

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук

На правах рукописи

Коваленко Александр Михайлович

## **Флуктуационные явления в анизотропной гидродинамике**

Специальность 1.3.3 —  
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук,  
Леонидов Андрей Владимирович

Москва 2024

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Релятивистская анизотропная гидродинамика</b> . . . . .	13
1.1 Тензор энергии-импульса . . . . .	13
1.2 Анизотропная функция распределения . . . . .	16
1.3 Уравнения движения в буст-инвариантном продольном случае .	18
<b>Глава 2. Распространение звука и конус Маха в случае</b> <b>    постоянной анизотропии</b> . . . . .	24
2.1 Волновое уравнение . . . . .	24
2.2 Конус Маха . . . . .	27
<b>Глава 3. Ударные волны в случае постоянной анизотропии</b> . . .	31
3.1 Изотропное решение идеальной жидкости . . . . .	31
3.2 Поперечные и продольные ударные волны . . . . .	34
3.2.1 Поперечная ударная волна . . . . .	34
3.2.2 Продольная ударная волна . . . . .	35
3.2.3 Обсуждение и сравнение . . . . .	36
3.3 Нормальная ударная волна с произвольным полярным углом . .	37
3.3.1 Основные уравнения . . . . .	38
3.3.2 Преломление падающего потока . . . . .	40
3.3.3 Преобразование скорости потока после прохождения	
ударной волны . . . . .	41
3.3.4 Преобразование импульсов . . . . .	45
<b>Глава 4. Ударные волны в случае непостоянной анизотропии</b> . .	47
<b>Глава 5. Линейная устойчивость ударных волн</b> . . . . .	51
5.1 Изотропный случай . . . . .	51
5.1.1 Основные уравнения . . . . .	52
5.1.2 Характеристическое уравнение . . . . .	55
5.1.3 Решение для амплитуды возбуждения . . . . .	57
5.1.4 Анализ мод неустойчивости . . . . .	59
5.2 Анизотропный случай . . . . .	60

	Стр.
5.2.1 Устойчивость продольной ударной волны . . . . .	61
5.2.2 Устойчивость поперечной ударной волны . . . . .	64
5.2.3 Случай произвольного полярного угла . . . . .	67
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>Приложение А. Проверка досветового условия для ударных волн в релятивистской анизотропной гидродинамике . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>Приложение Б. Решение ударной волны для поперечного потока в общем случае . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>Приложение В. Доказательство стабильности ударной волны в изотропном случае . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>Приложение Г. Доказательство стабильности поперечной ударной волны в анизотропном случае . . . . .</b>	<b>91</b>

## Введение

**Актуальность темы и степень её разработанности** Крупные эксперименты по ультрарелятивистским столкновениям тяжёлых ядер, проводимые в начале двадцать первого века на Большом адронном коллайдере (ЛHC) в ЦЕРН и на коллайдере релятивистских ионов (RHIC) в Брукхейвенской национальной лаборатории, показали признаки появления нового горячего и плотного кварк-глюонного вещества, образующегося на начальной стадии этих столкновений [1; 2]. В очень ранние времена после первоначального столкновения эволюция адронной материи обуславливается большим числом высокоэнергетичных КХД-взаимодействий. Современный взгляд на взаимодействие двух налетающих лоренц-сжатых дисков тяжёлых ядер в самые ранние времена столкновения предусматривает их описание в терминах конденсата цветного стекла (КЦС) [3; 4]. Сразу после взаимодействия двух дисков КЦС происходит рождение преимущественно глюонной материи, которая называется глазмой [5; 6]. Было обнаружено, что продольные хромомангнитные и хромоэлектрические поля, генерируемые в глазме сразу же после соударения, приводят к появлению отрицательного продольного давления в тензоре энергии-импульса [5]. Дальнейшая эволюция этой плотной и горячей адронной материи приводит к состоянию, которое называют кварк-глюонной плазмой (КГП). Было обнаружено, что такое плотное и горячее адронное вещество взаимодействует коллективно [7; 8]. Это позволяет использовать гидродинамические методы описания для эволюции кварк-глюонной плазмы.

Быстрое продольное расширение кварк-глюонной материи на начальных стадиях столкновения приводит к появлению такой анизотропии продольного  $P_{\parallel}$  и поперечного  $P_{\perp}$  давлений, что отношение  $P_{\parallel}/P_{\perp} < 1$ . Причём, вне зависимости от начальной конфигурации (вытянутой  $P_{\parallel} > P_{\perp}$  или сплюсченной  $P_{\parallel} < P_{\perp}$ ), последующее расширение материи приводит к анизотропии  $P_{\parallel} < P_{\perp}$ , которая не исчезает полностью в системе в течение всей её эволюции [9]. Диссипативные гидродинамические теории второго порядка, активно использовавшиеся для описания релятивистских сред, применялись и для описания анизотропной кварк-глюонной материи [10–12]. Однако, введение такой большой анизотропии в теориях второго порядка приводило к появлению отрицательного давления на определённых этапах эволюции материи, что могло

означать наличие областей фазового пространства, где одночастичная функция распределения становилась отрицательной [13]. Причиной такого поведения являлся рост величин гидродинамических поправок, которые становились соизмеримы с вкладами от идеальной жидкости [14]. Фактически, анизотропия приводила к необходимости учёта градиентов всех порядков. Таким образом, классические диссипативные теории давали правильные результаты только на некоторых временных масштабах, вследствие чего появилась мотивация к созданию нового гидродинамического описания, где анизотропия заложена в явном виде, - анизотропной релятивистской гидродинамики [15–18].

Самым главным достоинством нового подхода являлся тот факт, что сама постановка теории делает невозможным появление отрицательных значений давления [19], в отличие от уже упомянутых традиционных теорий второго порядка и современных теорий, созданных на основе разложения по моментам [20]. Уравнения движения приводят к решениям, которые оказываются в значительной степени близки к точному решению уравнения Больцмана, в сравнении со стандартными вязкими гидродинамическими теориями. Были получены результаты как для буст-инвариантных систем с течением Бьёркена [15; 17], так и для течения Гапсера в симметричных конформных системах [21; 22]. Являясь своего рода уже результатом реорганизации градиентов в гидродинамическом разложении, анизотропная одночастичная функция распределения предусматривает также учёт более высоких порядков [16]. Анизотропный подход предусматривает задание анизотропного тензора, а не только лишь одного параметра анизотропии, что в диагональном случае позволяет задать несколько параметров в каждом из направлений [23; 24]. Релятивистская анизотропная гидродинамика применялась и для описания массивных квази-частиц в феноменологическом контексте [25], а также показала себя как хороший инструмент для моделирования экспериментальных данных по столкновениям тяжёлых ядер [26; 27].

Одним из примеров опыта построения анизотропных теорий являются исследования в области магнетогидродинамики [66–68]. Методика в данных работах, как в релятивистском, так и в нерелятивистском случаях, также основана кинетическом уравнении Больцмана и явном разделении продольного и поперечного давлений, однако в роль направления анизотропии здесь играет направление магнитного поля. Это приводит к аналогии между формами тензора энергии-импульса и уравнениями движения. Однако в случае магнетогидро-

динамики не приводится явная запись анизотропной одночастичной функции распределения, которая бы представляла собой деформацию изотропной функции распределения уже в нулевом порядке. Также основное внимание уделяется изучению вытянутой конфигурации  $P_{\parallel} > P_{\perp}$  для распространяющегося потока.

В связи со всем вышеперечисленным, в анизотропной гидродинамике интересно изучить базовые явления, например, связанные со звуком, которые скорее всего будут выглядеть совсем иначе, чем в изотропном случае. Звуковые явления в кварк-глюонной и ядерной материях изучались, в основном, в контексте формирования ударных волн [28; 29]. В ранних работах было показано, что поперечные ударные волны в горячем кварк-глюонном веществе могут создаваться начальными флуктуациями локальной плотности энергии (горячие точки), которые являются результатом большого числа КХД-взаимодействий [30]. Такие взаимодействия генерируют мини-струи случайной турбулентной направленности, совпадение которых в малом объёме (порядка  $1 \text{ фм}^3$ ) приводит, в свою очередь, к возникновению неоднородностей плотности энергии.

После открытия эффекта гашения струй в столкновениях тяжёлых ионов возник огромный интерес к явлению конуса Маха [31–33]. В частности, результаты экспериментов по двухчастичным азимутальным корреляциям показали наличие двугорбой структуры с минимумом в точке  $\Delta\varphi = \pi$  для струи, которая потеряла значительную часть энергии при прохождении через плотную и горячую среду [34; 35], - так называемый ридж-эффект. Образование подобной структуры довольно хорошо объяснялось излучением конуса частиц под углом Маха, относительно направления гашённой струи. Альтернативное объяснение наблюдаемой двугорбой структуры заключалось в черенковском излучении партона, движущегося со скоростью, превышающей скорость распространения глюона в горячей плотной среде, образованной при столкновениях тяжёлых ионов [36]. Также двугорбая структура может быть объяснена геометрическими флуктуациями исходного состояния при столкновениях тяжёлых ионов [37; 38]. Двугорбая структуры с минимумом в точке  $\Delta\varphi = \pi$  наблюдалась в экспериментах ЛНС для сильно центральных столкновений ( $0 - 2\%$ ), что обуславливалось возрастающим вкладом высших гармоник потока  $v_n$  с ростом центральности [39; 40]. В столкновениях с малой центральностью таких структур не было обнаружено, поэтому в точке  $\Delta\varphi = \pi$  наблюдался максимум.

Обнаружение конуса Маха может быть усложнено коллективными эффектами среды [41], а также было показано, что образование конуса Маха

менее вероятно для партонов с очень высокой энергией [42]. Несмотря на отсутствие прямых экспериментальных доказательств явления излучения конуса Маха, всё ещё существует значительный интерес к исследованию этого явления в контексте сильносвязной кварк-глюонной среды. Возможность формирования ударных волн и конуса Маха в таких средах была показана для небольших значений отношения сдвиговой вязкости к плотности энтропии  $\eta/S < 0.2$ , что указывает на сильносвязную жидкость [43; 44]. Более того, была продемонстрирована достаточно сильная температурная зависимость  $\eta/S$ . Обработка экспериментальных данных Au-Au столкновений на RHIC показала среднее значение  $\eta/S = 0.12$ , в то время как для Pb-Pb столкновений на LHC, где энергия столкновения больше в 10 раз, было найдено  $\eta/S = 0.2$  [45]. Прочие различные оценки  $\eta/S$  приводят к растущей зависимости от температуры материи [46]. Помимо этого были проведены расчёты, показывающие рост  $\eta/S$  в периферических столкновениях, по сравнению с центральными [47]. Ввиду вышеперечисленного возможен сдвиг к более вязкой кварк-глюонной материи в экспериментах на LHC, что могло бы послужить причиной менее наглядной двугорбой структуры в двухчастичных азимутальных корреляциях.

В контексте столкновений тяжёлых ионов важным является изучение скорости звука и её зависимости от температуры, химического потенциала и других свойств среды. Самые ранние расчёты указывали на аномальное падение скорости звука до нуля в точке фазового перехода первого рода конфаймент-деконфаймент [48]. Обнаруженная температурная зависимость скорости звука в рамках решёточных вычислений КХД демонстрировала резкий минимум  $c_s \simeq 0$  в критической точке фазового перехода  $T_c$  [49]. Более поздние вычисления показали менее глубокий минимум при предположении, что переход конфаймент-деконфаймент является очень быстрым кроссовером, а не настоящим фазовым переходом с сингулярным поведением термодинамических величин [50]. Существование плавного минимума скорости звука около критической температуры фазового перехода  $T_c$  было показано в последующих работах для газа резонансов с распределением Хагедорна  $\rho(m) \approx m^{-a} \exp(bm)$  при суммировании по экспериментально обнаруженным состояниям (до некоторой массы  $M$ ) [51]. Перечисленные расчёты показывают приближение скорости звука к изотропному значению  $c_s^2 = 1/3$  с ростом температуры. При рассмотрении течения Бьёркена в рамках голографического подхода было продемонстрировано наличие двух различных скоростей звука в продольном и поперечном направлениях

[52]. В продольном направлении скорость звука меньше изотропного значения, а в поперечном направлении это значение, наоборот, превышает, что является следствием наличия сильной анизотропии давлений.

Несмотря на успех применения гидродинамического описания в контексте экспериментов и феноменологии столкновений тяжёлых ионов, существуют определённые проблемы в широко используемых диссипативных релятивистских гидродинамических теориях. Разрывные решения ударных волн хорошо известны в рамках релятивистской гидродинамики нулевого порядка для идеальной жидкости [53]. Непрерывные ударноволновые решения появляются в релятивистской теории Навье-Стокса для любых чисел Маха, однако в такой теории возможно распространение информации с неограниченной скоростью [54]. Эта известная проблема нарушения причинности в теориях первого порядка послужила мотивацией к созданию более полных диссипативных теорий, как, например, теория Израэля-Стюарта второго порядка [55], которая с большим успехом применялась для описания релятивистских жидкостей и сред [56; 57], что породило обобщение гидродинамики второго порядка [20; 58]. Проблемой в теории Израэля-Стюарта является неспособность адекватно описать ударные волны [59; 60]. Описание ударных волн в теории второго порядка напоминает непрерывные решения в рамках теории Навье-Стокса до достижения определённой критической точки, после которой решения становятся разрывными, как в случае идеальной жидкости. Таким образом, для теории Израэля-Стюарта существование ударных волн доказано только при малых числах Маха [59]. Анизотропная релятивистская гидродинамика может сделать возможным описание ударных волн в нулевом порядке, что заметно выделяет её среди гидродинамических теорий, использующихся для описания эволюции кварк-глюонной плазмы.

**Целью** работы является построение описания распространения звука и флуктуаций, а также получение свойств ударных волн в анизотропной релятивистской гидродинамике.

Для достижения этой цели необходимо выполнить следующие **задачи**:

1. Получение волнового уравнения, качественно описывающего особенности распространения звука в рамках анизотропной релятивистской гидродинамики.
2. Исследование деформации конуса Маха и, как следствие, углов Маха для летящей со сверхзвуковой скоростью частицы в рамках анизотропной релятивистской гидродинамики.

3. Получение разрывных решений ударных волн в анизотропной релятивистской гидродинамике для поперечного и продольного случаев расположения нормали к поверхности разрыва относительно оси пучка и для произвольного полярного угла.

4. Исследование устойчивости ударных волн в анизотропной релятивистской гидродинамике.

### **Научная новизна.**

1. Впервые в рамках релятивистской анизотропной гидродинамики получено волновое уравнение в случае постоянной анизотропии, содержащее две различные скорости распространения звука в среде ввиду разности продольного и поперечного давлений. Выведены аналитически выражения для двух углов Маха в случае постоянного параметра анизотропии и показана асимметричность конуса Маха [61].

2. В рамках релятивистской анизотропной гидродинамики получены аналитически решения для плоских ударных волн сжатия в поперечном и продольном случаях расположения нормали к ударной волне относительно оси распространения пучка. Показано, что имеет место ослабление ударной волны в поперечном случае и её усиление в продольном. Также были численно решены разрывные ударноволновые уравнения. Было показано, что в анизотропной среде происходит преломление прошедшего через поверхность разрыва потока в сторону оси анизотропии. Также было обнаружено, что для некоторых достаточно больших значений анизотропии и отношении изотропных давлений имеет место проявление некоторых свойств волн разрежения, что может указывать на возможные ограничения параметров задачи [62].

3. Было показано, что существование ударных волн сжатия (при величине отношения изотропных давлений больше единицы) в анизотропной релятивистской гидродинамике в случае изменяемой анизотропии и отсутствии преломления потока возможно лишь для значений параметра анизотропии ниже некоторого критического значения. Была получена зависимость данного критического значения параметра анизотропии от направления нормали к ударной волне. Также было продемонстрировано, что генерация ударных волн может являться одним из механизмов изотропизации системы [64].

4. Показана аналитически линейная устойчивость ударных волн в анизотропной релятивистской гидродинамике к малому гармоническому возмущению в случае постоянной анизотропии [63].

### **Научная и практическая значимость.**

Исследования звуковых явлений и флуктуаций позволяют дополнить релятивистскую анизотропную гидродинамику, которая получила широкое распространение в качестве инструмента для описания плотной и горячей кварк-глюонной материи. Показанная деформация изотропных решений конуса Маха и ударных волн может найти отклик в исследованиях ранних стадий столкновений. Показанная возможность получения разрывных решений для ударных волн обходит проблему диссипативной теории Израэля-Стюарта. В то же время, скрытое наличие высших порядков в анизотропной релятивистской гидродинамике позволяет трактовать полученные эффекты на более фундаментальном уровне. Более того, продемонстрированный механизм изотропизации материи посредством генерации ударных волн может дополнить ответ на вопрос о скорости и степени изотропизации кварк-глюонной плазмы.

### **Методология и методы исследования.**

Методология работы содержит кинетический и гидродинамический подходы исследования ультрарелятивистского вещества. Главным образом используется закон сохранения тензора энергии-импульса. В случае изучения ударных волн данный закон трансформируется в уравнение согласования проекции тензора энергии-импульса на нормаль к поверхности разрыва. Теоретические результаты исследования получены аналитическими и численными методами. Применялись методы математического аппарата, такие как аналитическая геометрия и линейная алгебра. Численные расчёты проводились в программе Mathematica, результаты которых исследовались, в основном, графически.

### **Основные положения, выносимые на защиту.**

1. Волновое уравнение, скорости звука и выражения для углов конуса Маха в рамках анизотропной релятивистской гидродинамики с случае постоянной анизотропии.
2. Аналитические разрывные решения для поперечной и продольной ударных волн в случае постоянной анизотропии в анизотропной релятивистской гидродинамике.
3. Численные решения для нормальной ударной волны, направленной под произвольным полярным углом, в случае постоянной анизотропии в анизотропной релятивистской гидродинамике и её свойства.
4. Доказательство существования верхней границы для параметра анизотропии при описании ударных волн сжатия (при величине отношения

изотропных давлений больше единицы) в случае изменяемой анизотропии и отсутствия преломления потока.

5. Механизм изотропизации системы посредством генерации ударных волн в анизотропной релятивистской гидродинамике.

6. Доказательство устойчивости ударных волн аналитическими методами в граничных (поперечном и продольном) положениях в случае постоянной анизотропии в анизотропной релятивистской гидродинамике.

7. Доказательство устойчивости численными методами для нормальной ударной волны, направленной под произвольным полярным углом, в случае постоянной анизотропии в анизотропной релятивистской гидродинамике.

### **Достоверность и личный вклад автора.**

Достоверность полученных результатов обеспечивается проведёнными аналитическими вычислениями, а также соответствием с изотропным пределом и уже известными решениями в релятивистской гидродинамике идеальной жидкости. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии.

### **Апробация работы.**

Основные результаты работы опубликованы в 5 статьях [61—65] в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Помимо этого, основные результаты диссертации докладывались на семинарах ОТФ ФИАН, а также на конференциях:

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2018» (МГУ, 9 - 13 апреля 2018, Москва, Россия)
2. Конференция "RFBR Grants for NISA (ОИЯИ, 20 - 23 октября 2020, Дубна, Россия)

### **Публикации по теме диссертации.**

1. *Kirakosyan M., Kovalenko A., Leonidov A.* Sound propagation and Mach cone in anisotropic hydrodynamics // The European Physical Journal C. — 2018. — Vol. 79. — P. 1—5.
2. *Kovalenko A., Leonidov A.* Shock waves in relativistic anisotropic hydrodynamics // Eur. Phys. J. C. — 2022. — Vol. 82, no. 4. — P. 378.
3. *Kovalenko A.* Stability of Shock Waves in Anisotropic Hydrodynamics // Phys. Part. Nucl. — 2021. — Vol. 52, no. 4. — P. 569 — 570.
4. *Kovalenko A.* Linear stability of shock waves in ultrarelativistic anisotropic hydrodynamics // Eur. Phys. J. C. — 2023. — Vol. 83, no. 8. — P. 754.

5. *Kovalenko A. Critical Point from Shock Waves Solution in Relativistic Anisotropic Hydrodynamics // Bulletin of the Lebedev Physics Institute — 2024. — Vol. 51, No. 1 — P. 1–6.*

### **Структура работы.**

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и четырех приложений. Полный объём диссертации составляет 87 страниц с 20 рисунками. Список литературы содержит 70 наименований.

В первой главе изложен теоретический аппарат анизотропной релятивистской гидродинамики на основе кинетической теории. Первый раздел содержит описание процесса построения тензора энергии-импульса из кинетической теории. Во втором разделе приведены анзац для анизотропной функции распределения и формулы для макроскопических величин. Третий раздел содержит вывод уравнений движения в буст-инвариантном случае.

Вторая глава содержит вывод волнового уравнения, качественно описывающего распространение звука в анизотропной среде, что изложено в первом разделе. Второй раздел посвящён исследованию конуса Маха и выводу аналитических выражений для углов Маха методами аналитической геометрии.

Третья глава посвящена получению разрывных решений для ударных волн в анизотропной релятивистской гидродинамике. Первый раздел приводит методику изучения разрывных решений в изотропном случае. Во втором разделе рассмотрены граничные случаи поперечной и продольной ударных волн, где применены аналитические вычисления. Третий раздел содержит исследование общего случая произвольного расположения ударной волны численными методами. Приведены эффекты и особенности поведения падающего на ударную волну потока при произвольном полярном угле. В заключении главы, в четвёртом разделе, обсуждается возможность описания ударных волн при изменяющемся параметре анизотропии.

В четвёртой главе производится анализ устойчивости решений в виде ударных волн при постоянном параметре анизотропии. Первый раздел содержит описание методики анализа устойчивости на примере изотропного случая. Во втором разделе ведётся исследование устойчивости в рамках анизотропной релятивистской гидродинамики.

В приложениях А - Г собраны вспомогательные результаты по третьей и четвёртой главам, включающие доказательства и технические детали.

## Глава 1. Релятивистская анизотропная гидродинамика

### 1.1 Тензор энергии-импульса

Основные положения анизотропной релятивистской гидродинамики изложены на языке кинетической теории, в которой центральное место занимает одночастичная функция распределения  $f(p, x)$ , где  $p$  и  $x$  представляют из себя безиндексную запись 4-вектора импульса и координат. Интегрирование произведения функции распределения и  $p^\mu$  по импульсному пространству приводит к нахождению потока плотности числа частиц

$$j^\mu = \int Dp p^\mu f(p, x), \quad (1.1)$$

где  $Dp$  есть лоренц-инвариантный объём

$$\int Dp = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(p_\mu p^\mu - m^2) 2\theta(p^0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^0}. \quad (1.2)$$

В таком определении заключены условие положительности энергии  $p^0 > 0$  и физически обусловленное требование нахождения системы на массовой поверхности  $p_\mu p^\mu = m^2$ . Здесь и в дальнейшем будем использовать систему единиц, принятую в физике высоких энергий, для которой скорость света  $c = 1$ .

Аналогично определяется тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = \int Dp p^\mu p^\nu f(p, x). \quad (1.3)$$

В изотропной гидродинамике идеальной жидкости компоненты тензора энергии-импульса  $T^{ii}$ , где  $i = 1, 2, 3$  являются изотропным давлением  $P$ , а компонента  $T^{00}$  является плотностью энергии  $\varepsilon$ . Общий вид тензора энергии-импульса имеет вид

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

где 4-вектор скорости потока

$$U^\mu = (\gamma, u_x, u_y, u_z) = \gamma(1, v_x, v_y, v_z), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 + v^2}, \quad (1.5)$$

где  $c$  - скорость света, а  $v_x, v_y, v_z$  - компоненты вектора скорости.

Часто для удобства  $U^\mu$  записывают в форме

$$U^\mu = (u_0 \cosh \vartheta_{\parallel}, u_x, u_y, u_0 \sinh \vartheta_{\parallel}), \quad (1.6)$$

где  $u_0 = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$ , и вводится продольная быстрота

$$\vartheta_{\parallel} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v_z}{1 - v_z}. \quad (1.7)$$

Стоит заметить, что в буст-инвариантном случае в направлении движения пучка, то есть вдоль оси  $Oz$ , величина  $\vartheta_{\parallel}$  совпадает с пространственно-временной быстротой

$$\vartheta_{\parallel} \longrightarrow \left( v_z = \frac{z}{t} \right) \longrightarrow \eta = \frac{1}{2} \ln \frac{t + z}{t - z}.$$

Как было сказано ранее, столкновение тяжёлых ионов и последующее быстрое продольное расширение образовавшейся кварк-глюонной материи создаёт большую анизотропию давлений. Отношение продольного  $P_{\parallel}$  и поперечного  $P_{\perp}$  давлений гораздо меньше единицы. Вследствие этого, в анизотропном гидродинамическом описании в системе покоя диагональный вид тензора энергии-импульса также становится анизотропным

$$T_{LRF}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

где  $\varepsilon$  - плотность энергии. Для случая безмассового газа, который в дальнейшем и будет рассматриваться,  $T_{\mu}^{\mu} = 0$ , что выражается в следующем уравнении состояния

$$2P_{\perp} + P_{\parallel} = \varepsilon. \quad (1.9)$$

Для получения  $T^{\mu\nu}$  в движущейся системе отсчёта необходимо ввести соответствующие базисные вектора, которые в системе покоя принимают вид

$$X_{0,LRF}^{\mu} = U_{LRF}^{\mu} = (1,0,0,0), \quad (1.10)$$

$$X_{1,LRF}^{\mu} = X_{LRF}^{\mu} = (0,1,0,0), \quad (1.11)$$

$$X_{2,LRF}^{\mu} = Y_{LRF}^{\mu} = (0,0,1,0), \quad (1.12)$$

$$X_{3,LRF}^{\mu} = Z_{LRF}^{\mu} = (0,0,0,1). \quad (1.13)$$

Применение лоренц-буста к данным векторам порождает базис в движущейся системе отсчёта, который можно записать в следующей параметризации

$$U^\mu = (u_0 \cosh \vartheta_{\parallel}, u_x, u_y, u_0 \sinh \vartheta_{\parallel}), \quad (1.14)$$

$$X^\mu = (u_{\perp} \cosh \vartheta_{\parallel}, \frac{u_0 u_x}{u_{\perp}}, \frac{u_0 u_y}{u_{\perp}}, u_{\perp} \sinh \vartheta_{\parallel}), \quad (1.15)$$

$$Y^\mu = (0, -\frac{u_y}{u_{\perp}}, \frac{u_x}{u_{\perp}}, 0), \quad (1.16)$$

$$Z^\mu = (\sinh \vartheta_{\parallel}, 0, 0, \cosh \vartheta_{\parallel}), \quad (1.17)$$

где  $u_{\perp} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ , а  $\vartheta_{\parallel}$  - продольная быстрота.

Метрический тензор может быть выражен через данные вектора следующим образом

$$g^{\mu\nu} = U^\mu U^\nu - X^\mu X^\nu - Y^\mu Y^\nu - Z^\mu Z^\nu. \quad (1.18)$$

Поскольку тензор энергии-импульса симметричен  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ , то общий вид запишется как

$$T^{\mu\nu} = a g^{\mu\nu} + \sum_i a_i X_i^\mu X_i^\nu + \sum_{\gamma>\rho} a_{\gamma\rho} (X_\gamma^\mu X_\rho^\nu + X_\rho^\mu X_\gamma^\nu), \quad (1.19)$$

где  $i = 1, 2, 3$ , а  $a, a_i, a_{\mu\nu}$  - скалярные коэффициенты. Коэффициенты находятся из условия вида тензора энергии-импульса в системе покоя (1.8), тогда

$$T^{00} = a = \varepsilon, \quad (1.20)$$

$$T^{11} = -a + a_1 = P_{\perp}, \quad (1.21)$$

$$T^{22} = -a + a_2 = P_{\perp}, \quad (1.22)$$

$$T^{33} = -a + a_3 = P_{\parallel}. \quad (1.23)$$

Можно заметить, что слагаемые с коэффициентами  $a_{\mu\nu}$  оказались равны нулю. Таким образом, получим следующий вид тензора энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P_{\perp}) U^\mu U^\nu - P_{\perp} g^{\mu\nu} + (P_{\parallel} - P_{\perp}) Z^\mu Z^\nu. \quad (1.24)$$

Видно, что вектор  $Z^\mu$  выделяет направление  $Oz$  в модели, которое будем также называть осью (направлением) анизотропии.

Стоит отметить, что форма тензора энергии-импульса (1.24), а именно анизотропная часть  $(P_{\parallel} - P_{\perp}) Z^\mu Z^\nu$ , аналогична таковой в анизотропных

магнетогидродинамических моделях как в релятивистском [66], так и в нерелятивистском случаях [67; 68]. Анизотропия при этом направлена вдоль магнитного поля  $B^\mu$ , где  $B^\mu = Bn^\mu$ , а вектор  $n^\mu$  выполняет ту же роль в теории, что и вектор  $Z^\mu$ .

Выражение для потока плотности числа частиц в анизотропном и изотропном случаях одинаково

$$j^\mu = nU^\mu, \quad (1.25)$$

где  $n$  - плотность числа частиц.

## 1.2 Анизотропная функция распределения

Одним из способов перейти к анизотропной гидродинамике является соответствующая параметризация одночастичной функции распределения. Например, в случае анизотропии сфероидальной формы  $T^{xx} = T^{yy} \neq T^{zz}$ , в общем виде её можно записать таким образом [14]:

$$f_{\text{aniso}}(x, p) = f\left(\frac{p_\perp}{\lambda_\perp}, \frac{|p_\parallel|}{\lambda_\parallel}\right), \quad (1.26)$$

где  $\lambda_\perp, \lambda_\parallel$  - температурные масштабные параметры, а  $p_\perp = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ ,  $p_\parallel = p_z$ . В таких моделях релаксация системы к изотропному состоянию осуществлялась посредством введения анзаца для источника в уравнении для сохранения потока энтропии, а поток плотности числа частиц не рассматривался.

Аналогичный вид функции распределения был предложен [9; 15] с явным выделением одного параметра анизотропии:

$$f_{\text{aniso}}(x, p) = f_{\text{iso}}\left(\frac{\sqrt{p^\mu \Xi_{\mu\nu}(x) p^\nu}}{\Lambda(x)}, \frac{\mu(x)}{\Lambda(x)}\right), \quad (1.27)$$

где  $\Xi_{\mu\nu}$  - тензор, описывающий величину анизотропии в пространстве-времени, а  $\Lambda(x)$  - температурный масштабный параметр. В простейшем случае наличия только продольной анизотропии в системе покоя  $p^\mu \Xi_{\mu\nu}(x) p^\nu$  переходит в  $p^2 + \xi(x)p_\parallel$ , где  $\xi(x)$  - параметр анизотропии. Между двумя функциями распределения можно провести однозначное соответствие, однако анзац (1.27) получил

большее распространение, и далее мы будем пользоваться этой формой анизотропной функции распределения.

В работах [15] уравнения движения выводились методом взятия моментов уравнения Больцмана для функции (1.27) с релаксационным приближением интеграла столкновений:

$$p^\mu \partial_\mu f_{\text{aniso}}(x, p) = -p^\mu U_\mu \frac{f_{\text{aniso}}(x, p) - f_{\text{eq}}(x, p)}{\tau_{\text{eq}}}, \quad (1.28)$$

где  $\tau_{\text{eq}}$  - время релаксации, а  $f_{\text{eq}}(x, p)$  - фоновая равновесная функция распределения.

