлении квантовой механики [9, 10] и классической механики [25, 58] состояние как классической частицы, так и квантовой, задаются одними и теми же объектами - томограммами. Они могут задаваться симплектической томограмммой $w(X,\mu,\nu)$ или ее частным случаем - оптической томограммой $w(X,\theta)$. В [56] было отмечено, что так как и квантовые, и классические состояния можно задавать одним и тем же объектом - томограммой, то можно, используя вероятностное представление, построить квантовую и классическую механику в рамках одной и той же схемы (на одном и том же языке). Идея ввести единую схему построения для классической и квантовой механики обсуждалась в литературе и раньше (см., например, [95]). Недавно Эльзэ с соавторами [109] предложил описывать динамику классических и квантовых частиц в рамках представления фазового пространства и формализма интеграла по путям. Проблема создания единой механики для квантовых и классических состояний возникает из-за различия языков, на котором описываются состояния в квантовой и классической области. Функция Вигнера $W(q,p)$ [4], задающая квантовое состояние, близка по своим свойствам к классической функции распределения вероятности $f(q,p)$, но она может принимать отрицательные значения, следовательно, она не яляется настоящей, измеряемой функцией распределения вероятности координаты и импульса квантовой частицы. В данной главе мы будем задавать состояние как квантовой, так и классической частицы, при помощи томографической функции распределения вероятности (томограммы), введем совместную томографическую функцию распределения вероятности, зависящую от случайной классической координаты и случайной квантовой координаты для описания состояния гибридной системы, состоящей из квантовой и классической подсистем. В работе [102, 110] было получено уравнение эволюции для оптической томограммы, задающей состояние системы, для классической частицы и для квантовой частицы. В данной главе, следуя [44], мы введем уравнение эволюции для совместной функции распределения вероятности состояния гибридной системы (классическая, квантовая частица) в более общем случае. Введенное уравнение будет совместным с уравнением Лиувилля в классической области и с кинетическим уравнением фон Неймана в квантовой области.

7.1 Корреляции случайных величин

Рассмотрим совместную томографическую функцию распределения (совместную оптическую томограмму) $w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2)$, зависящую от двух действительных, случайных величин X_1 и X_2 и двух углов θ_1 и θ_2. Случайные переменные является двумя координатами, измеряемыми в системах отсчета с осями, подвергнутыми операциям поворота на углы θ_1 и θ_2 в фазовом пространстве. Совместная функция распределения называется оптической томограммой и удовлетворяет условию неотрицательности

$$w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2) \geq 0, \tag{589}$$

и нормировки

$$\int w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2) dX_1 dX_2 = 1. \tag{590}$$

Если обе частицы являются классическими, то задающая их состояние совместная функция распределения $f(q_1, p_1, q_2, p_2)$ удовлетворяет условию неотрицательности. Условие неотрицательности интегрального преобразования Радона, связывающего томограмму с функцией распределения вероятности состояния системы, имеет вид

$$\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\pi} d\theta_1 d\theta_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 d\eta_2 dX_1 dX_2 w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2) |\eta_1 \eta_2| \exp(i[\eta_1(X_1 - q_1 \cos\theta_1$$
$$-p_1 \sin\theta_1) + \eta_2(X_2 - q_2 \cos\theta_2 - p_2 \sin\theta_2)]) = f(q_1, p_1, q_2, p_2) \geq 0, \tag{591}$$

где $f(q_1,p_1,q_2,p_2)$ - функция распределения вероятности двух частиц в их фазовом пространстве. Она удовлетворяет условию нормировки

$$\int f(q_1,p_1,q_2,p_2)dq_1dq_2dp_1dp_2=1, \tag{592}$$

если выполнено условие (590). Если обе частицы квантовые, то томограмма, задающая их состояние, должна удовлетворять условию неотрицательности оператора плотности, которое является квантовой версией преобразования Радона и имеет вид следующего интеграла

$$\hat{\rho}(1,2)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}d\theta_1d\theta_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\eta_1d\eta_2dX_1dX_2w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)|\eta_1\eta_2|\exp(i[\eta_1(X_1$$
$$-\hat{q}_1\cos\theta_1-\hat{p}_1\sin\theta_1)+\eta_2(X_2-\hat{q}_2\cos\theta_2-\hat{p}_2\sin\theta_2)])\geq 0, \tag{593}$$

где $\hat{q}_1$,$\hat{q}_2$,$\hat{p}_1$,$\hat{p}_2$ операторы координат и импульсов обеих квантовых частиц. Неравенство (593) означает, что собственные значения оператора $\hat{\rho}(1,2)$ являются неотрицательными числами. В томографическом представлении состояние гибридной системы, состоящей из классической и квантовой подсистем, будет задаваться совместной функцией распределения вероятности. Рассмотрим оптическую томограмму состояния гибридной системы $w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)$. Томограмма первой частицы равна $\Omega_1(X_1,\theta_1)=\int w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)dX_2$, томограмма второй частицы имеет вид $\Omega_2(X_2,\theta_2)=\int w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)dX_1$. Обе томограммы $\Omega_1(X_1,\theta_1)$, $\Omega_2(X_2,\theta_2)$ должны удовлетворять условиям

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}d\theta_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\eta_1dX_1\Omega_1(X_1,\theta_1)|\eta_1|\exp i\eta_1(X_1-q_1\cos\theta_1-p_1\sin\theta_1)=f_1(q_1,p_1)\geq 0 \tag{594}$$

и

$$\hat{\rho}(2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}d\theta_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\eta_2dX_2\Omega_2(X_2,\theta_2)|\eta_2|\exp\left[i\eta_2(X_2-\hat{q}_2\cos\theta_2-\hat{p}_2\sin\theta_2)\right]\geq 0. \tag{595}$$

Данные условия означают, что интеграл (594) приводит к функции распределения вероятности классического состояния первой частицы в фазовом пространстве, а интеграл (595) приводит к оператору плотности квантового состояния второй частицы. Совместная томограмма может удовлетворять условию (591) для обеих степеней свободы и нарушать условие (593). Такие томограммы описывают состояние двух классических частиц. Если совместная томограмма удовлетворяет условию (593) для обеих степеней свободы и нарушает условие(591), то она задает состояние двух квантовых частиц. Совместная томограмма $w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2)$ может нарушать оба условия (591) и (593), в этом случае она не описывает ни классическое, ни квантовое состояние двух частиц. Такая томограммы не может быть использована для описания состояния гибридной системы, состоящей из классической и квантовой частиц.

7.2 Корреляция квантовых и классических переменных

Томограмма гибридной системы может быть записана в факторизвоанной форме

$$w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2) = \Omega(X_1, \theta_1)\Omega_2(X_2, \theta_2), \tag{596}$$

где $\Omega_1(X_1, \theta_1)$ - классическая томограмма, а $\Omega_2(X_2, \theta_2)$ - квантовая томограмма. Томограмма (596) является совместной функцией распределения вероятности двух случайных переменных координат X_1 и X_2 для системы, не содержащей корреляции этих наблюдаемых величин. Это означает, что поведение классической частицы не оказывает влияние на поведение квантовой частицы и наоборот. Существуют также томограммы следующего вида

$$w(X_1, X_1, \theta_1, \theta_2) = P\Omega_1(X_1, \theta_1)\Omega_2(X_2, \theta_2) + (1-P)\bar{\Omega}_1(X_1, \theta_1)\bar{\Omega}_2(X_2, \theta_2), \tag{597}$$

где $0 \leq P \leq 1$. Томограмма (596) описывает состояние, которое является смесью (выпуклой суммой) двух совместных функций распределений вероятности (593) без корреляций. Эта смесь приводит к ненулевым корреляциям двух случайных координат. Ковариация двух случайных координат имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_{X_1X_2} = \langle X_1X_2\rangle - \langle X_1\rangle\langle X_2\rangle = \int w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2)X_1X_2dX_1dX_2 \\
&-\int X_1w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2)dX_1dX_2\int X_2w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2)dX_1dX_2 = \\
&\int (P\Omega_1(X_1, \theta_1)\Omega_2(X_2, \theta_2) + (1-P)\bar{\Omega}_1(X_1, \theta_1)\bar{\Omega}_2(X_2, \theta_2))X_1X_2dX_1dX_2 \\
&-\int X_1(P\Omega_1(X_1, \theta_1)\Omega_2(X_2, \theta_2) + (1-P)\bar{\Omega}_1(X_1, \theta_1)\bar{\Omega}_2(X_2, \theta_2))dX_1dX_2 \\
&\times\int X_2(P\Omega_1(X_1, \theta_1)\Omega_2(X_2, \theta_2) + (1-P)\bar{\Omega}_1(X_1, \theta_1)\bar{\Omega}_2(X_2, \theta_2))dX_1dX_2,
\end{aligned} \tag{598}$$

и она не равна нулю.

Наиболее общее выражение для томограммы состояния гибридной системы, представимой в виде наиболее общего вида выпуклой суммы томограмм без корреляций, имеет вид

$$w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)=\sum_k P_k\Omega_1^{(k)}(X_1,\theta_1)\Omega_2^{(k)}(X_2,\theta_2), \qquad (599)$$

где $0\leq P_k\leq 1$ и $\sum_k P_k=1$. Эта томограмма соответствует ковариации

$$\begin{aligned}&\sigma_{X_1X_2}=\langle X_1X_2\rangle-\langle X_1\rangle\langle X_2\rangle=\int w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)X_1X_2dX_1dX_2-\\&\int X_1w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)dX_1dX_2\int X_2w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)dX_1dX_2=\\&\int(\sum P_k\Omega_1^{(k)}(X_1,\theta_1)\Omega_2^{(k)}(X_2,\theta_2))X_1X_2dX_1dX_2\\&-\int X_1(\sum P_k\Omega_1^{(k)}(X_1,\theta_1,\Omega_2^{(k)}(X_2,\theta_2))dX_1dX_2\\&\times\int X_2(\sum P_k\Omega_1^{(k)}(X_1,\theta_1,\Omega_2^{(k)}(X_2,\theta_2))dX_1dX_2\end{aligned} \qquad (600)$$