Форма записи одночастичной функции распределения позволяет разложить физические величины на произведение анизотропной и изотропной частей. Рассмотрим формулу для плотности энергии.

$$\varepsilon(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p_0 f_{\text{iso}} \left( \frac{\sqrt{p^2 + \xi(x)p_{\parallel}^2}}{\Lambda(x)} \right). \quad (1.29)$$

Отсюда, используя замену переменных такую, что

$$f_{\text{iso}} \left( \frac{\sqrt{p^2 + \xi(x)p_{\parallel}^2}}{\Lambda(x)} \right) \longrightarrow f_{\text{iso}} \left( \frac{p}{\Lambda(x)} \right),$$

мы можем получить связь с изотропной плотностью энергии:

$$\varepsilon(\Lambda, \xi) = R(\xi) \varepsilon_{\text{iso}}(\Lambda). \quad (1.30)$$

Аналогично получаем

$$P_{\perp}(\Lambda, \xi) = R_{\perp}(\xi) P_{\text{iso}}(\Lambda), \quad (1.31)$$

$$P_{\parallel}(\Lambda, \xi) = R_{\parallel}(\xi) P_{\text{iso}}(\Lambda), \quad (1.32)$$

$$n(\Lambda, \xi) = \frac{n_{\text{iso}}(\Lambda)}{\sqrt{1 + \xi}}, \quad (1.33)$$

где функции  $R(\xi)$ ,  $R_{\perp}(\xi)$ ,  $R_{\parallel}(\xi)$  имеют вид

$$R(\xi) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + \xi} + \frac{\arctan \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \right), \quad (1.34)$$

$$R_{\perp}(\xi) = \frac{3}{2\xi} \left( \frac{1 + (\xi^2 - 1)R(\xi)}{1 + \xi} \right), \quad (1.35)$$

$$R_{\parallel}(\xi) = \frac{3}{\xi} \left( \frac{(\xi + 1)R(\xi) - 1}{1 + \xi} \right). \quad (1.36)$$

Используя изотропное ультрарелятивистское уравнение состояния

$$\varepsilon_{\text{iso}} = 3P_{\text{iso}}, \quad (1.37)$$

получим связь между анизотропными функциями (1.34 - 1.36) из уравнения состояния (1.9):

$$2R_{\perp} + R_{\parallel} = 3R(\xi). \quad (1.38)$$

### 1.3 Уравнения движения в буст-инвариантном продольном случае

Получение уравнений движения в анизотропной релятивистской гидродинамике происходит посредством взятия моментов кинетического релятивистского уравнения Больцмана

$$p^{\mu} \partial_{\mu} f(x, p) = C[f], \quad (1.39)$$

где  $C[f]$  - интеграл столкновений. Предполагается, что система буст-инвариантна и расширяется только вдоль продольной оси (оси распространения пучка). Буст-инвариантность подразумевает, что продольная скорость системы постоянна вдоль линий постоянной пространственной быстроты, так что  $v = z/t$ . Предположение о том, что система расширяется только в продольном направлении справедливо, если поперечный размер системы достаточно велик, что имеет место в центральных столкновениях тяжёлых ионов [15], поэтому эффектами поперечной динамики можно пренебречь. Таким образом, положим  $v_x = v_y = 0$ .

Интеграл столкновений  $C[f]$  вводится в релятивистском релаксационном приближении [69]:

$$C[f] = -\frac{p_{\mu} U^{\mu}}{\tau_{\text{eq}}} (f(x, p) - f_{\text{eq}}(x, p)), \quad (1.40)$$

где  $U^{\mu}$  - 4-вектор скорости,  $f_{\text{eq}}(x, p)$  - равновесная фоновая функция распределения,  $\tau_{\text{eq}}$  - время релаксации.

Для подобных систем с сильным продольным буст-инвариантным расширением удобно использовать координаты Милна  $(t, x, y, z) \rightarrow (\tau, x, y, \zeta)$ , в которых

$$t = \tau \cosh \zeta, \quad (1.41)$$

$$z = \tau \sinh \zeta, \quad (1.42)$$

или

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad (1.43)$$

$$\zeta = \operatorname{arctanh} \frac{z}{t}. \quad (1.44)$$

Тогда компоненты 4-вектора скорости имеют вид

$$U^t = \cosh \zeta, \quad U^z = \sinh \zeta. \quad (1.45)$$

Метрический тензор в такой системе координат имеет вид  $g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -\tau^2)$ . Преобразования компонент векторов имеют вид:

$$A^\tau = A^t \cosh \zeta - A^z \sinh \zeta, \quad (1.46)$$

$$A^\zeta = -A^t \frac{1}{\tau} \sinh \zeta + A^z \frac{1}{\tau} \cosh \zeta. \quad (1.47)$$

Исходя из данных формул, в координатах Милна для 4-вектора скорости получим

$$U^\tau = 1, \quad U^\zeta = 0. \quad (1.48)$$

Поскольку мы теперь работаем в криволинейных координатах, то дифференцирование 4-вектора необходимо осуществлять с помощью оператора ковариантной производной

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu A^\gamma, \quad (1.49)$$

где  $\Gamma_{\nu\gamma}^\mu$  - символы Кристоффеля, определяемые выражением

$$\Gamma_{\nu\gamma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\gamma g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\gamma} - \partial_\rho g_{\nu\gamma}). \quad (1.50)$$

Для системы координат Милна из ненулевых символов Кристоффеля имеются три компоненты:

$$\Gamma_{\tau\zeta}^\zeta = \Gamma_{\zeta\tau}^\zeta = \frac{1}{\tau}, \quad \Gamma_{\zeta\zeta}^\tau = \tau. \quad (1.51)$$

Температура в локальной системе покоя  $T$  в фоновом равновесном распределении  $f_{\text{eq}}(T)$  определяется динамически из условия равенства неравновесной и равновесной плотностей энергий  $\varepsilon_{\text{non-eq}} = \varepsilon_{\text{eq}}$ , что гарантирует сохранение энергии в рамках релаксационного приближения [15]. Тем самым для температуры предполагается зависимость только от введённого собственного времени

$\tau$  в соответствии с предположением о буст-инвариантности  $T = T(\tau)$ . Равновесную функцию распределения будем рассматривать в форме бoльцмановской функции распределения

$$f_{\text{eq}}(T(\tau)) = f_{\text{iso}}(T(\tau)) = \exp \left[ - \frac{p^\mu U_\mu}{T(\tau)} \right]. \quad (1.52)$$

Аналогично, анизотропная функция распределения  $f_{\text{aniso}}(x, p)$  будет иметь вид

$$f_{\text{aniso}}(\tau) = \exp \left[ - \frac{\sqrt{p^\mu \Xi_{\mu\nu}(\tau) p^\nu}}{\Lambda(\tau)} \right]. \quad (1.53)$$

Тогда уравнение Больцмана (1.39) в релаксационном приближении будет иметь вид

$$\partial_\tau f_{\text{aniso}}(x, p) = - \frac{f_{\text{aniso}}(x, p) - f_{\text{eq}}(x, p)}{\tau_{\text{eq}}}. \quad (1.54)$$

Параметризуем компоненты вектора импульса через поперечный импульс  $p_\perp$  и быстроту  $y$

$$p^0 = p_\perp \cosh y, \quad (1.55)$$

$$p^3 = p_\perp \sinh y. \quad (1.56)$$

Тогда компоненты  $p^\tau$ ,  $p^\zeta$  запишутся как

$$p^\tau(\zeta) = p_\perp \cosh(y - \zeta), \quad (1.57)$$

$$p^\zeta(\tau, \zeta) = \frac{1}{\tau} p_\perp \sinh(y - \zeta) = \frac{p_z(\zeta)}{\tau}. \quad (1.58)$$

Для нулевого и первого момента уравнения Больцмана получим

$$\partial_\mu \left[ \int Dp p^\mu f_{\text{aniso}}(x, p) \right] = \partial_\mu (n U^\mu) = \int Dp C[f], \quad (1.59)$$

$$\partial_\mu \left[ \int Dp p^\mu p^\nu f_{\text{aniso}}(x, p) \right] = \int Dp p^\mu C[f], \quad (1.60)$$

Для выполнения закона сохранения энергии необходимо, чтобы правая часть уравнения (1.60) была равна нулю. Это требование выражается в упомянутом ранее условии связи Ландау  $\varepsilon_{\text{eq}} = \varepsilon_{\text{non-eq}}$ , которое напрямую обеспечивает

сохранение тензора энергии-импульса. Для анизотропной релятивистской гидродинамики условие Ландау выражается в соотношении

$$T(\tau) = R^{1/4}(\xi)\Lambda(\tau), \quad (1.61)$$

которое задаёт связь между равновесной температурой фонового состояния и анизотропными величинами.

Мы знаем, что макроскопические величины задаются формулами (1.30 - 1.33). Поскольку  $n_{\text{eq}} \sim T^3$ ,  $\varepsilon_{\text{eq}} \sim T^4$  для безмассового газа, то мы можем записать

$$\varepsilon = R(\xi(\tau))\varepsilon_{\text{iso}}(\Lambda(\tau)) = R(\xi(\tau))\frac{\varepsilon_{\text{eq}}(T(\tau))}{R(\xi(\tau))} \sim T^4, \quad (1.62)$$

$$P_{\perp} = R_{\perp}(\xi(\tau))P_{\text{iso}}(\Lambda(\tau)) = R_{\perp}(\xi(\tau))\frac{\varepsilon_{\text{eq}}(T(\tau))}{3R(\xi(\tau))}, \quad (1.63)$$

$$P_{\parallel} = R_{\parallel}(\xi(\tau))P_{\text{iso}}(\Lambda(\tau)) = R_{\parallel}(\xi(\tau))\frac{\varepsilon_{\text{eq}}(T(\tau))}{3R(\xi(\tau))}, \quad (1.64)$$

$$n = \frac{n_{\text{iso}}(\Lambda)}{\sqrt{1+\xi}} = \frac{n_{\text{eq}}(T(\tau))}{R^{3/4}(\xi(\tau))\sqrt{1+\xi}}, \quad (1.65)$$

где в свою очередь  $\varepsilon_{\text{iso}}(\Lambda) \sim \Lambda^4$ ,  $P_{\text{iso}}(\Lambda) \sim \Lambda^4$ ,  $n_{\text{iso}}(\Lambda) \sim \Lambda^3$ .

Тогда для нулевого и первого момента уравнения Больцмана получим

$$\partial_{\mu}(nU^{\mu}) = -\frac{1}{\tau_{\text{eq}}}(n - n_{\text{eq}}), \quad (1.66)$$

$$\partial_{\mu} \left[ (\varepsilon + P_{\perp})U^{\mu}U^{\nu} - P_{\perp}g^{\mu\nu} + (P_{\parallel} - P_{\perp})Z^{\mu}Z^{\nu} \right] = 0, \quad (1.67)$$

где для буст-инвариантного случая

$$U^{\mu} = (\cosh \zeta, 0, 0, \sinh \zeta), \quad (1.68)$$

$$Z^{\mu} = (\sinh \zeta, 0, 0, \cosh \zeta). \quad (1.69)$$

Поскольку теперь мы используем криволинейные координаты  $(\tau, \zeta)$ , то необходимо провести вычисления ковариантных производных и компонент 4-векторов. Для компонент 4-вектора скорости  $U^{\mu}$  и 4-вектора  $Z^{\mu}$  имеем

$$U^{\tau} = 1, \quad U^{\zeta} = 0, \quad (1.70)$$

$$Z^{\tau} = 0, \quad Z^{\zeta} = \frac{1}{\tau}, \quad (1.71)$$

Используя выражения для символов Кристоффеля (1.51) для ковариантных производных, связанных с  $U^\mu$ , найдём

$$\nabla_\mu U^\mu = \frac{\partial U^\tau}{\partial \tau} + \Gamma_{\zeta\tau}^\tau U^\zeta + \frac{\partial U^\zeta}{\partial \zeta} + \Gamma_{\tau\zeta}^\zeta U^\tau = \frac{1}{\tau}, \quad (1.72)$$

$$U^\mu \nabla_\mu = \partial_\tau, \quad (1.73)$$

$$U^\mu \nabla_\mu U^\tau = 0, \quad (1.74)$$

$$U^\mu \nabla_\mu U^\zeta = 0. \quad (1.75)$$

Для 4-вектора  $Z^\mu$  аналогично получим

$$\nabla_\mu Z^\mu = \frac{\partial Z^\tau}{\partial \tau} + \Gamma_{\zeta\tau}^\tau Z^\zeta + \frac{\partial Z^\zeta}{\partial \zeta} + \Gamma_{\tau\zeta}^\zeta Z^\tau = 0, \quad (1.76)$$

$$Z^\mu \nabla_\mu = \frac{\partial_\zeta}{\tau}, \quad (1.77)$$

$$Z^\mu \nabla_\mu Z^\tau = \frac{1}{\tau} \frac{\partial Z^\tau}{\partial \zeta} + \frac{1}{\tau} \Gamma_{\zeta\zeta}^\tau Z^\zeta = \frac{1}{\tau}, \quad (1.78)$$

$$Z^\mu \nabla_\mu Z^\zeta = 0. \quad (1.79)$$

Подстановка производных в уравнения (1.66 - 1.67) и использование формул (1.62 - 1.65) даст конечную систему уравнений для  $\xi(\tau)$  и  $\Lambda(\tau)$ , которые запишутся в виде

$$\frac{6}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau} - \frac{1}{1 + \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{2}{\tau} = -\frac{2}{\tau_{\text{eq}}} \left[ 1 - \sqrt{1 + \xi R(\xi)} \right], \quad (1.80)$$

$$\frac{4}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau} + \frac{R'(\xi)}{R(\xi)} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau} \left[ R(\xi) + \frac{R_{\parallel}(\xi)}{3} \right]. \quad (1.81)$$

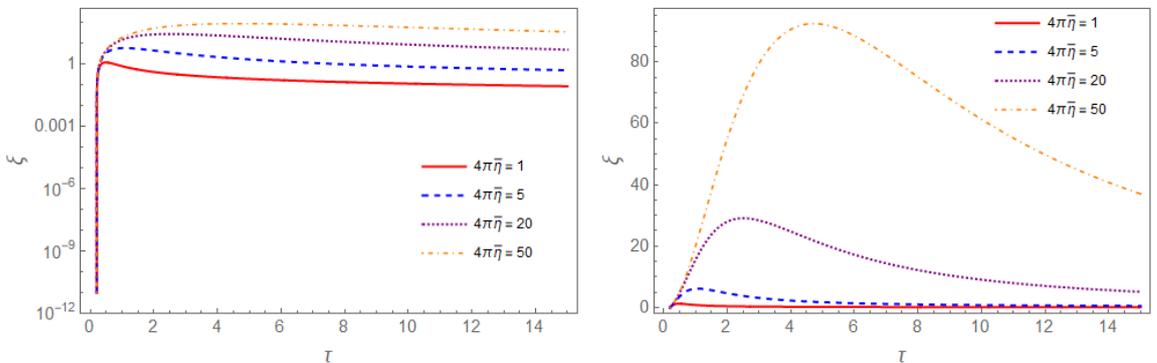


Рисунок 1.1 — График зависимости  $\xi(\tau)$  при различных значениях вязкости  $\bar{\eta}$ . Слева представлен логарифмический масштаб, справа обычный.

Время релаксации  $\tau_{\text{eq}}$  зависит от температуры  $T(\tau)$ , а также от отношения сдвиговой вязкости к плотности энтропии  $\bar{\eta} = \eta/S$ . Последнее величина

характеризует степень связности жидкости. Как обсуждалось ранее, для кварк-глюонного вещества эта величина имеет небольшое значение. Выражение для  $\tau_{\text{eq}}$  имеет следующий вид

$$\tau_{\text{eq}}(\tau) = \frac{5\bar{\eta}}{2T(\tau)} = \frac{5\bar{\eta}}{2\Lambda(\tau)R^{1/4}(\xi(\tau))}. \quad (1.82)$$

Данное выражение для  $\tau_{\text{eq}}$  получается при согласовании транспортных коэффициентов в ходе вывода релятивистской гидродинамики 2-го порядка из анизотропного анзаца (1.27) для функции распределения [15].

На рис. 1.1 приведены решения для  $\xi(\tau)$  из уравнений (1.80 - 1.81) для разных значений вязкости  $\bar{\eta}$ . Причём были выбраны следующие начальные условия:  $\xi(\tau_0) = 0$ ,  $T(\tau_0) = 500$  МэВ, где  $\tau_0 = 0.2$  фм/с. Видно, что на самых первых этапах эволюции происходит достаточно резкое возрастание энтропии до некоторого максимального значения, определяемого вязкостью среды и начальной температурой. В дальнейшем происходит остывание материи вместе с постепенным уменьшением анизотропии.

## Глава 2. Распространение звука и конус Маха в случае постоянной анизотропии

### 2.1 Волновое уравнение

Первым шагом на пути к исследованию звуковых явлений в анизотропной релятивистской гидродинамике будет получение и изучение волнового уравнения, которое описывает распространение звука в анизотропной среде. Будем рассматривать случай наличия только одного продольного анизотропного параметра  $\xi(x)$ . В контексте столкновения тяжёлых ядер данный случай будет соответствовать центральным столкновениям, так как мы пренебрегаем анизотропией давлений в объёме перекрытия столкнувшихся ядер. Поскольку в общем случае нет уравнения для эволюции  $\xi(x)$ , то первым приближением для рассмотрения свойств системы является случай фиксированного значения параметра анизотропии  $\xi \approx const$ . С данным приближением мы теряем информацию об эволюции анизотропии в системе, однако оно позволит качественно оценить деформацию известных изотропных уравнений и решений в рамках анизотропного подхода.

Сохранение анизотропного тензора энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  (1.24) выражается в уравнении

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.1)$$

Для получения волнового уравнения мы должны сперва линеаризовать уравнения движения. Предположим, что имеет место следующее разложение температурного масштабного параметра  $\Lambda(x)$  около постоянного состояния

$$\Lambda(x) = \Lambda^{(0)} + \Lambda^{(1)}(x) + \dots \quad (2.2)$$

Поскольку

$$\varepsilon(x) = R(\xi)\varepsilon_{\text{iso}}(\Lambda(x)), \quad (2.3)$$

то разложение плотности энергии получаем в виде

$$\varepsilon(x, \xi) = R(\xi) \left( \varepsilon_{\text{iso}}(\Lambda^{(0)}) + \left. \frac{\partial \varepsilon_{\text{iso}}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda=\Lambda^{(0)}} \Lambda^{(1)}(x) + \dots \right). \quad (2.4)$$

Аналогичные разложения можно провести для давлений  $P_{\perp}$  и  $P_{\parallel}$ . Для упрощения записи разложения плотности энергии и давлений представим в виде

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}(x), \quad (2.5)$$

$$P_{\perp, \parallel} = P_{\perp, \parallel}^{(0)} + P_{\perp, \parallel}^{(1)}(x). \quad (2.6)$$

Для базисных векторов  $U^{\mu}$  и  $Z^{\mu}$  имеем

$$U^{\mu} = U^{(0)\mu} + U^{(1)\mu}(x), \quad (2.7)$$

$$Z^{\mu} = Z^{(0)\mu} + Z^{(1)\mu}(x). \quad (2.8)$$

Подставляя (2.5 - 2.8) в уравнения движения (2.1), получим

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^{(0)} + P_{\perp}^{(0)}) [U^{(0)\mu} \partial_{\mu} U^{(1)\nu} + \partial_{\mu} U^{(1)\mu} U^{(0)\nu}] + \partial_{\mu} (\varepsilon^{(1)} + P_{\perp}^{(1)}) U^{(0)\mu} U^{(0)\nu} - \\ & - \partial^{\nu} P_{\perp}^{(1)} - (P_{\perp}^{(0)} - P_{\parallel}^{(0)}) [Z^{(0)\mu} \partial_{\mu} Z^{(1)\nu} + \partial_{\mu} Z^{(1)\mu} Z^{(0)\nu}] - \\ & - \partial_{\mu} (P_{\perp}^{(1)} - P_{\parallel}^{(1)}) Z^{(0)\mu} Z^{(0)\nu} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Перейдём в систему отсчёта, в которой  $U^{(0)\mu} = (1, 0, 0, 0)$  и  $Z^{(0)\mu} = (0, 0, 0, 1)$ . Из условия ортогональности  $U^{\mu} Z_{\mu} = 0$ , получим, что  $Z^{(1)0} = U^{(1)3}$ . Очевидно, что компоненты  $U^{(1)0}$  и  $Z^{(1)3}$  будут иметь поправки второго порядка в разложении по температуре, поэтому можно положить  $U^{(1)0} = Z^{(1)3} = 0$ . Также из определения базиса (1.17) следует, что  $Z^{(1)1} = Z^{(1)2} = 0$ . В итоге получим следующую систему уравнений:

$$(\varepsilon^{(0)} + P_{\perp}^{(0)}) \partial_i U^{(1)i} + \partial_t \varepsilon^{(1)} - (P_{\perp}^{(0)} - P_{\parallel}^{(0)}) \partial_z Z^{(1)0} = 0, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^{(0)} + P_{\perp}^{(0)}) \partial_t U^{(1)i} + \partial_i P_{\perp}^{(1)} - (P_{\perp}^{(0)} - P_{\parallel}^{(0)}) \partial_t Z^{(1)0} \delta_3^i - \\ & - \partial_z (P_{\perp}^{(1)} - P_{\parallel}^{(1)}) \delta_3^i = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из разложения (2.4) следует, что

$$\varepsilon^{(1)}(x) = R(\xi) \left. \frac{\partial \varepsilon_{\text{iso}}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda=\Lambda^{(0)}} \Lambda^{(1)}(x) = c_{\varepsilon} \Lambda^{(1)}(x). \quad (2.12)$$

Аналогичные разложения для давлений и плотности часила частиц дадут

$$P_{\perp}^{(1)}(x) = R_{\perp}(\xi) \left. \frac{\partial P_{\text{iso}}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda=\Lambda^{(0)}} \Lambda^{(1)}(x) = c_{\perp} \Lambda^{(1)}(x), \quad (2.13)$$

$$P_{\parallel}^{(1)}(x) = R_{\parallel}(\xi) \left. \frac{\partial P_{\text{iso}}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda=\Lambda^{(0)}} \Lambda^{(1)}(x) = c_{\parallel} \Lambda^{(1)}(x), \quad (2.14)$$

$$n^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \left. \frac{\partial n_{\text{iso}}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda=\Lambda^{(0)}} \Lambda^{(1)}(x) = c_n \Lambda^{(1)}(x). \quad (2.15)$$

Введённые коэффициенты  $c_\varepsilon, c_\perp, c_\parallel, c_n$  являются константами и обеспечивают более наглядную запись уравнений. Можно также заметить, что для случая безмассового газа (1.37) имеем следующее соотношение для коэффициентов

$$c_\varepsilon = 2c_\perp + c_\parallel. \quad (2.16)$$

Продифференцируем уравнение (2.10) по времени  $t$  и уравнение (2.11) по координате  $x_i$ , а затем вычтем одно из другого, получим

$$\partial_t^2 \varepsilon^{(1)} - \partial_i^2 P_\perp^{(1)} + \partial_z^2 (P_\perp^{(1)} - P_\parallel^{(1)}) = 0, \quad (2.17)$$

что в терминах температуры  $\Lambda^{(1)}$  даст волновое уравнение

$$(c_\varepsilon \partial_t^2 - c_\perp \partial_x^2 - c_\perp \partial_y^2 - c_\parallel \partial_z^2) \Lambda^{(1)} = 0. \quad (2.18)$$

Соотношение (2.15) позволяет перейти к плотности числа частиц простой заменой  $\Lambda^{(1)}$  на  $n^{(1)}$ , поскольку для случая безмассового газа  $n^{(1)} \approx \Lambda^{(1)3}$ .

Видно, что волновое уравнение (2.18) будет иметь пространственно-асимметричное решение, поскольку направление  $Oz$  теперь является выделенным.

Удобно переписать волновое уравнение, разделив его на  $c_\perp$ . В итоге получим, используя (2.16) и обозначая  $\kappa = c_\parallel/c_\perp$ ,

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \kappa \partial_z^2) n^{(1)} = (\kappa + 2) \partial_t^2 n^{(1)}. \quad (2.19)$$

Физический смысл  $\kappa$  можно просто определить, исходя из соотношения  $\kappa = c_\parallel/c_\perp = R_\parallel/R_\perp$ . В анизотропной модели учитывая  $P_\parallel = R_\parallel(\xi)P_{\text{iso}}$ ,  $P_\perp = R_\perp(\xi)P_{\text{iso}}$  (см. формулы (1.31 - 1.32)), получим

$$\kappa = \frac{P_\parallel}{P_\perp}. \quad (2.20)$$

Таким образом,  $\kappa$  является отношением продольного и поперечного давлений, то есть наблюдаемой величиной, характеризующей анизотропию.

Как следует из волнового уравнения (2.18), скорости распространения звука в среде зависят от направления [61]. Обозначим поперечную и продольную скорости как  $c_{s\perp}$  и  $c_{s\parallel}$  соответственно. Выражения для них запишутся как

$$c_{s\perp} = \sqrt{\frac{c_\perp}{c_\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \kappa}} = \sqrt{\frac{R_\perp(\xi)}{3R(\xi)}}, \quad (2.21)$$

$$c_{s\parallel} = \sqrt{\frac{c_\parallel}{c_\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2 + \kappa}} = \sqrt{\frac{R_\parallel(\xi)}{3R(\xi)}}. \quad (2.22)$$

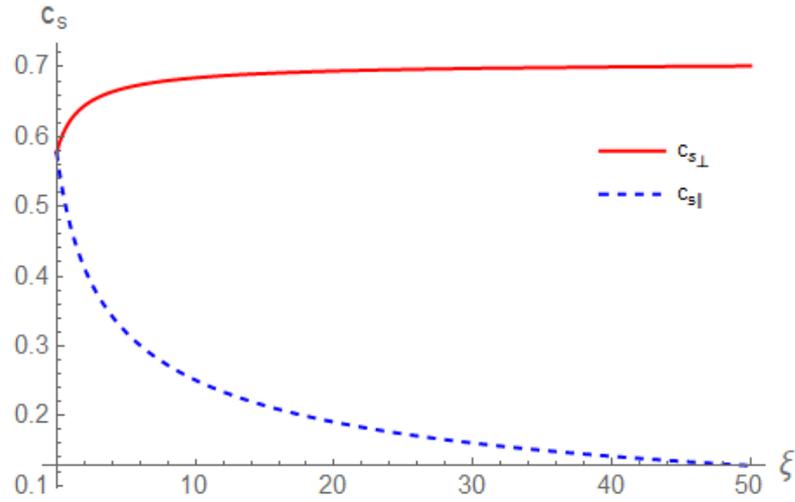


Рисунок 2.1 — Графики поперечной  $c_{s\perp}$  (сплошная) и продольной  $c_{s\parallel}$  (пунктир) скоростей звука в единицах скорости света в зависимости от параметра анизотропии  $\xi$ .

На рис. 2.1 видно, что поперечная скорость звука с ростом параметра анизотропии стремится к пределу  $c_{s\perp} \rightarrow 1/\sqrt{2}$ . Поскольку в изотропном случае имеем  $c_s = 1/\sqrt{3}$ , то изменение знаменателя  $\sqrt{3} \rightarrow \sqrt{2}$  наталкивает на аналогию потери одного из измерений. Действительно, стремление анизотропии к бесконечности приводит к полному исчезновению возможности распространения возмущений в продольном направлении, поскольку  $c_{s\parallel} \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ .

## 2.2 Конус Маха

Прежде чем приступить к решению задачи о конусе Маха, необходимо обсудить геометрию задачи. Ось  $Oz$  направлена вдоль линии столкновения частиц, чем определяет направление анизотропии в пространстве. В перпендикулярной плоскости  $Oxy$  будем иметь угловую симметрию. Таким образом, вместо трёхмерной задачи мы можем рассматривать двумерную, ограничившись осью  $Oz$  и любым направлением в плоскости  $Oxy$ . Для определенности вторым направлением будем считать ось  $Ox$ .

Рассмотрим частицу, движущуюся в плоскости  $Oxz$  со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ . Тогда

$$v_x = v \cos \alpha, \quad (2.23)$$

$$v_z = v \sin \alpha. \quad (2.24)$$

Поскольку скорости звука в среде различаются по направлению, то очевидно, что конус Маха в этом случае будет иметь в основании не окружность, а эллипс. А углы раскрытия конуса в срезе плоскостью  $y = 0$  будут представлять два разных угла Маха, которые обозначим как  $\theta_{ML}$  и  $\theta_{MR}$ . Будем также считать, что, в таком случае, звуковой волновой фронт представляет из себя эллипсоид, две полуоси которого соответствуют поперечной скорости звука  $c_{s\perp}$ , а полуось, расположенная вдоль оси  $Oz$ , соответствует продольной скорости звука  $c_{s\parallel}$ .

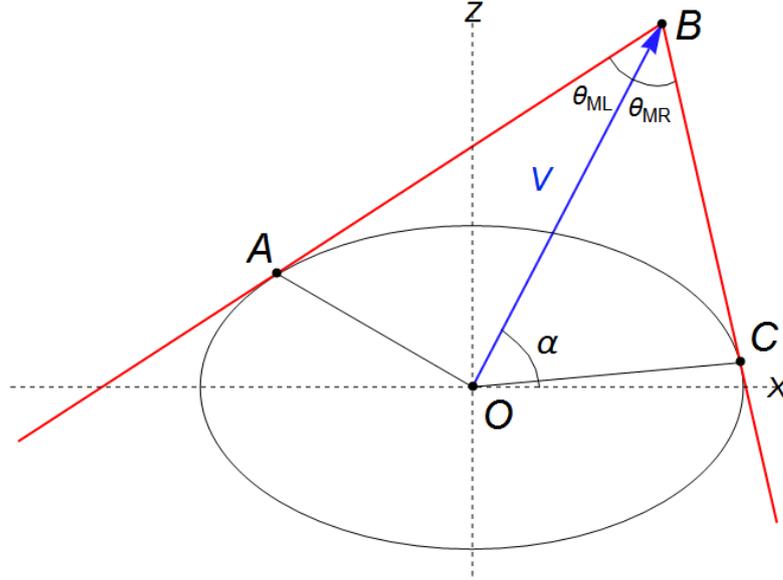


Рисунок 2.2 — Конус Маха в лабораторной системе координат.

Пусть со момента создания возмущения в точке  $(x, z) = (0, 0)$  прошло время  $\Delta t = 1$ , тогда граница звукового волнового фронта будет определяться уравнением эллипса

$$\frac{x^2}{c_{s\perp}^2} + \frac{z^2}{c_{s\parallel}^2} = 1. \quad (2.25)$$

На рис. 2.2 изображено сечение Конуса Маха плоскостью  $y = 0$ . Для примера рассмотрим первый квадрант  $v'_z > 0$ ,  $v'_x > 0$ ,  $z > 0$ ,  $x > 0$ . Тогда, выразив из (2.25) координату  $z = f_1(x)$ , получим

$$f_1(x) = c_{s\parallel} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c_{s\perp}^2}}. \quad (2.26)$$

Уравнение касательных к эллипсу будет задаваться функцией  $z = f_2(x)$ , которая имеет вид

$$f_2(x) = v \sin \alpha + (x - v \cos \alpha) \operatorname{tg}(\alpha \pm \theta_M), \quad (2.27)$$

где  $\theta_M$  - угол Маха (не выделяя какой именно из двух углов). Приравнивая  $f_1(x)$  к  $f_2(x)$ , мы получаем квадратное уравнение на  $x$ , которое имеет единственный ответ, если детерминант этого уравнения равен нулю, что выражается в следующем уравнении

$$c_{s\parallel}^2 (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \theta_M)^2 + c_{s\perp}^2 (\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \theta_M)^2 - v^2 \operatorname{tg}^2 \theta_M = 0. \quad (2.28)$$

Поскольку скорости звука выражаются через  $\kappa$ , то получим следующее квадратное уравнение на  $\operatorname{tg} \theta_M$ :

$$2[\cos^2 \alpha + \kappa \sin^2 \alpha - v^2(2 + \kappa)] \operatorname{tg}^2 \theta_M \pm 2(\kappa - 1) \sin(2\alpha) \operatorname{tg} \theta_M + (\kappa - 1) \cos(2\alpha) + \kappa + 1 = 0. \quad (2.29)$$

В результате решения данного уравнения получим выражения для двух углов Маха [61]:

$$\operatorname{tg} \theta_M = \pm \frac{\sin \alpha \cos \alpha (\kappa - 1) \pm \sqrt{v^2 (\kappa \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) (\kappa + 2) - \kappa}}{v^2 (\kappa + 2) - \kappa \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}, \quad (2.30)$$

где знак  $\pm$  относится к углам  $\theta_{ML}, \theta_{MR}$  соответственно. Для очень быстрых частиц можно положить  $v = 1$ . Заметим, что при  $\kappa = 1$  ответ для конуса Маха переходит в ответ в случае обычной изотропной релятивистской гидродинамики  $\theta_{ML} = \theta_{MR} = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

На рис. 2.3 и 2.4 построены графики углов Маха в зависимости от угла  $\alpha$  и анизотропного параметра  $\kappa$  соответственно. Видно, что при фиксированном значении  $\kappa$  существует некоторое значение угла  $0 < \alpha < \pi/2$ , где разница между углами Маха максимальна. Если же обратиться к графику зависимости углов Маха от  $\kappa$ , то для любого угла  $\alpha$  разность между углами Маха максимальна при  $\kappa \rightarrow 0$ . Интересно также отметить угол  $\alpha = \arcsin 1/3$ , при этом угле  $\theta_{MR}$  теряет зависимость от  $\kappa$ .

Данные результаты были опубликованы в работе [61].

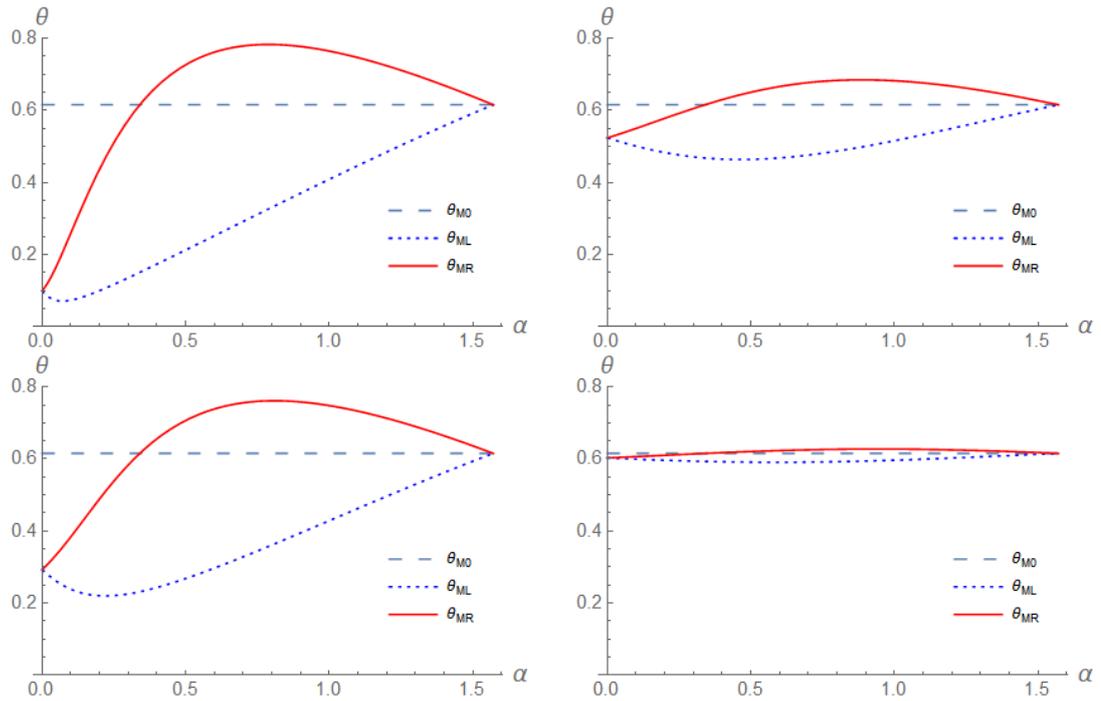


Рисунок 2.3 — Углы Маха  $\theta_{ML}$  и  $\theta_{MR}$  как функции от  $\alpha$  при  $v = 1$  для  $\kappa = 0.01$  (слева сверху),  $\kappa = 0.1$  (справа сверху),  $\kappa = 0.5$  (слева снизу),  $\kappa = 0.9$  (справа снизу).  $\theta_{M0}$  - угол Маха в изотропном случае.

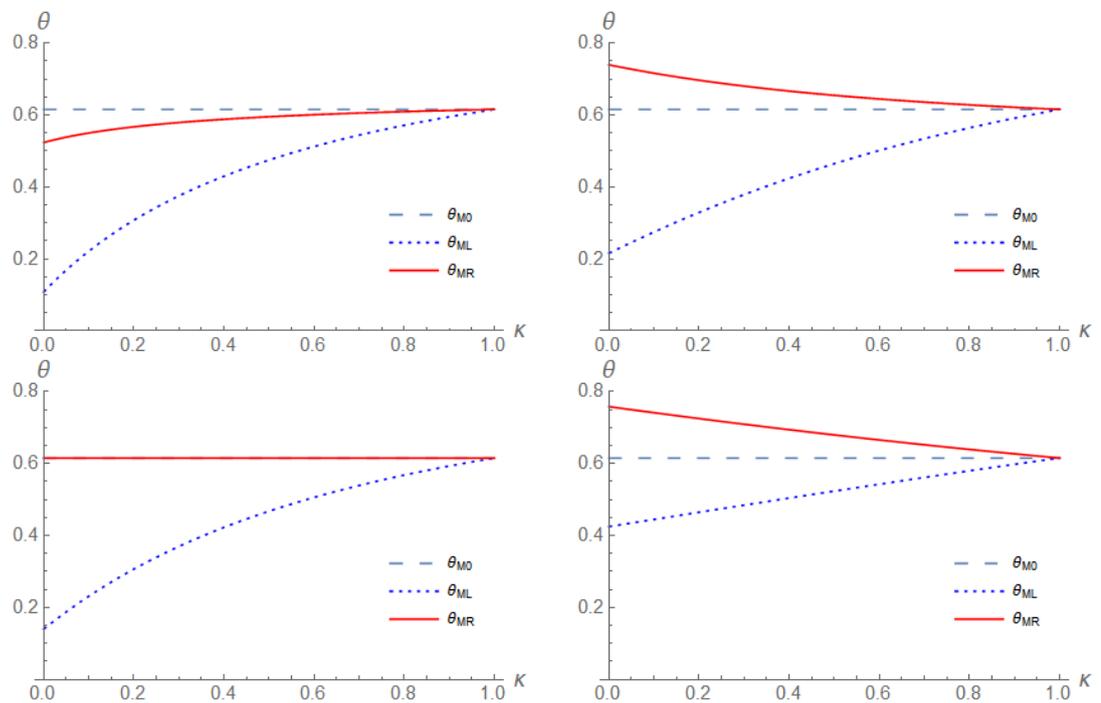


Рисунок 2.4 — Углы Маха  $\theta_{ML}$  и  $\theta_{MR}$  как функции от  $\kappa$  при  $v = 1$  для  $\alpha = \pi/12$  (слева сверху),  $\alpha = \arcsin 1/3$  (справа сверху),  $\alpha = \pi/6$  (слева снизу),  $\alpha = \pi/3$  (справа снизу).  $\theta_{M0}$  - угол Маха в изотропном случае.

### Глава 3. Ударные волны в случае постоянной анизотропии

Следующим шагом является исследование ударных волн в анизотропной релятивистской гидродинамике. Известно, что в случае гидродинамики идеальной жидкости возможно получение разрывных решений ударных волн в виде ударной адиабаты или адиабаты Гюгонио [53; 70]. В безмассовом случае задача упрощается, и возможен вывод аналитических выражений для скоростей падающего на ударную волну потока и прошедшего сквозь неё. Рассматриваемый случай анизотропной релятивистской гидродинамики является гидродинамикой нулевого порядка с уравнением состояния, аналогичным уравнению состояния идеальной жидкости, несмотря на то, что само введение параметра анизотропии предусматривает некий итог пересуммирования вязких поправок к изотропной теории. Исходя из этого, ожидается получить содержательные результаты из решений ударных волн в анизотропном подходе, применяя методы изотропной идеальной гидродинамики, приводящих к разрывным решениям.

#### 3.1 Изотропное решение идеальной жидкости

Напомним решение для ударных волн в изотропной гидродинамике идеальной жидкости, что послужит основой для дальнейшего анализа в анизотропном случае. Для идеальной жидкости тензор энергии-импульса имеет вид (1.4).

Плоская ударная волна, создающая разрыв в пространстве, является трёхмерной гиперповерхностью. Таким образом, поверхность делит пространство на две части, а движущийся поток направлен перпендикулярно данной поверхности. В этом случае ударная волна будет описываться разрывным решением уравнений движения. Данные уравнения диктуются условием сохранения проекции тензора энергии-импульса на нормаль к поверхности разрыва:

$$T_{\mu\nu}N^\mu = T'_{\mu\nu}N^\mu, \quad (3.1)$$

где  $N^\mu$  - единичный вектор нормали к поверхности разрыва, а  $T_{\mu\nu}$  и  $T'_{\mu\nu}$  - тензоры энергии-импульса падающего и прошедшего потоков соответственно.

Прохождение потоком поверхности разрыва выражается в преобразовании давления, энтропии и нормальной компоненты скорости  $\mathbf{v}$ :

$$(P, S, \mathbf{v}) \Rightarrow (P', S', \mathbf{v}') \quad (3.2)$$

Мы будем рассматривать только случай ударных волн сжатия, для которых  $P' > P$ ,  $S' > S$  [53; 70]. Отношение давлений

$$\sigma = P'/P, \quad (3.3)$$

характеризующее силу сжатия для ударной волны, является параметром задачи.

Используя вид тензора энергии импульса (1.4), из уравнения (3.1) получим

$$(\varepsilon + P)U_\mu N^\mu U_\nu - PN_\nu = (\varepsilon' + P')U'_\mu N^\mu U'_\nu - P'N_\nu. \quad (3.4)$$

Домножая (3.4) на  $U^\nu$  и  $U'^\nu$  получим следующую систему уравнений

$$(\varepsilon + P)x = (\varepsilon' + P')Ax', \quad (3.5)$$

$$(\varepsilon' + P)x' = (\varepsilon + P)Ax, \quad (3.6)$$

где определены  $x = U_\mu N^\mu$ ,  $x' = U'_\mu N^\mu$  и  $A = U'_\nu U^\nu$ . Тогда получим

$$(\varepsilon + P)(\varepsilon + P)x^2 = (\varepsilon' + P)(\varepsilon' + P')x'^2. \quad (3.7)$$

Вектор нормали  $N^\mu$  должен быть пространственно-подобным,  $N^\mu N_\mu < 0$ , чтобы скорость распространения волнового фронта была меньше скорости света [71].

Домножая (3.4) на  $N_\mu$ , получим

$$N_\nu N^\nu = \frac{1}{P - P'} \left[ (\varepsilon + P)x^2 - (\varepsilon' + P')x'^2 \right], \quad (3.8)$$

и, используя (3.7) найдём, что

$$N_\mu N^\mu = \frac{\varepsilon' + P'}{\varepsilon + P} \left[ 1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{P - P'} \right] x'^2 = \frac{\varepsilon + P}{\varepsilon' + P} \left[ 1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{P - P'} \right] x^2. \quad (3.9)$$

Откуда условие досветовой скорости  $N_\mu N^\mu < 0$  будет соответствовать неравенству

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{P - P'} > 1. \quad (3.10)$$

В случае безмассового газа, когда  $\varepsilon = 3P$ , неравенство (3.10) выполняется тривиальным образом. Аналогичное исследование для анизотропного случая приведено в Приложении А.

Для получения самих решений, без потери общности, выберем направление  $N^\mu = (0, 1, 0, 0)$  и 4-вектор скорости в виде  $U^\mu = (u_0, u_x, 0, 0)$ , тогда будем иметь два уравнения из (3.4)

$$4PU_xU_0 = 4P'U'_xU'_0, \quad (3.11)$$

$$-4PU_x^2 - P = -4P'U_x'^2 - P'. \quad (3.12)$$

Решая данную систему уравнений, найдём для компонент трёхмерного вектора скорости  $v_i = u_i/u_0$  следующие выражения [72] :

$$v_x = \sqrt{\frac{3\sigma + 1}{3(\sigma + 3)}}, \quad v'_x = \sqrt{\frac{\sigma + 3}{3(3\sigma + 1)}}, \quad (3.13)$$

где величина  $\sigma$  задаётся соотношением (3.3).

Достаточно ёмкой характеристикой ударной волны, отражающей свойства преобразования скорости потока, будет относительная разность скоростей падающего и прошедшего потоков соответственно

$$\delta_{\text{iso}} = \frac{v'_x - v_x}{v_x} = -\frac{2}{3\sigma + 1}(\sigma - 1). \quad (3.14)$$

Для ударных волн сжатия  $P' > P$  имеем  $\sigma > 1$ , и тогда из (3.14) следует, что  $\delta_{\text{iso}} < 0$ . Скорость потока падает после прохождения ударно-волнового фронта. Введём величину произведения скоростей  $\rho_{\text{iso}}$  и отметим, что имеет место следующее соотношение

$$\rho_{\text{iso}} \equiv v_x v'_x = \frac{1}{3} = c_s^2, \quad (3.15)$$

где  $c_s$  - скорость звука в ультрарелятивистской среде.

## 3.2 Поперечные и продольные ударные волны

### 3.2.1 Поперечная ударная волна

Рассмотрим сначала случай, когда нормаль к ударной волне  $N^\mu$  направлена перпендикулярно оси анизотропии. Такую ударную волну будем называть поперечной. Ввиду симметрии в плоскости  $Oxy$ , можно рассмотреть распространение потока вдоль оси  $Ox$ , в соответствии с чем базисные вектора (1.17) выберем в виде

$$U_\mu = (u_0, u_x, 0, 0), \quad Z_\mu = (0, 0, 0, 1), \quad (3.16)$$

$$U'_\mu = (u'_0, u'_x, 0, 0), \quad Z'_\mu = Z_\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (3.17)$$

Вектор нормали в таком случае будет так же направлен вдоль оси  $Ox$ :  $N^\mu = (0, 1, 0, 0)$ . Более общий случай, когда нормаль направлена произвольным образом, рассмотрен в Приложении Б.

В ультрарелятивистском анизотропном случае ( $\varepsilon = 2P_\perp + P_\parallel$ ) условие на границе (3.1) приводит к следующей системе уравнений

$$(3P_\perp + P_\parallel)u_0u_x - (3P'_\perp + P'_\parallel)u'_0u'_x = 0, \quad (3.18)$$

$$(3P_\perp + P_\parallel)u_x^2 + P_\perp - (3P'_\perp + P'_\parallel)(u'_x)^2 - P'_\perp = 0. \quad (3.19)$$

Из уравнений (3.18 - 3.19) найдём выражения для компонент 4-вектора скорости  $u_x$ ,  $u'_x$ :

$$u_x = \frac{v_x}{u_0} = \sqrt{\frac{(P_\perp - P'_\perp)(P'_\parallel + P_\perp + 2P'_\perp)}{(2P_\perp - P_\parallel - 2P'_\perp + P'_\parallel)(P'_\parallel + 2P_\perp + P'_\perp)}}, \quad (3.20)$$

$$u'_x = \frac{v'_x}{u'_0} = \sqrt{\frac{(P_\perp - P'_\perp)(P'_\parallel + 2P_\perp + P'_\perp)}{(2P_\perp - P_\parallel - 2P'_\perp + P'_\parallel)(P'_\parallel + P_\perp + 2P'_\perp)}}. \quad (3.21)$$

Предполагается, что параметр анизотропии не изменяется как свойство среды  $\xi' = \xi$ . Используя формулы (1.35, 1.36) для продольного и поперечно давлений, получим следующие выражения для скоростей падающего и прошедшего потока  $v_x$  и  $v'_x$ :

$$v_x(\sigma, \xi) = \sqrt{\frac{R_\perp(3\sigma R + R_\perp)}{3R(R_\perp\sigma + R)}}, \quad v'_x(\sigma, \xi) = \sqrt{\frac{R_\perp(R_\perp\sigma + R)}{3R(3\sigma R + R_\perp)}}, \quad (3.22)$$

где  $\sigma = P'_{\text{iso}}/P_{\text{iso}}$ .

Используя (3.22), можно вычислить относительную разность  $\delta_{\perp}$  и величину  $\rho_{\perp}$  для скоростей падающего и прошедшего потоков

$$\delta_{\perp}(\xi) = \frac{v'_x - v_x}{v_x} = -(\sigma - 1) \frac{3R - R_{\perp}}{3\sigma R + R_{\perp}}, \quad (3.23)$$

$$\rho_{\perp}(\xi) = v_x v'_x = \frac{R_{\perp}}{3R}. \quad (3.24)$$

Произведение скоростей падающего и прошедшего потока в изотропном случае даёт скорость звука в среде (3.15). Можно заметить, что произведение скоростей падающего и прошедшего потока (3.24) равно квадрату поперечной скорости звука (2.21)

$$\rho_{\perp}(\xi) = c_{s\perp}^2. \quad (3.25)$$

Таким образом, другим путём мы пришли в тому же выражению для скорости распространения волнового фронта в поперечном направлении относительно оси анизотропии.

В изотропном пределе  $\xi \rightarrow 0$  найдём

$$\delta_{\perp}(\xi)|_{\xi \rightarrow 0} \rightarrow \delta_{\text{iso}}, \quad \rho_{\perp}(\xi)|_{\xi \rightarrow 0} \rightarrow \rho_{\text{iso}}, \quad (3.26)$$

где  $\delta_{\text{iso}}$  и  $\rho_{\text{iso}}$  определены выражениями (3.14) и (3.15).

При бесконечно растущей анизотропии  $\xi \rightarrow \infty$  получим

$$\delta_{\perp}(\xi)|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow -(\sigma - 1) \frac{1}{2\sigma + 1}, \quad \rho_{\perp}(\xi)|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (3.27)$$

### 3.2.2 Продольная ударная волна

Проведём аналогичные вычисления для случая, когда нормаль к поверхности разрыва направлена вдоль оси анизотропии. Вектор нормали и падающий поток в таком случае будут направлены вдоль оси  $Oz$ :  $N^{\mu} = (0, 0, 0, 1)$ . Для базисных векторов имеем

$$U_{\mu} = (\cosh \vartheta, 0, 0, \sinh \vartheta), \quad Z_{\mu} = (\sinh \vartheta, 0, 0, \cosh \vartheta). \quad (3.28)$$

$$U'_{\mu} = (\cosh \vartheta', 0, 0, \sinh \vartheta'), \quad Z'_{\mu} = (\sinh \vartheta', 0, 0, \cosh \vartheta'). \quad (3.29)$$

После проведения необходимых вычислений получим для скоростей падающего и прошедшего потока следующие выражения

$$v_z(\sigma, \xi) = \sqrt{\frac{R_{\parallel}(\sigma R + R_{\parallel})}{3R(R_{\parallel}\sigma + R)}}, \quad v'_z(\sigma, \xi) = \sqrt{\frac{R_{\parallel}(R_{\parallel}\sigma + R)}{3R(3\sigma R + R_{\parallel})}}. \quad (3.30)$$

Соответствующие выражения для  $\delta_{\parallel}(\xi)$  и  $\rho_{\parallel}(\xi)$  имеют вид

$$\delta_{\parallel}(\xi) = \frac{v'_z - v_z}{v_z} = -(\sigma - 1) \frac{3R - R_{\parallel}}{3\sigma R + R_{\parallel}}, \quad (3.31)$$

$$\rho_{\parallel}(\xi) = v_z v'_z = \frac{R_{\parallel}}{3R}. \quad (3.32)$$

Видно, что выражение (3.32) аналогично формуле для продольной скорости распространения звукового фронта (2.22), полученной из волнового уравнения (2.18). Поэтому можно определить

$$\rho_{\parallel}(\xi) = c_{s\parallel}^2. \quad (3.33)$$

В изотропном пределе  $\xi \rightarrow 0$  имеем

$$\delta_{\parallel}(\xi)|_{\xi \rightarrow 0} \rightarrow \delta_{\text{iso}}, \quad \rho_{\parallel}(\xi)|_{\xi \rightarrow 0} \rightarrow \rho_{\text{iso}}. \quad (3.34)$$

При стремлении анизотропии к бесконечности  $\xi \rightarrow \infty$ , получим

$$\delta_{\parallel}(\xi)|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow -(\sigma - 1) \frac{1}{\sigma}, \quad \rho_{\parallel}(\xi)|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (3.35)$$

### 3.2.3 Обсуждение и сравнение

На Рис 3.1 видно, что для относительной разности в поперечном случае  $\delta_{\perp}(\xi)$  и продольном  $\delta_{\parallel}(\xi)$  зависимость от величины анизотропии носит разный, противоположный характер.

Начиная с изотропного значения  $\delta_{\text{iso}}$  при  $\xi = 0$ , относительная скорость  $\delta_{\perp}(\xi)$  растет с ростом  $\xi$  до своего асимптотического значения (3.27). Это означает, что перепад скоростей потока при прохождении поперечной ударной волны уменьшается с ростом  $\xi$ , так что поперечная ударная волна ослабевает с ростом анизотропии. Наоборот, относительный перепад скорости  $\delta_{\parallel}(\xi)$  увеличивается

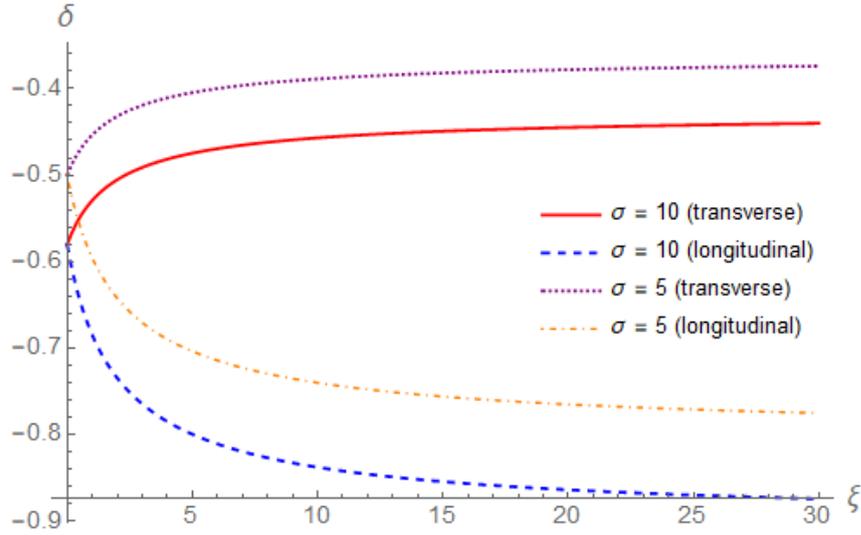


Рисунок 3.1 — Графики  $\delta(\xi|\sigma)$  для продольной ( $\sigma = 5$  - пунктир и  $\sigma = 10$  - точка-пунктир) и поперечной ( $\sigma = 5$  - сплошная и  $\sigma = 10$  - точки) ударных волн.

с ростом  $\xi$  в сторону его асимптотического значения, заданного соотношением (3.35), следовательно, продольная ударная волна показывает усиление с ростом анизотропии. При асимптотически больших анизотропиях  $\xi \rightarrow \infty$  разрыв между поперечной и продольной относительными скоростями достигает

$$(\delta_{\perp}(\xi) - \delta_{\parallel}(\xi)) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{(\sigma - 1)^2}{\sigma(2\sigma + 1)}. \quad (3.36)$$

Как было показано ранее, поперечная скорость звука  $c_{s\perp}$  возрастает от  $1/\sqrt{3}$  при  $\xi = 0$  до  $1/\sqrt{2}$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , а продольная  $c_{s\parallel}$  затухает от того же значения  $1/\sqrt{3}$  в точке  $\xi = 0$  до 0 в точке  $\xi \rightarrow \infty$ . Поскольку существование ударной волны возможно только при движении потока со скоростью, превышающей скорость звука, для генерации ударной волны в направлении анизотропии требуется значительно меньшая скорость потока [62]. Таким образом, при большей анизотропии образование продольных ударных волн становится все легче, а поперечных, наоборот, все труднее.

### 3.3 Нормальная ударная волна с произвольным полярным углом

В этом разделе даётся описание нормальной ударной волны на которую падает поток под произвольным полярным углом  $\alpha$ . Главное различие, с которым

мы столкнемся, заключается в том, что, в отличие от рассмотренных выше случаев поперечных и продольных ударных волн, преобразование  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$  скорости потока при прохождении поверхности разрыва зависит как от абсолютной величины скорости потока, так и от направления его распространения (см. Рис. 3.2).

Для характеристики преобразования  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$  введем следующие переменные, описывающие изменение модуля и направления скорости потока поперек фронта ударной волны:

$$\delta_{\alpha\alpha'}(\xi, \sigma) = \frac{v'(\xi, \sigma, \alpha) - v(\xi, \sigma, \alpha)}{v(\xi, \sigma, \alpha)}, \quad \beta = \alpha'(\xi, \sigma, \alpha) - \alpha \quad (3.37)$$

где  $\delta_{\alpha\alpha'}(\xi, \sigma)$  обобщает переменные  $\delta_{\perp}(\xi)$  и  $\delta_{\parallel}(\xi)$ , определенные в (3.24) и (3.32) соответственно.

### 3.3.1 Основные уравнения

Рассмотрим поток, движущийся под углом  $\alpha$  к оси луча (оси анизотропии) (Рис. 3.2). Благодаря симметрии в плоскости  $Oxy$  можно выбрать, например, ось  $Ox$  в качестве перпендикулярного направления. Разность между углами  $\alpha'$  и  $\alpha$  обозначим как  $\beta$  (см. определение выше).

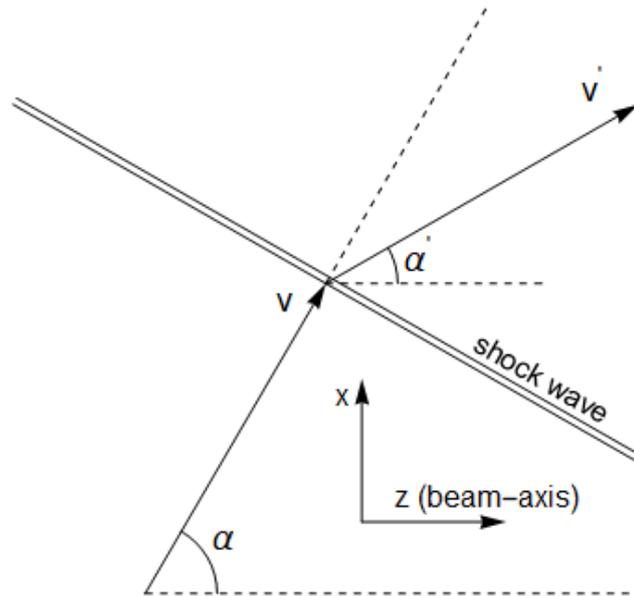


Рисунок 3.2 — Преобразование потока через ударную волну.

Таким образом, скорости, выраженные через компоненты 4-вектора скорости, равны

$$v_x = \frac{u_x}{u_0} = \frac{\tanh \gamma}{\cosh \vartheta} = v \sin \alpha, \quad v_z = \frac{u_z}{u_0} = \tanh \vartheta = v \cos \alpha, \quad (3.38)$$

$$v'_x = \frac{u'_x}{u'_0} = \frac{\tanh \gamma'}{\cosh \vartheta'} = v' \sin \alpha', \quad v'_z = \frac{u'_z}{u'_0} = \tanh \vartheta' = v' \cos \alpha'. \quad (3.39)$$

Из выражений (3.38,3.39) получим следующие соотношения для  $\vartheta, \vartheta'$ :

$$\vartheta = \operatorname{arcsinh} [\tanh \gamma \operatorname{ctg} \alpha], \quad \vartheta' = \operatorname{arcsinh} [\tanh \gamma' \operatorname{ctg} \alpha']. \quad (3.40)$$

Выберем следующую параметризацию компонент вектора нормали к поверхности разрыва:

$$N_\mu = (0, \sin \alpha, 0, \cos \alpha), \quad (3.41)$$

С выбором вектора нормали в виде (3.41) уравнения (3.1) приобретают следующий вид

$$\begin{aligned} & - (3P_\perp + P_\parallel) \cosh \gamma \cosh \vartheta (\sinh \gamma \sin \alpha + \cosh \gamma \sinh \vartheta \cos \alpha) + \\ & + (3P'_\perp + P'_\parallel) \cosh \gamma' \cosh \vartheta' (\sinh \gamma' \sin \alpha + \cosh \gamma' \sinh \vartheta' \cos \alpha) + \\ & + (P_\perp - P_\parallel) \sinh \vartheta \cosh \vartheta \cos \alpha - (P'_\perp - P'_\parallel) \sinh \vartheta' \cosh \vartheta' \cos \alpha = 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} & - (3P_\perp + P_\parallel) \cosh \gamma \sinh \vartheta (\sinh \gamma \sin \alpha + \cosh \gamma \sinh \vartheta \cos \alpha) - \\ & + (3P'_\perp + P'_\parallel) \cosh \gamma' \sinh \vartheta' (\sinh \gamma' \sin \alpha + \cosh \gamma' \sinh \vartheta' \cos \alpha) + P'_\perp \cos \alpha + \\ & + (P_\perp - P_\parallel) \cosh \vartheta \cosh \vartheta \cos \alpha - (P'_\perp - P'_\parallel) \cosh \vartheta' \cosh \vartheta' \cos \alpha = 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} & - (3P_\perp + P_\parallel) \sinh \gamma (\sinh \gamma \sin \alpha + \cosh \gamma \sinh \eta \cos \alpha) - P_\perp \sin \alpha + \\ & + (3P'_\perp + P'_\parallel) \sinh \gamma' (\sinh \gamma' \sin \alpha + \cosh \gamma' \sinh \vartheta' \cos \alpha) + P'_\perp \sin \alpha = 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

Уравнения (3.42 - 3.44) составляют систему уравнений относительно трех неизвестных  $\gamma, \gamma', \alpha'$ , зависящих от трёх параметров  $\sigma, \xi, \alpha$ , которые решаются численно. Формулы (3.38,3.39) затем переводят решение для  $\gamma, \gamma', \alpha'$  в векторы скоростей падающего и прошедшего потоков.

Стоит отметить, что при определенных условиях, например, при  $\alpha = \pi/4$  можно получить полином пятой степени по  $v$ , а в случае  $\alpha' = 0$  система уравнений решается аналитически.

### 3.3.2 Преломление падающего потока

В изотропной релятивистской гидродинамике нормальная ударная волна изменяет только абсолютную величину скорости набегающего потока, но не направление проходящего через него потока. Проведенный выше анализ поперечных и продольных нормальных ударных волн показывает, что в этих случаях в анизотропной гидродинамике также отсутствует отклонение набегающего потока. Однако оказывается, что такое поведение нарушается для нормальных ударных волн, падающих под произвольным полярным углом. Поток отклоняется фронтом ударной волны так, что в обозначениях  $\alpha \neq \alpha'$  (см. рис. 3.2).