Формула (599) может быть обобщена на случай перепутанных состояний гибридной системы. Томограмма перепутанных состояний по аналогии с перепутанными состояниями двухчастичной системы имеет вид

$$\begin{aligned}&w^{ent}(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)=(1+\mu)\sum_k P_k\Omega_1^{(k)}(X_1,\theta_1)\Omega_2^{(k)}(X_2,\theta_2)\\&-\mu\sum_{k'}P_{k'}\Omega_1^{(k')}(X_1,\theta_1)\Omega_2^{(k')}(X_2,\theta_2)\end{aligned} \qquad (601)$$

где $\mu\geq 0$. Томограмма перепутанных состояний по форме аналогична распределению, заданному двумя числами z и $1-z$, $1\geq z\geq 0$, которое получено как разница

$$z=(1+\mu)x-\mu y;\quad 1-z=(1+\mu)(1-x)-\mu(1-y),\qquad 1\geq x,\quad y\geq 0.$$

Условие

$$y(\frac{\mu}{1+\mu})\leq x\leq\frac{1+y\mu}{\mu+1}$$

гарантирует, что функция распределения вероятности, определяемая числом z, аналогична функции распределения вероятности, задающей перепутанное состояние.

7.3 Уравнение эволюции

Томограмма гибридной системы удовлетворяет уравнению эволюции. Мы предлагаем следующее уравнение, для системы, состоящей из двух частиц

$$\frac{\partial}{\partial t}w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2,t)=[\cos^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}-\frac{1}{2}\sin 2\theta_1\{1+X_1\frac{\partial}{\partial X_1}\}]w(X_1,X_2,\theta_1,\theta_2)$$

$$+2[\mathrm{Im}U_1\{q_1 \to \{\sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1}[\frac{\partial}{\partial X_1}]^{-1} + X_1\cos\theta_1 + i\frac{\sin\theta_1}{2}\frac{\partial}{\partial X_1}\}\}]w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2)$$
$$+[\cos^2\theta_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{1}{2}\sin 2\theta_2\{1 + X_2\frac{\partial}{\partial X_2}\}]w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2) + [\frac{\partial}{\partial q_2}U_2\{q_2 \to \{\sin\theta_2$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\theta_2}[\frac{\partial}{\partial X_2}]^{-1} + X_2\cos\theta_2 + i\frac{\sin\theta_2}{2}\frac{\partial}{\partial X_2}\}\}]\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial X_2}w(X_1, X_2, \theta_1, \theta_2), \tag{602}$$

где U_1 и U_2 потенциальные энергии квантовой и классической частицы соответственно.

Для симплектической томограммы состояния двух частиц $w(X_1, X_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t)$ уравнение эволюции (602) имеет вид

$$\{\frac{\partial}{\partial t} - \nu_1\frac{\partial}{\partial\mu_1} - \nu_2\frac{\partial}{\partial\mu_2} - \frac{1}{i}[U_1\{q_1 \to (-\frac{\partial}{\partial\mu_1}(\frac{\partial}{\partial X_1})^{-1} + \frac{i}{2}\nu_1\frac{\partial}{\partial X_1})\} - c.c.]$$
$$-[\frac{\partial U_2}{\partial q_2}\{q_2 \to -\frac{\partial}{\partial\mu_2}(\frac{\partial}{\partial X_2})^{-1}\}]\nu_2\frac{\partial}{\partial X_2}\}w(X_1, X_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, t) = 0. \tag{603}$$

Оба уравнения (602) и (603) приводят к классическому уравнению Лиувилля для томограммы классической частицы и к квантовому уравнению фон Неймана для томограммы квантовой частицы. Обе эти томограммы получены путем усреднения томограммы двух частиц по квантовой переменной, координате X_1, или по классической переменной, координате X_2.

С одной стороны предложенные уравнения сохраняют в ходе эволюции форму томограмм, как представимых в виде выпуклой суммы томограмм без корреляций, так и форму томограмм, соответствующих перепутанным состояниям. С другой стороны корреляции квантовых и классических наблюдаемых присутствуют в решении уравнений (602), 603).