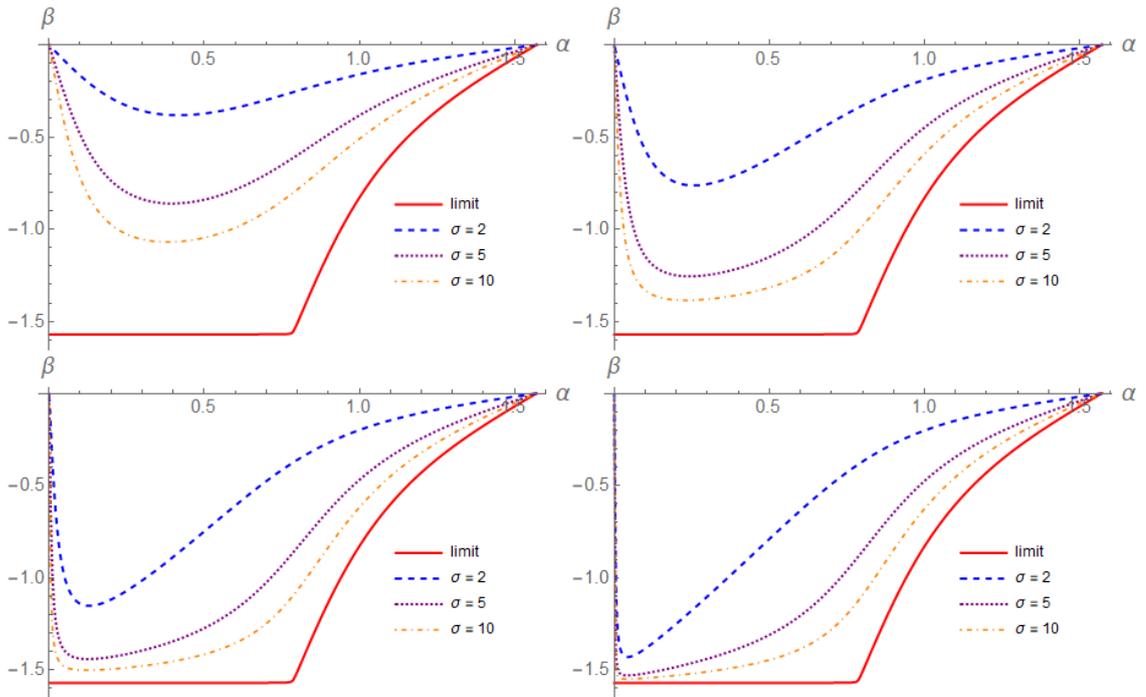


Рисунок 3.3 — График  $\beta = \alpha' - \alpha$  в зависимости от  $\alpha$  для разных значений  $\sigma$  при  $\xi = 5$  (слева сверху),  $\xi = 20$  (справа сверху),  $\xi = 100$  (слева внизу),  $\xi = 1000$  (справа внизу). На каждом графике изображен предельный случай  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\xi \rightarrow \infty$  (сплошная).

На Рис. 3.3 представлены зависимости угла отклонения  $\beta = \alpha' - \alpha$  от угла падения  $\alpha$  для нескольких значений  $\sigma$  и различных анизотропий. Во всех случаях функция  $\beta(\alpha|\sigma)$  принимает отрицательные значения и имеет минимум при некотором  $\alpha^*$ . При фиксированном  $\xi$  глубина этого минимума растет с ростом  $\sigma$ . При фиксированном  $\sigma$  с ростом  $\xi$  минимум углубляется, и его положение смещается в сторону меньших  $\alpha$ . Заметим, что при сильной анизотропии, больших

$\sigma$  и углах падения  $\alpha \leq \pi/4$  имеем отклонение потока от начального направления почти на  $\pi/2$ , так что прошедший поток стремится распространяться вдоль фронта ударной волны [62].

### 3.3.3 Преобразование скорости потока после прохождения ударной волны

Сначала рассмотрим зависимость от анизотропии модуля скорости падающего потока  $v(\xi|\alpha, \sigma)$  при различных углах падения  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, \pi/2]$ . Полученные кривые показаны на рис. 3.4 для двух различных значений  $\sigma$ . На рис. 3.4 мы

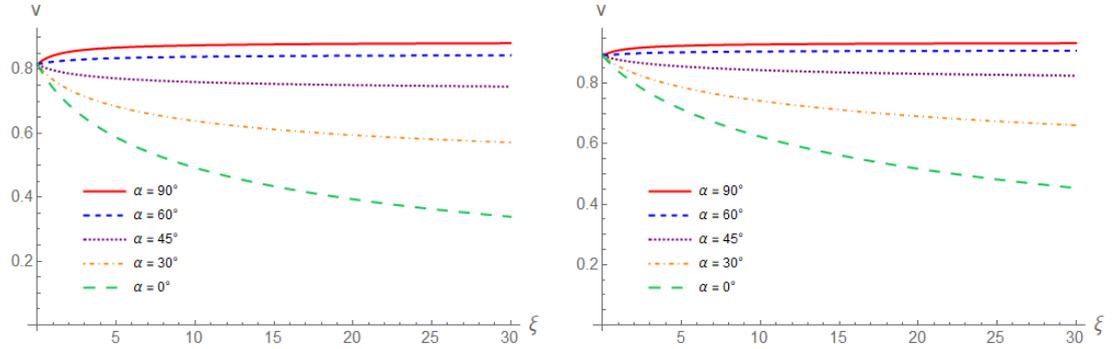


Рисунок 3.4 — Графики  $v(\xi)$  в зависимости от параметра анизотропии  $\xi$  для различных значений  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, \pi/2]$ , при  $\sigma = 5$  (слева) и  $\sigma = 10$  (справа).

видим, что для обоих значений  $\sigma$  существует переход от вогнутой затухающей зависимости  $v(\xi|\alpha, \sigma)$  при небольших углах падения  $\alpha$  к выпуклой растущей зависимости при больших углах падения. Переход происходит при  $\alpha_{\text{crit}} \sim \pi/4$ .

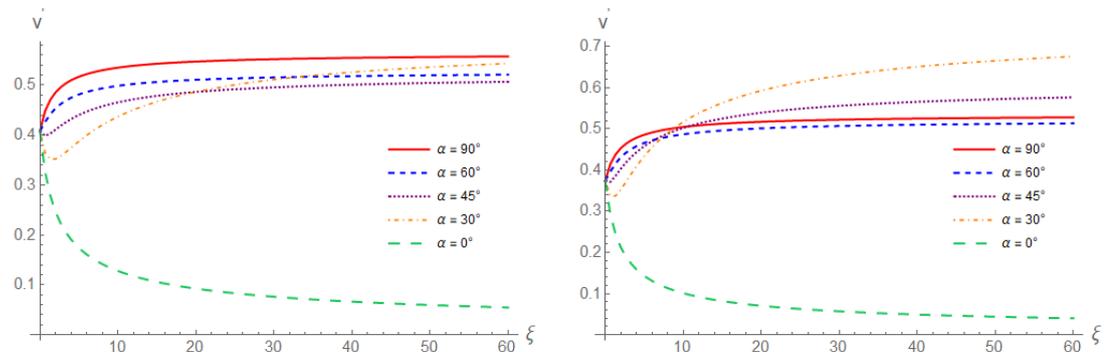


Рисунок 3.5 — Графики  $v'(\xi)$  в зависимости от параметра анизотропии  $\xi$  для различных значений  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, \pi/2]$ , при  $\sigma = 5$  (слева) и  $\sigma = 10$  (справа).

Проанализируем теперь зависимость от анизотропии модуля скорости прошедшего потока  $v'(\xi|\alpha, \sigma)$  при различных углах падения  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, \pi/2]$ . Полученные кривые показаны на рис. 3.5 для тех же значений  $\sigma = 5, 10$ .

Поведение  $v'(\xi|\alpha, \sigma)$  характеризуется двумя разными закономерностями. Переход между ними, как и в рассмотренном выше случае скорости падающего потока, также происходит при  $\alpha_{\text{crit}} \sim \pi/4$ :

- в интервале углов падения  $\alpha \in [0, \pi/4)$  росту при больших анизотропиях предшествует минимум при некотором  $\xi^*(\alpha)$  таком, что  $\xi^*(\alpha) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow \alpha_{\text{crit}}$  и  $\xi^*(\alpha) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Подробная иллюстрация этого явления представлена на рис. 3.6;
- в интервале углов падения  $\alpha \in (\pi/4, \pi/2]$  аналогично поведению  $v(\xi)$  в том же интервале углов  $v'(\xi)$  - вогнутая растущая функция, плавно приближающаяся к предельной кривой поперечной ударной волны при  $\alpha = \pi/2$ .

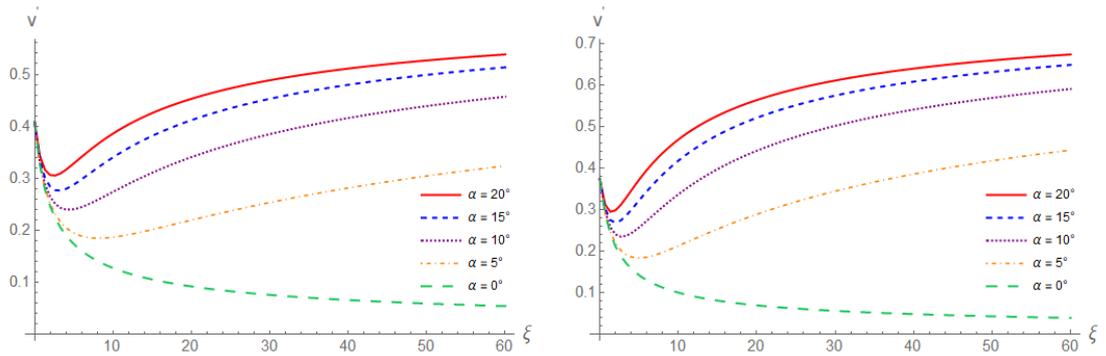


Рисунок 3.6 — Графики  $v'(\xi)$  в зависимости от параметра анизотропии  $\xi$  для различных значений  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, \pi/4)$ , при  $\sigma = 5$  (слева) и  $\sigma = 10$  (справа).

Стоит отметить, что при малых углах зависимость  $v'(\xi)$  чрезвычайно чувствительна к значению  $\alpha$  (см. рис. 3.7), что, возможно, свидетельствует о неустойчивом характере преобразования скорости потока «почти продольных» ударных волн.

Рассмотрим теперь угловую зависимость относительного изменения абсолютного значения скорости от параметра анизотропии  $\delta_{\alpha\alpha'}(\xi|\alpha, \sigma)$ , определяемого выражением (3.37) и вызванной суперпозицией соответствующих вкладов от  $v(\xi|\alpha, \sigma)$  и  $v'(\xi|\alpha, \sigma)$ .

Как видно на рис. 3.8, для каждого угла падения ударной волны  $\alpha \in (0, \pi/2)$  при некотором критическом значении анизотропии  $\xi^*(\alpha)$  относительный перепад скорости  $\delta_{\alpha\alpha'}(\xi)$  меняет знак, что соответствует ускорению потока

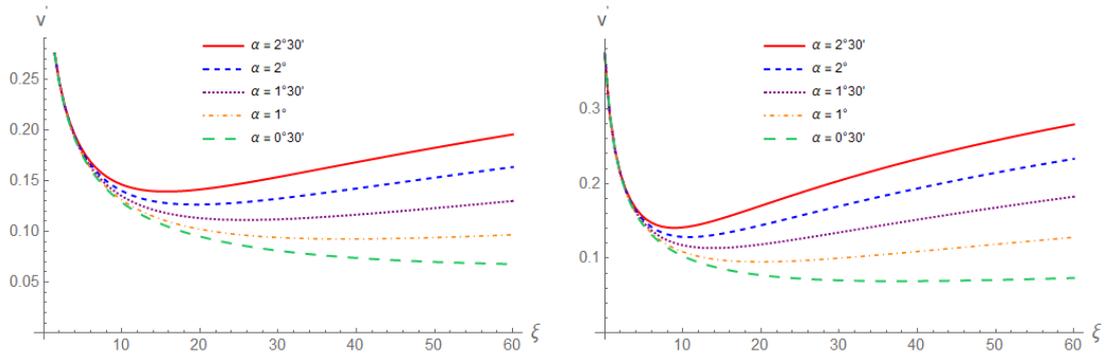


Рисунок 3.7 — Графики  $v'(\xi)$  в зависимости от параметра анизотропии  $\xi$  для небольших углов  $\alpha$  при  $\sigma = 5$  (слева) и  $\sigma = 10$  (справа).

ударной волной [62]. Такое поведение является атрибутом волн разрежения в изотропной гидродинамике. Невозможность существования волн разрежения (т.е. при  $P' < P$ ,  $S' < S$ ) обсуждалась в литературе [70], и появление в анизотропной гидродинамике атрибутов ударных волн разрежения ставит вопрос о возможных ограничениях на параметр анизотропии, либо указывает на различие величин анизотропии до и после ударной волны  $\xi' \neq \xi$ .

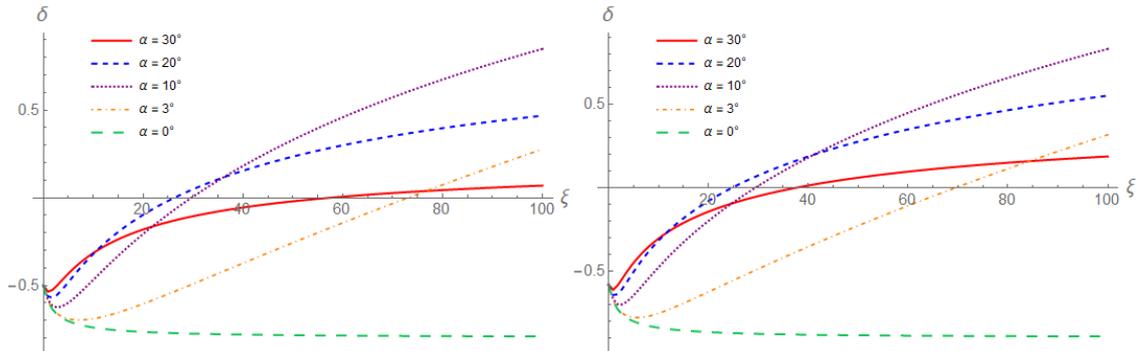


Рисунок 3.8 — Графики  $\delta_{\alpha\alpha'}(\xi)$  в зависимости от параметра анизотропии для различных значений  $\alpha$  при  $\sigma = 5$  (слева) и  $\sigma = 10$  (справа).

Проанализируем теперь относительное изменение абсолютного значения скорости  $\delta_{\alpha\alpha'}$  в зависимости от угла падения  $\alpha$  при фиксированном  $\xi$ . На рис. 3.9, 3.10 построена эта зависимость для нескольких относительно малых (рис. 3.9) и очень больших (рис. 3.10) значений параметра анизотропии и четырёх различных значений  $\sigma$  на рис. (3.9) и  $\sigma = 100$  на рис. 3.10. Из рис. 3.9, 3.9 видно, что суперпозиция угловых зависимостей  $v(\alpha|\xi, \sigma)$  и  $v'(\alpha|\xi, \sigma)$  приводит к графику  $\delta_{\alpha\alpha'}(\xi, \sigma)$ , содержащему максимум, который перемещается от больших углов к малым и становится более выраженным с увеличением анизотропии [62].

При больших  $\sigma$  и  $\xi$  появляется интервал углов, в котором  $\delta_{\alpha\alpha'}(\xi)$  меняет знак, и, следовательно, ударная волна приобретает свойства волны разрежения. Ширина этого интервала растет с ростом  $\sigma$ .

Также с увеличением обоих значений  $\xi$  и  $\sigma$  вблизи  $\alpha = 0$  происходит все более и более резкий возврат к случаю продольной ударной волны.

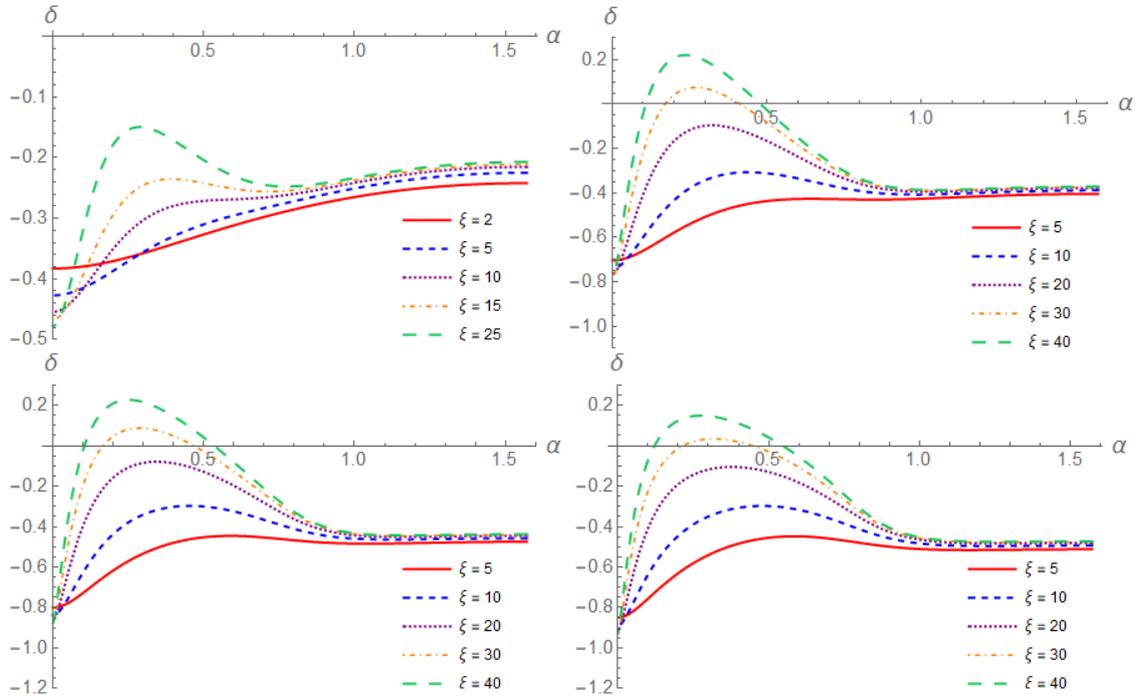


Рисунок 3.9 — Графики  $\delta_{\alpha\alpha'}(\xi)$  в зависимости от полярного угла  $\alpha$  для различных  $\xi$  при  $\sigma = 2$  (слева сверху),  $\sigma = 5$  (справа сверху),  $\sigma = 10$  (слева внизу) и  $\sigma = 20$  (справа внизу).

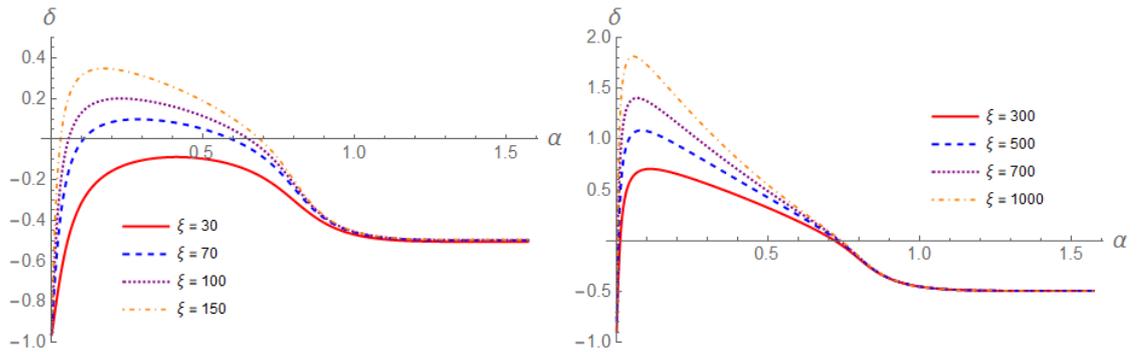


Рисунок 3.10 — Графики  $\delta_{\alpha\alpha'}(\xi)$  в зависимости от полярного угла  $\alpha$  для различных  $\xi$  при  $\sigma = 100$ .

Из рис. 3.11 видно, что  $\delta_{\alpha\alpha'}(\xi, \sigma)$  касается нуля при двух значениях  $\sigma$ . При малых  $\sigma$  и  $\xi$  зависимость носит нелинейный характер. При параметрах анизотропии  $\xi$  ниже определенного значения с ростом  $\xi$  относительная разность  $\delta_{\alpha\alpha'}(\xi, \sigma)$  действительно дважды претерпевает переход между отрицательными и положительными диапазонами. Таким образом, при таких значениях  $\xi$

возможны два типа ударных волн с характерным для ударных волн сжатия признаком - торможением набегающего потока. Волны первого типа характеризуются малыми значениями  $\sigma$ , в то время как для волн второго типа  $\sigma$  принимает большие значения, которые почти линейно растут с ростом  $\xi$ .

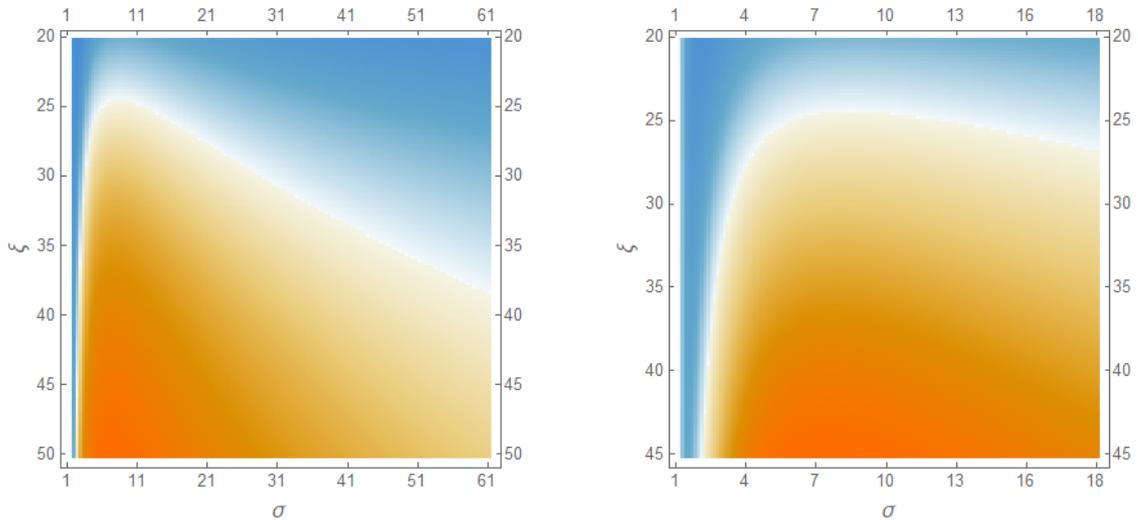


Рисунок 3.11 — График значения локального максимума  $\delta_{\alpha\alpha'}(\xi, \sigma)$ . Тёплые тона отвечают положительным значениям, а холодные отрицательным. Значения, близкие к нулю приобретают белый цвет.

### 3.3.4 Преобразование импульсов

Особый интерес для описания эффектов падающего и прошедшего потоков, связанных с формированием ударной волны при столкновениях тяжелых ионов, представляют связанные с ними поперечный и продольный импульсы, которые вносят вклад в спектры поперечного импульса и быстроты. Для ударной волны, падающей под полярным углом  $\alpha$ , соответствующие поперечный и продольный импульсы падающего потока запишутся как:

$$p_T = p \sin \alpha, \quad p_L = p \cos \alpha. \quad (3.45)$$

Здесь использованы обозначения, принятые в физике высоких энергий. Соответствие с предыдущими обозначениями имеют вполне однозначный вид:  $p_T \equiv p_{\perp}$ ,  $p_L \equiv p_{\parallel}$ .

Аналогичные формулы для импульсов справедливы и для прошедшего потока. Полученные угловые зависимости  $p_T(\alpha|\xi)$ ,  $p'_T(\alpha|\xi)$ ,  $p_L(\alpha|\xi)$ ,  $p'_L(\alpha|\xi)$  показаны для нескольких значений  $\xi$  на рис. 3.12 и 3.13 соответственно.

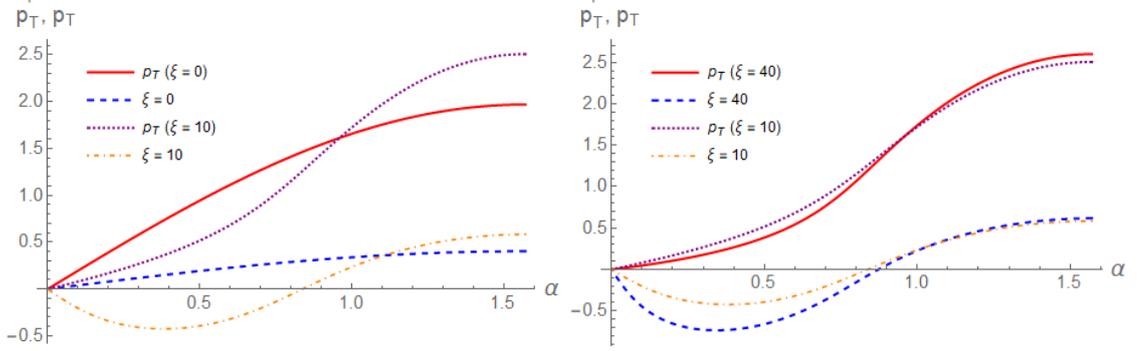


Рисунок 3.12 — Слева: графики  $p_T(\alpha|\xi)$  для  $\xi = 0$  (сплошная линия),  $\xi = 10$  (точки) и  $p'_T(\alpha|\xi)$  для  $\xi = 0$  (пунктир),  $\xi = 10$  (штрих-пунктир). Справа: графики  $p_T(\alpha|\xi)$  для  $\xi = 40$  (сплошная линия),  $\xi = 10$  (точки) и  $p'_T(\alpha|\xi)$  для  $\xi = 40$  (пунктир),  $\xi = 10$  (штрих-пунктир).

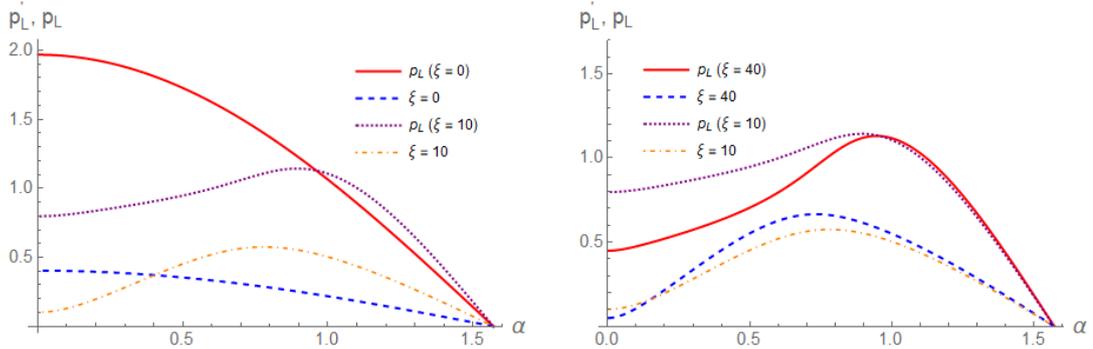


Рисунок 3.13 — Слева: графики  $p_L(\alpha|\xi)$  для  $\xi = 0$  (сплошная линия),  $\xi = 10$  (точки) и  $p'_L(\alpha|\xi)$  для  $\xi = 0$  (пунктир),  $\xi = 10$  (штрих-пунктир). Справа: графики  $p_L(\alpha|\xi)$  для  $\xi = 40$  (сплошная линия),  $\xi = 10$  (точки) и  $p'_L(\alpha|\xi)$  для  $\xi = 40$  (пунктир),  $\xi = 10$  (штрих-пунктир).

Из рис. 3.12 видно, что по сравнению с изотропным случаем происходит смена направления  $p'_T$  на противоположное при малых углах падения  $\alpha < \alpha_T^*(\xi)$ . Однако при больших углах падения  $\alpha_T^*(\xi) < \alpha < \pi/2$  идёт возврат  $p'_T$  в положительную область, что в конечном итоге приводит к усилению производства  $p'_T$  при  $\alpha = \pi/2$ , то есть  $p'_T(\xi > 0) > p'_T(\xi = 0)$ . Что касается продольных импульсов, то на рис. 3.13 мы наблюдаем, по сравнению с изотропным случаем, картину уменьшения продольного импульса при малых углах  $\alpha < \alpha_L^*(\xi)$  и его небольшое усиление при больших углах  $\alpha_L^*(\xi) < \alpha < \pi/2$ , где  $\alpha_L^*(\xi)$  отличается от своего поперечного аналога  $\alpha_T^*(\xi)$ .

Все результаты по исследованию ударных волн с постоянным параметром анизотропии были опубликованы в работе [62].

## Глава 4. Ударные волны в случае непостоянной анизотропии

В предыдущих разделах был рассмотрен режим, при котором величина анизотропии "заморожена" в материи и не меняется для потока, движущегося через ударную волну. Как было показано, такое поведение влечет за собой эффекты, связанные с отклонением потока, а также ускорением потока при определенных значениях  $\sigma = P'_{\text{iso}}/P_{\text{iso}}$  и  $\xi$ , где последнее является атрибутом волн разрежения. Подобные эффекты могут вызвать на практике определенные вопросы равно как и фиксация анизотропии. Поскольку естественно ожидать процесса изотропизации для эволюции горячей адронной материи, допущение  $\xi' = \xi$  может привести к потере информации об эволюции материи. В связи с этим, вместо фиксирования параметра анизотропии можно принять  $\alpha = \alpha'$  для решений ударных волн, что возвращает нас к более знакомому поведению падающего и прошедшего потоков в изотропном случае.

Рассмотрим поток, движущийся со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к направлению оси  $Oz$ . В случае нормальных ударных волн для компонент вектора, нормального к поверхности разрыва, имеем  $N_\mu = (0, \sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ . В таком случае будем иметь три уравнения на величины  $\xi', v, v'$  с входными параметрами  $\alpha, \xi, \sigma$ .

Условие согласования для тензора энергии-импульса (3.1) приводит к следующей системе уравнений

$$\left[ \frac{R_1(\xi)}{1-v^2} + \frac{R_2(\xi)}{1-v^2 \cos^2 \alpha} \cos^2 \alpha \right] v - \left[ \frac{R_1(\xi')}{1-v'^2} + \frac{R_2(\xi')}{1-v'^2 \cos^2 \alpha} \cos^2 \alpha \right] \sigma v' = 0, \quad (4.1)$$

$$\left[ R_\perp(\xi) - \sigma R_\perp(\xi') + \frac{R_1(\xi)v^2}{1-v^2} - \sigma \frac{R_1(\xi')v'^2}{1-v'^2} \right] \sin \alpha = 0, \quad (4.2)$$

$$\left[ R_\perp(\xi) - \sigma R_\perp(\xi') + \frac{R_1(\xi)v^2}{1-v^2} - \sigma \frac{R_1(\xi')v'^2}{1-v'^2} + \frac{R_2(\xi)}{1-v^2 \cos^2 \alpha} - \sigma \frac{R_2(\xi')}{1-v'^2 \cos^2 \alpha} \right] \cos \alpha = 0, \quad (4.3)$$

где, в свою очередь,

$$R_1(\xi) = R_\parallel(\xi) + 3R_\perp(\xi), \quad R_2(\xi) = R_\parallel(\xi) - R_\perp(\xi).$$

Из уравнений (4.1 - 4.3) видно, что при граничных значениях  $\alpha = 0, \pi/2$  остаются только два уравнения ввиду умножения выражений на тригонометрические функции. Однако при любых других неграничных значениях  $\alpha$  мы будем рассматривать выражения в квадратных скобках в уравнениях (4.2 - 4.3). Чтобы сохранить непрерывность решений, следует опустить  $\sin \alpha$  в (4.2) и  $\cos \alpha$  в (4.3) также и для  $\alpha = 0, \pi/2$ .