8 Заключение

Приведем основные результаты диссертационной работы, основанной на материале публикаций [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [46], [41], [42], [43], [44], [45], [47], [48]. В диссертационной работе дан обзор свойств преобразования Радона и построено томографическое представление состояний классической частицы с флуктуациями координаты и импульса. Получено кинетическое уравнение Лиувилля в томографическом представлении для многих частиц и выполнена процедура редукции этого уравнения, аналогичная построению цепочки Боголюбова. Рассмотрен простейший пример релятивистского кинетического уравнения для свободной частицы в томографическом представлении. Обсуждены свойства сепарабельности и запутанности квантовых состояний частиц со спином и их корреляционных свойств с использованием томограмм спиновых состояний. Сформулирован критерий, позволяющий в некоторых случаях определить для двух кутритов, является ли их состояние запутанным, что является актуальной задачей в квантовой теории информации. Построенное в работе томографическое представление кинетических уравнений в классической статистической механике допускает обобщение на квантовую область.

Записаны зависящие от состояний соотношения неопределенностей для двух состояний фотона в томографической форме, введены некоторые неравенства, которые могут быть проверены экспериментально. Показано, что произвольные вектора вероятности и томографические вектора вероятности, описывающие квантовые состояния кудитов, удовлетворяют неравенствам на энтропию, связанную с этими векторами вероятности. Все эти неравенства получены для векторов вероятности, которые принадлежат к специальному набору векторов. Вектора в наборе получены из исходных векторов вероятности в результате преобразования, задаваемого бистохастическими матрицами. Полученные для томограммы кудитного состояния соотношения неопределенности могут быть проверены экспериментально. Получено несколько новых неравенств для энтропии состояний, заданных спиновыми томограммами, в том числе в случае двухчастичной системы, и в случае частицы со спином равным $3/2$.

Введен томографический кумулянт, являющийся характеристикой степени негауссовости состояния, который может быть измерен в экспериментах по гомодинному детектированию фотонов [11].

Обсуждено вероятностное представление спиновых состояний, изучены свойства энтропии, связанной с распределениями вероятности, получены новые неравенства для полиномов Эрмита двух переменных.

Предложено описывать состояние гибридной системы, состоящей из классической и квантовой подсистем совместной томографической функцией распределения вероятностей (совместной томограммой), обсуждены свойства таких томограмм. Предложено модельное уравнение эволюции для томограммы состояний гибридной системы. Показано, что уравнение эволюции приводит к уравнению Лиувилля для томограммы состояния классической подсистемы и к уравнению фон Неймана для томограммы состояния квантовой подсистемы после соответствующего усреднения исходного уравнения по квантовым и классическим степеням свободы соответственно. Показано, что перепутаннность квантовых и классических подсистем в гибридной системе может быть определена путем исследования свойств суммарной томографической вероятности двухчастичной квантовоклассической системы. Предложен метод экспериментальной проверки присутствия классической моды путем изучения распределения квадратуры при гомодинном детектировании. В случае наличия классической моды распределение квадратуры при гомодинном детектировании может нарушать соотношения неопределенности. Отмечено, что предложенный формализм обеспечивает расширение границ обычной классической и квантовой механики.

Положения выносимые на защиту

1. Кинетическое уравнение Лиувилля, включая релятивистское, получено в томографическом представлении.
2. Введен метод кубитного портрета кудитных состояний для изучения запутанности состояний составных систем кудитов с помощью нарушения неравенства Белла.
3. Построение квантово-подобной схемы с использованием волновой функции для описания состояния классического осциллятора. Рассмотрение в томографическом вероятностном представлении комбинированной системы с классической и квантовой подсистемами.
4. Получение формул для соотношений неопределенности в томографическом представлении, удобном для экспериментальной проверки и рассмотрение их связи с задачей о проницаемости потенциального барьера.

5. Нахождение критерия гауссовости квантовых состояний в форме томографического кумулянта. Получение новых неравенств для ортогональных полиномов, встречающихся при вычислении вероятностей квантовых переходов.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте имена П. Н. Лебедева Российской Академии Наук.

Выражаю глубокую благодарность за постоянное внимание моему научному руководителю Манько Владимиру Ивановичу и руководителю дипломной работы профессору физического факультета МГУ Садовникову Борису Иосифовичу. Выражаю благодарность моим соавторам Пилявцу Олегу Вадимовичу, Зборовскому Вадиму Гарольдовичу и Манько Ольге Владимировне.

Список литературы

[1] E. Schrödinger, "Quantisierung als Eigenwertproblem”, *Ann. Phys* (Leipzig), **79**, p. 489 (1926)

[2] L. D. Landau, "Проблема затухания в волновой механике”, *Z. Physik*, **45**, p. 430 (1927)

[3] J. von Neumann, "Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik”, *Nach. Ges. Wiss. Göttingen*, **11**, 245 (1927); J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932)

[4] E. Wigner, "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium”, *Phys. Rev.*, **40**, p. 749 (1932)

[5] D. I. Blokhintsev, "The Gibbs Quantum Ensemble and its Connection with the Classical Ensemble”, *J. Phys.*, **2** p.71 (1940)

[6] K. Husimi, "Some Formal Properties of the Density Matrix”, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, **23**, p. 264 (1940)

[7] R. J. Glauber, "Coherent and Incoherent States of the Radiation Field”, *Phys. Rev.*, **131**, N 6, p. 2766 (1963)

[8] C. G. Sudarshan, "Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams”, *Phys. Rev. Lett.*, **10**, p. 277 (1963)

[9] S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, ”Symplectic tomography as classical approach to quantum systems”, *Phys. Lett. A*, **213**, 1 (1996)

[10] A. Ibort, V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, and F. Ventriglia, "An introduction to the tomographic picture of quantum mechanics”, *Phys. Scr.*, **79**, 065013 (2009).

[11] M. Bellini, A. S. Coelho, S. N. Filippov, V. I. Man'ko, A. Zavatta, "Towards higher precision and operational use of optical homodyne tomograms”, *Phys. Rev. A*, **85**, 052129 (2012)

[12] В. И. Манько, О.В. Манько, "Томография спиновых состояний", *ЖЭТФ*, **112**, вып. 3(9), с. 796(1997)

[13] В. А. Андреев, В. И. Манько, О. В. Манько и Е. В. Щукин, "Томография спиновых состояний, критерий перепутанности и неравенства Белла", *ТМФ*, **146**, 140 (2006); V. A. Andreev, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko and S. S. Safonov, "Spin states and probability distribution functions", *J. Russ. Laser Res.*, **19**, 340 (1998); В. А. Андреев, В. И. Манько, "Томография двухчастичных спиновых состояний", *ЖЭТФ*, **114**, 2(8), с. 437 (1998)

[14] V. N. Chernega, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, O. V. Pilyavets and V. G. Zborovskii, "Tomographic characteristics of spin states", *J. Russ. Laser Res.*, **27**, 132 (2006)

[15] С. Н. Филиппов, "Квантовые состояния и динамика спиновых систем и электромагнитного поля в представлении томографической вероятности", диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 172 с., Москва (2012)

[16] О. В. Пилявец, "Некоторые вопросы применения вероятностного представления в квантовой механике и теории бозонных квантовых каналов с памятью", диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 149 с., Москва (2009)

[17] Г. Г. Амосов, "Вероятностные и когомологичесеские характеристики квантовых динамических систем", диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 212 с., Москва (2008)

[18] Я. А. Коренной, "Вероятностное представление квантовой механики и неклассических состояний поля излучения", диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 141 с., Москва (2011)

[19] D. F. Styer, et.al. "Nine formulations of quantum mechanics", *Am. J. Phys.*, **70(3)**, 288(2002)

[20] J. S. Bell, "Speakable abd Unspeakable in Quantum Mechanics", *Physics* (Long Island City, N. Y.), **1**, 195 (1964)

[21] Н. Н. Боголюбов, *Избранные статьи* (в трех томах), *Наукова Думка*, Киев (1966); Н. Н. Боголюбов, Д. Б. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1957)

[22] Н. Н. Боголюбов (мл.), Б. И. Садовников, *Некоторые вопросы статистической механики*, Москва, Высшая школа (1975)

[23] J. E. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **45**, p. 99 (1949)

[24] J. Radon, "Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten”, *Ber. Sachs. Akad. Wiss.*, Leipzig, **69**, 262 (1917)

[25] Olga Man’ko and V. I. Man’ko, "Quantum State in probability representation and tomography”, *J. Russ. Laser Res.*, **18**, 407 (1997)

[26] В. Л. Гинзбург, И. Е. Тамм, "К теории спина”, *ЖЭТФ*,**17**, 227 (1947)

[27] V. L. Ginzburg, ”On relativistic wave equations with a mass spectrum”, *Acta Phys. Pol.*, **15**, 163 (1956), V.L. Ginzburg, V.I. Manko, "Relativistic oscillator models of elementary particles *Nuclear Physics*, **74**, N 3, 577 (1965)

[28] М. А. Марков, ”К теории динамически деформируемого формфактора”, *ДАН СССР*, **101**, 51 (1955)

[29] M. A. Markov, ”On dynamically deformable form factors in the theory of elementary particles”, *Nuovo Cim.*, Ser. X, **3**, N 4, suppl. P. 760(1956)

[30] И. М. Гельфанд, Я. Н. Яглом, ”Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца”, *ЖЭТФ*, **18**, p. 703; 1094; 1105 (1948)

[31] Л. М. Сладь, ”К теории бесконечнокомпонентных полей с двойной симметрией. Свободные поля”, *ТМФ*, **129**, 68 (2001)

[32] Л. М. Сладь, ”К теории бесконечнокомпонентных полей с двойной симметрией. Взаимодействие полей”, *ТМФ*, **133**, 54 (2002)

[33] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, ”Positive distribution description for spin states”, *Phys. Lett. A*, **239**, 335 (1997)

[34] V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "Qubit portrait of qudit states and Bell inequalities”, *J. Russ. Laser Res.*, **28**, 103 (2007)