Рассматривая граничные случаи для полярного угла  $\alpha$ , получаем, что поперечный случай ( $\alpha = \pi/2$ ) приводит к уравнению

$$f_{\pi/2}(\sigma, \xi, \xi') = R_{\parallel}(\xi') - R_{\perp}(\xi') - \frac{R_{\parallel}(\xi) - R_{\perp}(\xi)}{\sigma} = 0. \quad (4.4)$$

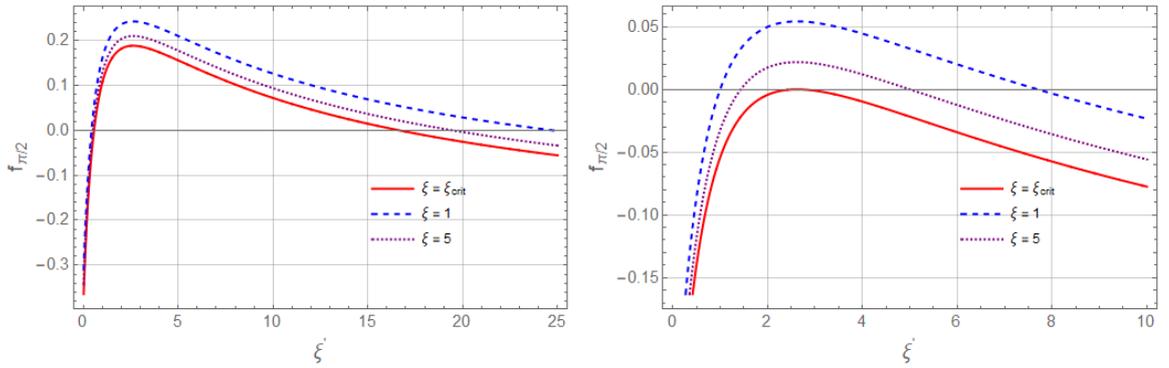


Рисунок 4.1 — График  $f_{\pi/2}$  в зависимости от  $\xi'$  для  $\xi = \xi_{\text{crit}}$  (сплошная),  $\xi = 1$  (пунктир),  $\xi = 5$  (точки) при  $\sigma = 1.5$  (слева) и  $\sigma = 1$  (справа).

Решение уравнения (4.4) для  $\xi'$  всегда будет давать два корня (см. рис. 4.1)  $\xi'_1 < \xi$  и  $\xi'_2 > \xi$  для  $\sigma \geq 1$ , за исключением случая, когда для  $\sigma = 1$  имеем  $\xi' = \xi = \xi_{\text{crit}}(\alpha = \pi/2)$ , где  $\xi_{\text{crit}}(\pi/2) \simeq 2.62143\dots$  является решением уравнения

$$\frac{\partial R_{\parallel}(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial R_{\perp}(\xi)}{\partial \xi}. \quad (4.5)$$

Очевидно ожидать, что при  $\sigma = 1$  ударная волна не существует, что соответствует решению  $v' = v$ ,  $\xi' = \xi$ . Выбирая один из двух корней уравнения (4.4) при  $\sigma > 1$ , мы хотим получить решение  $\xi' \rightarrow \xi$  при  $\sigma \rightarrow 1$ . Таким образом, точка  $\xi_{\text{crit}}$  разделяет два пространства решений. Если  $\xi < \xi_{\text{crit}}$ , то для непрерывного предела  $\sigma \rightarrow 1$  необходимо выбрать левое решение  $\xi' < \xi_{\text{crit}}$ , так как только в этом случае выполняется условие  $\xi' \rightarrow \xi$  при  $\sigma \rightarrow 1$ . И наоборот, если  $\xi > \xi_{\text{crit}}$ , то мы должны выбрать правое решение  $\xi' > \xi_{\text{crit}}$ , чтобы обеспечить выполнение того же условия. В случае, когда  $\xi = \xi_{\text{crit}}$ , возможны оба решения. Таким образом, для любого  $\sigma > 1$ , при плавном изменении  $\xi$  мы теряем непрерывность решения по  $\xi'$  всякий раз, когда  $\xi$  переходит через точку  $\xi_{\text{crit}}$ , из-за

необходимости смены пространства решений. Это показывает возможность существования ударных волн только в одном из пространств решений  $\xi'$  в случае фиксированного полярного угла  $\alpha' = \alpha$ .

Более того, для предела  $\xi \rightarrow 0$  обнаружим, что левое решение  $\xi' \rightarrow 0$ . Однако для правого решения  $\xi > \xi_{\text{crit}}, \sigma > 1$  нет возможности перейти к изотропному пределу  $\xi \rightarrow 0$ , так как мы работаем в другом пространстве решений. Отсутствие изотропного предела явно противоречит эволюции кварк-глюонной материи, а именно наличию процесса изотропизации системы. Кроме того, в случае  $\xi > \xi_{\text{crit}}$  решения для скоростей обеспечивают поведение ударной волны разрежения, т.е.  $v' > v$ . Поэтому можно считать, что критическая точка  $\xi_{\text{crit}}$  является верхней границей параметра анизотропии для рассматриваемых ударно-волновых решений.

Решая систему уравнений (4.1 - 4.3) для полярного угла  $\alpha = 0$ , можно найти существование аналогичной критической точки  $\xi_{\text{crit}}(\alpha = 0) \simeq 5.47941$ .

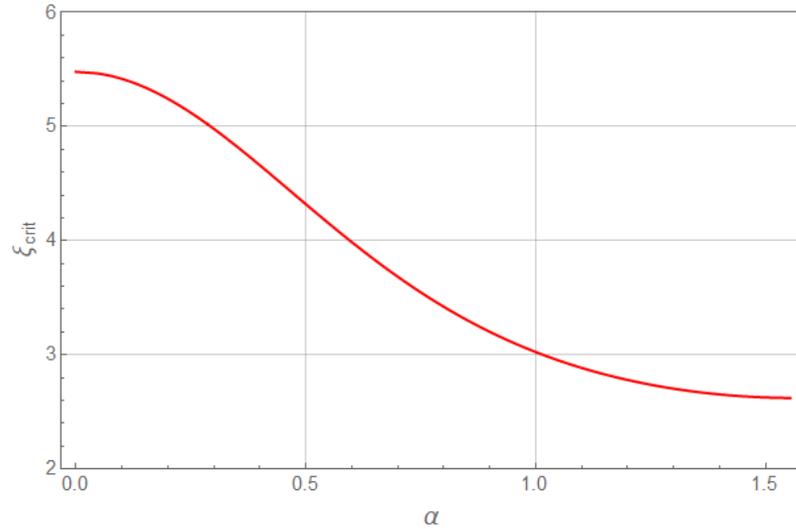


Рисунок 4.2 — График зависимости  $\xi_{\text{crit}}(\alpha)$ .

На рис. 4.2 показаны значения  $\xi_{\text{crit}}(\alpha)$  для произвольного полярного угла  $\alpha$ . Функция  $\xi_{\text{crit}}(\alpha)$  представляет собой монотонно убывающую функцию, которая идёт от значения  $\xi_{\text{crit}}(\alpha = 0)$  к значению  $\xi_{\text{crit}}(\alpha = \pi/2)$ . Таким образом, для формирования рассматриваемых ударных волн имеется ограничение на параметр анизотропии  $\xi$  для любого полярного угла  $\alpha$ .

Эволюцию параметра анизотропии можно получить, решая уравнения движения как в буст-инвариантном случае [15; 16], так и в не буст-инвариантном случае [19]. Из этих решений следует, что могут быть области, где  $\xi > \xi_{\text{crit}}$ . Более того, при начальном условии  $\xi_0 = 0$  параметр анизотропии

достигает максимума  $\xi_{\max}$  при определенном значении собственного времени  $\tau = \tau^*$ . Этот максимум зависит от отношения сдвиговой вязкости к плотности энтропии  $\eta/S$ , значение которого заложено в формуле для времени релаксации в уравнении Больцмана (1.82). Низкие значения  $\eta/S$  соответствуют низким значениям  $\xi_{\max}$ , и наоборот. Образование ударных волн возможно на протяжении всей эволюции материи, если  $\xi_{\max} \leq \xi_{\text{crit}}$ . Например, в случае чисто продольного расширения (с начальным условием  $\xi_0 = 0$ ) максимальное значение параметра анизотропии  $\xi_{\max} = \xi_{\text{crit}}(\pi/2) \simeq 2.62143$  соответствует  $\eta/S \simeq 0.17179$ , а  $\xi_{\max} = \xi_{\text{crit}}(0) \simeq 5.47941$  соответствует  $\eta/S \simeq 0.35619$ .

Рассмотрим угловую зависимость параметра анизотропии  $\xi'(\alpha, \sigma)$ . На рис. 4.3 изображён график функции  $\xi'(\alpha|\sigma)$ , где рассматривается область определения  $\xi \in [0, \xi_{\text{crit}}(\pi/2)]$ . Видно, что изотропизация системы возможна за счет генерации ударных волн. Для поперечного случая ( $\alpha = \pi/2$ ) мы имеем большее падение анизотропии, чем для продольного случая.

Данные результаты были опубликованы в статье [64].

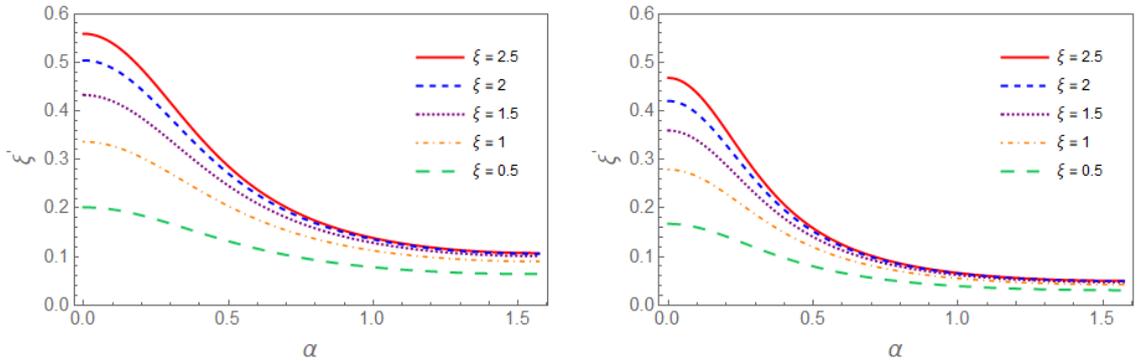


Рисунок 4.3 — Графики  $\xi'(\alpha|\sigma)$  для  $\xi = 2.5$  (сплошная),  $\xi = 2$  (пунктир),  $\xi = 1.5$  (точки),  $\xi = 1$  (штрих-пунктир) и  $\xi = 0.5$  (длинный пунктир) при  $\sigma = 5$  (слева) и  $\sigma = 10$  (справа).

## Глава 5. Линейная устойчивость ударных волн

### 5.1 Изотропный случай

Линейная устойчивость ударных волн в данной главе будет исследоваться в соответствии с методом, описанным для релятивистской изотропной гидродинамики идеальной жидкости [73; 74]. В первом разделе будет изложено описание данного подхода с незначительными правками и изменениями.

Рассмотрим ультрарелятивистский безмассовый газ с уравнением состояния  $\varepsilon = 3P$ . В этом случае мы не будем рассматривать закон сохранения числа частиц, а сосредоточимся только на законе сохранения энергии-импульса:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (5.1)$$

где

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

$$U^\mu = (u_0, u_x, u_y, u_z), \quad u_0 = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}, \quad (5.3)$$

$P$  - давление и  $g^{\mu\nu}$  - метрический тензор.

Исследуется плоское ударно-волновое одномерное течение. Благодаря изотропии пространства можно зафиксировать любое направление нормали ударной волны, а затем, преобразовав координаты, перейти к системе, где одна из осей направлена по нормали. Поэтому, без ограничения общности, выберем вектор нормали направленным по оси  $Oz$  как  $N^\mu = (0, 0, 0, 1)$ . В этом случае поверхность разрыва делит пространство на два полупространства  $\Lambda_+$  при  $z > 0$  и  $\Lambda_-$  при  $z < 0$ . С помощью преобразования Лоренца мы можем перейти в систему покоя ударной волны. Так как мы рассматриваем одномерный поток, то можно положить  $v_x = v_y = 0$  и для компонент 4-скорости имеем

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad u_z = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Предполагается, что направление потока таково, что  $v > 0$ .

### 5.1.1 Основные уравнения

Рассмотрим малое гармоническое возмущение поверхности разрыва, приводящее к уравнению возмущенной поверхности вида

$$f(t, x, y, z) = z - \eta e^{-i(\omega t + kx + ly)} = 0, \quad (5.4)$$

где  $\eta$  - малая амплитуда возмущения. Нас будет интересовать режим неустойчивости, для которого  $k, l$  - действительные числа и  $\text{Im } \omega > 0$ . В этом случае возмущение нарастает экспоненциально во времени. Также считаем, что в общем случае  $l \neq 0, k \neq 0$ .

Разложим физические величины до первого порядка

$$u_0(t, x, y, z) = u_0 + \delta u_0(t, x, y, z), \quad (5.5)$$

$$u_x(t, x, y, z) = \delta u_x(t, x, y, z), \quad (5.6)$$

$$u_y(t, x, y, z) = \delta u_y(t, x, y, z), \quad (5.7)$$

$$u_z(t, x, y, z) = u_z + \delta u_z(t, x, y, z), \quad (5.8)$$

$$P(t, x, y, z) = P + \delta P(t, x, y, z). \quad (5.9)$$

Предполагается, что возмущения физических величин обращаются в нуль на бесконечности:

$$\delta u_0, \delta u_x, \delta u_y, \delta u_z, \delta P \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm\infty. \quad (5.10)$$

При таких граничных условиях экспоненциальный рост не может быть обусловлен передачей энергии от удаленных границ [73]. Область фазового пространства, где выполняется это граничное условие, вместе с  $k, l \in \mathbb{R}, \text{Im } \omega > 0$  образует условие неустойчивости ударной волны.

Введем вектор  $\mathbf{W} = (\delta P, \delta u_x, \delta u_y, \delta u_z)$  для возмущенных величин. Линеаризуя уравнение (5.1) относительно постоянного состояния, мы получаем следующую систему уравнений

$$A^\mu \partial_\mu \mathbf{W} = 0. \quad (5.11)$$

Матрицы  $A^\mu$  имеют вид

$$A^0 = \begin{pmatrix} -1 + (1 + c_s^2)u_0^2 & 0 & 0 & 2(\varepsilon + P)u_0u_z \\ 0 & (\varepsilon + P)u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\varepsilon + P)u_0 & 0 \\ (1 + c_s^2)u_0u_z & 0 & 0 & (\varepsilon + P)(u_0^2 + u_z^2) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & (\varepsilon + P)u_0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\varepsilon + P)u_z & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\varepsilon + P)u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\varepsilon + P)u_z & 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} (1 + c_s^2)u_0u_z & 0 & 0 & (\varepsilon + P)(u_0^2 + u_z^2) \\ 0 & (\varepsilon + P)u_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\varepsilon + P)u_z & 0 \\ 1 + (1 + c_s^2)u_0^2 & 0 & 0 & 2(\varepsilon + P)u_0u_z \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

где  $c_s^2 = (\partial P / \partial \varepsilon)$  — скорость звука.

Поскольку ожидается, что вектор  $\mathbf{W}$  унаследует возмущение поверхности разрыва, ищем решение конкретного вида:

$$\mathbf{W}(t, x, y, z) = \mathbf{Y}(z)e^{-i(\omega t + kx + ly)}, \quad (5.15)$$

где  $\mathbf{Y}(z)$  — амплитуды возмущенных величин. Подставляя (5.15) в матричное уравнение (5.11), имеем

$$(\omega A_0 + kA_1 + lA_2 + iA_3\partial_z)\mathbf{Y}(z) = 0. \quad (5.16)$$

Предполагается, что  $\mathbf{Y}(z)$  допускает преобразование Лапласа в полупространствах  $\Lambda_- : z < 0$  (за ударной волной) и  $\Lambda_+ : z > 0$  (впереди ударной волны):

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Y}}(q) &= \int_0^\infty e^{-qz}\mathbf{Y}(z)dz \quad \text{для } \Lambda_+, \\ \widehat{\mathbf{Y}}(q) &= \int_0^\infty e^{-qz}\mathbf{Y}(-z)dz \quad \text{для } \Lambda_-. \end{aligned}$$

После преобразования Лапласа находим

$$(\omega A_0 + kA_1 + lA_2 \pm iqA_3)\widehat{\mathbf{Y}}(q) \mp iA_3\mathbf{Y}(0) = 0. \quad (5.17)$$

Введём определения  $q = \mp im$  (для  $\Lambda_\pm$ ) и  $A = \omega A_0 + kA_1 + lA_2 + mA_3$ , тогда можно переписать (5.17) как

$$A\widehat{\mathbf{Y}}(m) = \pm iA_3\mathbf{Y}(0), \quad \text{для } \Lambda_\pm. \quad (5.18)$$

Заметим, что для матрицы  $M = A_3^{-1}A$  уравнение  $\text{Det } M = 0$  является уравнением четвертой степени по  $m$  и разрешимо в радикалах. В частности,

$$\det M = (m - m_0)(m - m_1)(m - m_2)(m - m_3). \quad (5.19)$$

Для системы уравнений

$$A_3^{-1}A\widehat{\mathbf{Y}}(m) = \pm i\mathbf{Y}(0), \quad \text{для } \Lambda_{\pm},$$

с известным вектором  $\mathbf{Y}(0)$  можно воспользоваться методом Крамера, введя матрицы  $B_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), которые строятся заменой  $i$ -го столбца матрицы  $M$  на  $\mathbf{Y}(0)$ . Обозначим

$$\det B_i = \Delta_i, \quad (5.20)$$

$$\det M = \Delta_M, \quad (5.21)$$

тогда получим следующее выражение

$$\widehat{\mathbf{Y}}(m) = \left( \frac{\Delta_0}{\Delta_M}, \frac{\Delta_1}{\Delta_M}, \frac{\Delta_2}{\Delta_M}, \frac{\Delta_3}{\Delta_M} \right).$$

Используя (5.19), мы можем переписать вектор  $\widehat{\mathbf{Y}}(m)$  в виде разложения

$$\widehat{\mathbf{Y}}(m) = \sum_i \mathbf{C}_i \frac{1}{m - m_i}, \quad (5.22)$$

где  $\mathbf{C}_i$  - некоторые постоянные векторы.

Тогда для обратного преобразования Лапласа имеем

$$\frac{1}{2i\pi} \int e^{-qz} \frac{1}{\pm iq - m_i} dq \sim e^{\mp im_i z}, \quad \text{для } \Lambda_{\pm}. \quad (5.23)$$

Следовательно,  $\mathbf{Y}(z)$  есть сумма плоских волн  $e^{im_i z}$ . Это означает, что система дифференциальных уравнений (5.16) порождает линейную систему уравнений, для непротиворечивости которых необходимо соблюдение условия  $\text{Det } A = 0$ . Это условие порождает характеристическое уравнение для  $m$ . Чтобы понять поведение решений  $e^{\mp im_i z}$ , необходимо проанализировать корни этого характеристического уравнения.

### 5.1.2 Характеристическое уравнение

Уравнение  $\Delta = \det A = 0$  выглядит следующим образом

$$\Omega^2 \left( \Omega^2 - c_s^2 [(k^2 + l^2)(1 - v^2) + (m + v\omega)^2] \right) = 0, \quad \Omega = \omega + vt. \quad (5.24)$$

Его решениями относительно  $m$  являются двойной корень при  $\Omega = 0$  и два корня квадратного уравнения:

$$m_0 = m_1 = -\frac{\omega}{v}, \quad (5.25)$$

$$m_2 = \frac{-v\omega(1 - c_s^2) + c_s \sqrt{1 - v^2} \sqrt{(k^2 + l^2)(v^2 - c_s^2) + \omega^2(1 - v^2)}}{v^2 - c_s^2}, \quad (5.26)$$

$$m_3 = \frac{-v\omega(1 - c_s^2) - c_s \sqrt{1 - v^2} \sqrt{(k^2 + l^2)(v^2 - c_s^2) + \omega^2(1 - v^2)}}{v^2 - c_s^2}. \quad (5.27)$$

Корень  $m_{0,1} = -\omega/v$  соответствует энтропийно-вихревым возмущениям, распространяющимся с газом [74] и в дальнейшем не будет нас интересовать. Предположим, что  $\text{Re } \omega > 0$ . Тогда для двойного корня  $m_{0,1}$  имеем

$$\text{Re } \omega \geq 0, \quad \text{Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_{0,1} \leq 0, \quad \text{Im } m_{0,1} < 0 \quad (5.28)$$

позади и спереди ударной волны.

Для анализа оставшихся двух корней введем следующее определение  $q = u_0^2(k^2 + l^2)(v^2 - c_s^2)$ , тогда

$$m_{2,3} = \frac{-vu_0^2\omega(1 - c_s^2) \pm c_s \sqrt{q + \omega^2}}{u_0^2(v^2 - c_s^2)}. \quad (5.29)$$

Пусть  $\omega = \omega_R + i\omega_I$ , тогда  $\sqrt{q + \omega^2} = \sqrt{z_R + iz_I}$ , где

$$z_R = q + \omega_R^2 - \omega_I^2, \quad z_I = 2\omega_R\omega_I.$$

Известно, что для вычисления квадратного корня комплексного числа можно написать

$$\sqrt{z_R + iz_I} = \pm \left[ \sqrt{\frac{\sqrt{z_R^2 + z_I^2} + z_R}{2}} + i \text{sign}(z_I) \sqrt{\frac{\sqrt{z_R^2 + z_I^2} - z_R}{2}} \right].$$

Поскольку выбор знака  $\pm$  перед скобками только меняет местами корни  $m_2$  и  $m_3$ , мы можем ограничиться рассмотрением положительного знака. Запишем

выражения для действительной и мнимой частей  $m_2$  с  $\text{sign}(z_I) = \text{sign}(\omega_R \omega_I) = 1$  следующим образом

$$u_0^2(v^2 - c_s^2) \text{Re } m_2 = -\omega_R \left( vu_0^2(1 - c_s^2) - \frac{c_s}{\omega_R} \sqrt{\frac{\sqrt{z_R^2 + z_I^2} + z_R}{2}} \right),$$

$$u_0^2(v^2 - c_s^2) \text{Im } m_2 = -\omega_I \left( vu_0^2(1 - c_s^2) - \frac{c_s}{\omega_I} \sqrt{\frac{\sqrt{z_R^2 + z_I^2} - z_R}{2}} \right).$$

В полупространстве  $\Lambda_-$  за ударной волной  $v^2 - c_s^2 > 0$  и  $q > 0$ , так что

$$\frac{1}{|\omega_I|} \sqrt{\frac{\sqrt{z_R^2 + z_I^2} - z_R}{2}} < \frac{1}{|\omega_I|} \sqrt{\frac{\sqrt{(\omega_R^2 + \omega_I^2)^2 - (\omega_R^2 - \omega_I^2)}}{2}} = 1,$$

$$\frac{1}{\omega_R} \sqrt{\frac{\sqrt{z_R^2 + z_I^2} + z_R}{2}} < \frac{1}{\omega_R} \sqrt{\frac{\sqrt{(\omega_R^2 + \omega_I^2)^2 + (\omega_R^2 - \omega_I^2)}}{2}} = 1,$$

из чего следует, что

$$\text{Re } \omega \geq 0, \text{ Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_2 \leq 0, \text{ Im } m_2 < 0 \text{ для } \Lambda_-. \quad (5.30)$$

Для полупространства  $\Lambda_+$  имеем  $v^2 - c_s^2 < 0$  и  $q < 0$ , поэтому получаем

$$\frac{1}{|\omega_I|} \sqrt{\frac{\sqrt{z_R^2 + z_I^2} - z_R}{2}} > 1, \quad \frac{1}{\omega_R} \sqrt{\frac{\sqrt{z_R^2 + z_I^2} + z_R}{2}} > 1.$$

Для  $\Lambda_+$  имеем аналогичные неравенства

$$\text{Re } \omega \geq 0, \text{ Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_2 \leq 0, \text{ Im } m_2 < 0 \text{ для } \Lambda_+.$$

Выражения для действительной и мнимой частей корня  $m_3$  имеют вид

$$u_0^2(v^2 - c_s^2) \text{Im } m_3 = -\omega_I \left( vu_0^2(1 - c_s^2) + \frac{c_s}{\omega_I} \sqrt{\frac{\sqrt{z_R^2 + z_I^2} - z_R}{2}} \right),$$

$$u_0^2(v^2 - c_s^2) \text{Re } m_3 = -\omega_R \left( vu_0^2(1 - c_s^2) + \frac{c_s}{\omega_R} \sqrt{\frac{\sqrt{z_R^2 + z_I^2} + z_R}{2}} \right).$$

Так как знак перед квадратным корнем здесь положительный, то очевидно, что

$$\text{Re } \omega \geq 0, \text{ Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_3 \leq 0, \text{ Im } m_3 < 0 \text{ для } \Lambda_-, \quad (5.31)$$

$$\text{Re } \omega \geq 0, \text{ Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_3 \geq 0, \text{ Im } m_3 > 0 \text{ для } \Lambda_+. \quad (5.32)$$

### 5.1.3 Решение для амплитуды возбуждения

Теперь мы можем определить поведение  $\mathbf{Y}(x)$  в полупространствах  $\Lambda_{\pm}$ . Для  $\Lambda_-$  ( $z < 0$ ) получаем  $\text{Im } m_0 < 0$ ,  $\text{Im } m_2 < 0$ ,  $\text{Im } m_3 < 0$ , тогда при  $z \rightarrow \infty$  имеем экспоненциальный рост из (5.23), что нарушает граничное условие (5.10), вследствие этого необходимо положить  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3 = 0$ . Для полупространства  $\Lambda_+$  ( $z > 0$ ) выполняются неравенства  $\text{Im } m_0 < 0$ ,  $\text{Im } m_2 < 0$ ,  $\text{Im } m_3 > 0$ , что приводит к условию необходимости выполнения условия  $\mathbf{C}_3 = 0$ .

Выражение для вектора  $\mathbf{Y}(0)$  можно получить, используя уравнение сохранения проекции тензора энергии-импульса на нормаль к поверхности разрыва (3.1). Пусть  $N^{\mu}$  - вектор нормали к поверхности разрыва, тогда

$$N_{\mu} T^{\mu\nu} = N_{\mu} T'^{\mu\nu}, \quad (5.33)$$

где штрих обозначает переменные в полупространстве  $\Lambda_+$  (за ударной волной). Для невозмущенного случая с  $N^{\mu} = (0, 0, 0, 1)$  имеем два уравнения

$$(\varepsilon + P)u_0u_z = (\varepsilon' + P')u'_0u'_z, \quad (5.34)$$

$$(\varepsilon + P)u_z^2 - P = (\varepsilon' + P')u_z'^2 - P'. \quad (5.35)$$

Выражение для нормали возмущенной поверхности, полученное из уравнения

$$f(t, x, y, z) = z - \eta e^{-i(\omega t + kx + ly)} = 0$$

приводит к

$$N_{\mu} = \partial_{\mu} f = (i\eta\omega, i\eta k, i\eta l, 1). \quad (5.36)$$

Здесь и далее мы опускаем запись волны возмущения  $e^{-i(\omega t + kx + ly)}$ , имея в виду, что она входит в амплитуду  $\eta$ . Так как мы нашли, что  $\mathbf{Y}(0) = 0$  для полупространства  $\Lambda_-$ , то для падающего и прошедшего векторов 4-скорости потоков имеем

$$U^{\mu} = (u_0, 0, 0, u_z), \quad (5.37)$$

$$U'^{\mu} = (u'_0 + \delta u'_0, \delta u'_x, \delta u'_y, u'_z + \delta u'_z). \quad (5.38)$$

Из  $U'^{\mu}U'_{\mu} = 1$  следует, что  $u'_0\delta u'_0 = u'_z\delta u'_z$ . Подставляя тензор энергии-импульса с возмущенными векторами (5.37 - 5.38) и нормалью (5.36) в уравнения (5.33) и

выполняя некоторые преобразования с использованием уравнений (5.34 - 5.35), мы получаем следующие компоненты  $\mathbf{Y}(0)$

$$Y^0(0) = \delta P' = -2i\eta\omega(\varepsilon' + P')c_s^2 \frac{(u_0u'_z - u'_0u_z)(u_0u'_0 - u_zu'_z)}{(c_s^2 - (1 - c_s^2)u_z'^2)u_zu_0} u'_zu'_0, \quad (5.39)$$

$$Y^1(0) = \delta u'_x = i\eta k \frac{u_0u'_z - u'_0u_z}{u_0}, \quad (5.40)$$

$$Y^2(0) = \delta u'_y = i\eta l \frac{u_0u'_z - u'_0u_z}{u_0}, \quad (5.41)$$

$$Y^3(0) = \delta u'_z = i\eta\omega \frac{(u_0u'_z - u'_0u_z)(u_0u'_0 - u_zu'_z)}{(c_s^2 - (1 - c_s^2)u_z'^2)u_zu_0} (u_z'^2 + c_s^2(1 + u_z'^2))u'_0. \quad (5.42)$$

Теперь можно решить уравнение

$$M\widehat{\mathbf{Y}}(m) = i\mathbf{Y}(0) \quad (5.43)$$

используя метод Крамера, как описано выше. Заметим, что  $\Delta_i$  - многочлен четвертой степени по  $m$ , причем

$$\Delta_0 = (m - m_0)^2 P_0^{(1)}(m), \quad (5.44)$$

$$\Delta_1 = (m - m_0) P_1^{(2)}(m), \quad (5.45)$$

$$\Delta_2 = (m - m_0) P_2^{(2)}(m), \quad (5.46)$$

$$\Delta_3 = (m - m_0) P_3^{(2)}(m), \quad (5.47)$$

где  $P_i^{(n)}(m)$  - многочлен  $n$ -й степени по  $m$ . Поскольку  $\Delta_M = (m - m_0)^2(m - m_2)(m - m_3)$ , мы можем написать следующее разложение

$$\widehat{\mathbf{Y}}(m) = \frac{\mathbf{C}_1}{m - m_0} + \frac{\mathbf{C}_2}{m - m_2} + \frac{\mathbf{C}_3}{m - m_3}. \quad (5.48)$$

Как уже говорилось, нас интересует выполнение условия  $\mathbf{C}_3 = 0$ . Можно найти выражения для компонент вектора  $\mathbf{C}_3$ , используя формулы (5.44 - 5.47) и разложение (5.48):

$$C_{30} = -R \frac{\eta c_s (\varepsilon + P)(v' - v)}{2vv'^2(v'^2 - c_s^2)(1 - v'^2)^2 Q}, \quad (5.49)$$

$$C_{31} = -R \frac{\eta k (v' - v)}{2vv'(1 - v'^2)^{3/2} Q [c_s \omega + v' Q]}, \quad (5.50)$$

$$C_{32} = -R \frac{\eta l (v' - v)}{2vv'(1 - v'^2)^{3/2} Q [c_s \omega + v' Q]}, \quad (5.51)$$

$$C_{33} = -R \frac{\eta (Q c_s + \omega v')(v' - v)}{2vv'^2(v'^2 - c_s^2)(1 - v'^2)^2 Q [c_s \omega + v' Q]}, \quad (5.52)$$

где

$$Q = \sqrt{(k^2 + l^2)(v'^2 - c_s^2)/(1 - v'^2) + \omega^2}, \quad (5.53)$$

$$R = 2v'c_s(1 - vv')\omega Q + (v'^2 + c_s^2)(1 - vv')\omega^2 + vv'(v'^2 - c_s^2)(k^2 + l^2). \quad (5.54)$$

Видно, что общий множитель компонент вектора  $\mathbf{C}_3$  равен  $R$ , поэтому очевидным требованием выполнения условия  $\mathbf{C}_3 = 0$  является уравнение  $R = 0$ .