[35] V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "Entropy and information characteristics of qubit states”, *J. Russ. Laser Res.*, **29**, 505 (2008)

[36] V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "Relativistic quantum and classical kinetic equations in the tomographic-probability representation”, *J. Russ. Laser Res.*,**29**, 43 (2008)

[37] V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "Wave function of the harmonic oscillator in classical statistical mechanics”, *J. Russ. Laser Res.*, **28**, 535 (2007)

[38] V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "The wave function of the classical parametric oscillator and the tomographic probability of the oscillators state”, *J. Russ. Laser Res.*, **29**, 347 (2008)

[39] V. N. Chernega and V. I. Man'ko, "Bistohastic matrices and statistical characteristics of quantum observables”, *J. Russ. Laser Res.*, **30**, 359 (2009)

[40] В. И. Манько, О. В. Манько, Н. В. Чернега, "Неравенства Белла и запутанные состояния спиновых систем”, в сборнике: "Физика Атомного Ядра и Элементарных Частиц Материалы XXXIX и XL Зимней Школы, Из-во ИПЯФ РАН, Санкт-Петербург, с. 261 (2007)

[41] V. N. Chernega, V. I. Man'ko, and B. I. Sadovnikov, "Radon transform and kinetic equations in the tomographic representation”, *J. Russ. Laser Res.*, **30**, N 6, 570 (2009)

[42] Vladimir N. Chernega, "How can we check uncertainty relation?”, *Phys. Scr.*, **T147**, 014006 (2012)

[43] О. В. Манько, В. Н. Чернега, "Квантовые корреляции и томографическое представление”, *Письма ЖЭТФ*, **79**, N 9, 642(2013)

[44] V. N. Chernega, V. I. Man'ko, "System with classical and quantum subsystems in tomographic probability representation", *AIP Conference Proceedings*, **1424**, 33 (2012)

[45] V. N. Chernega, V. I. Man'ko, "State extended uncertainty relations and tomographic inequalities as quantum system state characteristics", *Int. J. of Quantum Information*, **10**, 124101 (2012)

[46] В. И. Манько, Б. И. Садовников, В. Н. Чернега, "Томографическое представление кинетических уравнений в классической статистической механике", *Вестник московского университета, серия 3: Физика. Астрономия*, N 5, 26 (2010)

[47] V. N. Chernega, "Purity dependent uncertainty relations and a possible enhancement of the quantum tunneling phenomenon", *J. Russ. Las. Res.*, **34** , N 2, 168 (2013); arXiv:1303.5238 (2013)

[48] V. N. Chernega, V. I. Man'ko, "Probability representation and state-extended uncertainty relations", *J. Russ. Laser Res.*, **32**, 125 (2011)

[49] V. N. Chernega, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, "Generalized qubit portrait of the qutrit state density matrix", *J.Russ. Laser Res.*, ; arXiv 1306.3182v1[quant-ph], (2013)

[50] J. Bertrand, P. Bertrand, "A tomographic approach to Wigner's function", *Found. Phys.*, **17**, p. 397 (1987); K. Vogel, H. Risken, "Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase", *Phys. Rev. A*, **40**, p. 2847 (1989)

[51] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani, "Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: application to squeezed states and the vacuum", *Phys. Rev. Lett.*, **70**, p. 1244 (1993)

[52] I. J. Dunn, I. A. Walmsley, C.Mukamel, "Experimental determination of the quantum- mechanical state of a molecular vibrational mode using fluorescence tomography", *Phys. Rev. Lett.*, **74**, p. 884 (1995)

[53] S. Shiller, G. Breitenbach, S. F. Pereira, T. Muller, J. Mlynek, "Quantum Statistics of the Squeezed Vacuum by Measurement of the Density Matrix in the Number State Representation", *Phys. Rev. Lett.*, **77**, p. 2933 (1996)

[54] A. I. Lvovsky, H. Hansen, T. Aichele, O. Benson, J. Mlynek, S. Shiller, "Quantum State Reconstruction of the Single-Photon Fock State", *Phys. Rev. Lett.*, **87**, N 5, p. 050402-1 (2001)

[55] S. Wallentowitz, W. Vogel, "Reconstruction of the quantum mechanical state of a trapped ion", *Phys. Rev. Lett*, **75**, p. 2932 (1995)

[56] O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, "Classical mechanics is not $\hbar \to 0$ limit of quantum mechanics", *J. Russ. Laser Res.*, **25**, 477 (2004); O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **22**, N 2, p. 149 (2001)

[57] И. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Москва, Наука (1979)

[58] V. I. Man'ko, R. V. Mendes, "Non-commutative Time-frequency Tomography",*Physica D*, **145**, p. 330 (2000)

[59] V. P. Ermakov, "Transformation of differential equations", *Univ. Izv. Kiev.* **20**, 1 (1880)

[60] H. Weyl, "Quantenmechanik und Gruppentheorie", *Zs. f. Physic*, **46**, 1 (1928)

[61] Д. Л. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва, 752 с. (1974)

[62] S. Mancini, V. I. Man'ko and P. Tombesi, "Classical-Like Description Of Quantum Dynamics By Means Of Symplectic Tomography", *Found. Phys.*, **27**, 801 (1997)

[63] O. V. Man'ko, "Tomography of spin states and classical formulation of quantum mechanics", *Proc. International Conference "Symmetries in Science X" (Bregenz, Austria, 1997)*, B. Gruber and M. Ramek eds., p.207 (Plenum Press, N.Y.), 1998

[64] M. O. Terra-Cunha, V. I. Man'ko and M. O. Scully, "Quasiprobability And Probability Distributions For Spin 1/2 States",*Found. Phys. Lett.*, **14**, 103 (2001)

[65] V. I. Man'ko and S. S. Safonov, "Tomography Of Quantum States Of A Symmetric Rotor", *Ядерная Физика*, **61:4** 658(1998); В. И. Манько, О. В. Манько и С. С. Сафонов, "Описание спиноров с помощью функций распределения вероятности", *ТМФ*, **115**, 155 (1998)

[66] В. А. Андреев, В. И. Манько, "Неравенство Белла для двухчастичных смешанных спиновых состояний", *ТМФ*, **140(2)**, с. 284(2004)

[67] O. Castanos, R. Lopes-Pena, M. A. Man'ko and V. I. Man'ko, "Kernel Of Star-product For Spin Tomograms", *J. Phys. A*, **36**, 4677 (2003)

[68] A. B. Klimov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, Yu. F. Smirnov and V. N. Tolstoy, "Tomographic representation of spin and quark states", *J. Phys. A*, **35**, 6101 (2002); O. V. Man'ko, "Spin and quark states in the probability representation of quantumk mechanics", *Acta Physica Hungarica A*, Series Heavy Ion Physics, **19/3-4** 313 (2004)

[69] В. И. Манько и О. В. Манько, "Стандартная квантовая механика с вероятностью вместо волновой функции", *Ядерная физика*, **69**, 1113 (2006)

[70] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko and G. Marmo, "Star-product of generalized Wigner-Weyl symbols on SU(2) group, deformation and tomographic probability distribution", *Phys. Scripta*, **62**, 446 (2000)

[71] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko and G. Marmo, "Alternative commutation relations, star-products and tomography", *J. Phys. A*,**35** , 699 2002; "Tomographic map within the framework of star-product quantization", *Proceedings of the Second International Symposium on Quantum Theory and Symmetries, (Krakow, 2001)*, E. Kapuschik and A. Morzela eds., p. 126, (World Scientific), 2001

[72] E. Schrödinger, "Die gegenwartige Situation in der Quantenmechanik", *Naturwissenschaften*, **23**, 807; 823; 844 (1935)

[73] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, and F. Zaccaria, "Entanglement structure of the adjoint representation of the unitary group and tomography of quantum staes", *J. Russ. Laser Res.*, **24**, 507 (2003)

[74] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan and F.Zaccaria, "Entanglement in probability representation of quantum states and tomographic criterion of separability", *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **6**, 1 (2004)

[75] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan and F. Zaccaria, "Positive maps of density matrix and a tomographic criterion of entanglement", *Phys. Lett. A*, **327**, 353 (2004)

[76] C. Lupo, V. I. Man'ko, and G. Marmo, "Bell's inequalities in the tomographic representation", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**, 12515 (2006)

[77] N. Gisin, "Bell inequalities: many questions, a few answers", quant-ph/0702021v1, 8 p. (2007)

[78] O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, "Probability representation and spin states of two particle", *J. Russ. Laser Res.*, **27**, 319 (2006)

[79] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, "Proposed experiment to test local hidden-variable theories," *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 880 (1969)

[80] B. S. Cirel'son, "Quantum Generalizations of Bell's Inequality", *Lett. Math. Phys.*, **4**, 93 (1980)

[81] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication", *Bell System. Tech. J.*, **27**, 379 (1948)

[82] D. A. Trifonov, "State extended uncertainty relations", J. *Phys. A: Math. Gen.*, **33** L299 (2000)

[83] D. A. Trifonov, "Generalizations of Heisenberg uncertainty relation", *Eur. Phys. J. B - Cond. Matter Complex Syst.*, **29**, 349 (2002)

[84] V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Porzio, S. Solimeno, and F. Ventriglia, "Homodyne estimation of quantum state purity by exploiting the covariant uncertainty relation", *Phys. Scr.*, **83**, 04500 (2011)

[85] V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. A. Ventriglia, " Possible Experimental Check of the Uncertainty Relations by Means of Homodyne Measuring Field Quadrature", *Advanced Science Letters*, **2**, N 4, p. 517 (2009)

[86] A. Renyi, *Probability Theory*, North-Holland, Amsterdam (1970)