#### 5.1.4 Анализ мод неустойчивости

Воспользуемся уравнением состояния  $\varepsilon = 3P$ , подходящее для безмассового релятивистского газа. Как обсуждалось ранее, скорость звука в такой среде  $c_s^2 = 1/3$ . Более того, решение ударной волны приводит к соотношению  $vv' = 1/3$ . Это позволяет работать только с одной величиной - скоростью прошедшего потока по течению  $v'$ . Также из характеристического уравнения (5.24) и выражения для  $m_3$  (5.27) можно найти

$$k^2 + l^2 = \frac{(mv' + \omega)^2 - c_s^2(m + v'\omega)^2}{c_s^2(1 - v'^2)}, \quad (5.55)$$

$$Q = \frac{c_s^2(m + v'\omega) - v'(mv' + \omega)}{c_s(1 - v'^2)}. \quad (5.56)$$

Следовательно, в ультрарелятивистском случае условие  $R = 0$  эквивалентно уравнению

$$\varphi^2 - 2v'\varphi - (1 - v'^2) = 0, \quad (5.57)$$

где  $\varphi = \Omega/m$ ,  $\Omega = \omega + vt$ . Это уравнение имеет только действительные решения

$$\varphi_{1,2} = v' \pm 1. \quad (5.58)$$

Имеем  $\text{Re } \varphi \geq v'$ ,  $\text{Im } \varphi < 0$ , поскольку рассматриваем режим, в котором  $\text{Im } m_3 > 0$ ,  $\text{Re } m_3 \geq 0$ , что исключает корень  $\varphi = v' - 1$ . Однако это не полностью определяет диапазон переменной  $\varphi$ . Область значений  $\varphi$  можно определить с помощью характеристического уравнения (5.24) (см. Приложение В). Для действительных значений  $\varphi$  обнаруживаем, что должны выполняться следующие неравенства

$$v' \leq \varphi \leq \frac{c_s(1 - v'^2)}{(1 - c_s v')}. \quad (5.59)$$

Видно, что оба решения не попадают в эту область. Это означает, что для ультрарелятивистского изотропного случая не существует неустойчивого режима.

## 5.2 Анизотропный случай

Проведём теперь аналогичный анализ в случае анизотропной релятивистской гидродинамики. Напомним выражения для 4-вектора скорости  $U^\mu(x)$  и вектора  $Z^\mu$

$$U^\mu = (u_0 \cosh \vartheta, u_x, u_y, u_0 \sinh \vartheta), \quad (5.60)$$

$$Z^\mu = (\sinh \vartheta, 0, 0, \cosh \vartheta), \quad (5.61)$$

где  $\vartheta(x)$  - продольная быстрота, а  $u_0 = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$ .

Прежде чем вводить возмущение на поверхности разрыва, рассмотрим процесс линеаризации уравнения  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Мы предполагаем, что анизотропия постоянна,  $\xi = \xi'$ , поэтому возмущаем только изотропные величины. Изотропное давление  $P_{\text{iso}}$ , продольная быстрота  $\vartheta$  и компоненты вектора 4-скорости  $u_x$ ,  $u_y$  линеаризуются относительно постоянного состояния как

$$P_{\text{iso}}(t, x, y, z) = P + \delta P(t, x, y, z), \quad (5.62)$$

$$\vartheta(t, x, y, z) = \vartheta + \delta\vartheta(t, x, y, z), \quad (5.63)$$

$$u_x(t, x, y, z) = u_x + \delta u_x(t, x, y, z), \quad (5.64)$$

$$u_y(t, x, y, z) = u_y + \delta u_y(t, x, y, z). \quad (5.65)$$

Из уравнений  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  получаем

$$A_{\text{aniso}}^\mu \partial_\mu \mathbf{W}_{\text{aniso}} = 0, \quad (5.66)$$

где

$$\mathbf{W}_{\text{aniso}} = (\delta P, \delta u_x, \delta u_y, \delta\vartheta), \quad (5.67)$$

а матрицы  $A_{\text{aniso}}^\mu$  равны

$$A_{\text{aniso}}^0 = \begin{pmatrix} R_\perp + R_1 u_0^2 \cosh^2 \vartheta + R_3 \sinh^2 \vartheta & 2PR_1 u_x \cosh^2 \vartheta & u_y \cosh^2 \vartheta & P(2R_2 + R_1 u_0^2) \sinh(2\vartheta) \\ R_1 u_x u_0 \cosh \vartheta & PR_1 (u_0^2 + u_x^2) \cosh \vartheta / u_0 & PR_1 u_x u_y \cosh \vartheta / u_0 & PR_1 u_x u_0 \sinh \vartheta \\ R_1 u_y u_0 \cosh \vartheta & PR_1 u_x u_y \cosh \vartheta / u_0 & PR_1 (u_0^2 + u_y^2) \cosh \vartheta / u_0 & PR_1 u_y u_0 \sinh \vartheta \\ P(2R_2 + R_1 u_0^2) \sinh(2\vartheta) / 2 & PR_1 u_x \sinh(2\vartheta) & PR_1 u_y \sinh(2\vartheta) & P(2R_2 + R_1 u_0^2) \cosh(2\vartheta) \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

$$A_{\text{aniso}}^k = \begin{pmatrix} R_1 u_k u_0 \cosh \vartheta & PR_1(u_0^2 \delta_{k1} + u_k u_x) \cosh \vartheta / u_0 & PR_1(u_0^2 \delta_{k2} + u_k u_y) \cosh \vartheta / u_0 & PR_1 u_k u_0 \sinh \vartheta \\ R_{\perp} \delta_{1k} + R_1 u_k u_x & PR_1(u_k + u_x \delta_{k1}) & PR_1 u_x \delta_{yk} & 0 \\ R_{\perp} \delta_{2k} + R_1 u_k u_y & PR_1 u_y \delta_{k2} & PR_1(u_k + u_y \delta_{yk}) & 0 \\ PR_1 u_k u_0 \sinh \vartheta & PR_1(u_0^2 \delta_{k1} + u_k u_x) \sinh \vartheta / u_0 & PR_1(u_0^2 \delta_{k2} + u_k u_y) \sinh \vartheta / u_0 & PR_1 u_k u_0 \cosh \vartheta \end{pmatrix}, \quad (5.69)$$

$$A_{\text{aniso}}^3 = \begin{pmatrix} P(2R_2 + R_1 u_0^2) \sinh(2\vartheta) / 2 & PR_1 u_x \sinh(2\vartheta) & PR_1 u_y \sinh(2\vartheta) & P(2R_2 + R_1 u_0^2) \cosh(2\vartheta) \\ R_1 u_x u_0 \sinh \vartheta & PR_1(u_0^2 + u_x^2) \sinh \vartheta / u_0 & PR_1 u_x u_y \sinh \vartheta / u_0 & PR_1 u_x u_0 \cosh \vartheta \\ R_1 u_y u_0 \sinh \vartheta & PR_1 u_x u_y \sinh \vartheta / u_0 & PR_1(u_0^2 + u_y^2) \sinh \vartheta / u_0 & PR_1 u_y u_0 \cosh \vartheta \\ R_{\perp} + R_3 \cosh^2 \vartheta + R_1 u_0^2 \sinh^2 \vartheta & 2PR_1 u_x \sinh^2 \vartheta & 2PR_1 u_y \sinh^2 \vartheta & P(2R_2 + R_1 u_0^2) \sinh(2\vartheta) \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

где, в свою очередь,

$$R_1 = (R_{\parallel} + 3R_{\perp}), \quad (5.71)$$

$$R_2 = (R_{\parallel} + R_{\perp}), \quad (5.72)$$

$$R_3 = (R_{\parallel} - R_{\perp}). \quad (5.73)$$

### 5.2.1 Устойчивость продольной ударной волны

Анализ устойчивости продольной ударной волны в анизотропной среде во многом похож на изотропный случай, поэтому во избежание повторений изложение будет носить сокращённый характер, оставляя основные акценты методологии.

Нормаль к невозмущенной поверхности разрыва направлена вдоль оси анизотропии (оси распространения пучка), т.е.  $N^{\mu} = (0, 0, 0, 1)$ . Будем считать, что  $u_x = u_y = 0$ , и определим такое же малое гармоническое возмущение поверхности разрыва, как и в изотропном случае:

$$f(t, x, y, z) = z - \eta e^{-i(\omega t + kx + ly)} = 0. \quad (5.74)$$

В терминах скоростей получим следующие выражения

$$\sinh \vartheta'_z = \frac{v'}{\sqrt{1 - v'^2}}, \quad \cosh \vartheta'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2}}.$$

Предполагается, что решение для вектора  $\mathbf{W}_{\text{aniso}} = \mathbf{W}_{\parallel}$  в уравнении (5.67) имеет вид

$$\mathbf{W}_{\parallel}(t, x, y, z) = \mathbf{Y}_{\parallel}(z) e^{-i(\omega t + kx + ly)}. \quad (5.75)$$

Обозначим матрицы  $A_{\text{aniso}}^i$  (5.68 - 5.70) при  $u_x = u_y = 0$  как матрицы  $A_{\parallel}^i$ . Преобразование Лапласа для вектора амплитуды  $\mathbf{Y}_{\parallel}$  дает следующее уравнение

$$A_{\parallel} \widehat{\mathbf{Y}}_{\parallel}(m) = \pm i A_{\parallel 3} \mathbf{Y}_{\parallel}(0), \quad (5.76)$$

в полупространствах  $\Lambda_{\pm}$  соответственно, где  $A_{\parallel} = \omega A_{\parallel 0} + k A_{\parallel 1} + l A_{\parallel 2} + m A_{\parallel 3}$ .

Подстановка анзаца (5.15) в уравнения (5.66) приводит к характеристическому уравнению  $\text{Det } A_{\parallel} = 0$ , которое имеет вид

$$\Omega^2 \left( 2\Omega^2 - [(1 - c_{s\parallel}^2)(k^2 + l^2)(1 - v^2) + 2c_{s\parallel}^2(m + v\omega)^2] \right) = 0, \quad \Omega = \omega + vm, \quad (5.77)$$

где

$$c_{s\parallel} = \frac{R_{\parallel}}{3R} \quad (5.78)$$

является продольной скоростью звука.

Решая уравнение относительно  $m$ , получаем четыре корня

$$m_{0,1} = -\frac{\omega}{v}, \quad (5.79)$$

$$m_2 = \frac{1 - v^2}{4(v^2 - c_{s\parallel}^2)} \left( -4v\omega(1 - c_{s\parallel}^2) + 2\sqrt{2} \sqrt{2c_{s\parallel}^2\omega^2 + \frac{(1 - c_{s\parallel}^2)(k^2 + l^2)(v^2 - c_{s\parallel}^2)}{1 - v^2}} \right), \quad (5.80)$$

$$m_3 = \frac{1 - v^2}{4(v^2 - c_{s\parallel}^2)} \left( -4v\omega(1 - c_{s\parallel}^2) - 2\sqrt{2} \sqrt{2c_{s\parallel}^2\omega^2 + \frac{(1 - c_{s\parallel}^2)(k^2 + l^2)(v^2 - c_{s\parallel}^2)}{1 - v^2}} \right). \quad (5.81)$$

Анализ корней проводится аналогично изотропному случаю и приводит к тем же соотношениям:

$$\text{Re } \omega \geq 0, \text{ Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_{0,1} \leq 0, \text{ Im } m_{0,1} < 0 \text{ для } \Lambda_{\pm}, \quad (5.82)$$

$$\text{Re } \omega \geq 0, \text{ Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_2 \leq 0, \text{ Im } m_2 < 0 \text{ для } \Lambda_-, \quad (5.83)$$

$$\text{Re } \omega \geq 0, \text{ Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_2 \leq 0, \text{ Im } m_2 < 0 \text{ для } \Lambda_+, \quad (5.84)$$

$$\text{Re } \omega \geq 0, \text{ Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_3 \leq 0, \text{ Im } m_3 < 0 \text{ для } \Lambda_-, \quad (5.85)$$

$$\text{Re } \omega \geq 0, \text{ Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_3 \geq 0, \text{ Im } m_3 > 0 \text{ для } \Lambda_+. \quad (5.86)$$

Поскольку продольный случай технически такой же, как рассмотренный выше изотропный случай, мы имеем аналогичное разложение (5.48) для вектора  $\mathbf{Y}_{\parallel}(z)$ . Чтобы удовлетворить граничному условию  $\delta u_x, \delta u_y, \delta \vartheta, \delta P \rightarrow 0$  в  $z \rightarrow \pm\infty$ , мы должны снова положить  $\mathbf{C}_i = 0, i = 1, 2, 3$  в  $\Lambda_-$  и  $\mathbf{C}_3 = 0$  в  $\Lambda_+$ .

Так как мы нашли, что  $\mathbf{Y}_{\parallel}(0) = 0$  в полупространстве  $\Lambda_-$ , то для скоростей получаем

$$U^\mu = (\cosh \vartheta, 0, 0, \sinh \vartheta), \quad (5.87)$$

$$Z^\mu = (\sinh \vartheta, 0, 0, \cosh \vartheta), \quad (5.88)$$

$$U'^\mu = (\cosh \vartheta'_z + \delta\vartheta'_z \sinh \vartheta'_z, \delta u'_x, \delta u'_y, \sinh \vartheta'_z + \delta\vartheta'_z \cosh \vartheta'_z), \quad (5.89)$$

$$Z'^\mu = (\sinh \vartheta'_z + \delta\vartheta'_z \cosh \vartheta'_z, 0, 0, \cosh \vartheta'_z + \delta\vartheta'_z \sinh \vartheta'_z). \quad (5.90)$$

Подставляя возмущенные векторы (5.87 - 5.90) в тензор энергии-импульса и вектор нормали  $N_\mu = (i\eta\omega, i\eta k, i\eta l, 1)$  в условие согласования (3.1), найдём

$$Y_{\parallel}^0(0) = \delta P' = 8i\eta\omega P' \frac{R_\perp R_2 \sinh \vartheta'_z \cosh \vartheta'_z}{3RR_{\parallel}}, \quad (5.91)$$

$$Y_{\parallel}^1(0) = \delta u'_x = -2i\eta k \frac{R_\perp R_2 (R_{\parallel} - 2R_\perp \sinh^2 \vartheta'_z)}{3RR_{\parallel} R_1 \sinh \vartheta'_z}, \quad (5.92)$$

$$Y_{\parallel}^2(0) = \delta u'_y = -2i\eta l \frac{R_\perp R_2 (R_{\parallel} - 2R_\perp \sinh^2 \vartheta'_z)}{3RR_{\parallel} R_1 \sinh \vartheta'_z}, \quad (5.93)$$

$$Y_{\parallel}^3(0) = \delta \vartheta'_z = -2i\eta\omega \frac{[R_{\parallel} + 2R_2 \sinh^2 \vartheta'_z]}{3RR_{\parallel}}. \quad (5.94)$$

Решая уравнение (5.76) методом Крамера, находим следующие выражения для компонент вектора  $\mathbf{C}_3$

$$C_{30} = -R\eta P' \frac{1 - c_{s\parallel}^4}{2v'^2 c_{s\parallel}^2 (1 - v'^2) Q}, \quad (5.95)$$

$$C_{31} = -R\eta k \frac{(1 - c_{s\parallel}^4)(1 - c_{s\parallel}^2)(v'^2 - c_{s\parallel}^2)}{c_{s\parallel}^2 (3 - c_{s\parallel}^2) v' (1 - v'^2)^{3/2} Q [2c_{s\parallel}^2 \omega + v'Q]}, \quad (5.96)$$

$$C_{32} = -R\eta l \frac{(1 - c_{s\parallel}^4)(1 - c_{s\parallel}^2)(v'^2 - c_{s\parallel}^2)}{c_{s\parallel}^2 (3 - c_{s\parallel}^2) v' (1 - v'^2)^{3/2} Q [2c_{s\parallel}^2 \omega + v'Q]}, \quad (5.97)$$

$$C_{33} = R\eta \frac{(1 - c_{s\parallel}^2)(Q + 2v'\omega)}{2v'^2 c_{s\parallel}^2 (1 - v'^2) Q [2c_{s\parallel}^2 \omega + v'Q]}, \quad (5.98)$$

где

$$Q = \sqrt{2(k^2 + l^2)(v'^2 - c_{s\parallel}^2)(1 - c_{s\parallel}^2)/(1 - v'^2) + 4\omega^2 c_{s\parallel}^2}, \quad (5.99)$$

$$R = 2v'\omega Q + 2(v'^2 + c_{s\parallel}^2)\omega^2 + (v'^2 - c_{s\parallel}^2)(k^2 + l^2). \quad (5.100)$$

Вместе с выражениями (5.77), (5.81) найдём, что условие  $R = 0$  эквивалентно уравнению

$$\varphi^2 - 2v'\varphi - (1 - v'^2) = 0, \quad (5.101)$$

где  $\varphi = \Omega/m$ ,  $\Omega = \omega + vt$ . Уравнение (5.101) совпадает с уравнением, полученным в изотропном случае. Следовательно, имеем такие же действительные корни  $v' \pm 1$ . Из характеристического уравнения (5.77) также получаем, что для действительных значений  $\varphi$  должны выполняться следующие неравенства

$$v' \leq \varphi \leq \frac{c_s(1 - v'^2)}{(1 - c_s v')}, \quad (5.102)$$

что приводит к выводу об отсутствии искомой моды неустойчивости [63].

## 5.2.2 Устойчивость поперечной ударной волны

Пусть теперь нормаль к невозмущенной поверхности разрыва ортогональна направлению анизотропии, т.е.  $N^\mu = (0, 1, 0, 0)$ . Предположим, что  $u_z = \vartheta = 0$ , и введем малое гармоническое возмущение

$$f(t, x, y, z) = x - \eta e^{-i(\omega t + ly + mz)} = 0. \quad (5.103)$$

В матрицах (5.68 - 5.70) положим  $u_z = \vartheta = 0$  и обозначим  $A_{\text{aniso}}^i|_{u_y=\vartheta=0} = A_\perp^i$ . Рассмотрим решение уравнения (5.66) в следующем виде

$$\mathbf{W}_\perp(t, x, y, z) = \mathbf{Y}_\perp(x) e^{-i(\omega t + ly + mz)}. \quad (5.104)$$

После преобразования Лапласа для вектора амплитуды  $\mathbf{Y}_\perp$  имеем

$$A_\perp \widehat{\mathbf{Y}}_\perp(m) = \pm i A_{\perp 1} \mathbf{Y}_\perp(0), \quad (5.105)$$

в полупространствах  $\Lambda_\pm$  соответственно, где  $A_\perp = \omega A_{\perp 0} + k A_{\perp 1} + l A_{\perp 2} + m A_{\perp 3}$ .

Уравнение (5.105) приводит к характеристическому уравнению  $\text{Det } A_\perp = 0$ , которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Omega \left[ ((1 + c_{s\perp}^2)kv + (F_1 - F_2)\omega) (\Omega^2 - c_{s\perp}^2(k + v\omega)^2) + \right. \\ \left. + (1 - 2c_{s\perp}^2)(1 - v^2)((5c_{s\perp}^2 - 3)kv - (F_1 + F_2)\omega) - \right. \\ \left. - c_{s\perp}^2(1 - v^2)((1 + c_{s\perp}^2)kv + (F_1 - F_2)\omega)l^2 \right] = 0, \quad (5.106) \end{aligned}$$

где

$$\Omega = \omega + kv, \quad (5.107)$$

$$F_1 = 2(1 - c_{s\perp}^2), \quad (5.108)$$

$$F_2 = v^2(1 - 3c_{s\perp}^2) \quad (5.109)$$

а поперечная скорость звука

$$c_{s\perp}^2 = \frac{R_\perp}{3R}. \quad (5.110)$$

Видно, что относительно  $k$  остается одно решение  $\Omega = 0$  в сравнении с изотропным и продольным случаями. Остальные решения определяются корнями кубического уравнения. Причём один из корней кубического уравнения в изотропном пределе переходит в решение  $\Omega = 0$ . Деформация этого решения в корень кубического уравнения возникает из-за выделения направления анизотропии, несмотря на то, что рассматривается поперечное направление.

Используя формулу Кардано, можно найти корни кубического уравнения. Из-за громоздкости выражений для корней, они изучались графически. Для лучшей интерпретации результатов перейдем от скоростей к параметру  $\sigma = P'/P$ . Для скоростей  $v, v'$  в областях  $\Lambda_\mp$  соответственно имеем:

$$v = \sqrt{\frac{R_\perp(3\sigma R + R_\perp)}{3R(\sigma R_\perp + 3R)}}, \quad v' = \sqrt{\frac{R_\perp(\sigma R_\perp + 3R)}{3R(3\sigma R + R_\perp)}}. \quad (5.111)$$

В таком случае мы можем отдельно исследовать корни полупространств  $\Lambda_\pm$ . Оказалось, что мнимые части корней имеют те же знаки, что и в продольном случае. Значение переменных  $l, m$  никак не влияет на конечный знак корня, как и величина действительной и мнимой частей  $\omega$ . Таким образом, для корня  $k_0 = -v/\omega$  и корней кубического уравнения  $k_{1,2,3}$  найдём

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} k_0 \leq 0, \operatorname{Im} k_0 < 0 \quad \text{для } \Lambda_\pm, \quad (5.112)$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} k_1 \leq 0, \operatorname{Im} k_1 < 0 \quad \text{для } \Lambda_-, \quad (5.113)$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} k_1 \leq 0, \operatorname{Im} k_1 < 0 \quad \text{для } \Lambda_+, \quad (5.114)$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} k_2 \leq 0, \operatorname{Im} k_2 < 0 \quad \text{для } \Lambda_-, \quad (5.115)$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} k_2 \leq 0, \operatorname{Im} k_2 < 0 \quad \text{для } \Lambda_+, \quad (5.116)$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} k_3 \leq 0, \operatorname{Im} k_3 < 0 \quad \text{для } \Lambda_-, \quad (5.117)$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} k_3 \geq 0, \operatorname{Im} k_3 > 0 \quad \text{для } \Lambda_+. \quad (5.118)$$

Поскольку теперь у нас есть четыре различных корня  $k_i$  уравнения (5.106), справедливо следующее разложение для вектора  $\mathbf{Y}_\perp(z)$ :

$$\widehat{\mathbf{Y}}_\perp(m) = \frac{\mathbf{C}_0}{k - k_0} + \frac{\mathbf{C}_1}{k - k_1} + \frac{\mathbf{C}_2}{k - k_2} + \frac{\mathbf{C}_3}{k - k_3}. \quad (5.119)$$

Используя обратное преобразование Лапласа и неравенства (5.118), можно заключить, что для выполнения граничного условия  $\delta u_x, \delta u_y, \delta \vartheta, \delta P \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  мы должны положить  $\mathbf{C}_i = 0, i = 1, 2, 3$  в полупространстве  $\Lambda_-$  и  $\mathbf{C}_3 = 0$  в  $\Lambda_+$ .

Так как мы нашли  $\mathbf{Y}_\perp(0) = 0$  в полупространстве  $\Lambda_-$ , то для скоростей имеем

$$U^\mu = (u_0, u_x, 0, 0), \quad (5.120)$$

$$Z^\mu = (0, 0, 0, 1), \quad (5.121)$$

$$U'^\mu = (u'_0, u'_x \delta u'_x, \delta u'_y, \delta \vartheta'_z u'_0), \quad (5.122)$$

$$Z'^\mu = (\delta \vartheta'_z, 0, 0, 1). \quad (5.123)$$

Подставляя возмущенные векторы (5.120 - 5.123) в тензор энергии-импульса и вектор нормали  $N_\mu = (i\eta\omega, 1, i\eta l, i\eta m)$  в уравнения (3.1), получаем

$$Y_\perp^0(0) = \delta P' = 2i\eta\omega P' \frac{R_1 R_2 u'_x u'_0}{3RR_\perp} \quad (5.124)$$

$$Y_\perp^1(0) = \delta u'_x = -i\eta k \frac{R_2 (R_\parallel + R_1 u_x'^2) u'_0}{3RR_\perp} \quad (5.125)$$

$$Y_\perp^2(0) = \delta u'_y = -i\eta l \frac{R_\perp - R_2 u_x'^2}{3R u'_x} \quad (5.126)$$

$$Y_\perp^3(0) = \delta \vartheta'_z = -i\eta m \frac{R_\parallel (R_\perp - R_2 u_x'^2)}{3R_\perp R u'_x u'_0}. \quad (5.127)$$

У нас есть все исходные данные для решения уравнения (5.105) с использованием метода Крамера. Теперь можно получить формулы для определителей  $\Delta_i$  (см. формулу (5.20)). Однако в поперечном случае подстановка корней характеристического уравнения (5.106) в векторное разложение (5.119) осуществляться не будет, так как корни являются решениями кубического уравнения, и явный вид их не выписывался. Поэтому мы не получим выражений для постоянных векторов  $\mathbf{C}_i$ , не зависящих от  $k$ , и самого уравнения  $\mathbf{C}_3 = 0$ . Однако, вместо этого нам достаточно, чтобы выполнялись все уравнения вида  $\Delta_i = 0$ , где мы рассматриваем  $k = k_3$ , и условия (5.118).

Обозначим  $M_{\perp} = A_1^{-1}A_{\perp}$ , тогда характеристическое уравнение эквивалентно  $\det M_{\perp} = 0$ . Можно проверить, что уравнение  $\Delta_0 = 0$  может быть получено как линейная комбинация уравнений  $\Delta_2 = 0$  и  $\det M_{\perp} = 0$ . Кроме того, можно показать, что уравнение  $\Delta_3 = 0$  содержится в  $\Delta_1^* = 0$  и  $\Delta_2 = 0$ , где  $\Delta_1^*$  линейная комбинация  $\Delta_1$  и  $(c_{s\perp}^2 k + \omega v)M_{\perp}$ . Поэтому следует рассмотреть уравнение  $\Delta_3 = 0$ , которое имеет вид

$$\Omega(\omega^2 - k^2) = 0, \quad (5.128)$$

что в терминах  $\varphi$  выглядит как

$$\varphi^2 - 2v'\varphi - (1 - v'^2) = 0. \quad (5.129)$$

Мы получили выражение, идентичное уравнениям (5.57) и (5.101).

Следует отметить, что уравнения  $\det M_{\perp} = 0, \Delta_j = 0, j = 1, 2, 3$  не сводятся друг к другу только линейными преобразованиями, но можно показать, что их комбинации с множителями в зависимости от  $\omega, k, m$  преобразуют уравнения друг в друга, выделяя тем самым общую часть. Таким образом, уравнения содержат не только выражение (5.129). В частности, уравнение  $\Delta_3 = 0$  (а значит,  $\Delta_0 = 0$ ) имеет решение

$$\varphi = -\frac{v'(3c_{s\perp}^2 - 1)(1 - v'^2)}{2(1 - c_{s\perp}^2) + v'^2(3c_{s\perp}^2 - 1)}, \quad (5.130)$$

что справедливо для всех уравнений, только если  $c_{s\perp}^2 = 1/2$ , т.е.  $\xi \rightarrow \infty$ .

Последним шагом является определение области значений  $\varphi$  из характеристического уравнения с условиями (5.118). В поперечном случае анализ проводится иначе, чем в изотропном случае (как и в продольном), и представлен в Приложении Г. Было установлено, что корни уравнения (5.129) не удовлетворяют характеристическому уравнению. Таким образом, ударная волна в поперечном случае устойчива [63].

### 5.2.3 Случай произвольного полярного угла

Для произвольного полярного угла  $\alpha$  вектор нормали принимает вид  $N^{\mu} = (0, \sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ . Предполагается, что падающий поток движется со

скоростью  $v$ , где  $v_x = v \sin \alpha$ ,  $v_z = v \cos \alpha$ . Прошедший поток движется со скоростью  $v'$ , где  $v'_x = v' \sin \alpha'$ ,  $v'_z = v' \cos \alpha'$ .

Ввиду аналитической неразрешимости уравнений (3.42 - 3.44) для ударной волны с произвольным полярным углом, анализ устойчивости будем проводить так же численно, без рассмотрения частных случаев.

При введении гармонического возмущения на поверхность разрыва, необходимо теперь учесть полярный угол  $\alpha$ . Уравнение возмущенной поверхности в таком случае имеет вид

$$f(t, x, y, z) = x \sin \alpha + z \cos \alpha - e^{-i[\omega t + k(x \cos \alpha - z \sin \alpha) + ly]} = 0. \quad (5.131)$$

Удобно перейти к системе координат  $\tilde{x}, \tilde{z}$ , где ось  $O\tilde{z}$  направлена по нормали  $N^\mu$ . Матрица, определяющая такое преобразование, имеет вид

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (5.132)$$

Преобразования координат  $x, z \rightarrow \tilde{x}, \tilde{z}$  выражаются следующими формулами

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \cos \alpha - z \sin \alpha, \\ \tilde{z} &= x \sin \alpha + z \cos \alpha. \end{aligned}$$

В этой системе координат можно переписать уравнение (5.131) в виде

$$f(t, \tilde{x}, y, \tilde{z}) = \tilde{z} - e^{-i(\omega t + k\tilde{x} + ly)} = 0. \quad (5.133)$$

Уравнения для тензора энергии-импульса в преобразованных координатах имеют вид

$$\tilde{\partial}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0, \quad (5.134)$$

где  $\tilde{T}^{\mu\nu} = O_{\gamma\mu} O_{\lambda\nu} T^{\gamma\lambda}$  и  $\tilde{\partial}^\mu = O_{\gamma\mu} \partial^\gamma$ .

Изотропное давление  $P_{\text{iso}}$ , компоненты 4-вектора скорости  $u_x, u_y$  и продольная быстрота линеаризуются по формулам (5.62 - 5.65). Линеаризацию уравнений (5.134) можно представить в следующей матричной записи

$$\tilde{A}^\mu \tilde{\partial}_\mu \mathbf{W} = 0, \quad (5.135)$$

где вектор  $\mathbf{W}$  содержит градиенты разложения величин, определенных в (5.62 - 5.65), и имеет вид

$$\mathbf{W}(t, \tilde{x}, y, \tilde{z}) = \mathbf{Y}(\tilde{z})e^{-i(\omega t + k\tilde{x} + ly)}. \quad (5.136)$$

Дальнейшая последовательность действий аналогична таковой в продольном случае. Применение преобразования Лапласа к вектору амплитуды  $\mathbf{Y}$  и введение переменной  $m$  дает

$$\tilde{A}\hat{\mathbf{Y}}(m) = \pm i\tilde{A}_3\mathbf{Y}(0), \text{ для } \Lambda_{\pm} \quad (5.137)$$

Соответствующее характеристическое уравнение  $\det \tilde{A} = 0$  может быть решено относительно  $m$ . Во избежание потери точности и скорости численного решения перейдем от параметра анизотропии  $\xi$  к соотношению  $\bar{\kappa} = R_{\perp}(\xi)/R_{\parallel}(\xi)$ , где  $\kappa$  можно будет задавать любым рациональным числом. Корни характеристического уравнения это

$$m_0 = -\frac{\omega - kv' \sin(\alpha - \alpha')}{mv' \cos(\alpha - \alpha')} \quad (5.138)$$

и три корня кубического уравнения, которые мы рассмотрим графически.