[87] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, and R. V. Mendes, "A probability operator symbol framework for quantum information," *J. Russ. Laser Res.*, **27**, 506 (2006); 0602quant-ph/0602189v1

[88] V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, and V. I. Man'ko, "Photon distribution for one-mode mixed light with a generic Gaussian Wigner function", *Phys. Rev. A*, **49**, 2993 (1994)

[89] C. Tsallis, "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs entropy," *J.Stat.Phys* , **52**, 479 (1988)

[90] V. I.Manko, G. Marmo, A. Simoni, and F. Ventriglia, "Semigroup of positive maps for qudit states and entanglement in tomographic probability representation"', *Phys. Lett.A*, **372**, 6490 (2008)

[91] W. Heisenberg, "Uber quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen", *Z. Phys.*, **43**, 172 (1927)

[92] V. I. Man'ko, and R. V. Mendes, ArXiv Physica/9712022 Data Analysis, Statistics, and Probability (1997); "Non-commutative Time-frequency Tomography",*Phys. Lett. A*, **263**, 53 (1999)

[93] S. Weinberg, "Collapse of the state vector", arXiv:1109.6462v1 [quant-ph].

[94] G. t'Hooft, "The mathematical basis for deterministic quantum mechanics", ArXiv quant-ph/0604008

[95] A. Peres, D. Terno, "Hybrid classical-quantum dynamics," *Phys. Rev. A*, **63**, 022101 (2001)

[96] E. Schrödinger, "Zum. Heisenbergschen. Un- scharfeprinzip," *Ber. Kgl. Akad. Wiss.*, Berlin, **24**, 296 (1930)

[97] H. P. Robertson, ”The uncertainty principle”,*Phys. Rev. A*, **35**, N 5, 667 (1930)

[98] В. В. Додонов и В. И. Манько, *Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем*, Труды ФИАН, т. 183, Москва, Наука (1989)

[99] V. V. Dodonov, *Quantum Semiclass. Opt.*, **4**, R1 (20002)

[100] M. A. Man’ko, and V. I. Man’ko, "Probability description and entropy of classical and quantum systems”, *Found. Phys.*, **41**, 330 (2011)

[101] V. I. Manko, G. Marmo, A. Simoni, and F. Ventriglia, ”A Possible Experimental Check of the Uncertainty Relations by Means of Homodyne Measuring Field Quadrature”, *Adv.Sci.Lett.*, **2**, 517 (2009)

[102] Yu. A. Korennoy, V. I. Man’ko, ”Probability representation of quantum evolution and energy level equations for optical tomograms” e-Print: arXiv:1101.2537v1[quant-ph] 13 Jan. 2011, *J. Russ. Laser Res.*, *32* ,338 (2011)

[103] A. Mandilara, E. Karpov, and N. J. Cerf, ”Extending Hudson’s theorem to mixed quantum states”, *Phys. Rev. A*, **79**, 062302 (2009); A. Mandilara, and N. J. Cerf, ”Quantum uncertainty relation saturated by the eigenstates of the harmonic oscillator”, *Phys. Rev. A*, **86**, 030102(R)(2012)

[104] C. Bastos, O. Bertolami, N. Costa Dias [et al.], ”Violation of the Robertson-Schrodinger uncertainty principle and noncommutative quantum mechanics”, *Phys. Rev. D*, **86**, 105030 (2012)

[105] G. A. Gamov, ”Zur Quantentheorie der Atomzertriimmerung”, *Zeitschrift fur Physik*, **52**, 510 (1928)

[106] V. V. Dodonov, E. A. Kurmyshev, and V. I. Man’ko, ”Generalized uncertainty relation and correlated coherent states”, *Phys. Lett. A*, **79**, 150 (1980)

[107] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, and V. I. Man’ko, *Physical effects in correlated quantum states. Squeezed and Correlated States of Quantum Systems*, *Proc. Lebedev Physics Institute*, vol. 205, ed. M. A. Markov, Commack: Nova Science, (1993)

[108] В. И. Высоцкий, С. В. Адаменко, М. В. Высоцкий, "Формирование коррелированных состояний и увеличение прозрачности барьера при низкой энергии частиц в нестационарных системах с демпфированием и флуктуациями", *ЖЭТФ*, **142**, вып. 4(10), с. 627(2012); В. И. Высоцкий, М. В. Высоцкий, С. В. Адаменко, "Особенности формирования и применения коррелированных состояний в нестационарных системах при низкой энергии взаимодействия частиц" *ЖЭТФ*, **141**, вып. 4(10), с. 276(2012)

[109] H-T. Elze, G. Gambarotta, F. Vallone,"General linear dynamics Џ quantum, classical or hybrid", *J. Phys.: Conf.Ser.*, **306**, 012010 (2011)

[110] G. G. Amosov, Ya. A. Korennoy, V. I. Man'ko, "Description and measurement of observables in the optical tomographic probability representation of quantum mechanics", *Phys. Rev. A*, **85**, 052119, 9 pp. (2012)