Для полупространства  $\Lambda_-$  найдём, что для всех корней выполняется  $\text{Im } m < 0$ , поэтому мы не будем подробно рассматривать этот случай. Как видно из графиков на рис. 5.2 и 5.1, в полупространстве  $\Lambda_+$  мнимая часть  $m$  не всегда отрицательная. Решения  $m_2, m_3$  деформируются таким образом, что существование решения с  $\text{Im } m > 0$  возможно во всем фазовом пространстве. Корень  $m_1$  ведет себя так же, как в продольном и поперечном случаях. Действительная часть корня  $m_2$  повторяет контуры графиков мнимых частей. Для корня  $m_2$  снова имеем  $\text{Re } m > 0$ , если  $\text{Im } m > 0, \text{Re } \omega > 0$ . Однако для корня  $m_3$  эта закономерность нарушается - здесь видно появление области, где  $\text{Re } m < 0$  при  $\text{Im } m > 0, \text{Re } \omega > 0$  [63]. Обозначим эту область как  $\mathfrak{D}$ . Размер этой области также зависит от  $\omega, k, l$ , но область  $\mathfrak{D}$  полностью не исчезает.

Далее, численно решая уравнение  $N_{\mu}T^{\mu\nu} = N_{\mu}T'^{\mu\nu}$ , можно найти решение для вектора  $\mathbf{Y}(0)$ . По методу Крамера находится решение уравнения (5.137)

$$\hat{\mathbf{Y}}(m) = \left( \frac{\Delta_0}{\Delta_{\tilde{M}}}, \frac{\Delta_1}{\Delta_{\tilde{M}}}, \frac{\Delta_2}{\Delta_{\tilde{M}}}, \frac{\Delta_3}{\Delta_{\tilde{M}}} \right), \quad (5.139)$$

где  $\tilde{M} = \tilde{A}_3^{-1}\tilde{A}$ . Нас интересует режим, для которого  $\text{Im } \omega > 0$  и  $\text{Im } m > 0$ . Действительные части  $\text{Re } \omega, \text{Re } m$ , как видно из графиков, могут принимать

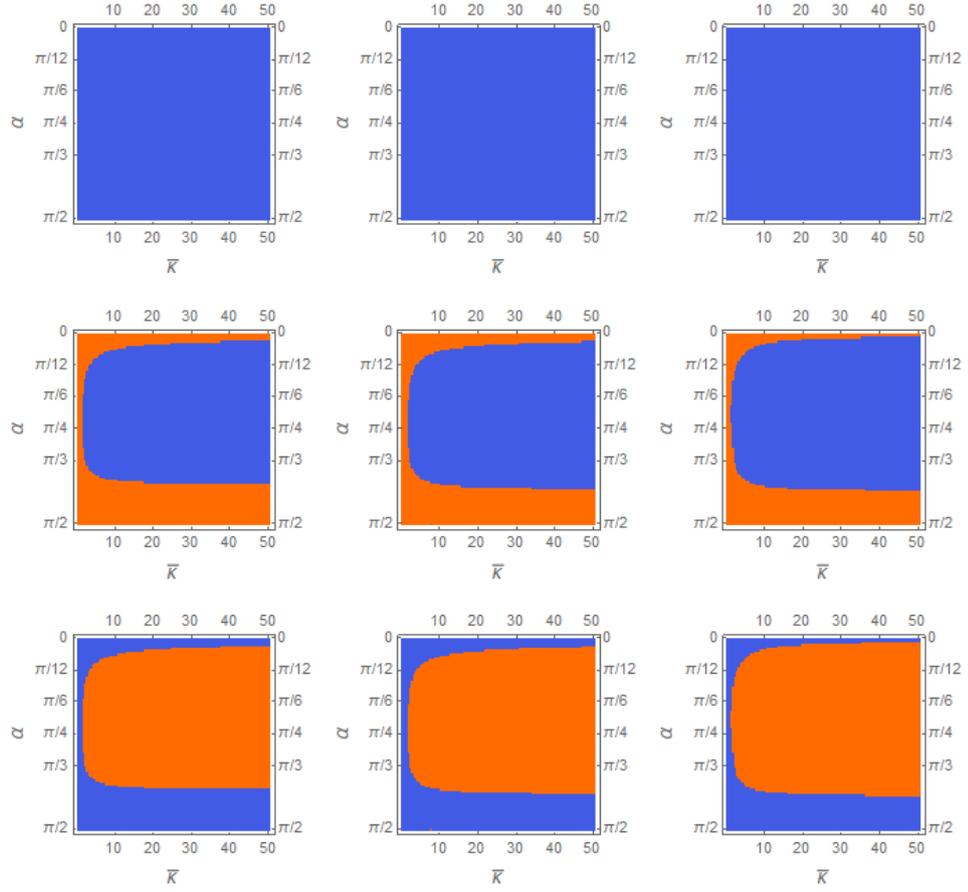


Рисунок 5.1 — Графики мнимой части корней характеристического уравнения в полупространстве  $\Lambda_+$  в зависимости от полярного угла  $\alpha$  и  $\bar{k}$  при  $k = 2$ ,  $l = 2$ ,  $\omega = 2 + 2i$ . Синий цвет обозначает отрицательную область, оранжевый - положительную. Ряды соответствуют корням  $m_1, m_2, m_3$ , считая сверху, а столбцы  $\sigma = 2, \sigma = 10, \sigma = 20$ , считая слева.

разные знаки в зависимости от разных областей фазового пространства и переменных  $k, l$ .

Можно найти, что уравнение  $\Delta_0 = 0$  является линейной комбинацией характеристического уравнения  $\Delta_{\tilde{M}} = 0$  (или  $\Delta_{\tilde{A}} = 0$ ) и уравнения  $\Delta_2 = 0$ . Численно можно показать, что решение системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta_{\tilde{M}}(\omega, k, m, l) = 0, \\ \Delta_2(\omega, k, m, l) = 0. \end{cases} \quad (5.140)$$

также является решением уравнений  $\Delta_1 = 0, \Delta_3 = 0$ . Поэтому можно ограничиться рассмотрением только системы (5.140).

Введем следующие переменные

$$\bar{x} = \frac{\omega_R}{m_R}, \quad \bar{y} = \frac{\omega_I}{m_I}, \quad r = \frac{m_R}{m_I}, \quad h = \frac{k}{m_I}. \quad (5.141)$$

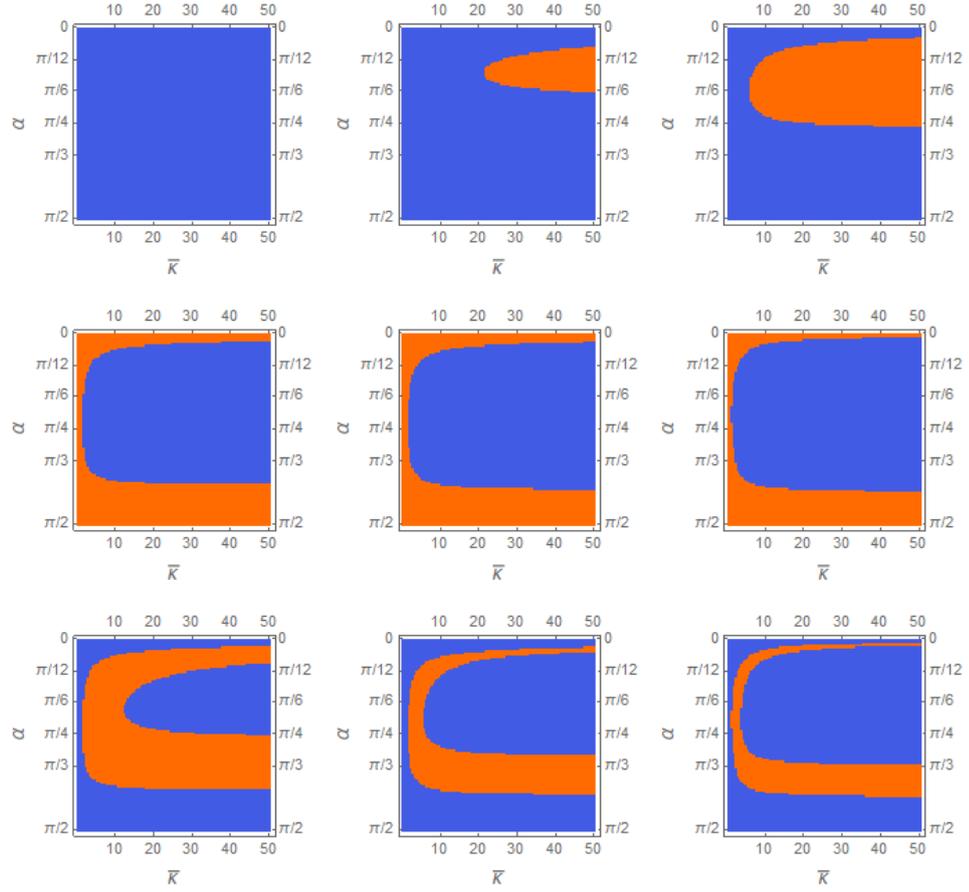


Рисунок 5.2 — Графики действительной части корней характеристического уравнения в полупространстве  $\Lambda_+$  в зависимости от полярного угла  $\alpha$  и  $\bar{k}$  при  $k = 2$ ,  $l = 2$ ,  $\omega = 2 + 2i$ . Синий цвет обозначает отрицательную область, оранжевый - положительную. Ряды соответствуют корням  $m_1, m_2, m_3$ , считая сверху, а столбцы  $\sigma = 2, \sigma = 10, \sigma = 20$ , считая слева.

Так как  $\text{Im } \omega > 0$  и  $\text{Im } m > 0$ , то  $\bar{y} > 0$ , а для  $\bar{x}, r, h$  существует четыре набора знаков в зависимости от знаков  $m_R$  и  $k$ . Система уравнений (5.140) разбивается на четыре уравнения (для действительной и мнимой частей) с неизвестными  $\bar{x}, \bar{y}, r, h, l$ . Мы можем написать это как

$$\begin{cases} \text{Re } G_M^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h) = \text{Re } G_M^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h)l^2, \\ \text{Im } G_M^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h) = \text{Im } G_M^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h)l^2, \\ \text{Re } G_M^{(3)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h)l = 0, \\ \text{Im } G_M^{(3)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h)l = 0, \end{cases} \quad (5.142)$$

где в характеристическом уравнении  $G_M^{(2)}$  - коэффициент при  $l^2$ , а  $\Delta_2$  можно представить в виде  $G_M^{(3)}(\omega, k, m)l$ . Так как  $l$  - действительное число, мы имеем

$$\operatorname{Re} G_M^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h) \operatorname{Im} G_M^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h) = \operatorname{Im} G_M^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h) \operatorname{Re} G_M^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h). \quad (5.143)$$

Это уравнение является условием обнуления мнимой части коэффициента при  $l^2$  в характеристическом уравнении. Так как  $l$  — действительное число, то выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\operatorname{Re} G_M^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h)}{\operatorname{Re} G_M^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h)} \geq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\operatorname{Im} G_M^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h)}{\operatorname{Im} G_M^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h)} \geq 0. \quad (5.144)$$

Таким образом, при  $l \neq 0$  имеем систему из трех уравнений и неравенства

$$\begin{cases} \operatorname{Re} G_M^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h) \operatorname{Im} G_M^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h) = \operatorname{Im} G_M^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h) \operatorname{Re} G_M^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h), \\ \operatorname{Re} G_M^{(3)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h) = 0, \\ \operatorname{Im} G_M^{(3)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h) = 0, \\ \frac{\operatorname{Re} G_M^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h)}{\operatorname{Re} G_M^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, r, h)} > 0. \end{cases} \quad (5.145)$$

Поскольку  $y > 0$ , мы должны решить три уравнения для каждого значения  $\bar{y}$  и действительных  $\bar{x}, r, h$ , а затем проверить, выполняется ли неравенство. Если хотя бы одно значение  $\bar{y}$  удовлетворяет данной системе, то режим неустойчивости существует.

Было обнаружено, что три уравнения системы (5.145) имеют решения только при  $\bar{x} < 0$ . Отрицательные значения  $\bar{x}$  допустимы, поскольку знаки  $\operatorname{Re} \omega$  и  $\operatorname{Re} m$  могут отличаться между собой, как обсуждалось выше и показано на рис. 5.2.

Однако численные расчеты не привели к каким-либо результатам по обнаружению области  $\bar{y}$ , где выполняются неравенства (5.144). Таким образом, было получено, что для ударной волны, нормаль которой направлена под произвольным полярным углом, не существует решений, соответствующих режиму неустойчивости. Все результаты, посвящённые исследованию устойчивости, были опубликованы в работе [63].

## Заключение

По итогам проведённой работы можно сделать следующие выводы. Анизотропия давлений в релятивистской анизотропной гидродинамике деформирует многие известные решения в изотропном случае. Так, предполагая постоянность параметра анизотропии, было получено волновое уравнение, из которого следует существование двух различных скоростей распространения звука в среде. Поперечная скорость звука  $c_{s\perp}$  стремится к значению  $1/\sqrt{2}$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , а продольная скорость звука  $c_{s\parallel}$  стремится к нулю при  $\xi \rightarrow \infty$ . Несмотря на то, что фиксация параметра является грубым приближением, полученное асимметричное волновое уравнение даёт верное качественное описание влияния анизотропии. Различие скоростей распространения звука немедленно ведёт к асимметрии конуса Маха. Основание конуса при наличии анизотропии описывается эллипсом, в отличие от окружности в изотропном случае. Показано, что аналитическое исследование углов раскрытия конуса (углов Маха) приводит к двум выражениям, зависящим от величины анизотропии и скорости движения потока. Данные формулы при стремлении параметра анизотропии к нулю переходят к значениям углов Маха в изотропном релятивистском случае.

Анизотропная релятивистская гидродинамика нулевого порядка позволяет получить разрывные решения для ударных волн. В рамках работы были получены аналитические решения для ударных волн сжатия в поперечном и продольном случаях расположения нормали к поверхности разрыва относительно оси пучка. Было показано, что в поперечном случае имеет место ослабление ударной волны, а в продольном случае - её усиление. Степень усиления (ослабления) выражается в увеличении (уменьшении) величины относительной разности скоростей падающего и прошедшего потоков.

Поскольку продольная скорость звука  $c_{s\parallel}$  затухает от изотропного значения  $1/\sqrt{3}$  в точке  $\xi = 0$  до 0 в точке  $\xi \rightarrow \infty$  и существование ударной волны возможно только при движении потока со скоростью, превышающей скорость звука, то для генерации ударной волны в направлении анизотропии требуется значительно меньшая скорость потока.

Численными методами были решены разрывные ударноволновые уравнения для произвольного расположения нормали к поверхности разрыва (произвольном полярном угле  $\alpha$ ). При неизменном параметре анизотропии

$\xi' = \xi$  было показано, что в анизотропной среде происходит преломление прошедшего через поверхность разрыва потока в сторону оси анизотропии (оси распространения пучка). Также было показано, что для больших значений анизотропии и большом отношении изотропных давлений  $\sigma = P'_{\text{iso}}/P_{\text{iso}}$  имеет место ускорение потока после прохождения поверхности разрыва, что является атрибутом волн разрежения. Данное поведение может указывать на некоторые ограничения на параметр анизотропии, а также на необходимость различия величин анизотропии впереди и позади ударной волны. Было продемонстрировано, что генерация ударной волн данного типа при определённых углах  $\alpha$  может дать вклад в распределение по  $p_T$  в столкновениях тяжёлых ядер.

Были получены решения для ударных волн сжатия (при отношении изотропных давлений  $\sigma = P'_{\text{iso}}/P_{\text{iso}} > 1$ ) в безмассовом газе при отсутствии преломления падающего потока (при  $\alpha = \alpha'$ ) в рамках анизотропной релятивистской гидродинамики. Если анизотропия падающего потока  $\xi$  задана, то для прошедшего потока параметр анизотропии  $\xi$  имеет два решения, причём существует критическая точка  $\xi_{\text{crit}}$ , разделяющая два пространства решений. Было показано, что описание ударных и существование изотропного предела  $\xi \rightarrow 0$  волн возможно только при  $\xi \leq \xi_{\text{crit}}$ . Иными словами, существование ударных волн возможно при малых анизотропиях. Несмотря на достаточно сильные ограничения на параметр анизотропии, предположение отсутствия преломления потока ( $\alpha' = \alpha$ ) является более "мягким" чем предположение неизменяемости анизотропии ( $\xi' = \xi$ ). Однако, возможно, существует переход от рассмотренного в работе случая  $\alpha = \alpha'$  к случаю  $\xi = \xi'$ , при котором  $\xi_{\text{crit}} \rightarrow \infty$ .

Эволюция параметра анизотропии  $\xi$ , которую можно получить из уравнений движения, например, для буст-инвариантного случая, определяется отношением сдвиговой вязкости к плотности энтропии  $\eta/S$ . При нулевой начальной анизотропии ( $\xi_0 = 0$ ) мы получаем связь между максимальным значением параметра анизотропии  $\xi$ , достигаемым в ходе эволюции, и  $\eta/S$ , что также может привести к оценке значений  $\eta/S$ , при которых возможна генерация ударных волн. Найденные значения критической точки  $\xi_{\text{crit}}$  показывают, что низкие значения  $\eta/S$  необходимы для существования ударных волн в течение всей эволюции системы  $\xi_0 = 0$ .

Также было показано, что образование ударных волн может привести к изотропизации системы, поскольку  $\xi' \leq \xi$ . Механизм изотропизации в случае поперечных ударных волн сильнее, чем в случае продольных ударных волн.

Для полученных решений ударных волн с постоянной анизотропией был проведён анализ их устойчивости к малому гармоническому возмущению. Аналитически была показана линейная устойчивость ударных волн в поперечном и продольном случаях. Для произвольного полярного угла были проведены численные расчёты. Анализ корней характеристического уравнения показал наличие более широкой области возможных значений волновых чисел. Однако дальнейшие численные расчёты не выявили существование режима неустойчивости.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Леонидову А. В. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство.

## Список литературы

1. *Busza W., Rajagopal K., Schee W. van der.* Heavy Ion Collisions: The Big Picture, and the Big Questions [текст] // Annual Review of Nuclear and Particle Science. — 2018. — Feb. — Vol. 68.
2. *Rafelski J.* Discovery of Quark-Gluon Plasma: Strangeness Diaries [текст] // The European Physical Journal Special Topics. — 2020. — Jan. — Vol. 229. — P. 1—140.
3. *Леонидов А. В.* Плотная глюонная материя в соударениях ядер [текст] // Усп. физ. наук. — 2005. — т. 175, № 4. — с. 345—366.
4. The Color Glass Condensate [текст] / F. Gelis [et al.] // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. — 2010. — Vol. 60. — P. 463—489.
5. *Lappi T., McLerran L.* Some features of the glasma [текст] // Nucl. Phys. A. — 2006. — т. 772. — с. 200—212.
6. *Дремин И. М., Леонидов А. В.* Кварк-глюонная среда [текст] // Усп. физ. наук. — 2010. — т. 180, № 11. — с. 1167—1196.
7. *Romatschke P., Strickland M.* Collective Modes of an Anisotropic Quark-Gluon Plasma [текст] // Physical Review D. — 2003. — May. — Vol. 68.
8. *Heinz U., Snellings R.* Collective Flow and Viscosity in Relativistic Heavy-Ion Collisions [текст] // Annual Review of Nuclear and Particle Science. — 2013. — Jan. — Vol. 63.
9. *Strickland M.* Anisotropic Hydrodynamics: Three Lectures [текст] // Acta Physica Polonica B. — 2014. — Oct. — Vol. 45.
10. *Muronga A.* Second Order Dissipative Fluid Dynamics for Ultra-Relativistic Nuclear Collisions [текст] // Physical Review Letters. — 2002. — Jan. — Vol. 88.
11. *Kolb P. F., Heinz U. W.* Hydrodynamic description of ultrarelativistic heavy ion collisions [текст]. — 2003. — May.
12. *Baier R., Romatschke P., Wiedemann U. A.* Dissipative hydrodynamics and heavy-ion collisions [текст] // Phys. Rev. C. — 2006. — июнь. — т. 73, вып. 6. — с. 064903.

13. *Martinez M., Strickland M.* Constraining relativistic viscous hydrodynamical evolution [текст] // Phys. Rev. C. — 2009. — Apr. — Vol. 79, issue 4. — P. 044903.
14. *Ryblewski R., Florkowski W.* Highly anisotropic and strongly dissipative hydrodynamics with transverse expansion [текст] // European Physical Journal. — 2011. — Vol. C, 71(11). — P. 1761.
15. *Martinez M., Strickland M.* Dissipative dynamics of highly anisotropic systems [текст] // Nucl.Phys. — 2010. — Vol. A, no. 848. — P. 183—197.
16. *Martinez M., Ryblewski R., Strickland M.* Boost-Invariant (2+1)-dimensional Anisotropic Hydrodynamics [текст] // Physical Review C. — 2012. — Apr. — Vol. 85.
17. *Florkowski W., Ryblewski R., Strickland M.* Anisotropic Hydrodynamics for Rapidly Expanding Systems [текст] // Nuclear Physics A. — 2013. — Vol. 916.
18. *Alqahtani M., Nopoush M., Strickland M.* Relativistic anisotropic hydrodynamics [текст] // Prog. Part. Nucl. Phys. — 2018. — Vol. 101. — P. 204—248.
19. Non-boost-invariant dissipative hydrodynamics [текст] / W. Florkowski [и др.] // Phys. Rev. C. — 2016. — дек. — т. 94, вып. 6. — с. 064903.
20. Derivation of transient relativistic fluid dynamics from the Boltzmann equation [текст] / G. S. Denicol [и др.] // Phys. Rev. D. — 2012. — июнь. — т. 85, вып. 11. — с. 114047.
21. *Nopoush M., Ryblewski R., Strickland M.* Anisotropic hydrodynamics for conformal Gubser flow [текст] // Phys. Rev. D. — 2015. — Feb. — Vol. 91, issue 4. — P. 045007.
22. *Martinez M., McNelis M., Heinz U.* Anisotropic fluid dynamics for Gubser flow [текст] // Phys. Rev. C. — 2017. — May. — Vol. 95, issue 5. — P. 054907.
23. *Tinti L., Florkowski W.* Projection method and new formulation of leading-order anisotropic hydrodynamics [текст] // Phys. Rev. C. — 2014. — Mar. — Vol. 89, issue 3. — P. 034907.
24. *Nopoush M., Ryblewski R., Strickland M.* Bulk viscous evolution within anisotropic hydrodynamics [текст] // Phys. Rev. C. — 2014. — July. — Vol. 90, issue 1. — P. 014908.

25. Leading-order anisotropic hydrodynamics for systems with massive particles [текст] / W. Florkowski [et al.] // Phys. Rev. C. — 2014. — May. — Vol. 89, issue 5. — P. 054909.
26. Anisotropic hydrodynamic modeling of 2.76 TeV Pb-Pb collisions [текст] / M. Alqahtani [и др.] // Phys. Rev. C. — 2017. — окт. — т. 96, вып. 4. — с. 044910.
27. Anisotropic hydrodynamic modeling of heavy-ion collisions at LHC and RHIC [текст] / M. Alqahtani [и др.] // Nucl. Phys. A. — 2019. — т. 982. — с. 423—426.
28. *Rischke D. H., Bernard S., Maruhn J. A.* Relativistic hydrodynamics for heavy ion collisions. 1. General aspects and expansion into vacuum [текст] // Nucl. Phys. A. — 1995. — Vol. 595. — P. 346—382.
29. *Dumitru A., Rischke D. H.* Collective dynamics in highly relativistic heavy-ion collisions [текст] // Phys. Rev. C. — 1999. — Jan. — Vol. 59, issue 1. — P. 354—363.
30. *Gyulassy M., Rischke D. H., Zhang B.* Hot spots and turbulent initial conditions of quark-gluon plasmas in nuclear collisions [текст] // Nuclear Physics A. — 1997. — Vol. 613, no. 4. — P. 397—434.
31. *Casalderrey-Solana J., Shuryak E., Teaney D.* Conical Flow induced by Quenched QCD Jets [текст] // Nucl.Phys. — 2006. — Vol. A, no. 774. — P. 577—580.
32. *Renk T., Ruppert J.* Three-particle azimuthal correlations and Mach shocks [текст] // Phys. Rev. — 2007. — Vol. C, no. 76. — P. 014908.
33. *Roy V., Chaudhuri A.* Equation of state dependence of Mach cone like structures in Au+Au collisions [текст] // J.Phys. — 2010. — Vol. G, no. 37. — P. 035105.
34. *STAR-Collaboration.* Azimuthal di-hadron correlations in d+Au and Au+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}}=200$  GeV from STAR [текст] // Phys. Rev. — 2010. — Vol. C, no. 82. — P. 024912.
35. *PHENIX-Collaboration.* Transition in Yield and Azimuthal Shape Modification in Dihadron Correlations in Relativistic Heavy Ion Collisions [текст] // Phys. Rev. Lett. — 2010. — No. 104. — P. 252301.

36. *Dremin I. M.* In-medium QCD and Cherenkov gluons [текст] // Eur.Phys.J. — 2008. — Vol. C, no. 56. — P. 81–86.
37. *Schenke B., Jeon S., Gale C.* Elliptic and Triangular Flow in Event-by-Event  $D = 3 + 1$  Viscous Hydrodynamics [текст] // Physical review letters. — 2011. — Jan. — Vol. 106. — P. 042301.
38. *Ma G.-L., Wang X.-N.* Jets, Mach Cones, Hot Spots, Ridges, Harmonic Flow, Dihadron, and  $\gamma$ -Hadron Correlations in High-Energy Heavy-Ion Collisions [текст] // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106, issue 16. — P. 162301.
39. *CMS-Collaboration.* Centrality dependence of dihadron correlations and azimuthal anisotropy harmonics in PbPb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV [текст] // The European Physical Journal C. — 2012. — May. — Vol. 72. — P. 1–26.
40. *ALICE-Collaboration.* Harmonic decomposition of two particle angular correlations in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV [текст] // Phys. Lett. B. — 2012. — Feb. — Vol. 708. — P. 249–264.
41. *Satarov L., Stoecker H., Mishustin I.* Mach shocks induced by partonic jets in expanding quark–gluon plasma [текст] // Physics Letters B. — 2005. — Oct. — Vol. 627. — P. 64–70.
42. *Neufeld R. B.* Thermal field theory derivation of the source term induced by a fast parton from the quark energy-momentum tensor [текст] // Phys. Rev. D. — 2011. — Mar. — Vol. 83, issue 6. — P. 065012.
43. Relativistic Shock Waves in Viscous Gluon Matter [текст] / I. Bouras [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2009. — July. — Vol. 103, issue 3. — P. 032301.
44. *Wang F.* Novel phenomena in particle correlations in relativistic heavy-ion collisions [текст] // Progress in Particle and Nuclear Physics. — 2014. — Vol. 74. — P. 35–54.
45. Event-by-Event Anisotropic Flow in Heavy-ion Collisions from Combined Yang-Mills and Viscous Fluid Dynamics [текст] / C. Gale [et al.] // Physical review letters. — 2013. — Jan. — Vol. 110. — P. 012302.
46. Influence of a temperature-dependent shear viscosity on the azimuthal asymmetries of transverse momentum spectra in ultrarelativistic heavy-ion collisions [текст] / H. Niemi [et al.] // Phys. Rev. C. — 2012. — July. — Vol. 86, issue 1. — P. 014909.

47. *Chaudhuri A. K.* Centrality dependence of elliptic flow and QGP viscosity [текст] // J. Phys. G. — 2010. — Vol. 37. — P. 075011.
48. *Rischke D. H., Gyulassy M.* The maximum lifetime of the quark-gluon plasma [текст] // Nuclear Physics A. — 1996. — Vol. 597, no. 4. — P. 701—726.
49. *Redlich K., Satz H.* Critical behavior near deconfinement [текст] // Phys. Rev. D. — 1986. — June. — Vol. 33, issue 12. — P. 3747—3752.
50. *Karsch F.* Recent lattice results on finite temperature and density QCD, part I [текст] // Proceedings of Science. — 2007. — Dec.
51. The Speed of Sound in Hadronic Matter [текст] / P. Castorina [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2010. — Vol. 66. — P. 207—213.
52. *Cartwright C., Kaminski M., Knipfer M.* Hydrodynamic attractors for the speed of sound in holographic Bjorken flow [текст] // Phys. Rev. D. — 2023. — май. — т. 107, вып. 10. — с. 106016.
53. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, том VI, Гидродинамика [текст] / под ред. Л. П. Питаевский. — 6-е изд, исправ. — Москва : Физматлит, 2021. — 727 с.
54. *Hiscock W. A., Lindblom L.* Linear plane waves in dissipative relativistic fluids [текст] // Phys. Rev. D. — 1987. — June. — Vol. 35, issue 12. — P. 3723—3732.
55. *Israel W., Stewart J.* Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory [текст] // Annals of Physics. — 1979. — Vol. 118, no. 2. — P. 341—372.
56. *Heinz U., Song H., Chaudhuri A.* Dissipative hydrodynamics for viscous relativistic fluids [текст] // Physical Review C. — 2005. — Nov. — Vol. 73.
57. *Molnar E., Niemi H., Rischke D.* Numerical tests of causal relativistic dissipative fluid dynamics [текст] // European Physical Journal C. — 2009. — July. — Vol. 65.
58. *Denicol G., Koide T., Rischke D.* Dissipative Relativistic Fluid Dynamics: A New Way to Derive the Equations of Motion from Kinetic Theory [текст] // Physical review letters. — 2010. — Oct. — Vol. 105. — P. 162501.
59. *Olson T. S., Hiscock W. A.* Plane steady shock waves in Israel-Stewart fluids [текст] // Annals of Physics. — 1990. — Vol. 204, no. 2. — P. 331—350.

60. *Majorana A., Motta S.* Shock Structure in Relativistic Fluid-Dynamics [текст]. — 1985.
61. *Kirakosyan M., Kovalenko A., Leonidov A.* Sound propagation and Mach cone in anisotropic hydrodynamics [текст] // The European Physical Journal C. — 2018. — Vol. 79. — P. 1–5.
62. *Kovalenko A., Leonidov A.* Shock waves in relativistic anisotropic hydrodynamics [текст] // Eur. Phys. J. C. — 2022. — Vol. 82, no. 4. — P. 378.
63. *Kovalenko A.* Linear stability of shock waves in ultrarelativistic anisotropic hydrodynamics [текст] // Eur. Phys. J. C. — 2023. — Vol. 83, no. 8. — P. 754.
64. *Kovalenko A.* Critical Point from Shock Waves Solution in Relativistic Anisotropic Hydrodynamics [текст] // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. — 2024. — Vol. 51, no. 1. — P. 1–6.
65. *Kovalenko A.* Stability of Shock Waves in Anisotropic Hydrodynamics [текст] // Phys. Part. Nucl. — 2021. — т. 52, № 4. — с. 569–570.
66. *Gedalin M.* Linear waves in relativistic anisotropic magnetohydrodynamics [текст] // Phys. Rev. E. — 1993. — июнь. — т. 47, вып. 6. — с. 4354–4357.
67. *Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E.* The Boltzmann Equation and the One-Fluid Hydromagnetic Equations in the Absence of Particle Collisions [текст] // Proceedings of the Royal Society of London Series A. — 1956. — июль. — т. 236, № 1204. — с. 112–118.
68. *Beskin V., Kuznetsova I.* Grad-Shafranov Equation with Anisotropic Pressure [текст] // The Astrophysical Journal. — 2000. — апр. — т. 541.
69. *Anderson J., Witting H.* A relativistic relaxation-time model for the Boltzmann equation [текст] // Physica. — 1974. — Vol. 74, no. 3. — P. 466–488.
70. *Зельдович Я. Б.* Теория ударных волн и введение в газодинамику [текст]. — Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 186 с.
71. *Israel W.* Relativistic theory of shock waves [текст] // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1960. — Vol. 259. — P. 129–143.

72. *Mitchell T. P., Pope D. L.* Shock Waves in an Ultra-Relativistic Fluid [текст] // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — 1964. — т. 277, № 1368. — с. 24—31.
73. *Gardner C. S., Kruskal M. D.* Stability of Plane Magnetohydrodynamic Shocks [текст] // The Physics of Fluids. — 1964. — Vol. 7, no. 5. — P. 700—706.
74. *Russo G., Anile A. M.* Stability properties of relativistic shock waves: Basic results [текст] // Physics of Fluids. — 1987. — Vol. 30. — P. 2406—2413.

## Приложение А

### Проверка досветового условия для ударных волн в релятивистской анизотропной гидродинамике

В анизотропном случае условием, которое обеспечивает досветовую скорость ударных волн, будет неравенство  $N^\mu N_\mu < 0$ , где 4-вектор  $N_\mu$  является вектором нормали к поверхности разрыва. Неравенство выражает пространственноподобность вектора  $N_\mu$ . Мы можем изучить вопрос о знаке  $N^\mu N_\mu$  путём исследования уравнения согласования  $T_{\mu\nu}N^\mu = T'_{\mu\nu}N^\mu$  на границе поверхности разрыва, где тензор энергии-импульса задан в виде

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P_\perp)U^\mu U^\nu - P_\perp g^{\mu\nu} + (P_\parallel - P_\perp)Z^\mu Z^\nu. \quad (\text{A.1})$$

Мы получим следующую систему уравнений:

$$(\varepsilon + P'_\perp)x = (\varepsilon' + P'_\perp)Ax' - (P'_\perp - P'_\parallel)Cy', \quad (\text{A.2})$$

$$(\varepsilon' + P_\perp)x' = (\varepsilon + P_\perp)Ax - (P_\perp - P_\parallel)By, \quad (\text{A.3})$$

$$(P'_\perp - P'_\parallel)y = (\varepsilon' + P'_\perp)Bx' - (P'_\perp - P'_\parallel)Dy', \quad (\text{A.4})$$

$$(P_\perp - P'_\parallel)y' = (\varepsilon + P_\perp)Cx - (P_\perp - P_\parallel)Dy, \quad (\text{A.5})$$

где введены обозначения

$$x = U_\mu N^\mu, \quad x' = U'_\mu N^\mu, \quad A = U'_\mu U^\mu, \quad B = U'_\mu Z^\mu, \quad (\text{A.6})$$

$$y = Z_\mu N^\mu, \quad y' = Z'_\mu N^\mu, \quad C = Z'_\mu U^\mu, \quad D = Z'_\mu Z^\mu. \quad (\text{A.7})$$

Переходя к ультрарелятивистскому случаю  $\varepsilon = 2P_\perp + P_\parallel$ , получим

$$(2P_\perp + P_\parallel + P'_\perp)x = (3P'_\perp + P'_\parallel)Ax' - (P'_\perp - P'_\parallel)Cy', \quad (\text{A.8})$$

$$(2P'_\perp + P'_\parallel + P_\perp)x' = (3P_\perp + P_\parallel)Ax - (P_\perp - P_\parallel)By, \quad (\text{A.9})$$

$$(P'_\perp - P'_\parallel)y = (3P'_\perp + P'_\parallel)Bx' - (P'_\perp - P'_\parallel)Dy', \quad (\text{A.10})$$

$$(P_\perp - P'_\parallel)y' = (3P_\perp + P_\parallel)Cx - (P_\perp - P_\parallel)Dy. \quad (\text{A.11})$$

Система уравнений (A.8 - A.11) имеет решения, если выполняется условие

$$\text{Det } \Lambda = \begin{vmatrix} 0 & -(3P'_{\perp} + P'_{\parallel})B & (P'_{\perp} - P'_{\parallel})D & (P'_{\perp} - P'_{\parallel})D \\ -(3P_{\perp} + P_{\parallel})C & 0 & (P_{\perp} - P_{\parallel})D & (P_{\perp} - P_{\parallel})C \\ (2P_{\perp} + P_{\parallel} + P'_{\perp}) & -(3P'_{\perp} + P'_{\parallel})A & 0 & (P'_{\perp} - P'_{\parallel})C \\ -(3P_{\perp} + P_{\parallel})A & (2P'_{\perp} + P'_{\parallel} + P_{\perp}) & (P_{\perp} - P_{\parallel})B & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Поскольку нам интересно рассмотреть квадрат вектора нормали  $N_{\mu}N^{\mu}$ , то из  $T_{\mu\nu}N^{\mu} = T'_{\mu\nu}N^{\mu}$  найдём, что

$$N_{\mu}N^{\mu} = \frac{1}{P_{\perp} - P'_{\perp}} \left[ (3P_{\perp} + P_{\parallel})x^2 - (3P'_{\perp} + P'_{\parallel})x'^2 - (P_{\perp} - P_{\parallel})y^2 + (P'_{\perp} - P'_{\parallel})y'^2 \right]. \quad (\text{A.13})$$

Решение уравнения  $\text{Det } \Lambda = 0$  позволяет получить непротиворечивую систему уравнений (A.8 - A.11), связывающих переменные  $x, x', y, y'$ . Поэтому есть возможность выбрать одно среди значений  $x, x', y, y'$ , и выразить через него все остальные. Пусть, например, после решения уравнений (A.8 - A.11) мы выразим  $x', y, y'$  через  $x$ , тогда выражение (A.13) будет иметь вид

$$N_{\mu}N^{\mu} = \frac{1}{P_{\perp} - P'_{\perp}} \Phi(P_{\perp}, P_{\parallel}, P'_{\perp}, P'_{\parallel}, A, B, C, D)x^2. \quad (\text{A.14})$$

В случае произвольного полярного угла из-за симметрии в плоскости  $Oxy$  мы можем зафиксировать  $x$ -направление и рассматривать движение только в плоскости  $Oxz$ :

$$U_{\mu} = (u_0 \cosh \vartheta, u_x, 0, u_0 \sinh \vartheta), \quad (\text{A.15})$$

$$Z_{\mu} = (\sinh \vartheta, 0, 0, \cosh \vartheta). \quad (\text{A.16})$$

Обозначим

$$u_x = \sinh \gamma, \quad u_0 = \cosh \gamma, \quad (\text{A.17})$$

$$u'_x = \sinh \gamma', \quad u'_0 = \cosh \gamma'. \quad (\text{A.18})$$

Тогда мы получим для  $A, B, C$  и  $D$  следующие формулы:

$$A = U'_{\mu}U^{\mu} = \cosh \gamma \cosh \gamma' \cosh(\vartheta - \vartheta') - \sinh \gamma \sinh \gamma', \quad (\text{A.19})$$

$$B = U'_{\mu}Z^{\mu} = \cosh \gamma' \sinh(\vartheta - \vartheta'), \quad (\text{A.20})$$

$$C = Z'_{\mu}U^{\mu} = -\cosh \gamma \sinh(\vartheta - \vartheta'), \quad (\text{A.21})$$

$$D = Z'_{\mu}Z^{\mu} = -\cosh(\vartheta - \vartheta'). \quad (\text{A.22})$$

Таким образом, система уравнений будет зависеть только от разности  $\vartheta - \vartheta'$ , а не от самих значений. Обозначим  $\Delta = \vartheta - \vartheta'$ .

В рамках анизотропной релятивистской гидродинамики поперечное и продольное давления  $P_{\perp}$ ,  $P_{\parallel}$  факторизуются на анизотропную и изотропную части по формулам

$$P_{\perp}(\Lambda, \xi) = R_{\perp}(\xi)P_{\text{iso}}(\Lambda), \quad (\text{A.23})$$

$$P_{\parallel}(\Lambda, \xi) = R_{\parallel}(\xi)P_{\text{iso}}(\Lambda). \quad (\text{A.24})$$

Отношение изотропных давлений позади и спереди ударной волны обозначим как  $\sigma = P'_{\text{iso}}/P_{\text{iso}}$ . Решая уравнение  $\text{Det } \Lambda = 0$ , мы можем получить значение  $\Delta$ . Таким образом, мы имеем 4 неизвестных  $\sigma, \xi, \gamma, \gamma'$ , из которых  $\sigma, \xi$  являются входными параметрами задачи. Таким образом, получим из выражения (A.13) следующее равенство

$$N_{\mu}N^{\mu} = \frac{1}{R_{\perp}(\xi)(1 - \sigma)}\Phi(\sigma, \xi, \gamma, \gamma', \Delta)x^2. \quad (\text{A.25})$$

Можно ввести следующую функцию

$$S(\sigma, \xi, \gamma, \gamma') = \text{sign} \left( \frac{1}{R_{\perp}(\xi)(1 - \sigma)}\Phi(\sigma, \xi, \gamma, \gamma', \Delta(\sigma, \xi, \gamma, \gamma')) \right), \quad (\text{A.26})$$

что определяет знак квадрата 4-вектора  $N^{\mu}$ .

Обозначим  $T = \tanh \gamma, T' = \tanh \gamma'$ , тогда имеем

$$S(\sigma, \xi, T, T') = \text{sign} \left( \frac{1}{R_{\perp}(\xi)(1 - \sigma)}\Phi(\sigma, \xi, T, T', \Delta(\sigma, \xi, T, T')) \right). \quad (\text{A.27})$$

Следует иметь в виду, что уравнение  $\text{Det } \Lambda = 0$  может не иметь решений, а следовательно и вся система уравнений (A.8 - A.11) становится несогласованной. Поэтому естественно построить следующую функцию:

$$\Omega(\sigma, \xi, T, T') = \begin{cases} -1 & \text{Det } \Lambda = 0 \text{ не имеет решений} \\ 0 & S(\sigma, \xi, T, T') = -1 \\ 1 & S(\sigma, \xi, T, T') = 1 \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

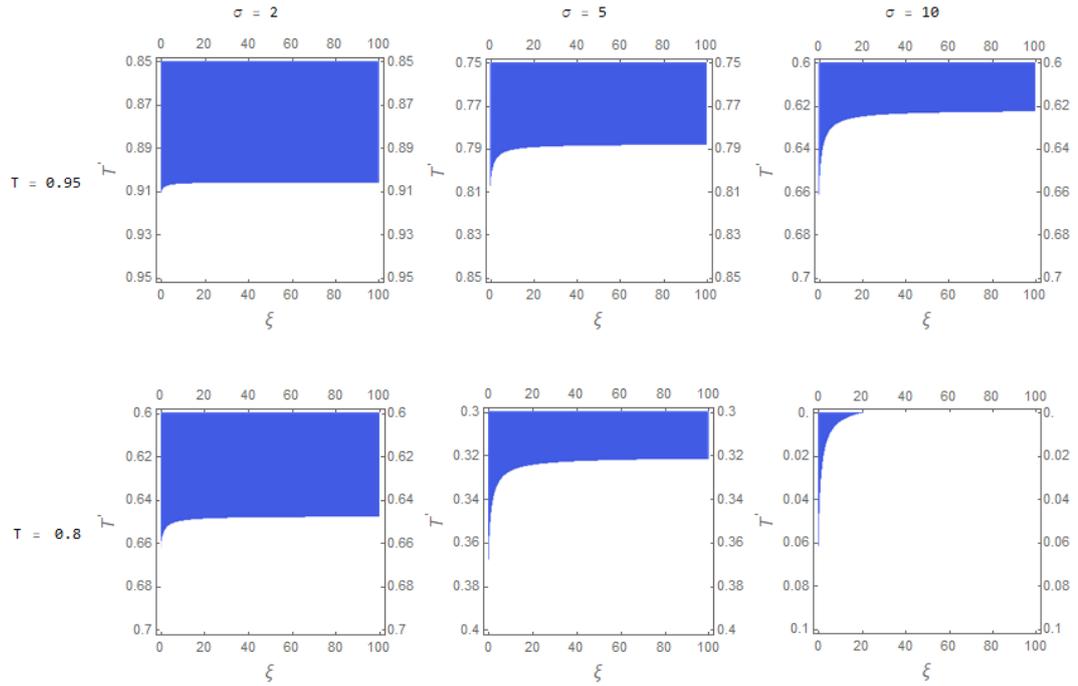


Рисунок А.1 — Графики  $\Omega(\sigma, \xi, T, T')$  как функции от переменных  $\xi, T'$ . Синий цвет обозначает  $\Omega = -1$ , белый цвет -  $\Omega = 0$ .

Как видно из рис. А.1, оказалось, что случая  $\Omega = 1$  не наблюдается. Были проверены и другие значения  $\sigma, T$ . Также на графиках видно, что по мере увеличения параметра анизотропии  $\xi$  увеличивается область возможных решений уравнения  $\text{Det } \Lambda = 0$ . Этот факт позволяет предположить, что в анизотропной среде ударная волна может формироваться чаще, чем в изотропном случае.

## Приложение Б

### Решение ударной волны для поперечного потока в общем случае

Рассмотрим поток, который распространяется в поперечном направлении, относительно оси-пучка (оси анизотропии). Ввиду симметрии в плоскости  $Oxy$  удобно принять ось  $Ox$  за направление распространения. Тогда базис (1.17) примет вид

$$U_\mu = (u_0, u_x, 0, 0), \quad Z_\mu = (0, 0, 0, 1), \quad (\text{Б.1})$$

$$U'_\mu = (u'_0, u'_x, 0, 0), \quad Z'_\mu = Z_\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (\text{Б.2})$$

Условие согласования (3.1) приводит к следующей системе уравнений:

$$(\varepsilon + P_\perp)U_0x - P_\perp N_0 - (\varepsilon' + P'_\perp)U'_0x' + P'_\perp N_0 = 0, \quad (\text{Б.3})$$

$$(\varepsilon + P_\perp)U_1x - P_\perp N_1 - (\varepsilon' + P'_\perp)U'_1x' + P'_\perp N_1 = 0, \quad (\text{Б.4})$$

$$-P_\perp N_2 + P'_\perp N_2 = 0, \quad (\text{Б.5})$$

$$-P_\parallel N_3 + P'_\parallel N_3 = 0. \quad (\text{Б.6})$$

Уравнения (Б.5-Б.6) приводят к решениям  $N_2 = 0$  и  $N_3 = 0$ . Примем также во внимание уравнение состояния для ультрарелятивистского случая ( $\varepsilon = 2P_\perp + P_\parallel$ ), тогда получим

$$(3P_\perp + P_\parallel)u_0(u_0N_0 - u_xN_1) - P_\perp N_0 - (3P'_\perp + P'_\parallel)u'_0(u'_0N_0 - u'_xN_1) + P'_\perp N_0 = 0, \quad (\text{Б.7})$$

$$(3P_\perp + P_\parallel)u_x(u_0N_0 - u_xN_1) - P_\perp N_1 - (3P'_\perp + P'_\parallel)u'_x(u'_0N_0 - u'_xN_1) + P'_\perp N_1 = 0. \quad (\text{Б.8})$$

Для существования решения приведённых выше уравнений для  $N_0, N_1$ , детерминант матрицы коэффициентов уравнений должен равняться нулю. Введём следующие обозначения

$$A_0 = (3P_\perp + P_\parallel)u_0^2 - (3P'_\perp + P'_\parallel)u_0'^2 - (P_\perp - P'_\perp), \quad (\text{Б.9})$$

$$B_0 = -(3P_\perp + P_\parallel)u_0u_x + (3P'_\perp + P'_\parallel)u_0'u'_x, \quad (\text{Б.10})$$

$$A_1 = -B_0 = (3P_\perp + P_\parallel)u_0u_x - (3P'_\perp + P'_\parallel)u_0'u'_x, \quad (\text{Б.11})$$

$$B_1 = -(3P_\perp + P_\parallel)u_x^2 + (3P'_\perp + P'_\parallel)u_x'^2 - (P_\perp - P'_\perp), \quad (\text{Б.12})$$

$$(\text{Б.13})$$

тогда детерминант примет вид

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{Б.14})$$

Мы можем записать выражения для компонент 4-вектора скорости в терминах гиперболических функций:

$$u_x = \sinh \gamma, \quad u_0 = \cosh \gamma, \quad (\text{Б.15})$$

$$u'_x = \sinh \gamma', \quad u'_0 = \cosh \gamma'. \quad (\text{Б.16})$$

Подставляя (Б.14) и (Б.9 - Б.13) в (Б.14), получим

$$\begin{aligned} (3P_\perp + P_\parallel)(3P'_\perp + P'_\parallel) \cosh(2\gamma - 2\gamma') &= P_\perp(P'_\parallel + 4P_\perp) + \\ &+ P'_\perp(2P'_\parallel + P_\perp) + 4P'^2_\perp + P_\parallel(P'_\parallel + 2P_\perp + P'_\perp), \end{aligned} \quad (\text{Б.17})$$

или, в более удобной форме

$$\sinh^2(\gamma - \gamma') = \frac{(2P_\perp - P_\parallel - 2P'_\perp + P'_\parallel)(P_\parallel - P'_\parallel)}{(3P_\perp + P_\parallel)(3P'_\perp + P'_\parallel)}. \quad (\text{Б.18})$$

В пределе  $\xi \rightarrow 0$  приведенная выше формула равна решению в изотропном случае [72]. Пространственноподобная природа вектора нормали  $N^\mu$ , т.е.  $N^\mu N_\mu = -1$ , приводит к замкнутой системе уравнений для  $N_0, N_1$ , решения которых имеют вид

$$N_0 = \frac{1}{2} \frac{(3P_\perp + P_\parallel) \cosh(2\gamma - \gamma') - (P'_\parallel + P_\perp + 2P'_\perp) \cosh \gamma'}{\sqrt{(P_\parallel + 2P_\perp + P'_\perp)^2 \sinh^2(\gamma - \gamma') - (P_\parallel - P'_\parallel)^2 \cosh^2(\gamma - \gamma')}}, \quad (\text{Б.19})$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \frac{(3P_\perp + P_\parallel) \sinh(2\gamma - \gamma') - (P'_\parallel + P_\perp + 2P'_\perp) \sinh \gamma'}{\sqrt{(P_\parallel + 2P_\perp + P'_\perp)^2 \sinh^2(\gamma - \gamma') - (P_\parallel - P'_\parallel)^2 \cosh^2(\gamma - \gamma')}}. \quad (\text{Б.20})$$

Аналогично примеру из релятивистской гидродинамики рассмотрим случай, когда вектор нормали направлен вдоль оси  $Ox$   $N^\mu = (0,1,0,0)$ . В таком случае из уравнений (Б.7 - Б.8) находим выражения для компонент 4-вектора скорости  $u_x, u'_x$ :

$$\sinh \gamma = u_x = \sqrt{\frac{(P_\perp - P'_\perp)(P'_\parallel + P_\perp + 2P'_\perp)}{(2P_\perp - P_\parallel - 2P'_\perp + P'_\parallel)(P'_\parallel + 2P_\perp + P'_\perp)}}, \quad (\text{Б.21})$$

$$\sinh \gamma' = u'_x = \sqrt{\frac{(P_\perp - P'_\perp)(P'_\parallel + 2P_\perp + P'_\perp)}{(2P_\perp - P_\parallel - 2P'_\perp + P'_\parallel)(P'_\parallel + P_\perp + 2P'_\perp)}}. \quad (\text{Б.22})$$

## Приложение В

### Доказательство стабильности ударной волны в изотропном случае

Первым шагом определения области значений для  $\varphi$  будет переписывание уравнения (5.24) в терминах  $m$  и  $\Omega$ :

$$W = \Omega^2 - c_s^2(m - v'^2 m + v' \Omega)^2 = c_s^2(k^2 + l^2)(1 - v'^2). \quad (\text{B.1})$$

Определим действительную и мнимую части как  $\Omega = \Omega_R + i\Omega_I$ ,  $m = m_R + im_I$ . Поскольку правая часть (B.1) действительна и больше нуля, мы имеем

$$\text{Im } W = v'^2(1 - c_s^2 v'^2)xy - c_s^2 v'^2(1 - v'^2)(x + y) - c_s^2(1 - v'^2)^2 = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Re } W = r^2(x^2 v'^2 - c_s^2(v'^2 x + 1 - v'^2)^2) - (v'^2 v^2 - c_s^2(v'^2 y + 1 - v'^2)^2) \geq 0, \quad (\text{B.3})$$

где

$$x = \frac{\Omega_R}{v' m_R}, \quad y = \frac{\Omega_I}{v' m_I}, \quad r = \frac{m_R}{m_I}. \quad (\text{B.4})$$

Нас интересует случай корня  $m = m_3$ , для которого

$$\text{Re } \omega > 0, \quad \text{Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_3 > 0, \quad \text{Im } m_3 > 0 \quad \text{для } \Lambda_+.$$

Поэтому получаем следующие условия на введенные переменные:  $x \geq 1$ ,  $y > 1$ ,  $r \in [0, \infty)$ .

Выражение (B.2) представляет собой гиперболу, симметричную относительно переменных  $x, y$ . Для функции  $x(y)$  находим

$$x(y) = \frac{c_s^2 v'^2(1 - v'^2)y + c_s^2(1 - v'^2)^2}{v'^2(1 - c_s^2 v'^2)y - c_s^2 v'^2(1 - v'^2)}. \quad (\text{B.5})$$

Видно, что  $x(y)$  убывает с ростом  $y$ , и при  $y > 1$  получаем

$$x < x(1) = \frac{c_s^2(1 - v'^2)}{v'^2(1 - c_s^2)}.$$

Можно определить параметрическую форму  $x(s)$ ,  $y(s)$ , где  $x = x(s) = a_0 + a_1 s$ ,  $s \in [s_0, s_*]$ , такую, что  $x(s_0) = 1$ ,  $x(s_*) = \frac{c_s^2(1 - v'^2)}{v'^2(1 - c_s^2)}$ . Мы требуем, чтобы знаменатель (B.5) был пропорционален  $s$ , т.е.

$$v'^2(1 - c_s^2 v'^2)a_0 - c_s^2 v'^2(1 - v'^2) = 0, \quad (\text{B.6})$$

что даёт

$$a_0 = \frac{c_s^2(1 - v'^2)}{1 - c_s^2 v'^2}. \quad (\text{B.7})$$

Соответствующая параметризация для  $x(s)$ ,  $y(s)$  имеет вид

$$x = a_0 + a_1 s, \quad (\text{B.8})$$

$$y = a_0 + \frac{a_2}{s}. \quad (\text{B.9})$$

Естественно потребовать, чтобы  $a_1 = a_2$ , что приводит к системе уравнений для границ  $s_0$ ,  $s_*$  и  $a_1$ :

$$a_0 + a_1 * s_0 = 1, \quad (\text{B.10})$$

$$a_0 + a_1/s_0 = \frac{c_s^2(1 - v'^2)}{v'^2(1 - c_s^2)}, \quad (\text{B.11})$$

$$a_0 + a_1/s_* = 1, \quad (\text{B.12})$$

которая имеет следующее решение

$$a_1 = \frac{c_s(1 - v'^2)}{v'(1 - c_s^2 v'^2)}, \quad s_0 = K, \quad s_* = 1/K, \quad K = \frac{v'(1 - c_s^2)}{c_s(1 - v'^2)}. \quad (\text{B.13})$$

Подстановка параметрических выражений для  $x$  и  $y$  в неравенство (B.3) даёт

$$\text{Re } W = r^2[a_1^2(s^2 - 1)] - [a_1^2(\frac{1}{s^2} - 1)] \geq 0. \quad (\text{B.14})$$

Видно, что неравенство (B.14) эквивалентно  $s \geq 1$ . Таким образом, для  $s$  мы имеем диапазон значений  $s \in [1, 1/K]$ . Удобно выразить  $\varphi = \Omega/m$  через  $s$ , тогда получаем

$$\text{Re } \varphi = v'a_0 + v'a_1 \frac{r^2 s + 1/s}{1 + r^2}, \quad (\text{B.15})$$

$$\text{Im } \varphi = v'ra_1 \frac{(1/s - s)}{1 + r^2}, \quad (\text{B.16})$$

где  $r \in [0, \infty)$ ,  $s \in [1, 1/K]$ . Эти условия определяют область комплексной плоскости  $\mathfrak{A}$  для возможных значений  $\varphi$ , соответствующих режиму неустойчивости.

Для действительных значений  $\varphi$  необходимо положить  $r = 0$ , из чего можно найти отрезок вещественной прямой

$$v' \leq \varphi \leq \frac{c_s(1 - v'^2)}{(1 - c_s v')}. \quad (\text{B.17})$$

## Приложение Г

### Доказательство стабильности поперечной ударной волны в анизотропном случае

Определим действительную и мнимую части  $\omega = \omega_R + i\omega_I$ ,  $k = k_R + ik_I$  и введем следующие переменные

$$x = \frac{\Omega_R}{v'k_R}, \quad y = \frac{\Omega_I}{v'k_I}, \quad r = \frac{k_R}{k_I}. \quad (\Gamma.1)$$

Ищем конкретное значение  $k$ , удовлетворяющее неравенствам

$$\operatorname{Re} \omega > 0, \quad \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} k_3 > 0, \quad \operatorname{Im} k_3 > 0 \quad \text{in } \Lambda_+,$$

поэтому  $x \geq 1$ ,  $y > 1$ ,  $r \in [0, \infty)$ .

В уравнении (5.106) обозначим часть, не зависящую от  $m, l$ , как  $W$ , тогда имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W &= r(-3L_1 - 2L_2y - L_3y^2 - L_2x - 2L_2xy + 3L_4xy^2) + \\ &+ (L_1 + L_2x + L_3x^2 - L_4x^3)r^3 = \\ &= \frac{r}{k_I^2}(1 - v'^2) \left( c_{s\perp}^2 [(3c_{s\perp}^2 - 1)(1 - v'^2) + (-2 + v'^2 + (2 - 3v'^2))x] l^2 + \right. \\ &\left. + (1 - 2c_{s\perp}^2) [-(3c_{s\perp}^2 - 1)(1 - v'^2) + (-2 - v'^2 + (2 + 3v'^2))x] m^2 \right) \quad (\Gamma.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} W &= (3L_1 + 2L_2x + L_3x^2 + L_2y + 2L_2xy - 3L_4x^2y)r^2 - \\ &- L_1 - L_2y - L_3y^2 + L_4y^3 = \\ &= \frac{1}{k_I^2}(1 - v'^2) \left( c_{s\perp}^2 [(3c_{s\perp}^2 - 1)(1 - v'^2) + (-2 + v'^2 + (2 - 3v'^2))y] l^2 + \right. \\ &\left. + (1 - 2c_{s\perp}^2) [-(3c_{s\perp}^2 - 1)(1 - v'^2) + (-2 - v'^2 + (2 + 3v'^2))y] m^2 \right), \quad (\Gamma.3) \end{aligned}$$

где

$$L_1 = c_{s\perp}^2 (3c_{s\perp}^2 - 1)(1 - v'^2)^3, \quad (\Gamma.4)$$

$$L_2 = c_{s\perp}^2 (1 - v'^2)^2 [2 - 3v'^2 + c_{s\perp}^2 (9v'^2 - 2)], \quad (\Gamma.5)$$

$$L_3 = v'^2 (1 - v'^2) [1 + c_{s\perp}^2 (1 - 3v'^2) + c_{s\perp}^4 (9v'^2 - 4)], \quad (\Gamma.6)$$

$$L_4 = v'^2 (1 - c_{s\perp}^2 v'^2) [2 - v'^2 - c_{s\perp}^2 (2 - 3v'^2)]. \quad (\Gamma.7)$$

Поскольку  $l, m$  - произвольные действительные числа, удобно включить  $1/k_I^2$  в определение  $l, m$ .

Рассмотрим мнимую и действительную части  $\varphi = (\omega + kv')/k$

$$\operatorname{Re} \varphi = v' \frac{r^2 x + y}{1 + r^2}, \quad (\text{Г.8})$$

$$\operatorname{Im} \varphi = v' r \frac{(y - x)}{1 + r^2}. \quad (\text{Г.9})$$

Таким образом должно выполняться  $r = 0$  или  $y = x$ , так как  $\varphi$  принимает действительные значения  $\varphi_{1,2} = v' \pm 1$ . Рассмотрим оба случая.

Вместо получения области всех возможных значений  $\varphi$  из характеристического уравнения, подставим решение  $\varphi_{1,2}$  в само характеристическое уравнение. Из корней  $\varphi$  получаются условия на  $r, y$ , которые затем применяются к характеристическому уравнению. Если в этом случае выполняются уравнения (Г.2) и (Г.3), то корни  $v' \pm 1$  лежат в соответствующей области.

Рассмотрим случай  $r = 0$ . Из (Г.9) можно найти, что корни  $v' \pm 1$  приводят к условию  $y = (v' \pm 1)/v'$ . Поскольку  $y > 1$ , мы должны выбрать  $y = (v' + 1)/v'$ . Подстановка найденных решений в уравнения (Г.2 - Г.3) даст

$$\operatorname{Re} W = 0, \quad (\text{Г.10})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} W &= -L_1 - L_2 \frac{v' + 1}{v'} - L_3 (v' + 1)^2 v'^2 + L_4 (v' + 1)^3 v'^3 = \\ &= \frac{1}{v'} (1 - v'^2) \left( c_{s\perp}^2 [(3c_{s\perp}^2 - 1)(1 - v'^2)v' + (-2 + v'^2 + (2 - 3v'^2))(v' + 1)] l^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1 - 2c_{s\perp}^2) [- (3c_{s\perp}^2 - 1)(1 - v'^2)v' + (-2 - v'^2 + (2 + 3v'^2))(v' + 1)] m^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{Г.11})$$

Из последнего уравнения найдём следующее решение для  $m^2$

$$m^2 = \frac{[(1 - c_{s\perp}^2)(1 + v') + c_{s\perp}^2(1 - v')l^2][2 - v' + c_{s\perp}^2(3v'^2 - 2)]}{(1 - 2c_{s\perp}^2)(1 - v')(-2 - v' + c_{s\perp}^2(3v'^2 + 2))}. \quad (\text{Г.12})$$

Первый множитель в числителе больше нуля и  $1 - 2c_{s\perp}^2 \geq 0$ , потому что для поперечной скорости звука имеем  $1/3 \leq c_{s\perp}^2 \leq 1/2$ . Для второго множителя в числителе можно написать

$$\begin{aligned} [2 - v' + c_{s\perp}^2(3v'^2 - 2)] \Big|_{c_{s\perp}^2=1/3} &= \frac{4}{3}, \\ [2 - v' + c_{s\perp}^2(3v'^2 - 2)] \Big|_{c_{s\perp}^2=1/2} &= \frac{v' + 2}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично, для третьего множителя в знаменателе имеем

$$\begin{aligned} [-2 - v' + c_{s\perp}^2(3v'^2 + 2)] \Big|_{c_{s\perp}^2=1/3} &= -\frac{4}{3}, \\ [-2 - v' + c_{s\perp}^2(3v'^2 + 2)] \Big|_{c_{s\perp}^2=1/2} &= \frac{v' - 2}{2}. \end{aligned}$$

Можно заметить, что всё выражение (Г.12) меньше нуля, а так как  $m$  - действительное число, то получаем противоречие.

Рассмотрим второй случай  $y = x$ , тогда для  $x$  получаем  $x = (v' + 1)/v'$ . Видно, что уравнения (Г.2 - Г.3) при  $r \neq 0$  могут быть представлены в виде

$$\operatorname{Re} W = -G_1(x, y) + G_2(x)r^2 = G_3(x, l, m), \quad (\text{Г.13})$$

$$\operatorname{Im} W = G_1(y, x)r^2 - G_2(y) = G_3(y, l, m), \quad (\text{Г.14})$$

тогда как  $y = x$  дает

$$[-G_1(x, x) + G_2(x)](r^2 + 1) = 0. \quad (\text{Г.15})$$

Замена  $x = (v' + 1)/v'$  не даст нуль, поэтому имеем единственное решение  $r^2 = -1$ , не лежащее в области действительных  $r$ .

Таким образом, было проведено доказательство, что в поперечном случае мода неустойчивости не наблюдается.